ASIGNATURA: METODOLOGÍA MATEMÁTICA
CURSO: Op. 2ci.; 2007-2008
PROFESORA: Inés M. Gómez-Chacón
CARÁCTER/CRÉDITOS: 7,5
DEPARTAMENTO: ÁLGEBRA
FACULTAD DE CC. MATEMÁTICAS, UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

Tema 8: Utilización de los medios tecnológicos en el aprendizaje matemático

Bloque II: Software para trabajar con cálculo simbólico: Derive

Manual Derive

EDICIÓN DE EXPRESIONES.

Para poder efectuar operaciones con DERIVE es necesario tener introducidas en la VENTANA DE ÁLGEBRA aquellas expresiones algebraicas, sobre las cuales podamos operar o efectuar las transformaciones matemáticas deseadas. Para introducir expresiones podemos utilizar varias alternativas:

1º) Situar el cursor en la Barra de Edición e introducir las expresiones que se deseen. Una vez editadas las expresiones se pulsa ENTER

EJERCICIO 1.
Introducir la expresión x^2+2x-1**.**

También podemos definir variables de la forma variable : = valor, es decir, a:=5.
O podemos definir funciones de la forma función(var1,var2,…) : = expresión, como por ejemplo: f(x) : = ln(x^2).
Si queremos definir una función a trozos como el tipo:

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1 & x<0 \\ -x^2+4 & x\geq 0 \end{cases}$$

Necesitamos la sentencia if(condicion,I1,I2), es decir, si se cumple la condición hace I1, sino hace I2, en nuestro caso para definir a función pondríamos:
f(x) : = if(x<0, x^2+1, -x^2+4)

Las operaciones aritméticas elementales se escriben con:
(+) suma; (-) diferencia; (*) producto (el producto se suele sustituir por un espacio); (/) cociente; (^) potenciación.

DERIVE reconoce un conjunto de funciones matemáticas que tienen una sintaxis especial. Algunas de las funciones matemáticas que se suelen utilizar son las siguientes:
Funciones trigonométricas: sin(x), cos(x), tan(x),...

Proyecto de Innovación y Mejora de la Calidad Docente, **2007**.
Vicerrectorado de Innovación y Espacio Europeo de Educación Superior, Universidad Complutense de Madrid.
Contacto: Prof. Inés Gómez-Chacón igomezchacon@mat.ucm.es

Funciones trigonométricas inversas: asin(*x*), acos(*x*), atan(*x*)...
Funciones logarítmicas: ln(*x*), log(*x*,*a*) (log. Neperiano, logaritmo de *x* en base *a*)
Funciones exponenciales y radicales: sqrt(*x*) (raíz cuadrada), exp.(*x*) (exponencial de *x*).
Algunas otras funciones: abs.(*x*) (módulo de *x*), *x*! (factorial de *x*), flor(*x*), parte entera de x, mod.(x) parte decimal de x, Sian(x) signo de x.

También existen algunas funciones predefinidas que sirven para efectuar algunas operaciones matemáticas o utilizar expresiones matemáticas muy comunes:
Algunas de estas funciones son:
IDENTITY_MATRIZ(n): con la que se obtiene una matriz identidad de orden n. Por ejemplo si editamos “identity_matriz(3)” y simplificamos esta expresión se obtiene

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

GRAD(función, variables): con la que se puede obtener el vector gradiente de una “función” dada con las “variables” señaladas. Por ejemplo editando “grad(x^2+y^2,[x,y])” se obtiene al simplificar

$[2 \cdot x, \ 2 \cdot y]$

También debemos considerar la forma en la que se introducen los subíndices en DERIVE. Estos se introducen utilizando el símbolo

x↓11

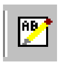
o bien la palabra reservada “sub” x sub 11

que tras simplificar nos da la expresión x_{11}

Para recuperar una expresión pinchamos con el ratón encima de ella con el Botón F3 la recuperamos para editar y con el F4 recuperamos la expresión en paréntesis.

INSERTAR TEXTO EN LA VENTANA DE ÁLGEBRA.
Una de las opciones nuevas que nos permite DERIVE 5 es la posibilidad de introducir comentarios tipo texto dentro de la ventana de álgebra. Para ello podemos utilizar dos procedimientos:

a) o bien utilizar el menú aplicando *Insertar-Objeto de texto:*

b) o bien aplicar el botón de herramientas 
Así por ejemplo podemos introducir el siguiente comentario: “Vamos a derivar la función:”

```
Vamos a derivar la función:
```

$$\#6: \quad \frac{d}{dK} Q(K, 1)$$

Graficas:

1. Abrir ventanas gráficas 2D-Prot.
Para abrir una NUEVA ventana gráfica 2D bastará aplicar la secuencia de menú *Ventana-Nueva Ventana 2D.* Podemos abrir tantas ventanas 2D como deseemos, pero siempre debe existir al menos una ventana de álgebra.

En esta situación si deseamos representar gráficamente por ejemplo la función y=ln(x) tendríamos que situarnos en la ventana de álgebra aplicando la secuencia del menú *Ventana (seleccionando la ventana de álgebra)*

Ahora estaremos en disposición de introducir con la expresión algebraica que define *y=ln(x)*, ahora si queremos volver a la ventana de graficas 2-D, le damos al icono  y una vez en la grafica 2-D le damos al boton  y ya tenemos representada la funcion, si queremos tener una ventanita en la ventada del álgebra con la grafica nos vamos a archivo→ incrustar.

2. Abrir ventanas gráficas 3D-LOT.
Para abrir una NUEVA ventana gráfica 3D bastará aplicar la secuencia de menú *Ventana-Nueva Ventana 3D.* Podemos abrir tantas ventanas 3D como deseemos, pero siempre debe existir al menos una ventana de álgebra.

En esta situación si deseamos representar gráficamente por ejemplo la función de dos variables $z=x^2-y^2$, la igual que antes volvemos a la ventana del álgebra y la definimos en la línea de comandos, para representarla en la ventana 3D solo le tenemos que dar al botón  y una vez en la ventana 3D le damos otra vez al botón .

Operaciones básicas:

Operaciones predefinidas:

- Máximo común divisor de a y b : gcd(a,b)
- Mínimo común múltiplo de a y b : lcm(a,b)
- Máximo/Mínimo entre dos números: Max(a,b)/Min(a,b)
- Función raíz cuadrada: sqrt(x)
- Valor absoluto: abs(x)
- Parte entera de x: floor(x)
- Resto de división entera del numero x entre y: mod(x,y)
- Máximo común divisor entre dos polinomios: poly_gcd(a,b)
- Función media aritmética: average(x1,x2,x3….)
- Varianza de unos números: var(x1,x2,x3…)
- Numero de subconjuntos de p elementos de un conjunto m: (combinaciones) comb(m,p)
- Parte real de un numero complejo z: re(z)
- Parte imaginaria de un numero complejo z: im(z)
- Para más información mirar en al ayuda.

Bloque simplificar:

Derive puede simplificar expresiones numéricas, como por ejemplo : 3*(234^2+2)^3, si lo metemos en la línea de comando y pulsamos = nos simplificara la expresión: 492565496662536
Si en la expresión ponemos un = al final nos devolverá:

3·(234^2 + 2)^3 = 492565496662536

También puede simplificar expresiones algebraicas con este comando tipo:

(x^2-4)/((x-2)(x+3)) le damos al intro y luego al = y nos devuelve

Proyecto de Innovación y Mejora de la Calidad Docente, **2007**.
Vicerrectorado de Innovación y Espacio Europeo de Educación Superior, Universidad Complutense de Madrid.
Contacto: Prof. Inés Gómez-Chacón igomezchacon@mat.ucm.es

$$\frac{x^2 - 4}{(x - 2)\cdot(x + 3)}$$

$$\frac{x + 2}{x + 3}$$

Si intentamos simplificar la expresión ln(35)-9 vemos que el resultado es el mismo, ¿porque? Es porque derive trabaja en modo exacto, axial que si queremos una aproximación de esta expresión podemos utilizar el botón o en el menú, en simplificar le damos a aproximar.

Ahora escribamos sobre la línea de comandos (x+y)^4 y queremos verlo desarrollado, pues nos vamos al menú, simplificar y le damos a expandir. Señalamos las dos varíales, las ponemos como triviales y le damos a expandir.

Ahora veamos que podemos hacer con la herramienta de factorizar que aparece en el menú simplificar:

Si queremos descomponer un número en números primos por ejemplo: 125872, le damos a factorizar y nos devuelve:
2 ^4 * 7867

También podemos factorizar polinomios 4*x^4+3*x^3+ 8*x y nos devuelve:

x·(4*x ^3 + 3·x^2 + 8)

Bloque resolver:

Vamos a resolver una ecuación, como ejemplo vamos a utilizar: x^2+5x+1=0
Una vez la hemos introducido por la ventana algebraica, vamos a resolver→expresión o le damos al botón y no devuelve la solución.

Ahora vamos hacer con la ecuación y^2+x^2-8x+y+6=0 la introducimos y le damos a pero esta vez señalamos y como la variable de resolución.

Ahora si quisiéramos resolver una ecuación que dependa de otra variable, tipo: x+y-5>0 le damos también a pero ahora señalamos algebraicamente.

Vicerrectorado de Innovación y Espacio Europeo de Educación Superior, Universidad Complutense de Madrid.
Contacto: Prof. Inés Gómez-Chacón igomezchacon@mat.ucm.es

Para resolver sistemas, solo hemos de introducir las ecuaciones, seleccionar las dos variables y le damos a resolver.
Ej: 2·x + y - 1 = 0 ; 3·x + 2·y = 2.

Bloque Cálculo:

Primero veamos el calculo de límites, tenemos dos formas, a través del botón o con dando a calculo→limite.
Vamos a introducir la función sen(x)/x y le damos a , queremos calcular el limite cuando x tiende a 0 así que en punto ponemos cero, en variable ponemos x, y en tendiendo ponemos por ambas.
Podemos poner un límite cuando tiende a infinito solo tenemos que señalarlo en la barra de símbolos matemáticos, así que podemos hacer :

$$\frac{x^3 - 3 \cdot x}{2 \cdot x + 1}$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^3 - 3 \cdot x}{2 \cdot x + 1}$$

$$\infty$$

Ahora veamos las derivadas, vamos a introducir por ejemplo exp(cos(x)), para hallar su derivada le damos al botón y nos sale un dialogo donde podemos elegir la variable respecto la que derivar y el orden de la derivada.
Por tanto si tenemos una función de dos variables podemos hallar sus derivadas parciales, utilicemos como ejemplo x^2*y+y^4.

Para las integrales, vamos a utilizar la expresión x*exp(x), y queremos hacer la integral indefinida de esta funcion, para ello utilizamos el botón y dejamos la constante como 0.
Probar ahora hacer la integral de x^2+3·x++/x+1.
Para hacer la integral definida solo tenemos que poner los límites de integración.

Una funcion interesante en Derive es que puede calcular integrales impropias, por ejemplo si queremos integrar entre [0,1] la funcion 1/sqrt(x)(x+1) que vemos que en x=0 no esta acotado, el derive nos la hace.

Antes de calcular sumatorios veamos una funcion definida en Derive que es la funcion vector(),o en el menú de calculo vector vamos a introducir por pantalla la expresión 3*(-2)^i , le damos a vector y con un valor inicial y otro final, nos devolverá la expresión evaluada en esos puntos.
Ahora para calcular sumatorios pongamos como ejemplo i^2, le damos al menú calculo→ ponemos sumas y series, le ponemos el limite superior y el inferior y la marcamos como definida. Ahora si queremos calcular la formula general, debemos poner en el limite inferior 0 y en el limite superior n.

Para calcular el producto es parecido al calculo de sumatorios, vamos hacerlo con el mismo ejemplo, i^2, hacemos lo mismo, marcando el limite superior y el inferior, y luego si queremos el producto de los n primeros enteros marcamos como limite superior n.

Solo nos queda ver como calcular el polinomio de Taylor para funciones, para ello introducimos exp(x), le damos al menú cálculo→polinomios de Taylor y solo tenemos que ajustar el orden y el punto donde centramos el polinomio.

Proyecto de Innovación y Mejora de la Calidad Docente, **2007**.
Vicerrectorado de Innovación y Espacio Europeo de Educación Superior, Universidad Complutense de Madrid.
Contacto: Prof. Inés Gómez-Chacón igomezchacon@mat.ucm.es

Ahora vamos a realizar un ejercicio:

EJEMPLO 4.1.

Dada la función $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 4}$ se pide:

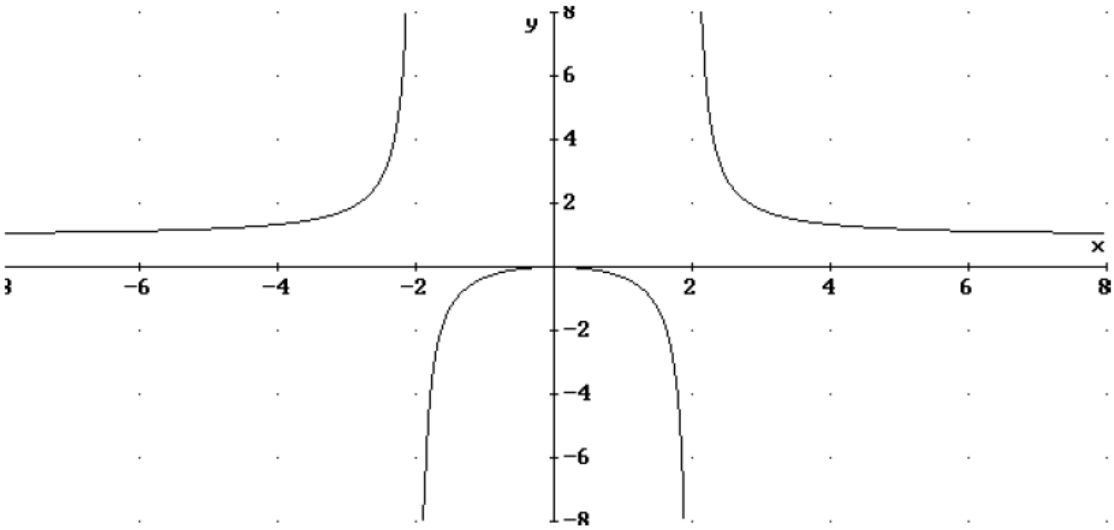
(a) Representar la función gráficamente.
(b) Estudiar el comportamiento de la función: dominio, rango, asíntotas, intervalos de crecimiento, intervalos de concavidad, extremos relativos y puntos de inflexión.

Solución:

(a) Para representar la función, se introduce la expresión "*x^2/(x^2-4)*"

$$\frac{x^2}{x^2 - 4}$$

a continuación aplicamos *Ventana-Nueva ventana 2D*. En la nueva ventana se aplica se obtiene



(b) En este caso, de la gráfica de la función se puede deducir directamente información ie utilizaremos en el análisis de este apartado y que se obtendrá de forma alternativa con estudio analítico correspondiente.

Proyecto de Innovación y Mejora de la Calidad Docente, **2007**.
Vicerrectorado de Innovación y Espacio Europeo de Educación Superior, Universidad Complutense de Madrid.
Contacto: Prof. Inés Gómez-Chacón igomezchacon@mat.ucm.es

- **DOMINIO.**

Para estudiar el dominio se buscan los valores de x para los cuales $f(x)$ es un número real, o, si se utiliza la representación anterior, los valores de x para los cuales "hay gráfica". Obsérvese que en nuestro ejemplo, para $x=2$ y $x=-2$, no existe la función, ya que estos son justamente los valores que anulan el denominador.

- **RANGO.**

Gráficamente el rango de la función es el conjunto de números del eje OY en los que "existe la gráfica". Como puede verse, en este caso el rango de la función es todo el conjunto de números reales menos el intervalo (0,2] es decir en $R\backslash(0,2]$.

- **ASÍNTOTAS.**

Asíntotas verticales. La función, como se ve gráficamente, tiene dos asíntotas verticales, las rectas $x=2$ y $x=-2$. Analíticamente, para determinar las asíntotas verticales estudiamos los siguientes límites $\lim\limits_{x\to -2^+} \frac{x^2}{x^2-4}$ y $\lim\limits_{x\to -2^-} \frac{x^2}{x^2-4}$. Para calcular el primer límite, se edita la expresión "*x^2/(x^2-4)*", se elige el botón de herramientas lim y en la ventana de diálogo correspondiente al cálculo de límites se introducen la *variable* "*x*", el *punto -2* y en el campo "Aproximación desde" se elige la opción *"derecha"*. Finalmente se hace clic en Sí *y* obtenemos

$$\lim_{x\to 2-} \frac{x^2}{(x^2-4)^2}$$

que tras simplificar con = se obtiene

$$\infty$$

Es decir cuando x se aproxima a -2 por la derecha la rama de la gráfica se va $-\infty$. Para calcular el segundo límite se repite el proceso anterior, pero en el campo "Aproximación desde" se elige la opción *"izquierda"* y obtenemos las expresiones

$$\lim_{x\to -2-} \frac{x^2}{x^2-4}$$

$$\infty$$

se observa que cuando los valores de x se aproximan a -2 por la izquierda la rama de la gráfica se va a infinito.

Asíntotas horizontales. Gráficamente se ve que la recta $y=1$ es la única asíntota horizontal de la función. Obsérvese que analíticamente los siguientes límites nos informan de la existencia de dicha asíntota.

$$\lim_{x\to \infty} \frac{x^2}{x^2-4}$$

$$1$$

10
Proyecto de Innovación y Mejora de la Calidad Docente, **2007**.
Vicerrectorado de Innovación y Espacio Europeo de Educación Superior, Universidad Complutense de Madrid.
Contacto: Prof. Inés Gómez-Chacón igomezchacon@mat.ucm.es

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{x^2 - 4}$$

$$1$$

- **INTERVALOS DE CRECIMIENTO /DECRECIMIENTO.**

En la gráfica se observa que en $(-\infty,-2)\cup(-2,0)$ la función es creciente, y en $(0,2)\cup(2,\infty)$ la función es decreciente.

El estudio analítico de los intervalos de crecimiento y decrecimiento utiliza la función derivada. Por tanto, se calcula en primer lugar la derivada (**derivada de primer orden**) de la función. Para ello se edita la expresión "x^2/(x^2-4)", se aplica ∂ y la ventana de diálogo que aparece nos aseguramos de que los campos *"variable"* y ***"orden"*** tengan asignados los valores "x" y **"1"** respectivamente y a continuación se elige la opción Simplificar y se obtiene

$$-\frac{8 \cdot x}{(x^2 - 4)^2}$$

Como la función es creciente en aquellos valores en los que la derivada es positiva, debemos resolver la inecuación $-\frac{8x}{(x^2-4)^2} > 0$. Para ello se introduce la expresión

"-8x/(x^2-4)^2>0" mediante

$$-\frac{8 \cdot x}{(x^2 - 4)^2} > 0$$

se aplica y en la ventana de diálogo se comprueba que los campos "*Método*" y "*Dominio*" tengan asignados las opciones "*Algebraico*" y "*Complejo*" y finalmente se elige la opción Resolver obteniéndose el resultado:

$$x \neq -2 \wedge x < 0$$

Por tanto, los intervalos de crecimiento son $(-\infty,-2)\cup(-2,0)$.

Para determinar los intervalos de decrecimiento se estudian los valores en los que la derivada es negativa. El procedimiento es análogo al anterior: hay que resolver la inecuación $-\frac{8x}{(x^2-4)^2} < 0$.

$$-\frac{8 \cdot x}{(x^2 - 4)^2} < 0$$

$$x \neq 2 \wedge x > 0$$

Los intervalos de decrecimiento son en efecto $(0,2)\cup(2,\infty)$.

12
Proyecto de Innovación y Mejora de la Calidad Docente, **2007**.
Vicerrectorado de Innovación y Espacio Europeo de Educación Superior, Universidad Complutense de Madrid.
Contacto: Prof. Inés Gómez-Chacón igomezchacon@mat.ucm.es

- **EXTREMOS RELATIVOS.**

De la gráfica se concluye que en x=0 la función alcanza un máximo local.
Para determinar analíticamente los puntos críticos de la función se calculan los puntos que anulan la derivada. Por tanto, hay que resolver la ecuación $-\frac{8x}{(x^2-4)^2}=0$, lo cuál se consigue de la forma siguiente:

1. Con se edita la expresión

$$-\frac{8\cdot x}{(x^2-4)^2}=0$$

2. Se elige el botón de herramientas y en la ventana de diálogo se comprueba que los campos "*Método*" y "*Dominio*" tengan asignados las opciones "*Algebraico*" y "*Complejo*" y finalmente se elige la opción Resolver. El resultado es:

$$x=\pm\infty \vee x=0$$

3. El punto crítico es x=0. En este caso es un máximo local pues separa un intervalo de crecimiento (a su izquierda) de un intervalo de decrecimiento (a su derecha).

- **INTERVALOS DE CONCAVIDAD/CONVEXIDAD.**

Si observamos la gráfica de la función podemos concluir que la función es convexa en el conjunto $(-\infty,-2)\cup(2,\infty)$ y cóncava en el intervalo (-2,2).
El estudio analítico de la convexidad de una función utiliza la **segunda** derivada de la función, la cual se obtiene de la siguiente forma:

- Utilizando la expresión que ya teníamos editada anteriormente

$$\frac{x^2}{x^2-4}$$

- Se aplica el botón de herramientas ∂ y en la ventana de diálogo se comprueba que los campos "*variable*" y ***"orden"*** tengan asignados los valores "x" y **"2"** respectivamente y finalmente se elige la opción Simplificar y se obtiene:

$$\frac{8\cdot(3\cdot x^2+4)}{(x^2-4)^3}$$

A continuación se determina el conjunto de los números reales para los que la segunda derivada es positiva resolviendo la inecuación

$$\frac{8\cdot(3\cdot x^2+4)}{(x^2-4)^3}>0$$

El resultado es

$$x < -2 \vee x > 2$$

Y así se obtiene que los intervalos de convexidad son $(-\infty,-2) \cup (2,\infty)$

Análogamente la función es cóncava en aquellos puntos que hacen negativa la segunda derivada para lo que hay que resolver la inecuación

$$\frac{8 \cdot (3 \cdot x^2 + 4)}{(x^2 - 4)^3} < 0$$

El resultado es

$$[-2 < x < 2]$$

Y se obtiene que el intervalo de concavidad de la función es: (-2,2)

- **PUNTOS DE INFLEXION.**

Los puntos de inflexión se encuentran entre aquellos puntos que igualan a cero la derivada segunda. En el ejemplo que nos ocupa, bastará resolver la ecuación

$$\frac{8 \cdot (3 \cdot x^2 + 4)}{(x^2 - 4)^3} = 0$$

Para ello se elige el botón de herramientas y en la ventana de diálogo se comprueba que los campos "*Método*" y "*Dominio*" tengan asignados las opciones "*Algebraico*" y "*Complejo*" y finalmente se elige la opción Resolver. El resultado es:

$$x = -\frac{2 \cdot \sqrt{3} \cdot \hat{\imath}}{3} \vee x = \frac{2 \cdot \sqrt{3} \cdot \hat{\imath}}{3} \vee x = \pm\infty$$

Por consiguiente no existen valores reales que anulen la derivada segunda, y en consecuencia, (tal como se observa en la gráfica) no hay puntos de inflexión.

Obsérvese que *x=-2* y *x=2* separan intervalos de concavidad y convexidad, pero no son puntos de inflexión por que son puntos que no están en el dominio de la función.

Proyecto de Innovación y Mejora de la Calidad Docente, **2007**.
Vicerrectorado de Innovación y Espacio Europeo de Educación Superior, Universidad Complutense de Madrid.
Contacto: Prof. Inés Gómez-Chacón igomezchacon@mat.ucm.es
14