UNA BEBIDA "ESPIRITUOSA"

UTILIZANDO RECURSOS TECNOLÓGICOS COMO DERIVE

Trabajo de un estudiante para profesor
Asignatura Prácticas de Enseñanza
Grupo de Implementación
Facultad de Ciencias Matemáticas
Mayo 2007

Una buena manera de abordar el tema de resolución de sistemas de ecuaciones lineales es desde una perspectiva práctica. Hay que mostrar que un sistema es una herramienta muy útil para recopilar información, de manera que se pueda analizar y obtener conclusiones. No podemos enseñar solo los procesos algorítmicos de resolución sino que hay que hacer ver que en la vida real, muchos problemas se resuelven usando sistemas, lo que implica dos procesos distintos a la simple obtención de soluciones, en primer lugar, la modelización del problema, es decir, cómo pasar de un enunciado, de una situación real a un problema con sistemas de ecuaciones y en segundo lugar, cómo interpretar la solución obtenida. La sesión de ordenadores se presta a trabajar estos dos procesos. Utilizando recursos tecnológicos como Derive podemos relacionar el lenguaje algebraico de los sistemas con su visualización gráfica y aplicarlo a la interpretación de las soluciones de problemas. Una sesión de ordenadores con Derive puede ser muy interesante realizarla al final del capítulo de sistemas de ecuaciones, después de que los alumnos ya hallan trabajado mecánicamente con ellos.

Al principio de la clase hay que explicar en qué consiste la actividad que vamos a realizar: Hasta aquí, hemos visto como resolver sistemas y ahora nos vamos a centrar en como transformar un problema de la vida real en un sistema y como vamos a interpretar las soluciones. Los cálculos se los dejamos a Derive puesto que ya sabemos como se hacen a mano. Hay que comentar algunos ejemplos en campos tan dispares como la biología y la economía en los que sea posible una modelización con sistemas de ecuaciones.

Una vez hecha la introducción, ya podemos empezar a trabajar con Derive. Se plantea el problema práctico, lo modelizamos y luego enseñamos a usar Derive para resolverlo. Por último, interpretamos las soluciones.

Para la modelización, he pensado que era mejor plantear un problema en el que podamos discutir lo que realmente queremos modelizar, cuyo enunciado no sea rígido. En el caso del problema siguiente, el contexto es una fiesta en un instituto donde hay que comprar comida, elaborar una sangría para los padres, etc. Bien, se puede pensar junto con los alumnos cuánto dinero invertir inicialmente, cuanto producto comprar, cuánta bebida elaborar y en qué porcentaje mezclar. Aunque esto no tiene que ver con los sistemas, en mi opinión, puede motivar y llamar la atención del alumno, y de todas formas, es algo que si forma parte del problema. También hay que pensar en un problema con varios apartados que muestren las posibilidades que suceden en las soluciones: Una solución, infinitas, sin solución.

ENUNCIADO DEL PROBLEMA.

Los alumnos de primero de Bachillerato quieren irse de viaje de fin de estudios a los Países Bajos. Por ello están preparando en el instituto un gran evento con magníficas actuaciones y como no, bebida y comida. Para que halla una buena recaudación, podrá acudir toda persona que lo desee. Los de primero piensan que tenemos más experiencia del año pasado así que nos han pedido que les echemos una mano. Lo primero que nos piden es que nos encarguemos de elaborar una bebida "espirituosa" para los padres que acudan, por ejemplo, sangría. Hemos pensado que la sangría la elaboraremos mezclando vino gaseosa y limonada, donde la cantidad de vino sea doble que la cantidad de gaseosa y limón juntas ¿Qué porcentaje de cada componente habrá que mezclar?

x: porcentaje de vino

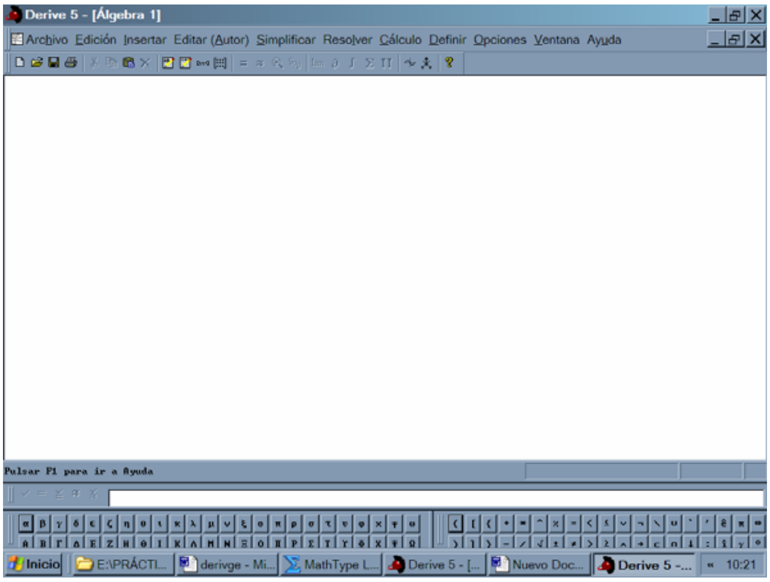
y: porcentaje de gaseosa

z: porcentaje de limón

Modelizamos el problema con dos ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=100 \\ x=2(y+z) \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x+y+z=100 \\ x-2y-2z=0 \end{array}\right\}$$

Ahora lo resolvemos con Derive, ¿cómo?



Podemos optar por dos caminos:

Podemos escribir directamente sobre la línea de comandos:

SOLVE([x+y+z=100, x - 2·y - 2·z = 0], [x, y, z])

(Se explican cada uno de los elementos de esta función)

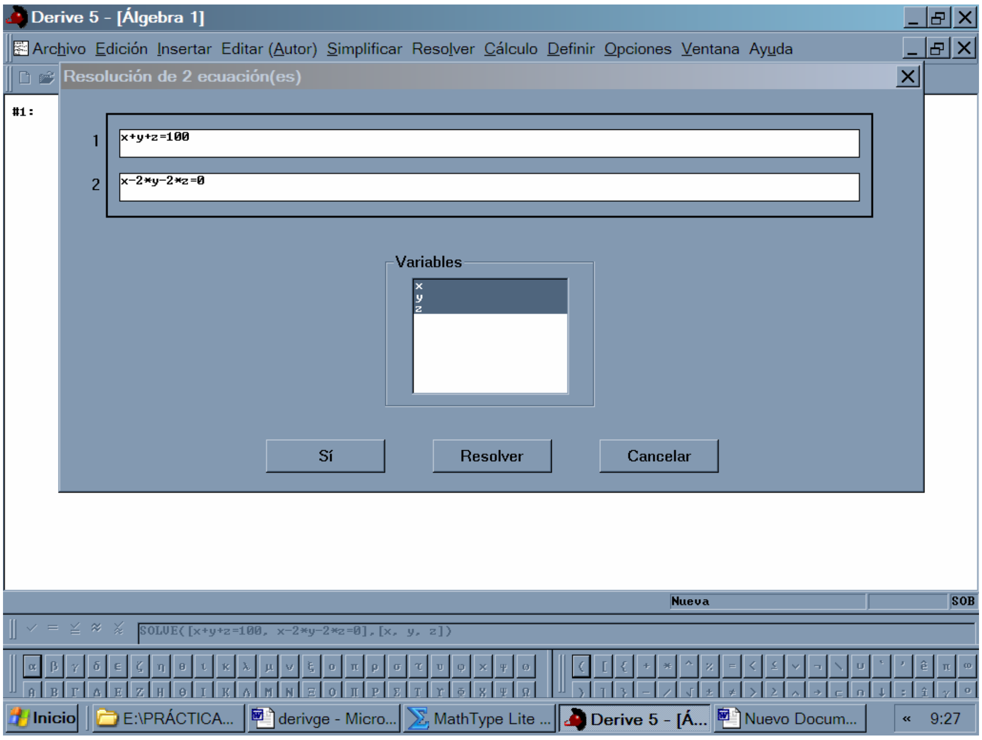
A continuación, hacemos clic en el botón “=” de la barra de herramientas que está sobre la línea de comandos o bien, en el menú *Simplificar* hacemos clic en *Normal*.

Obtenemos:

x = 200/3   3·y + 3·z = 100

Obviamente no hemos obtenido una solución única ya que teníamos solo dos ecuaciones y tres incógnitas.

También puedes ir al menú *Resolver—Sistema* e introducir los datos, elegir las variables sobre las que quieres evaluar el sistema:



En este caso, Derive al no poder encontrar una solución única, expresa la solución en función de una de las variables, por defecto, la z, aunque podemos elegir:

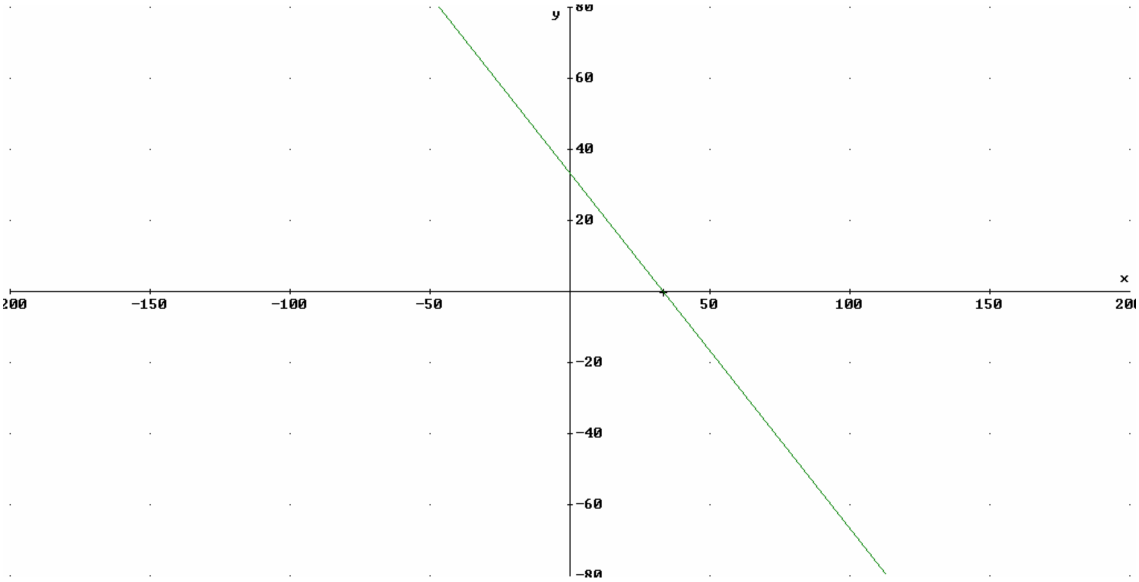
$x = 200/3 \quad y = (100 - 3\cdot z)/3$

Extraemos las siguientes conclusiones:

Por cada 100 litros de sangría que hagamos debe haber 67 litros aproximadamente (redondeando) y los restantes se determinarán en función de lo que añadamos de una de las otras bebidas, que en cualquier caso no pueden superar los 33 litros. Esta función de los porcentajes de la gaseosa con respecto al limón los podemos visualizar mediante una gráfica:

Cómo insertar una gráfica en Derive

En la línea de comandos, elegimos la expresión que queremos representar (hay que estar seguros de que tal como está definida es posible hacerlo) vamos al menú *Insertar* y en este caso *Gráfica 2D* , pulsamos clic en el símbolo de una gráfica sobre los ejes de coordenadas o bien *F4*, o bien vamos de nuevo al menú *Insertar—Gráfica.*



Como y y z son porcentajes debemos observar la recta cuando estas variables son positivas. Vemos como ambas variables están acotadas por 33 aproximadamente y como cuando una variable crece la otra decrece, lo que explica el problema que nos traemos entre manos.

Ahora debemos comprar la bebida. Tenemos dos supermercados cerca que ofrecen las bebidas a 2, 1´50, 2´50 y 1´75, 1 y 3 euros/litro respectivamente. ¿Cuánta bebida vamos a comprar si disponemos de 200 euros para ello?

Podemos plantear un sistema de ecuaciones para obtener una respuesta. ¿Cómo?, primero definimos las incógnitas:

x: nº litros de vino

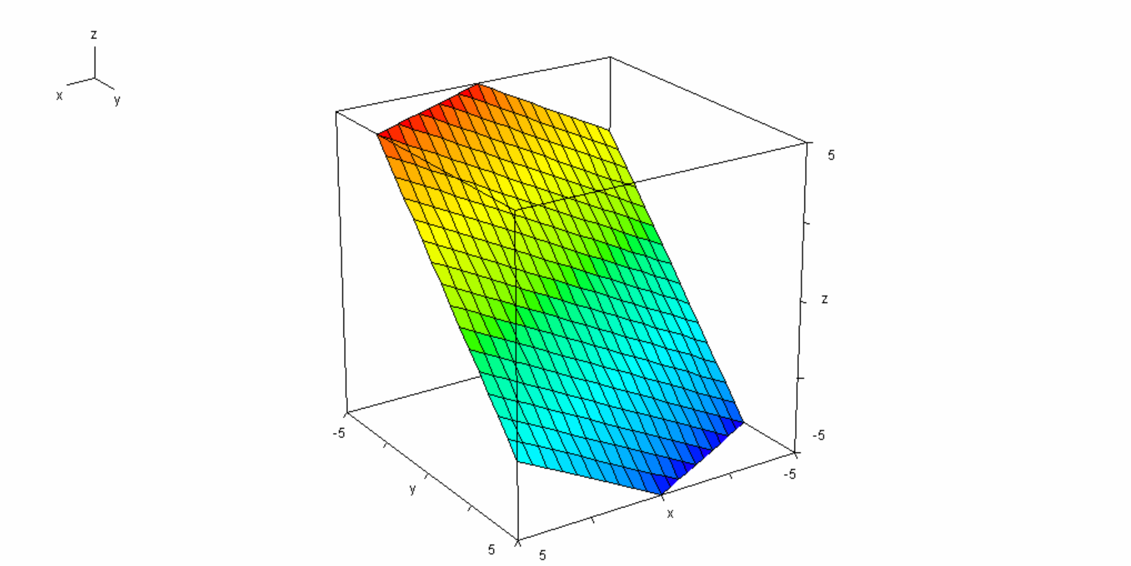
y: litros de gaseosa

z: litros de zumo de limón

Con la información de arriba, podemos consideramos de nuevo la ecuación de las proporciones de la sangría:

$$x = 2(y+z) \Rightarrow x - 2y - 2z = 0$$

Podíamos haber visualizado geométricamente esta condición de proporciones. Para ello introducimos en la línea de comandos SOLVE(x - 2·y - 2·z, [x, y, z]) y luego hacemos clic en "=". Obtenemos como solución el plano de proporciones x - 2·y - 2·z = 0



Los puntos (x,y,z) contenidos en este plano verifican la ecuación de proporciones.

Con los precios de las bebidas:

$$2x + 1,50y + 2,25z = 200$$
$$1,75x + 1y + 3z = 200$$

Así, ya hemos modelizado el problema, lo hemos convertido en un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas:

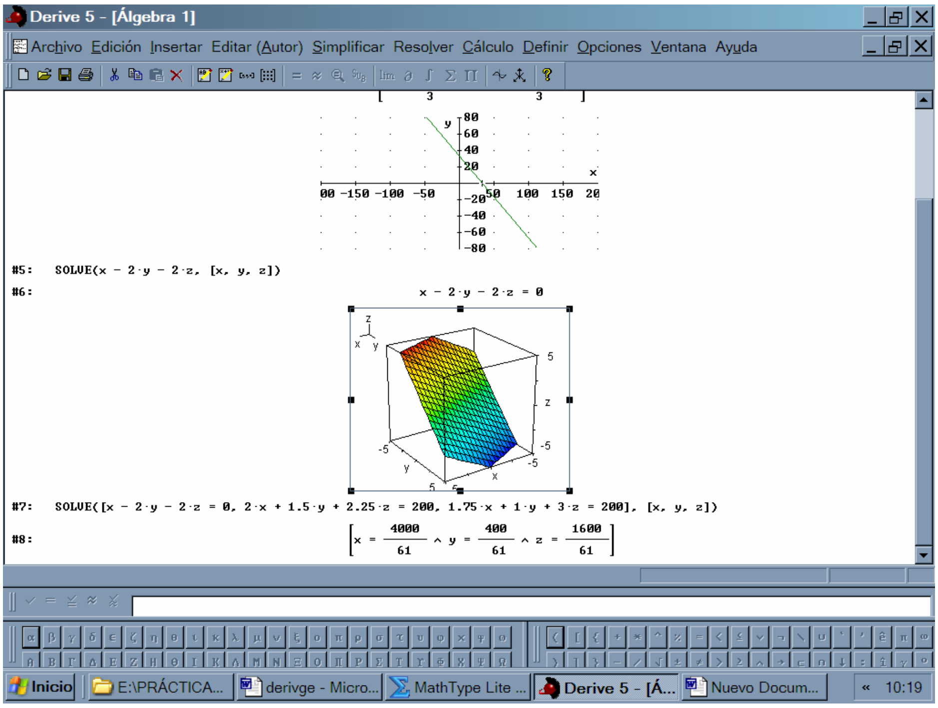
$$\begin{cases} x - 2y - 2z = 0 \\ 2x + 1,50y + 2,25z = 200 \\ 1,75x + 1y + 3z = 200 \end{cases}$$

Resolvemos con Derive:

SOLVE([x - 2·y - 2·z = 0, 2·x + 1.5·y + 2.25·z = 200, 1.75·x + 1·y + 3·z = 200], [x, y, z])

Obtenemos:

x = 4000/61   y = 400/61   z = 1600/61



Es decir, dados los precios y las proporciones de las bebidas, lo mejor que podemos hacer es comprar 65 litros de vino, 7 de gaseosa y 26 de zumo de limón.

Además de todo lo anterior, los alumnos deciden vender camisetas. Han vendido 66 camisetas en total obteniendo euros. Se sabe que había tres tipos de camisetas, a 12 euros, a 8 euros y unas defectuosas que eran la mitad de las que estaban a 8 euros y que se pusieron a 4 euros. ¿Cuántas camisetas de cada tipo vendieron?

x: camisetas a 12 euros

y: camisetas a 8 euros

z: camisetas defectuosas a 4 euros

El sistema es:

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=66 \\ 12x+8y+4z=704 \\ y=2z \end{array}\right\}$$

Hacemos:

SOLVE([x+y+z=66, 12·x + 8·y + 4·z = 680, -y +2*z = 0], [x, y, z])

Y obtenemos la solución única:

[x = 45   y = 14   z = 7]

Por último se realizó una pequeña lotería con tres ganadores. Al último le han tocado 60 euros menos que al segundo. Si al primero le tocaba el 50% del premio y al segundo el 30%.¿Cómo han sido los premios?

Este problema es sencillo, lo podemos modelizar con una ecuación:

x: premio total

$$\frac{20}{100}x = \frac{30}{100}x - 60$$

Igualmente, con el comando SOLVE:

SOLVE(x/5 = 3·x/10 - 60, x) y obtenemos:

x = 600

El resto de la clase se puede dejar a los alumnos que modelicen, resuelvan e interpreten geométricamente con Derive problemas de las hojas de ejercicios del tema o del propio libro.

Vicerrectorado de Innovación y Espacio Europeo de Educación Superior, Universidad Complutense de Madrid. **Contacto**:
Prof. Inés Gómez-Chacón igomezchacon@mat.ucm.es