EL JOYERO
USO DEL DERIVE EN SISTEMAS DE ECUACIONES

Trabajo de un profesor en formación
Prácticas de Enseñanza
Grupo de Implementación
Facultad de Ciencias Matemáticas
Mayo 2007

Introducción

Los sistemas de ecuaciones aparecen en cada curso de Matemáticas de manera inevitable. El conocer los métodos de resolución de éstos parece ser muy importante y así, los alumnos están obligados a saberlos manejar. Pero, ¿no os habéis preguntado alguna vez por qué?, ¿qué nos aportan los sistemas de ecuaciones a nuestras vidas? Estoy segura que nadie se pone a contar cabezas y patas de conejos y gallinas en un corral con la intención de que averigüemos cuántos hay de cada especie simplemente para comprobar que somos capaces de resolver ecuaciones. No es un problema que tengamos que resolver en un día de diario cualquiera.

Nos vamos a ayudar del Derive para comprobar visualmente, o convencernos de lo que nos aportan estos sistemas de ecuaciones, pues una imagen vale más que mil palabras.

Aunque os parezca mentira, los sistemas de ecuaciones son utilizados en muchos trabajos, son útiles en muchos campos y nos sirven para encontrar solución a problemas de la vida real que no sabríamos resolver sin modelizar previamente el problema a lenguaje Matemático. Esto es lo más difícil de hacer en Matemáticas. No penséis que únicamente la Física, Economía o Tecnología utilizan estos sistemas. Incluso en el Arte hay Matemáticas.

Esta clase que vamos a dar está destinada a que veáis, muy por encima, unos ejemplos de los sistemas de ecuaciones en otros campos diferentes a las Matemáticas, quiero decir, más cercano a cada uno de vosotros. Vamos a proponer dos ejercicios, del más simple al menos simple donde veréis, con ayuda del Derive, estos ejemplos. Así que imaginad que sois, por un momento, astrónomos físicos o joyeros.

Esta actividad está diseñado para que cada alumno en su ordenador vaya siguiendo las indicaciones que muestran los ejercicios y rellenando un cuestionario, formado por las preguntas que aquí se formulan, que será comentado al final de la sesión por todos los alumnos. Si la actividad parece muy extensa para la clase, otra modalidad sería disponer de varios grupos donde cada uno se dedicara exclusivamente a uno de los problemas y sería conveniente disponer de otra sesión para que fueran ellos los que expusieran su actividad al resto de los compañeros animándoles, a los demás, a formular preguntas y dudas. La actividad final está pensada para que el alumno tenga una visión geométrica de intersecciones entre cuerpos geométricos, aunque se necesiten conocimientos superiores, solo nos centramos en las intersecciones de forma visual y al nivel propio de bachillerato.

Joyero:

Un cliente quiere una joya exclusiva. Quiere un colgante en forma de corazón, y que lleve engarzadas cuatro diamantes en las intersecciones de las funciones que forman el corazón. Estas son las siguientes:

$f(x)=-x^2+2x$

$g(x)=-x^2-2x$

$h(x)=x-2$

$j(x)=-x-2$

Luego, el problema del joyero es encontrar dichos puntos, pues solo así el cliente estará conforme con el trabajo.

Pasos a seguir:

1º) El primer punto para colocar el diamante estará entre f(x) y g(x). ¿Qué se te ocurre hacer para encontrar dicho punto?
-¿Qué grados tienen la función f(x) y g(x)?
-¿En cuántos puntos pueden cortarse estas funciones como mucho?

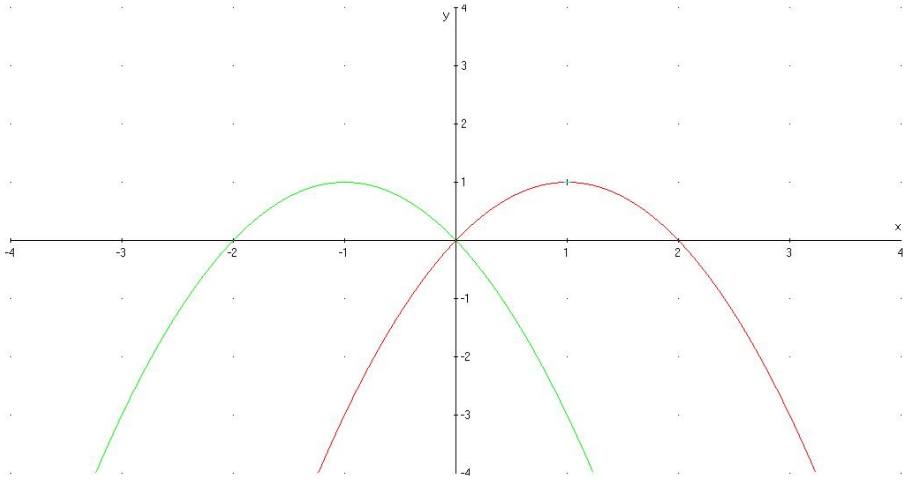
SOLUCION:

Las funciones f(x) y g(x) son parábolas pues son polinomios de grado dos. Entre ellas solo pueden cortarse en un punto o ser coincidentes, como podemos observar en el dibujo inferior.

Para encontrar dicho punto debemos resolver el sistema formado por las ecuaciones siguientes: $y=-x^2+2x$

$y=-x^2-2x$

Para ello escribe entre corchetes las ecuaciones separándolas por una coma:
$[y=-x^2+2x, y=-x^2-2x]$
Seguidamente da al enter. Utiliza el comando de Resolver expresión. Así obtenemos que dichas ecuaciones se cortan en x=0, luego para hallar la coordenada "y", se sustituye en una de las dos ecuaciones y obtenemos y=0. Luego el punto de intersección de ambas gráficas es el (0,0) , como se muestra en la figura siguiente:



Para llegar a dibujar este gráfico, abre una ventana de 2D, escribe f(x):=$-x^2+2x$ y dale al enter. Después utiliza el comando de Representar. Haz lo mismo con g(x).

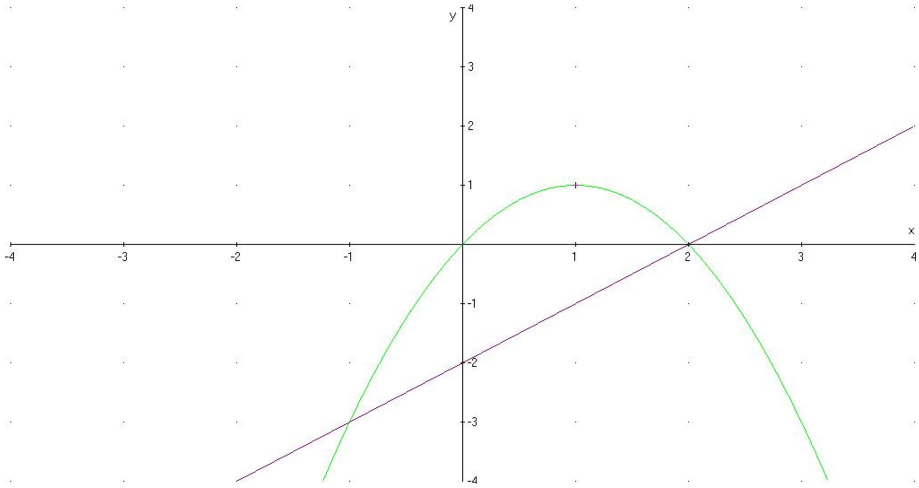
2º) El segundo punto para colocar el diamante estará entre f(x) y h(x)
-¿Qué grados tienen la función f(x) y h(x)?
-¿En cuántos puntos pueden cortarse estas funciones como mucho?

SOLUCION:

La función f(x) es una parábola pues es un polinomio de grado dos. La función h(x) es una recta al ser un polinomio de grado uno. Ambas se pueden cortar en uno o dos puntos.
Para encontrar el punto de intersección que debe encontrar el joyero, debemos resolver el sistema formado por las ecuaciones siguientes: $y=-x^2+2x$
$y= x-2$

Para ello escribe entre corchetes las ecuaciones separándolas por una coma:
[$y=-x^2+2x$, $y= x-2$]

Seguidamente da al enter. Utiliza el comando de Resolver expresión y marca las variables "x" e "y". Así obtenemos que dichas ecuaciones se cortan en (x=2, y=0) y (x = -1 y = -3). Luego los puntos de intersección de ambas gráficas son el (2,0) y el (-1,-3) como se muestra en la figura siguiente:



Pero nosotros solo nos quedaremos con el (2,0), pues es el que nos da la forma del corazón deseado. Para llegar a dibujar este gráfico, abre una ventana de 2D, escribe f(x):=-x^2+2x y dale al enter. Después utiliza el comando de Representar. Haz lo mismo con h(x).

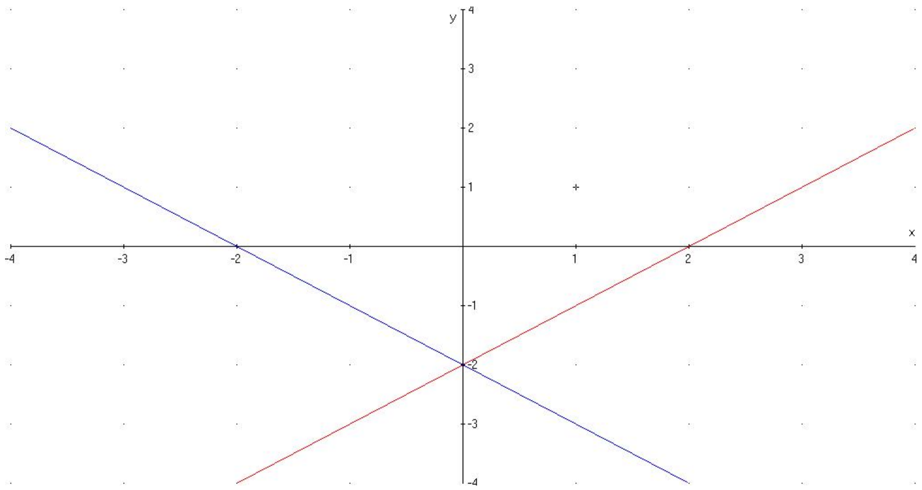
3º) El tercer punto para colocar el diamante estará entre h(x) y j(x)
-¿Qué grados tienen la función h(x) y j(x)?
-¿En cuántos puntos pueden cortarse estas funciones como mucho?

SOLUCION

Las funciones h(x) y j(x) son rectas, pues son polinomios de grado uno. Se pueden llegar a cortar como mucho en un punto.

Para encontrar dicho punto debemos resolver el sistema formado por las ecuaciones siguientes: y=x-2
y=-x-2

Para ello escribe entre corchetes las ecuaciones separándolas por una coma:
[y=x-2, y=-x-2] Seguidamente da al enter. Utiliza el comando de Resolver expresión y marca las variables x e y. Así obtenemos que dichas ecuaciones se cortan en x=0 y=-2. Luego la intersección de estas dos rectas es el punto (0,2) como se muestra en la figura siguiente:



4º) El cuarto punto para colocar el diamante estará entre j(x) y g(x)
-¿Qué grados tienen la función j(x) y g(x)?
-¿En cuántos puntos pueden cortarse estas funciones como mucho?

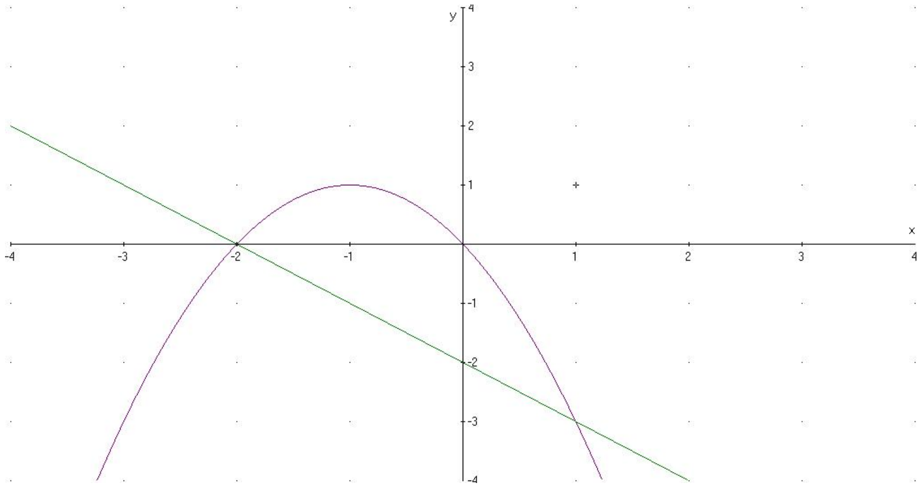
SOLUCION:

La función g(x) es una parábola pues es un polinomio de grado dos. La función j(x) es una recta al ser un polinomio de grado uno, Ambas se pueden cortar en uno o dos puntos.
Para encontrar el punto de intersección que debe encontrar el joyero, debemos resolver el sistema formado por las ecuaciones siguientes: $y=-x^2-2x$

$y=-x-2$

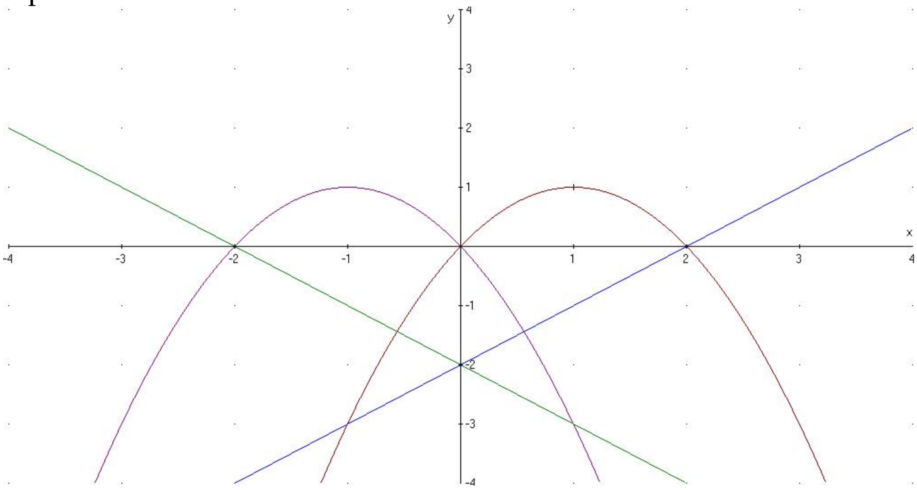
Para ello escribe entre corchetes las ecuaciones separándolas por una coma:
$[y=-x^2-2x, y= -x-2]$

Seguidamente da al enter. Utiliza el comando de Resolver expresión y marca las variables x e y. Así obtenemos que dichas ecuaciones se cortan en (x=1, y=-3) y (x = -2 y =0). Luego los puntos de intersección de ambas gráficas son el (1,-3) y el (-2,0) como se muestra en la figura siguiente:



Pero nosotros solo nos quedaremos con el (-2,0), pues es el que nos da la forma del corazón deseado.
Para llegar a dibujar este gráfico, abre una ventana de 2D, escribe $g(x):=-x^2-2x$ y dale al enter. Después utiliza el comando de Representar. Haz lo mismo con j(x).

Nota: Quizás, antes de empezar a calcular los puntos de intersección fuera conveniente el que representaran con el Derive todas las funciones.



Así el alumno se hace una idea global del ejercicio.

Ahora ya, simplemente con determinar los ejes de coordenadas, ¡el joyero ya sabe donde incrustar los diamantes!

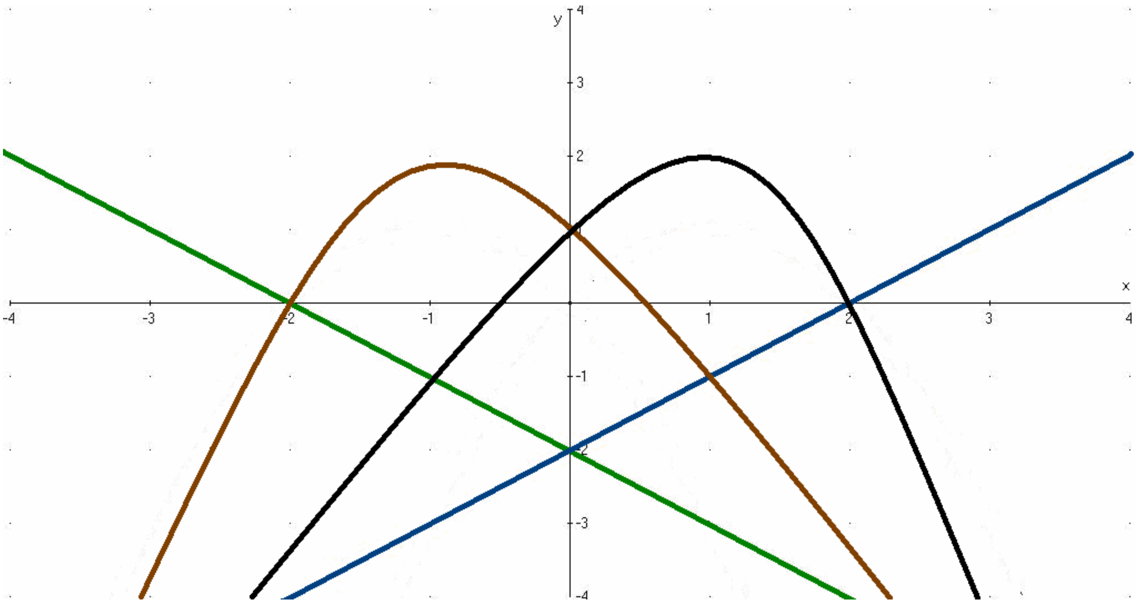
¿Te atreves a mejorar el dibujo del corazón? Quiero que las parábolas se corten en el punto (0,1), ¿cómo tienen que ser estas parábolas? Intenta encontrar primero una de ellas imponiendo que pase por el punto (2,0) y después utiliza que son simétricas.

Solución:

Imponemos que $f(x)= -ax^2+bx+c$, (pues se trata de una parábola con las ramas hacia abajo), cumpla:
f(0)=1, es decir c=1
f(2)=0, es decir 4a-2b+c=0
f(1)=2, es decir a-b+c=2

Para ello escribe entre corchetes las ecuaciones separándolas por una coma:
[4a-2b+1=0, a-b+1=2]

Seguidamente da al enter. Utiliza el comando de Resolver expresión y marca las variables "a" e "b". Obtenemos las soluciones:
(a=3/2, b=5/2) Así la ecuación de la nueva parábola es
$f(x)= (-3/2)x^2+(5/2)x+1$. Utilizando la simetría de las parábolas que forman el corazón obtenemos que la otra ecuación de la otra parábola es:
$g(x)= (-3/2)x^2-(5/2)x+1$.



Para llegar a dibujar este gráfico, abre una ventana de 2D, escribe
$f(x)= (-3/2)x^2+(5/2)x+1$ y dale al enter. Después utiliza el comando de Representar. Haz lo mismo con g(x).