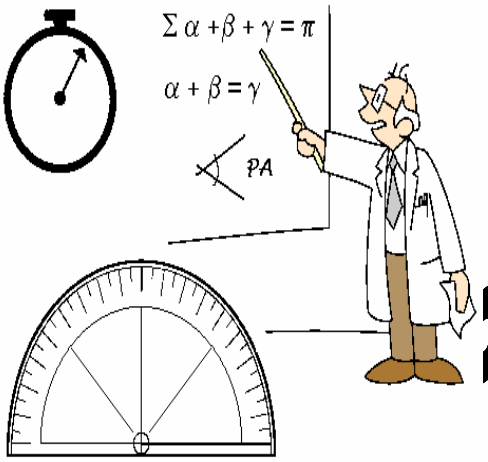


MATEMÁTICAS APLICADAS... EN LA ACTUACIÓN POLICIAL

Trabajo de un estudiante para profesor
Asignatura Prácticas de Enseñanza
Grupo de Implementación
Facultad de Ciencias Matemáticas
Mayo 2007

INTRODUCCIÓN: MATEMÁTICAS Y ACTUACIÓN POLICIAL (10 min. aprox.)

La clase que vamos a dar hoy va a ser "un poco diferente" por varios motivos:

- El 1º y mas evidente; hemos cambiado el lugar de trabajo (hemos cambiado la pizarra por los ordenadores).
- El 2º : va a ser una clase interactiva, lo cuál implica que, en cierto modo, vais a ser vosotros los que marquéis el desarrollo de la misma.
- El 3º y más importante: con esta actividad vais a ser vosotros mismos (y no yo) los que juzguéis y lleguéis a convenceros y a valorar la gran importancia de las matemáticas en el mundo que nos rodea, y es que, aunque desgraciadamente hoy en día siguen mostrándonos a los matemáticos como "bichos raros", lo cierto es que las matemáticas están presentes en todas y cada una de las actividades que realizamos habitualmente, desde algo tan sencillo como es ir de compras hasta temas "tan delicados" como el pago de facturas...Y no solo eso, sino que el alcance de este universo de nº's va más allá: por todos es conocida la gran aportación que hacen a otros campos como la física ("la eterna alianza"), la Biología (en el estudio de comportamientos metabólicos), en Medicina (enfermedades cardiacas o actividad cerebral), Economía (estudio de las rentas)...Pero hay un campo, "*el gran desconocido*" me atrevería yo a calificar, en el que estoy convencida nunca habéis pensado que requiere, (y como veremos de forma esencial) del aporte de los razonamientos y herramientas de las matemáticas: la **INVESTIGACION Y ACTUACIÓN POLICIAL**.

Diversas teorías que a nivel general la sociedad podría calificar de "incomprensibles" son usadas en la investigación policial como un elemente más que aporta luz a las causas y soluciones del problema (asesinatos, desaparición, robo, atraco...) Y es que, los mismo números que usamos cada día para predecir el tiempo, la hora, al usar dinero....también los usamos para analizar el crimen, para buscar pautas, para predecir comportamientos. Con los números podemos resolver los mayores misterios que se nos plantean y, por tanto, desde esta perspectiva no sería descabellado ver a los matemáticos como héroes y a las matemáticas como protagonistas en la investigación policial.

¿Hasta qué punto es viable esta fusión del trabajo policial con la ciencias matemáticas?-os estaréis preguntando-. Pues bien, lo cierto es que ambos se complementan a la perfección gracias a que cada parte afronta los casos desde su perspectiva (los policías se centran en la búsqueda de evidencias y en la ejecución de la acción, mientras que los matemáticos en como aplicar a los casos todo un mundo de ecuaciones y probabilidades) pero ambos confluyen en un objetivo común: la búsqueda de la verdad.

No obstante, no debemos olvidar que esta colaboración implica homogeneizar el lenguaje para llegar a un entendimiento: los agentes policías deben plantear el problema de forma "simple" para adoptar un modelo matemático que permita encontrar la solución, y, por otro lado, el matemático deberá hacer comprensible la posible solución para que esta pueda ser trasladada a la realidad. Este es el mismo proceso que permite que diversas disciplinas que incluyen a matemáticos funcionen en campos tan diversos como la Biología, la Medicina o la Economía, obteniéndose unos resultados espectaculares.

En cualquier caso: la idea que se nos debe grabar a fuego es que las matemáticas en general (y los números en particular) son el instrumento de investigación más preciso. De hecho, numerosas series como por ejemplo NUMB3ERS ya se han hecho eco de esta fuerte conexión: las matemáticas relevan a la medicina forense en cuanto a su protagonismo en investigación.

Ahora bien: ¿qué matemáticas son las que se usan en este sentido? "fijo que unas matemáticas incomprensibles, de esas que caracterizan la imagen de matemático loco a la que nos tienen acostumbrados"-estará rondando por la cabeza de muchos de vosotros...

Pues nada mas lejos de la realidad!! Cierto es que en la actualidad la policía cuenta con los métodos e instrumentos más sofisticados del momento a su plena disposición (la relevancia de los casos que tratan no requiere menos!)Pero igualmente cierto es que algo tan "simple" como sumas, restas, raíces cuadradas, ecuaciones...y en general: unas matemáticas a vuestro nivel, oportunamente combinadas y ,por supuesto, con la ayuda de material de trabajo (en particular de ordenadores) de ultima tecnología, pueden ser la clave para, por ejemplo, llegar a saber el día , el lugar y la hora en el que se va a cometer un delito. ¿Sorprendidos, no? No es para menos, ya que contrariamente a vuestros pensamientos, las matemáticas que día a día criticáis como inútiles son la salvación en casos de extrema necesidad.

En concreto: vamos a centrarnos en el papel que juegan los polinomios, ecuaciones y sistemas de ecuaciones, en un proceso de investigación criminal. Para ello vamos a proponer una actividad que intenta simular (por supuesto: a vuestro nivel y admitiendo un montón de simplificaciones) un caso real, donde las pistas e informaciones proporcionadas, con la ayuda de un programa adaptado (el Derive) y sobre todo: una buena interpretación de los resultados, son la clave para llegar a cerrar el caso.

Empecemos pues con la actividad:

NOTA:

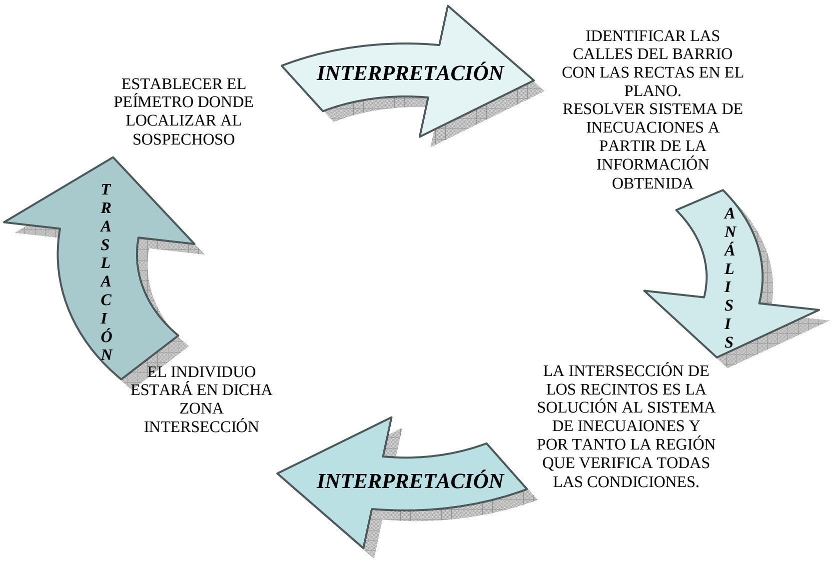
El desarrollo de esta actividad presupone que los alumnos tienen conocimientos básicos sobre inecuaciones, resolución de ecuaciones y sistemas de ecuaciones, así como las nociones sobre polinomios (y gráficas de funciones en general) relativas a sus ceros, máximos y mínimos.

Asimismo, se da por supuesto durante todo el desarrollo, que los alumnos disponen de un manejo elemental del programa Derive.

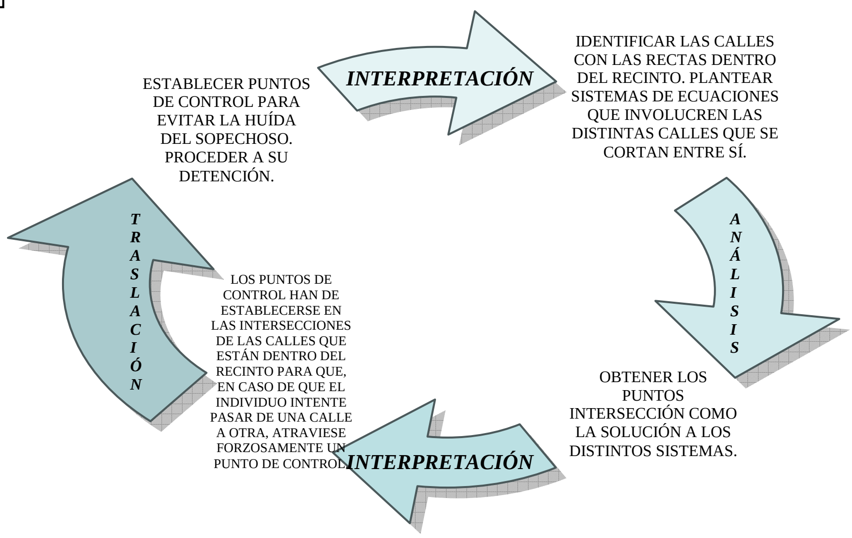
La forma en la que estaría estructurada la clase queda reflejada en el tipo y el color de la fuente que usaré durante el ejercicio: en **negrita** los enunciados que se impartirían a los alumnos y en **gris** el desarrollo de la clase, enfocado a ser un trabajo que se haga **simultáneamente con ellos.**

Vicerrectorado de Innovación y Espacio Europeo de Educación Superior, Universidad Complutense de Madrid. **Contacto**:
Prof. Inés Gómez-Chacón igomezchacon@mat.ucm.es

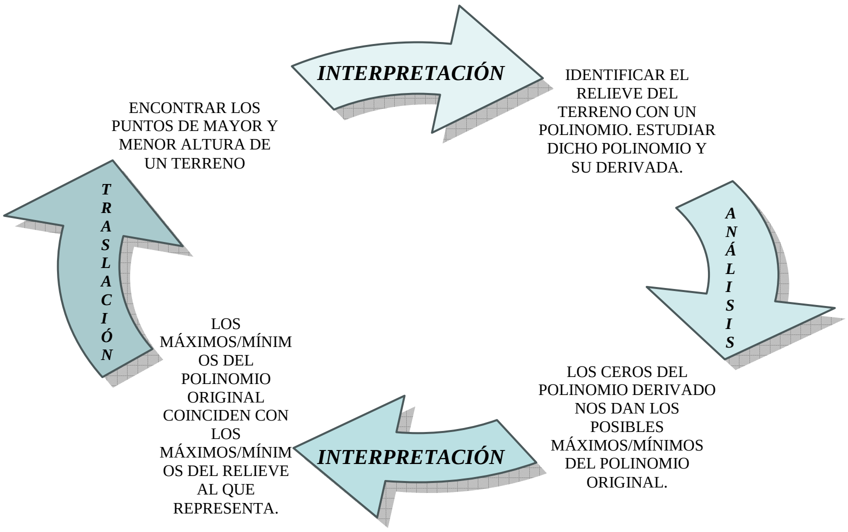
ACTIVIDAD 1



ACTIVIDAD 2



ACTIVIDAD 3



ACTIVIDAD (50 min. .aprox.)

Son las 10.00h de la mañana y suena el teléfono de la comisaría: un ciudadano dice haber visto un individuo sospechoso cuya descripción coincide con la de un criminal en busca y captura. Inmediatamente, se procede al despliegue de un gran número de policías por la zona.

- OBJETIVO Nº1: ESTABLECER PERÍMETRO DONDE LOCALIZAR AL SOSPECHOSO

Capturar al individuo sin establecer unos límites físicos donde poder localizarlo es completamente ineficiente. El barrio es una zona de actuación demasiado grande como para cubrirlo por completo con presencia policial, y cercar unas pocas zonas resultaría muy arriesgado…Resulta por tanto imprescindible detectar el foco de actuación.

Para ello, los policías interrogan a aquellos ciudadanos que aseguran haberlo visto en la última media hora.

Con los datos recopilados y teniendo en cuenta que la identificación de las calles con las rectas que conforman el plano del barrio es la siguiente:

- **calle 1** → $y = 0.11x + 13$
- **calle 2** → $y = x + 11$
- **calle 3** → $y = \frac{4x - 28}{3}$
- **calle 4** → $y = -\frac{5}{4}x + 5$

la información de la que disponemos se concreta en : durante la última media hora, el sospechoso ha sido visto en las zonas:

- **por debajo de la calle 1**
- **a la derecha de la calle 2**
- **a la izquierda de la calle 3**
- **por encima de la calle 4**

a) Identifica la zona de actuación del individuo.

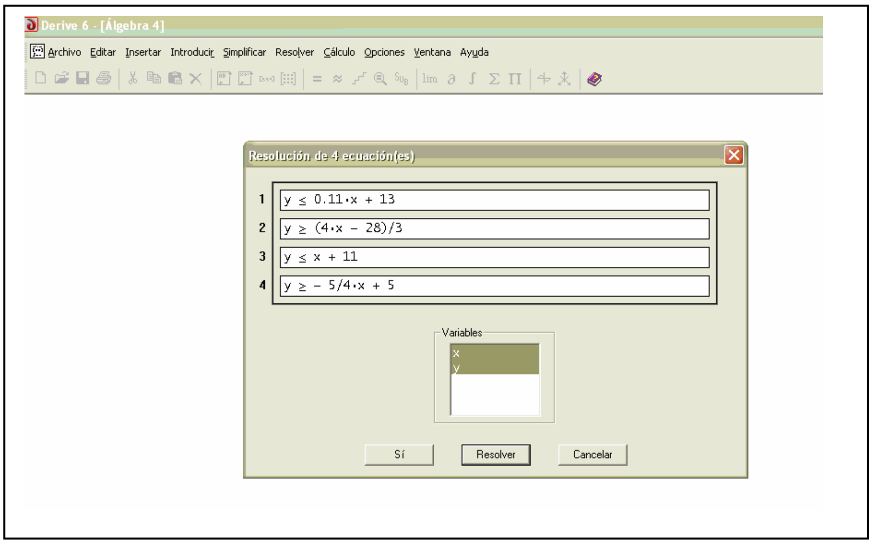
❖ **RESOLUCION**

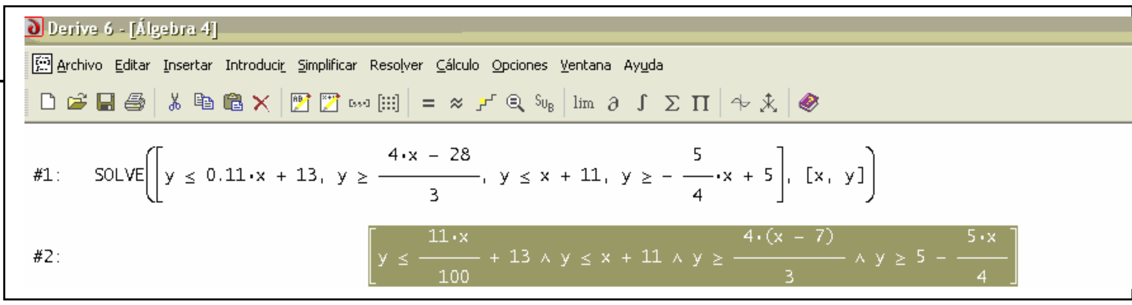
Lo primero que hacemos es "transcribir" la información que nos dan al lenguaje matemático. Parece natural que, al estar hablando de zonas o regiones, hagamos uso de las inecuaciones.

Por tanto, leemos de nuevo el enunciado y lo vamos interpretando:

$$\begin{cases}\text{por debajo de la calle 1}\\ \text{a la derecha de la calle 2}\\ \text{a la izquierda de la calle 3}\\ \text{por encima de la calle 4}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \le 0.11x + 13 \\ y \le x + 11 \\ y \ge \dfrac{4x-28}{3} \\ y \ge -\dfrac{5}{4}x + 5 \end{cases}$$

Una vez hemos planteado el sistema de inecuaciones, lo resolvemos con derive:

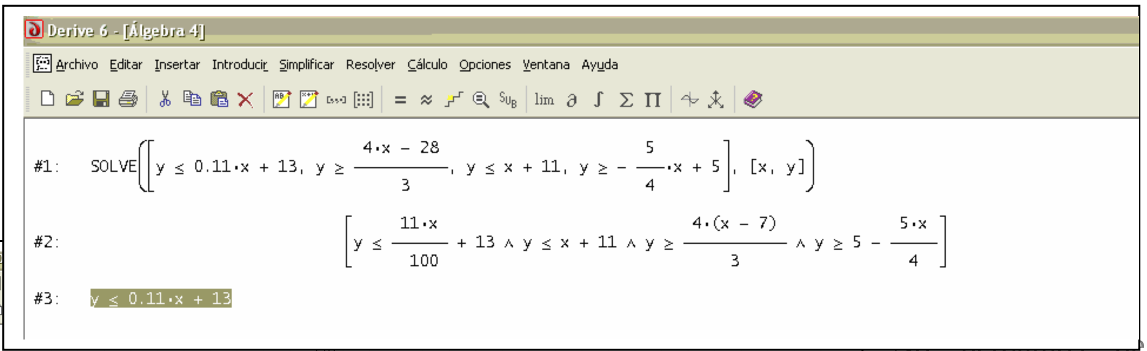


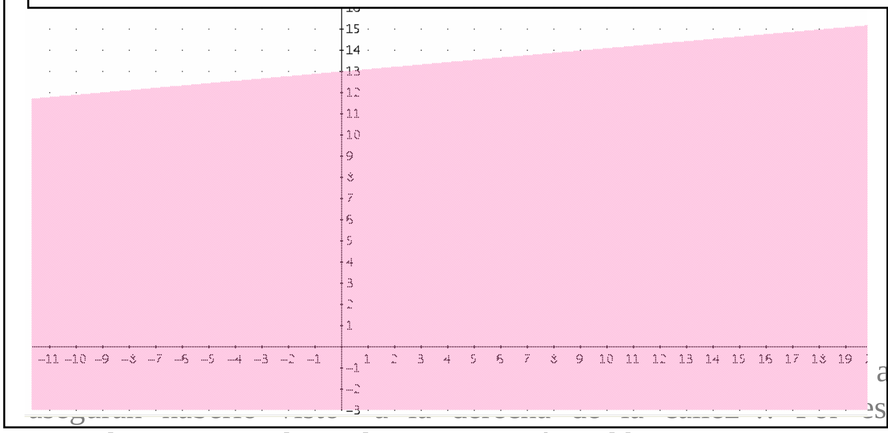


tacto:

Pero lo que a nosotros realmente nos interesa es poder visualizarlo; para ello:

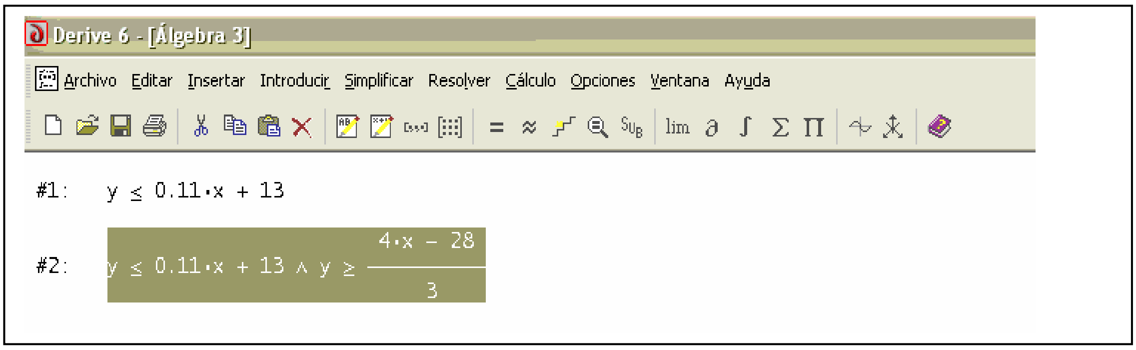
- Metemos la 1ª inecuación y hacemos un plot, obteniendo como resultado la región:

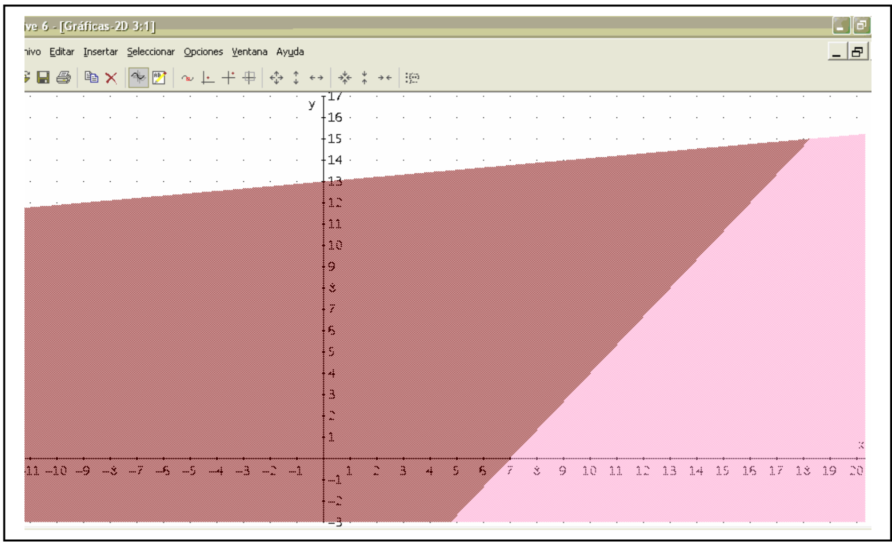




No perdamos de vista la interpretación de esta región coloreada: es una de las zonas donde se cree haber visto al sospechoso en la última media hora.

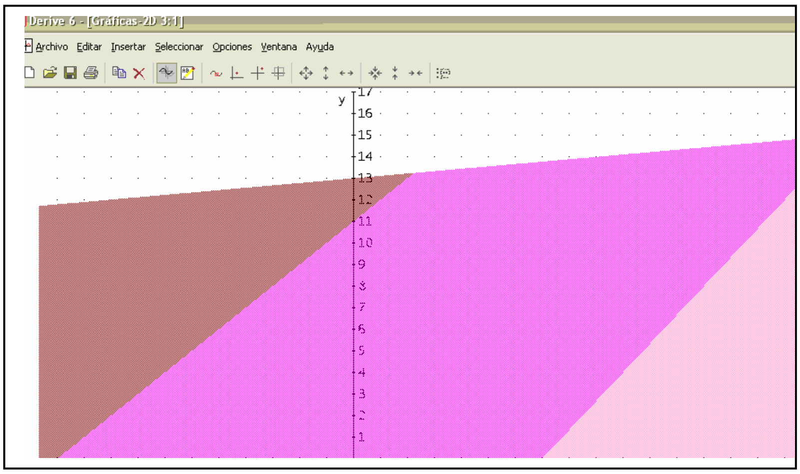
… aportada por otras personas que … eso mismo, repetimos el mismo procedimiento: añadimos la 2ª inecuación y dibujamos su correspondiente región (conviene hacerlo en otro color):

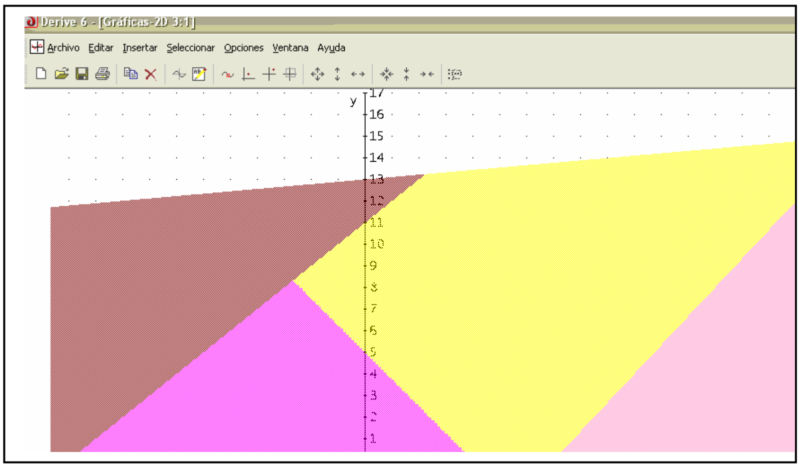




Observamos que en esta ocasión hemos superpuesto el plot al anterior. ¿Por qué? Porque lo que buscamos es una zona común que verifique las 4 condiciones que tenemos; ed: una región que, por decirlo de algún modo, concentre más probabilidad de contener al individuo.

ntes, superponiendo las regiones





Llegados a este punto, ya no disponemos de más información con la que trabajar, así que parece que en principio, con los datos que tenemos, deberíamos ser capaces de concluir.

¿Podemos hacerlo?¡Pues claro! La región común a los 4 semiplanos que hemos dibujado (ed: aquella coloreada simultáneamente por los 4 colores) resulta ser aquella en la que todas las personas encuestadas coinciden en haber visto al sospechoso. Así, un buen foco para centrar la localización del individuo lo constituye este recinto intersección (en este caso, el se color amarillo).

- OBJETIVO Nº2: LOCALIZAR AL SOSPECHOSO Y PROCEDER A SU DETENCIÓN

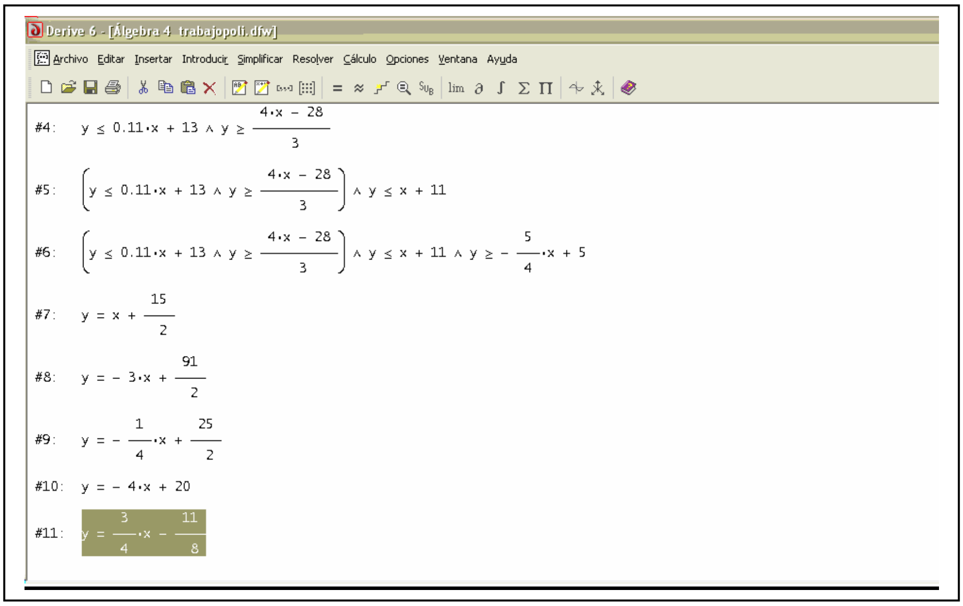
Cercada la zona de actuación, se precisa establecer de forma rápida y efectiva unos "puntos de control" para atraparle. Para ello, se identifican las calles que conforman dicha zona. El plano que se consulta ofrece una visión de las calles como un entramado de rectas de ecuaciones:

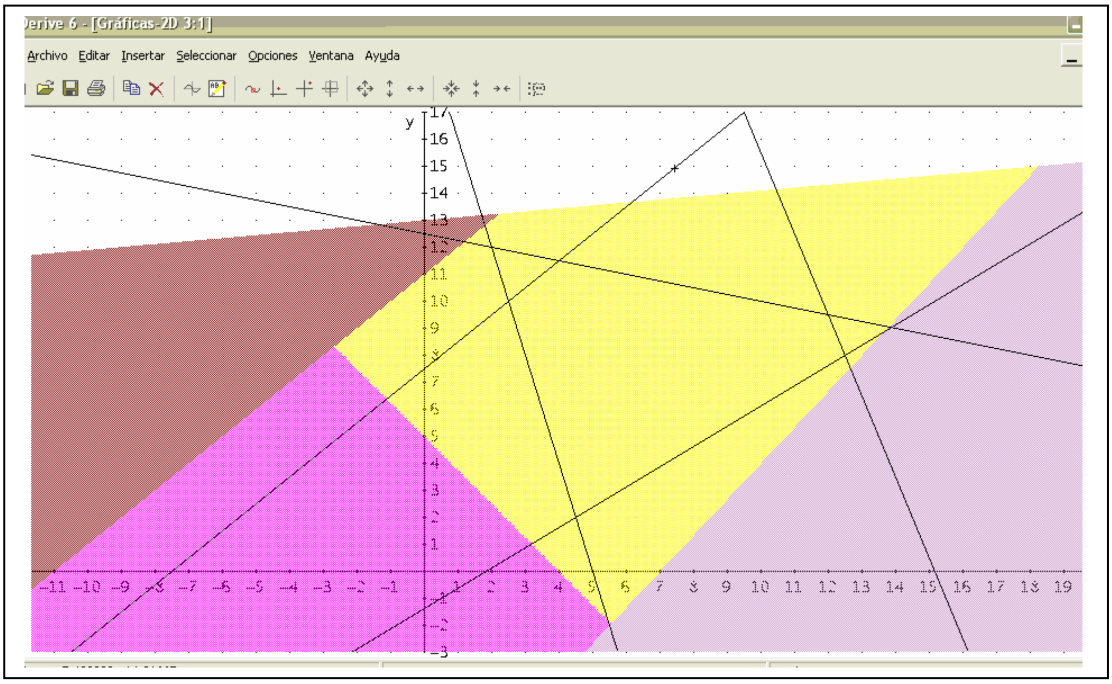
$$\begin{cases} r_1: y = x + \dfrac{15}{2} \\ r_2: y = -3x + \dfrac{91}{2} \\ r_3: y = -\dfrac{1}{4}x + \dfrac{25}{2} \\ r_4: y = -4x + 20 \\ r_5: y = \dfrac{3}{4}x - \dfrac{11}{8} \end{cases}$$

a) ¿En qué puntos concretos hay que establecer los puntos de control?
b) Si se sospecha que el individuo está situado en el punto P(4,4) , ¿qué policías serán los que deben proceder a su identificación? ¿Cuál está más cerca?

- **RESOLUCION**

Antes de nada, dibujamos el "entramado" de calles del que nos habla el enunciado para así poder visualizar la información que nos dan sobre el plano y trabajar más cómodamente sobre él: metemos una a una las ecuaciones de las rectas que identifican a las calles y las dibujamos en la misma ventana en la que estamos trabajando. (Procurad que no sean de un color muy intenso para poder seguir superponiendo elementos sobre las graficas más tarde y que sean visibles....).

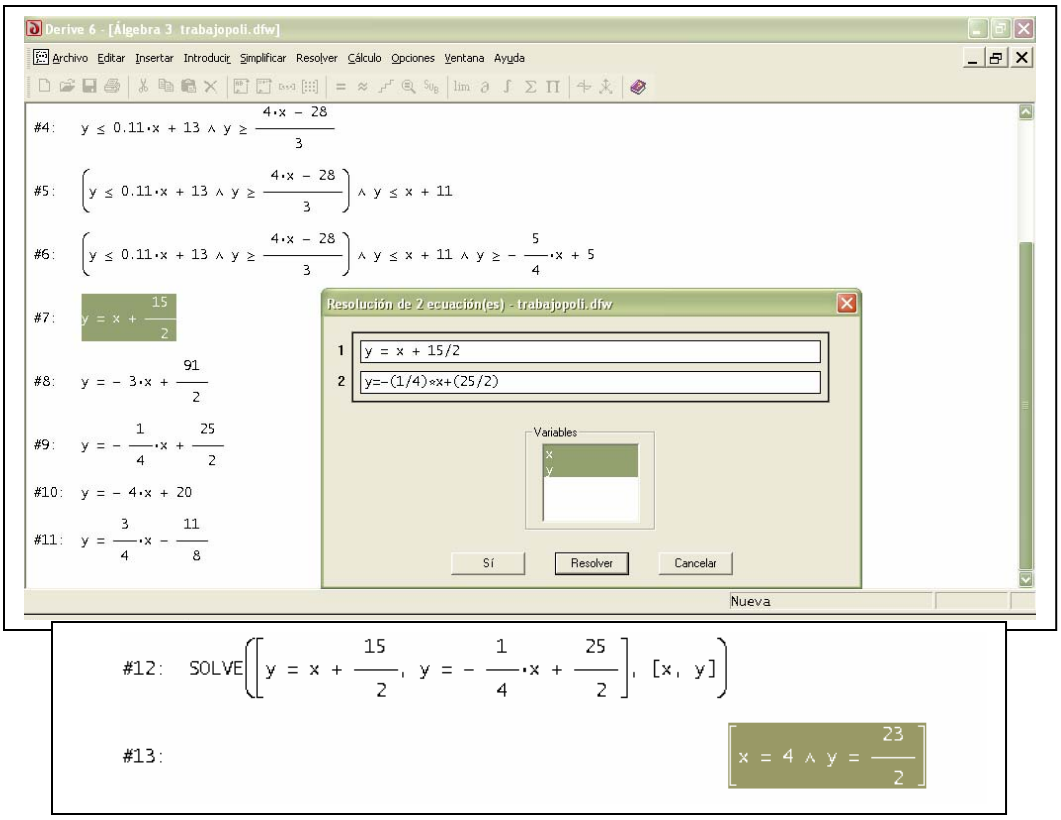




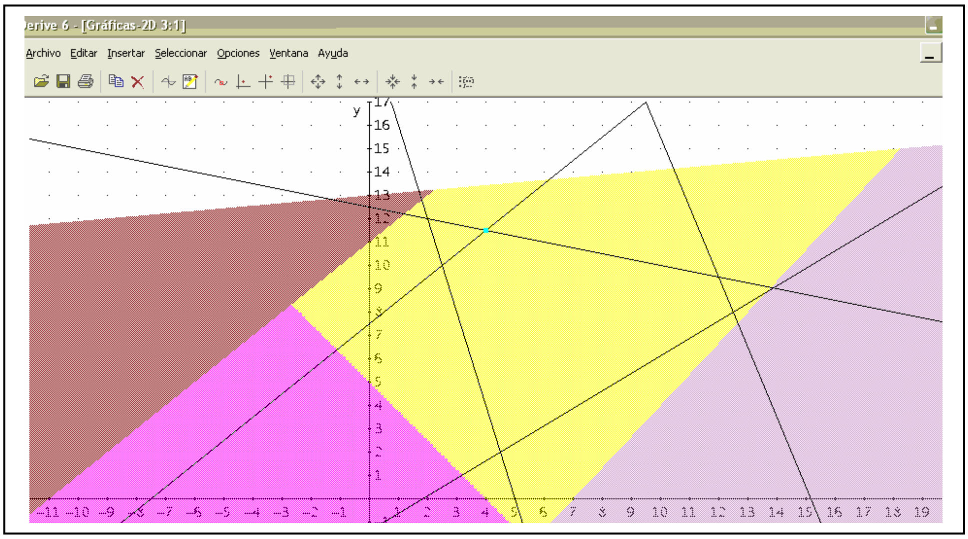
A la vista del mapa, parece clara la respuesta a la 1ª pregunta planteada: "los puntos de control" que evitarán que el individuo escape han de situarse en las intersecciones de las calles. ¿Por qué? Porque así, sea cuál sea el punto y la calle en la que esté el sospechoso, siempre estará custodiado por dos policías que intercepten su posible escapada, ed: se asegura que el individuo esté acorralado. Además, sólo tendremos en cuenta las intersecciones que caigan dentro del reciento limitado, como es lógico...

Ahora bien: ¿cómo determinar las coordenadas concretas de estos puntos? Observamos que estos puntos no son más que los puntos de corte de las rectas que hacen de calles. Por tanto, para hallarlos, basta con resolver los sistemas de ecuaciones de las rectas que involucran (ed: de las rectas a las que pertenecen dicho puntos).

Vayamos a ello: empecemos, por ejemplo, por las coordenadas del punto de intersección de las calles de ecuación: r_1 y r_3. Si metemos el sistema a derive:

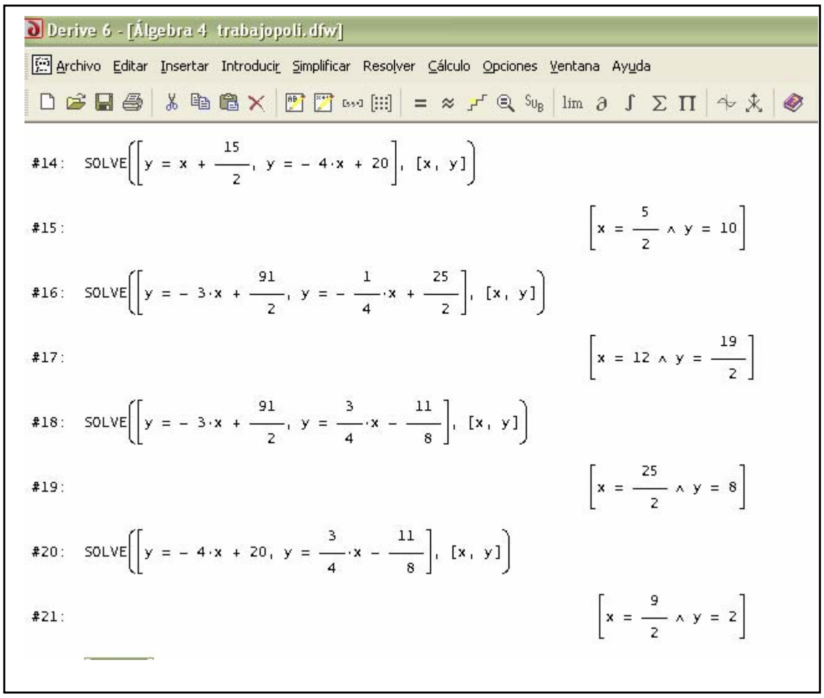


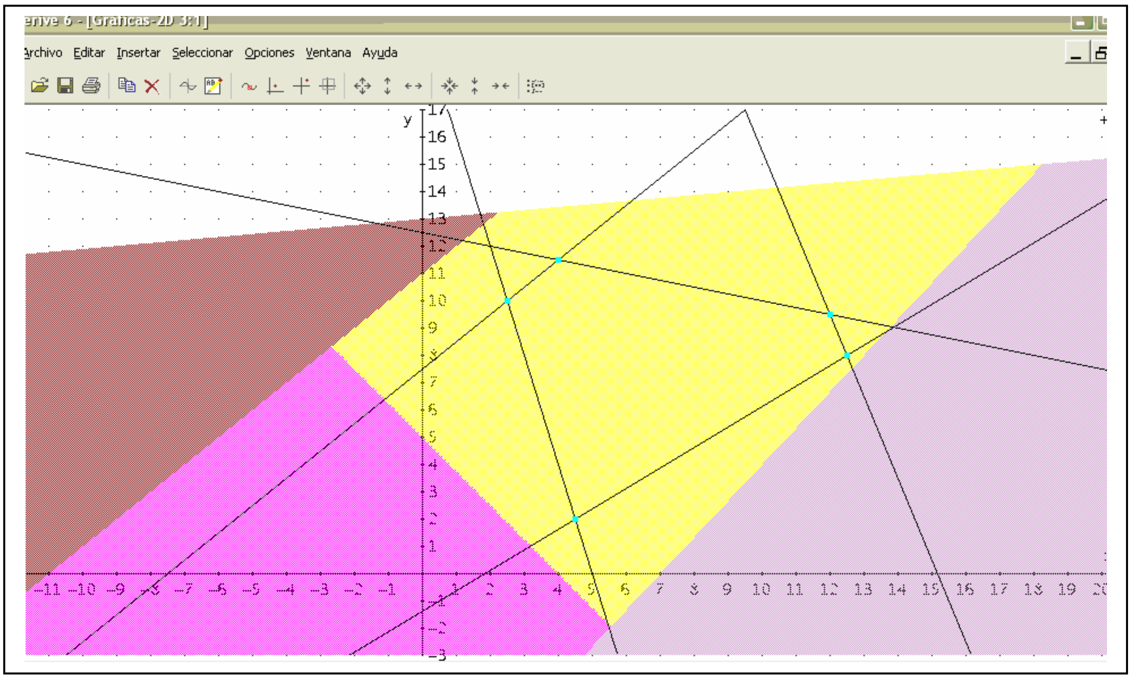
Añadimos la información sobre nuestro plano, ed: pintamos (en azul) el punto que hemos obtenido**. [Recordad: no podéis darle directamente al "plot" sobre la solución, sino que debéis escribir de nuevo el punto entre corchetes y, ahora sí, os dejará dibujarlo]**



Haced vosotros lo mismo con el resto. (Se les da tiempo a los alumnos)

Resueltos todos sistemas de ecuaciones, ya tenemos las coordenadas concretas donde establecer los puntos de control:





y , por tanto, hemos dado respuesta a la pregunta a).

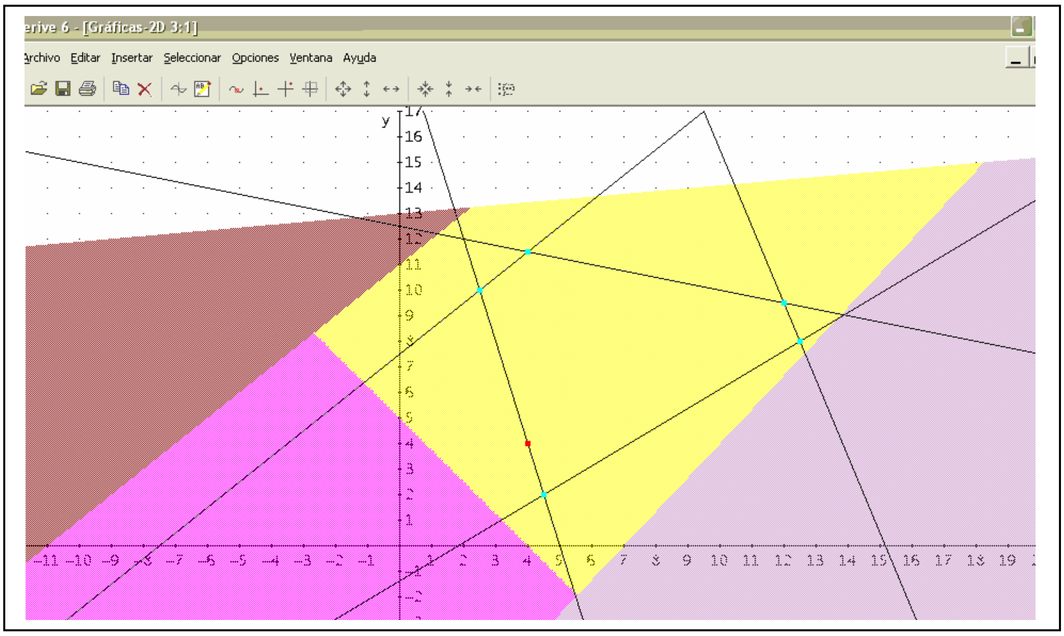
Supongamos ahora, como propone el apartado b), que el sospechoso se encuentra, concretamente, en el punto P(4,4). Obviamente los 2 agentes que deberán reducirle serán aquellos que estén en los extremos (o mejor dicho, en las intersecciones) más próximos de la calle donde se encuentre el susodicho. Por tanto, para responder a este apartado, lo único que tenemos que hacer es situar la posición del individuo en una calle concreta y localizar sus intersecciones más próximas:

o <u>POSICION DEL INDIVIDUO</u>:

Razonemos sobre el gráfico: "el individuo está en una calle concreta si el punto P que lo identifica como punto del plano pertenece a la correspondiente recta, ed: si el punto P satisface la ecuación de la recta; en otras palabras: habría que sustituir el punto P en las distintas ecuaciones de las calles y ver en cuáles obtenemos 0". Afortunadamente, con Derive, bastará con dibujar el punto sobre nuestro gráfico y ver en qué recta cae.

Observamos que, al no coincidir sus coordenadas con las de los puntos de control, el punto P no puede estar en una intersección. Es más, a simple vista parece que va a estar en la calle r_4 .

Y en efecto así es: hacemos que Derive nos dibuje el punto (en rojo):

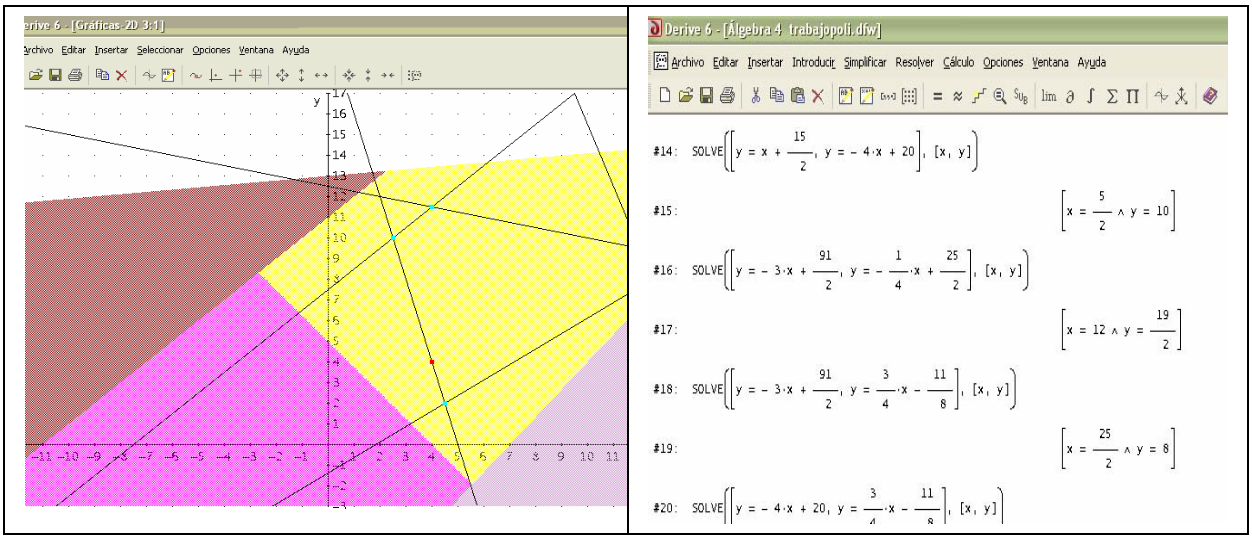


Si lo comprobamos analíticamente, ocurre que : $-4 \cdot 4 + 20 = 4$ (Ed: el punto P(4,4) satisface la ecuación de la recta correspondiente con la calle r_4)

En particular: si esto ocurriera con más de una calle, esto significaría que el punto P está en una intersección.

- AGENTES QUE LE REDUCEN

Teniendo en cuenta la posición del sospechoso en el grafico y las coordenadas de los puntos intersección antes calculadas:



claramente son los agentes situados en los puntos P(5/2,10) y P(9/2,2) los más apropiados para reducirle.

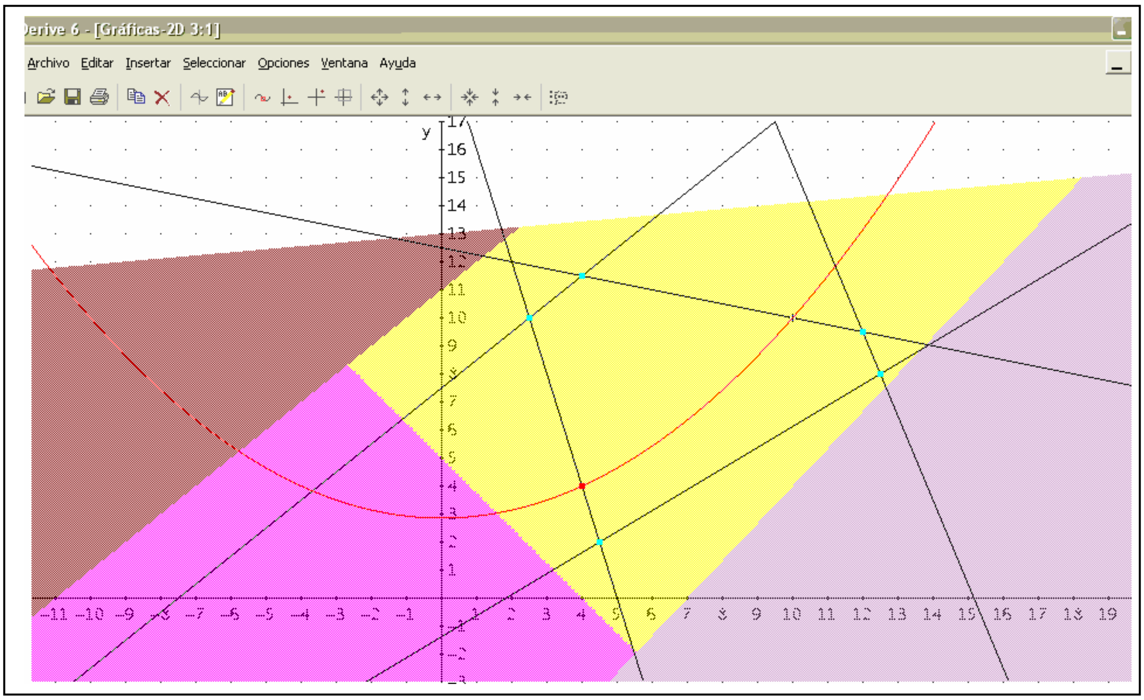
Identificación confirmada: los policías establecidos en los puntos de control reconocen al sospechoso como el individuo bajo orden de captura. La información se recibe en comisaría y automáticamente se manda a la zona un helicóptero para su detención y traslado. Pero…¡un momento! El sospechoso, que ya se creía acorralado, logra burlar a la policía al escapar entre los edificios por una callejuela que no estaba recogida en el plano y, por tanto, no había sido tenida en cuenta a la hora de crear el plan de su detención…

El helicóptero mandado ya sobrevuela la zona: su GPS visualiza dicha callejuela y la identifica con una parábola de ecuación $y = \frac{1}{14}x^2 + \frac{20}{7}$

c) **Con la información que se dispone, ¿en qué punto concreto vuelve a salir de nuevo el individuo a una calle principal?**
d) **¿Qué utilidad encuentras a esta información?**

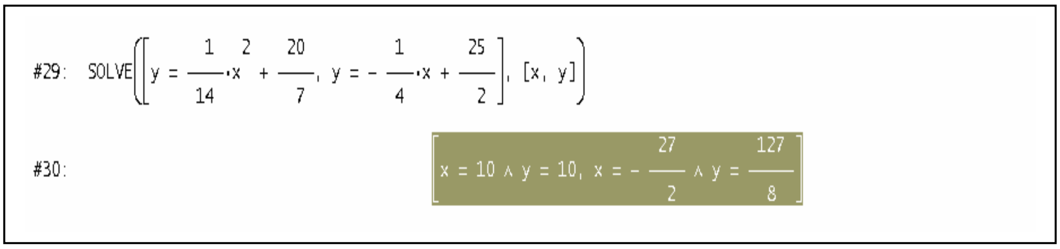
❖ **RESOLUCION**

Visualicemos en el mapa la callejuela de la que nos hablan: introducimos su ecuación en Derive y la dibujamos:



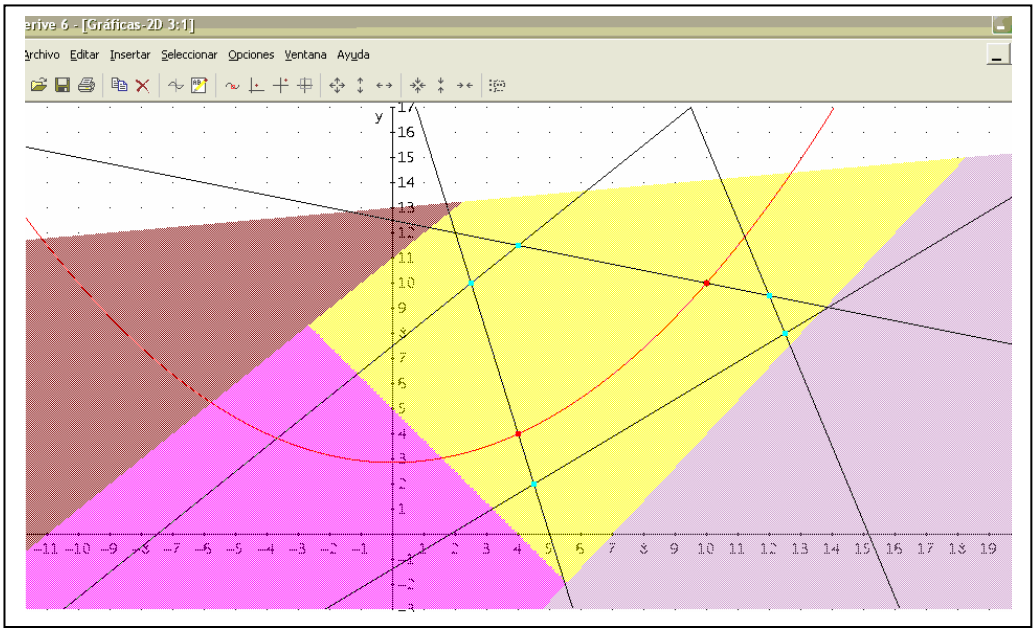
A partir de aquí: ¿en qué punto vuelve a salir el individuo a la calle principal? Claramente: en la primera oportunidad que tenga, ed: en el 1er punto de intersección de la callejuela con una calle principal en el recinto.

Por el grafico, salta a la vista que la 1ª intersección se produce con la calle r_3. Por tanto, podemos ahorrar cálculos e ir "directos al grano": nos limitamos a calcular el punto de intersección con dicha recta, ed: resolvemos el sistema formado por las ecuaciones de la callejuela y la calle $y = -\frac{1}{4}x + \frac{25}{2}$:



Obtenemos 2 puntos, de los cuales obviamente desechamos el 2º por no caer dentro de nuestro recinto. Nos quedamos con el punto P(10,10).

Punto de intersección que, si lo reflejamos en pantalla, queda:



Por tanto: el punto concreto en el que el individuo "es devuelto" a las calles principales controladas por la policía es el P(10,10) .Esta información es de gran utilidad: permite prever por dónde va a salir el sospechoso y mandar con antelación un agente que lo espere y lo detenga.

- OBJETIVO Nº3: LOCALIZAR EL ARTEFACTO Y DESACTIVARLO

Una vez el individuo ha sido atrapado, se le traslada a comisaría y se le obliga a declarar. Aunque al principio se muestra reacio, finalmente opta por "colaborar" con la policía: asegura haber escondido el artefacto en las afueras de la ciudad.

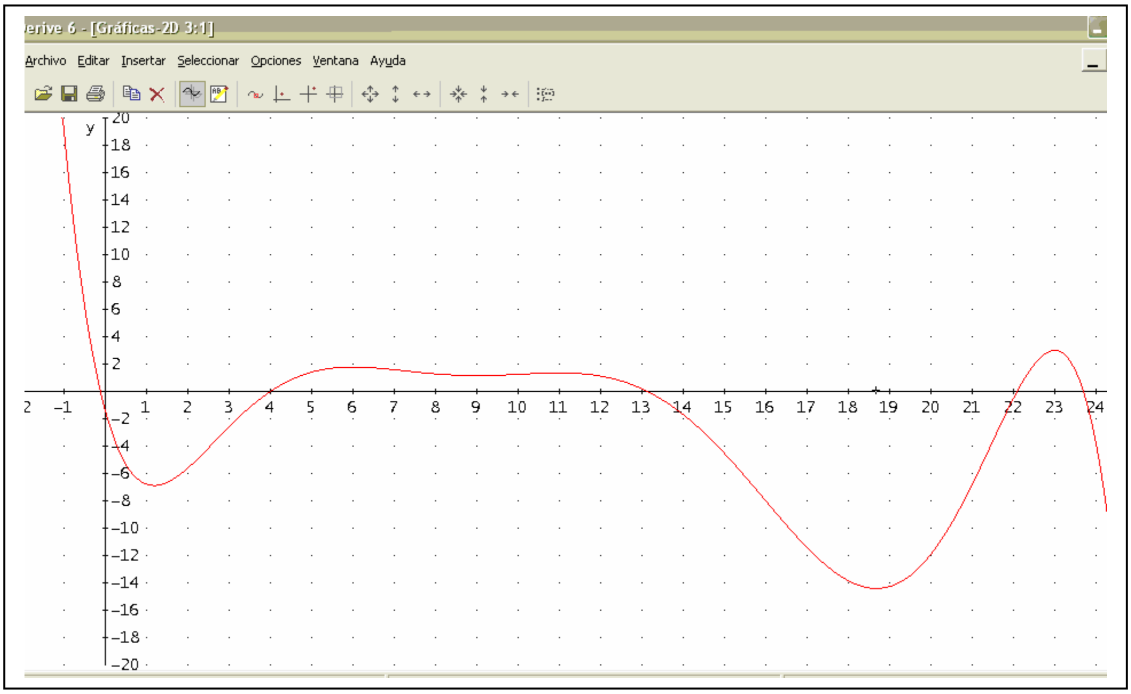
Los policías que salen a peinar la zona, escanean un corte de la orografía del terreno, identificándolo con el polinomio:

P(x)= $5.305697995\cdot10^{-48}\cdot(4 - x)\cdot(9.925765719\cdot10^{41}\cdot x^6 - 7.577025041\cdot10^{43}\cdot x^5 + 2.215253847\cdot10^{45}\cdot x^4 - 3.098653833\cdot10^{46}\cdot x^3 + 2.08542822\cdot10^{47}\cdot x^2 - 5.410078079\cdot10^{46} \cdot x - 6.500697571\cdot10$

a) **Teniendo en cuenta que el relieve de la zona, a escala real, es inapreciable como para detectarlo a simple vista ¿en qué puntos es más probable que se encuentre enterrado el dispositivo?**
b) **En concreto: ¿en qué punto sería lo más esperado? ¿A qué distancia bajo tierra estaría en este caso?**

RESOLUCION

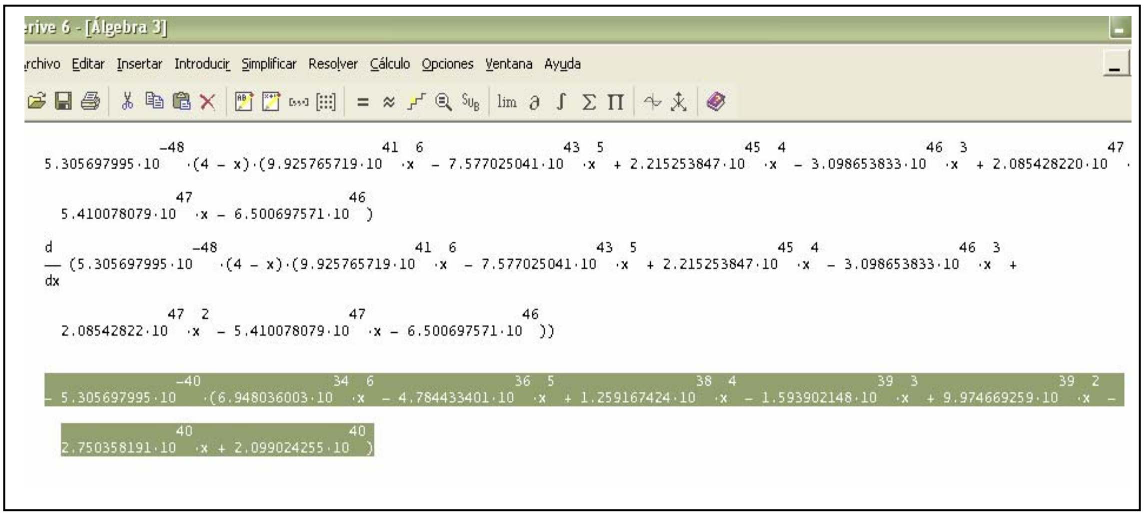
Escribamos la ecuación que describe el relieve del terreno y que viene dada por el polinomio P(x). Hacemos un plot en una ventana nueva y obtenemos entonces el corte de la orografía del terreno sobre el que vamos a trabajar:



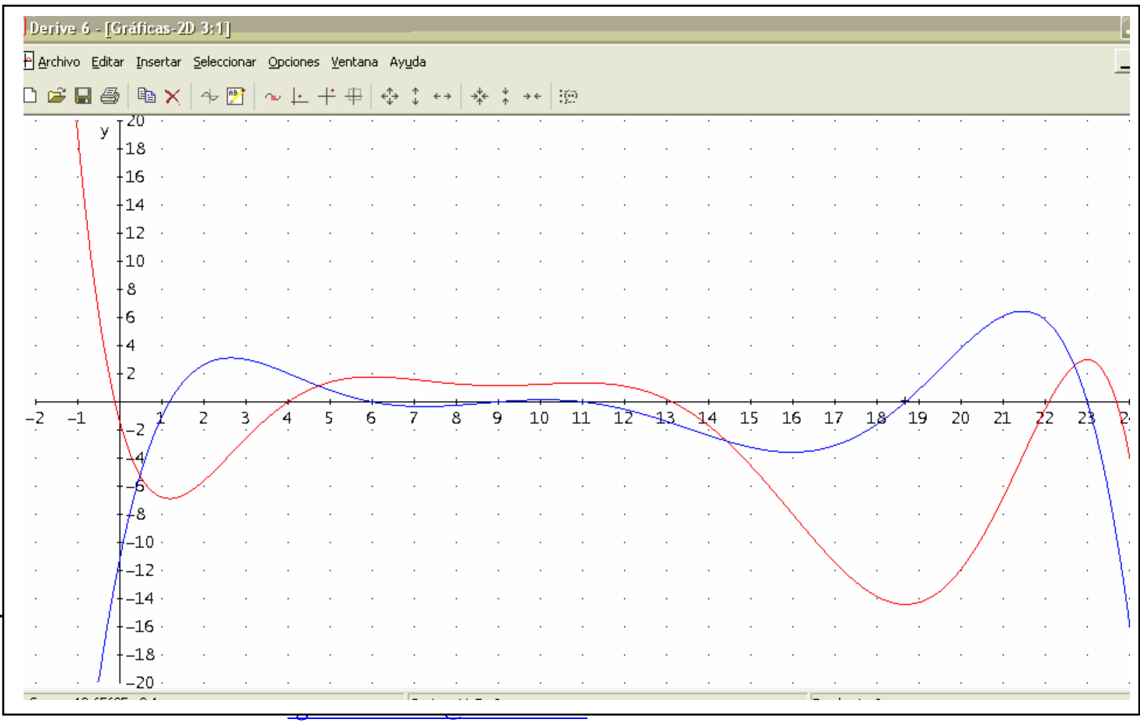
A la vista de la imagen obtenida, ya podemos contesta a la pregunta a) : obviamente, los puntos en lo que es más probable que esté enterrado el dispositivo serán, por lógica, los de más profundidad o, en “versión matemática:”aquellos puntos en los que la gráfica que representa el relieve del terreno alcance sus mínimos.

Por tanto, todo se reduce a calcular los mínimos de la función dada. Así a simple vista nos hacemos una idea muy aproximada de por dónde va a ir la cosa...Pero como necesitamos total precisión en las coordenadas, hemos de trabajarar un poquito más: sabemos que los máximos/mínimos de una función se encuentran entre los puntos que anulan a su derivada. Siguiendo esta idea:

1/ Derivemos la expresión del polinomio dado, obteniendo así P’(x):



2/ La dibujamos en la misma ventana (para luego comparar) pero con otro color:



3/Obtenemos los puntos que anulan a este polinomio derivado:

Si lo hiciéramos analíticamente, tendríamos que resolver la ecuación P'(x)=0. Pero observamos lo siguiente: sobre la gráfica, resulta fácil razonar que los puntos para los que este polinomio derivado se anula coinciden con los puntos de intersección con el eje x; en otras palabras: es equivalente resolver la ecuación P'(x)=0 que resolver el sistema $\begin{cases} y=P'(x) \\ y=0 \end{cases}$ con la gran ventaja de que la 2ª versión es mucho más gráfica e intuitiva y permite saber de un vistazo dónde van a estar los ceros de un polinomio (en los casos sencillos) o al menos por dónde van a ir los tiros....

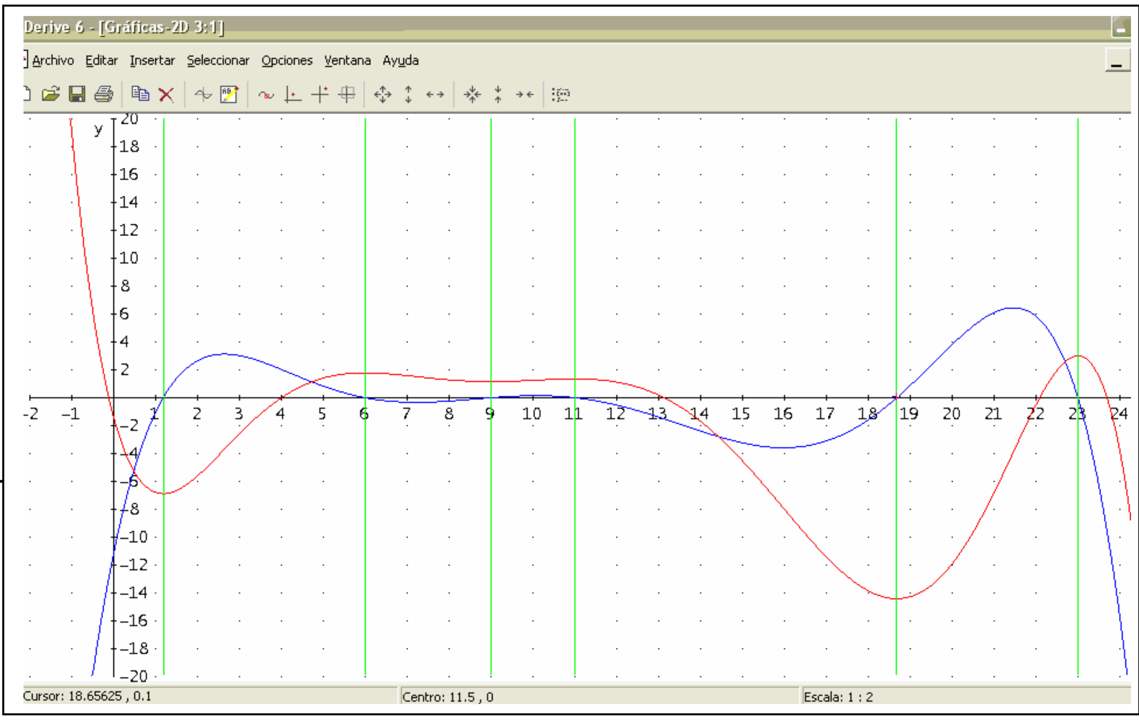
Planteamos el sistema, lo resolvemos:, y obtenemos como solución :

#4: $\mathrm{SOLVE}\left(\left[y = -5.305697995\cdot 10^{-40}\cdot(6.948036003\cdot 10^{34}\cdot x^{6} - 4.784433401\cdot 10^{36}\cdot x^{5} + 1.259167424\cdot 10^{38}\cdot x^{4} - 1.593902148\cdot 10^{39}\cdot x^{3} + 9.974669259\cdot 10^{39}\cdot x^{2} - 2.750358191\cdot 10^{40}\cdot x + 2.099024255\cdot 10^{40}),\ y = 0\right],\ [x,\ y]\right)$

#5: $[x = 6 \wedge y = 0,\ x = 9 \wedge y = 0,\ x = 11 \wedge y = 0,\ x = 23 \wedge y = 0,\ x = 18.67622679 \wedge y = 0,\ x = 1.184000748 \wedge y = 0]$

Ed: los puntos P(6,0), P(9,0),P(11,0),P(23,0),P(18.67622679,0),P(1.184000748,0)

Finamente, identificamos la condición de estos puntos como máximos/mínimos: con ambas graficas delante resulta inmediato ver que, de los puntos que hemos obtenido, aquellos en los que la grafica inicial alcanza sus mínimos son P(1.184000748,0) y P(18.67622679,0):



En definitiva: los puntos en los que se sospecha que estará enterrado el artefacto son los de mayor profundidad del relieve (donde el polinomio que lo describe alcanza sus mínimos) y son, concretamente : P(1.184000748,0) y P(18.67622679,0).

Dentro de estos puntos, el más esperado sería , por lógica, el más profundo, En nuestro caso, mirando la grafica del relieve, concluimos que seria el punto P(18.67622679,0). Y en efecto, así es: sin más que sustituir estos dos puntos en el polinomio inicial P(x), vemos que éste alcanza los valores (ed: la profundidad):

$5.305697995\cdot10^{-48}\cdot(4-1.184000$ …

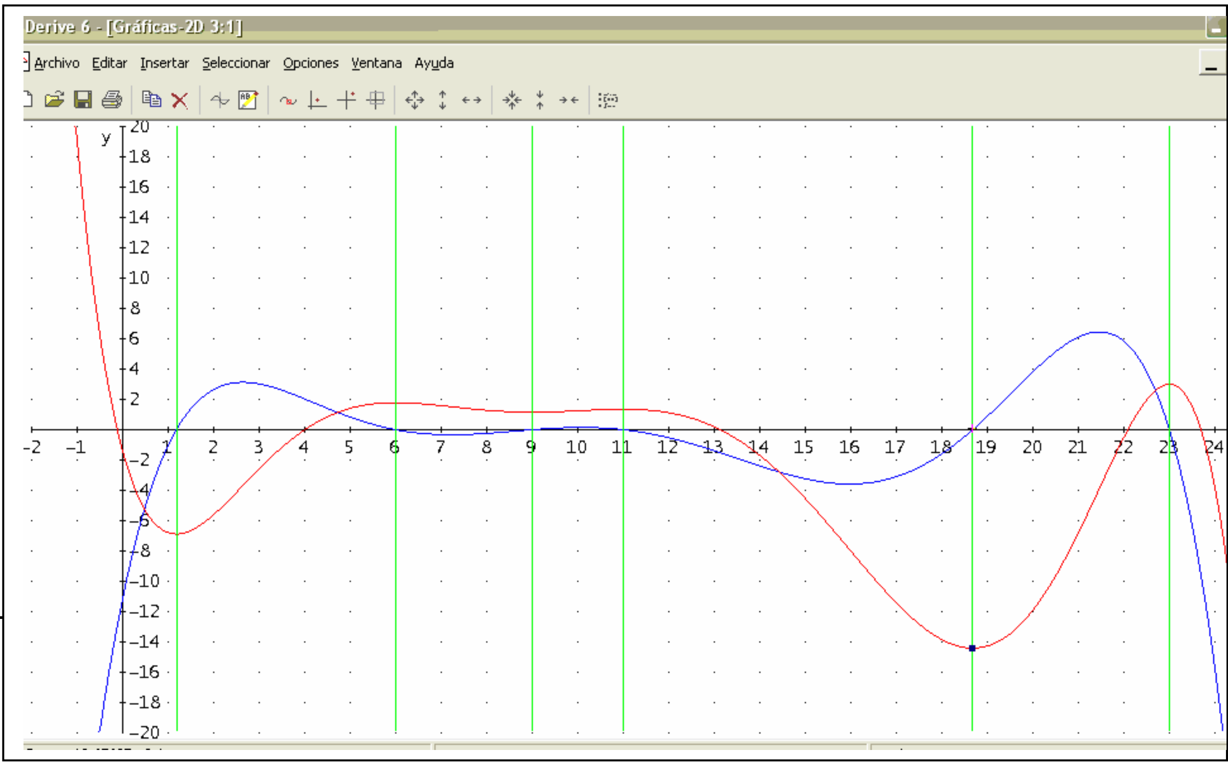
$3.098653833\cdot10^{46}\cdot1.184000748^{3}$ …

$$5.305697995\cdot10^{-48}\cdot(4-18.67622679)\cdot(9.925765719\cdot10^{41}\cdot18.67622679^{6}-7.577025041\cdot10^{43}\cdot18.67622679^{5}+2.215253847\cdot10^{45}\cdot18.67622679^{4}$$
$$3.098653833\cdot10^{46}\cdot18.67622679^{3}+2.08542822\cdot10^{47}\cdot18.67622679^{2}-5.410078079\cdot10^{47}\cdot18.67622679-6.500697571\cdot10^{46})$$

$$-14.40566564$$

Luego claramente la mayor profundidad se alcanza en el P(18.67622679,0), y dicha profundidad es concretamente de 14.40566564.

Lo señalamos en nuestro dibujo:



Los artificieros logran acceder al punto concreto en el que está enterrado

el dispositivo. Tiene dos opciones: detonarla en el lugar (que sería lo más perjudicial debido a los daños medioambientales que ocasionaría) o llevarla a una de las 2 centrales, situadas en los puntos P(0,0) y P(24,0) para desactivarla allí, pero teniendo en cuenta que si se sobrepasan los 2m.de altitud, la bomba estallará.

c) ¿Cuál será la decisión de los artificieros?

❖ RESOLUCION

La decisión de los artificieros vendrá determinada por el hecho de si con las condiciones que han de respetar la bomba aguantará un traslado a la central; ed: si en el trayecto de vuelta no se superan los 2m. de altitud (respecto del suelo, se sobreentiende).

Para responder a esta cuestión, parece que lo natural sea fijarse en los punto “críticos” de altura , ed: en los máximos, y valorar si éstos sobrepasan los limites impuestos.

Aprovechamos la información del aparatado a), de donde sabemos que los puntos de máximo se alcanzan en los puntos P(6,0),P(11,0) y P(23,0). Para valorar la altitud que se alcanza en los mismos, procedemos igual que en el aparatado b): evaluamos la función del relieve en estos puntos, obteniendo como resultado :

#12: $5.305697995\cdot 10^{-48}\cdot(4-6)\cdot(9.925765719\cdot 10^{41}\cdot 6^{6} - 7.577025041\cdot 10^{43}\cdot 6^{5} + 2.215253847\cdot 10^{45}\cdot 6^{4} - 3.098653833\cdot 10^{46}\cdot 6^{3} + 2.08542822\cdot 1$

$- 5.410078079\cdot 10^{47}\cdot 6 - 6.500697571\cdot 10^{46})$

#13: 1.788182995

#14: $5.305697995\cdot 10^{-48}\cdot(4-11)\cdot(9.925765719\cdot 10^{41}\cdot 11^{6} - 7.577025041\cdot 10^{43}\cdot 11^{5} + 2.215253847\cdot 10^{45}\cdot 11^{4} - 3.098653833\cdot 10^{46}\cdot 11^{3} +$

$2.08542822\cdot 10^{47}\cdot 11^{2} - 5.410078079\cdot 10^{47}\cdot 11 - 6.500697571\cdot 10^{46})$

#15: 1.352894565

#16: $5.305697995\cdot 10^{-48}\cdot(4-23)\cdot(9.925765719\cdot 10^{41}\cdot 23^{6} - 7.577025041\cdot 10^{43}\cdot 23^{5} + 2.215253847\cdot 10^{45}\cdot 23^{4} - 3.098653833\cdot 10^{46}\cdot 23^{3} +$

$2.08542822\cdot 10^{47}\cdot 23^{2} - 5.410078079\cdot 10^{47}\cdot 23 - 6.500697571\cdot 10^{46})$

#17: $5.305697995\cdot 10^{-48}\cdot(4-23)\cdot(9.925765719\cdot 10^{41}\cdot 23^{6} - 7.577025041\cdot 10^{43}\cdot 23^{5} + 2.215253847\cdot 10^{45}\cdot 23^{4} - 3.098653833\cdot 10^{46}\cdot 23^{3} +$

$2.08542822\cdot 10^{47}\cdot 23^{2} - 5.410078079\cdot 10^{47}\cdot 23 - 6.500697571\cdot 10^{46})$

#18: 2.999992811

Solución que resulta coherente con el dibujo de la grafica sobre la que estamos tratando.

A partir de los resultados obtenidos, ¿qué diríais que deben hacer los artificieros? Pues que si al final optan por sacar el artefacto de la zona, lo pueden hacer siempre y cuando sea “por el camino largo”, ed:en dirección hacia la izquierda , ya que en caso contrario, concretamente en el punto P(23,0), se superan los 2m de altitud y por tanto la bomba estallaría. He aquí un claro ejemplo de que no siempre el camino más corto es el mejor...

ACTIVIDAD DE AMPLIACIÓN: INTRODUCCIÓN A LAS SUPERFICIES
(Indicada para los alumnos más avanzados)

- OBJETIVO: ACCEDER AL ARTEFACTO

Acceder al dispositivo es un paso que nos hemos saltado en el desarrollo de la actividad, ya que su modelización requiere trabajar con superficies, en 3 dimensiones, y por tanto "cierto" nivel de abstracción.

No obstante, si has llegado hasta aquí fijo que serás capaz de superar este último reto que se te propone, logrando así cerrar el caso por completo y, lo que es más importante: tú sólo.

La idea es la siguiente: acceder al artefacto enterrado haciendo un agujero en la superficie con una perforadora cuyo taladro tiene forma de cono; concretamente, la ecuación que describe dicho taladro es: $3x^2 + 3y^2 = z^2$**.**

Si se sabe, tal y como se averiguó en la actividad (3.b), que la posición exacta del artefacto es el punto P(18.67622679,14.40566564), y suponiendo que éste tiene la forma de "una caja" de altura 1m de altura:

a) **Ajusta el parámetro "a" en la ecuación de la taladradora:** $3x^2 + 3y^2 = (z+a)^2$ **para que los artificieros logren acercarse lo máximo posible al explosivo pero sin llegar a perforarlo (ya que, en este caso, estallaría).**

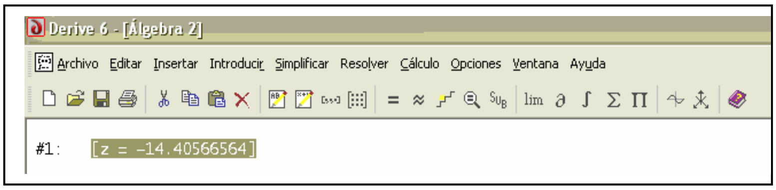
   - **¿Qué conclusión puedes sacar respecto al comportamiento del cono en función de la variación del parámetro?**
   - **¿Qué agujero se forma en el suelo al perforar la superficie con el taladro?**

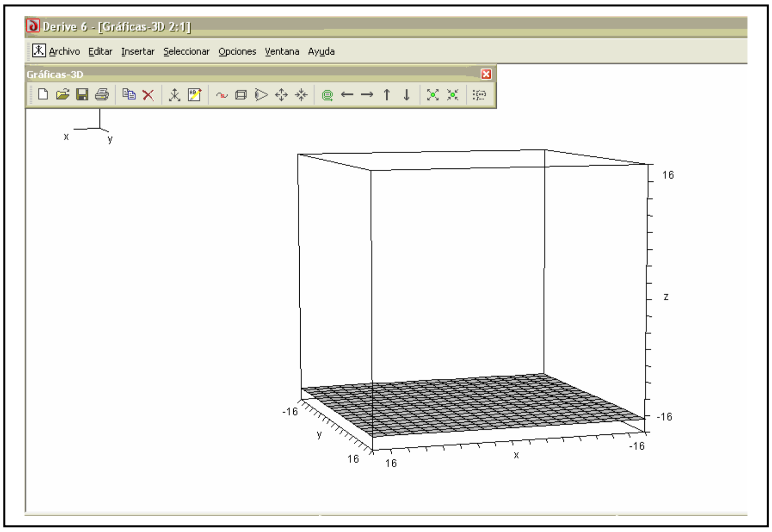
b) **¿Podrías generalizar el mismo fenómeno propuesto en a) para las coordenadas x e y?**

RESOLUCION

Vayamos introduciendo poco a poco la información que nos dan para así, sobre la marcha y con las graficas de delante, razonar a partir de lo que nos dan qué es lo que nos piden:

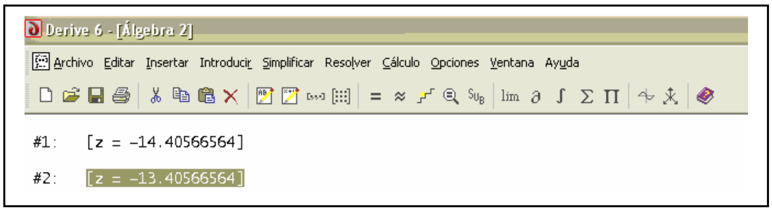
- En primer lugar, dibujamos el plano z = -14.40566564 , plano que marcará la profundidad del relieve sobre la que yace el explosivo (como veis, la información que en dos dimensiones nos aportaba la coordenada x, para nuestro objetivo actual resulta irrelevante...)

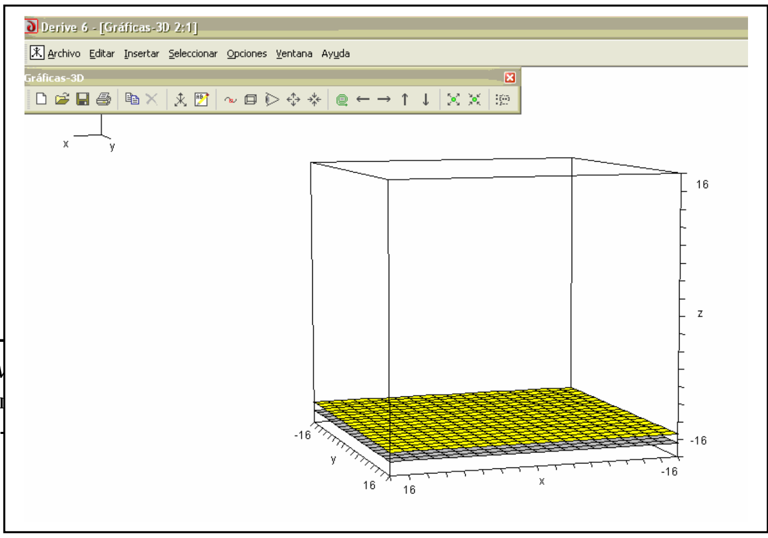




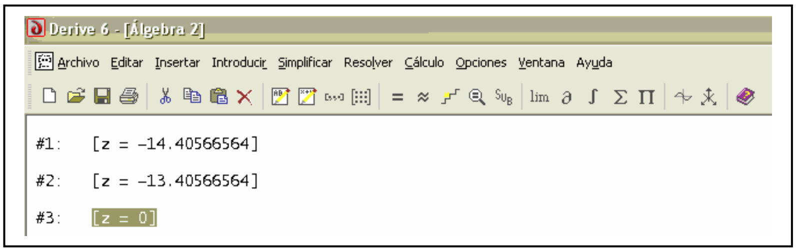
- Ahora: nos interesa señalar en el dibujo, de algún modo, las dimensiones del artefacto; como lo que realmente necesitamos es su altura, lo que haremos será introducir un plano que la represente y marque, por tanto, una especie de "tope" a la hora de taladrar.

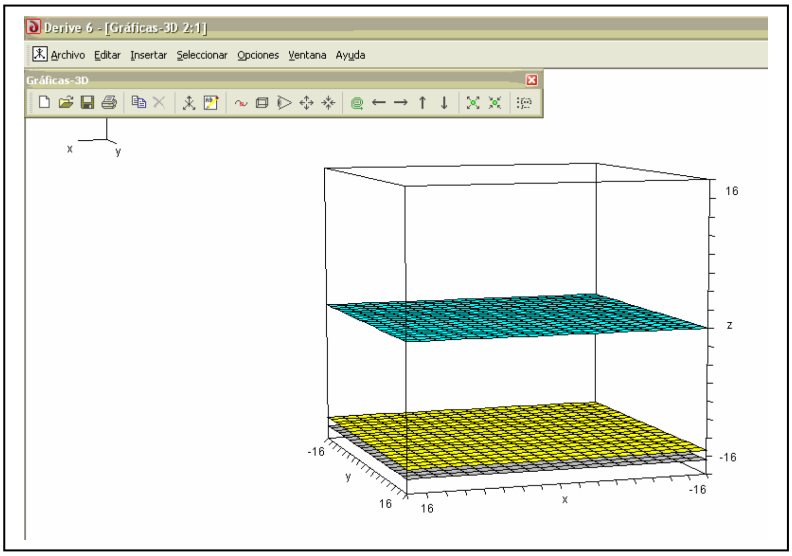
Concretamente: introducimos el plano que esté a una distancia de 1m respecto del plano "fondo" sobre el que reposa (en nuestro caso el plano z = -14.40566564) o equivalentemente: el plano que esté a una distancia (profundidad) de 13.40566564m, ed: z = -13.40566564:





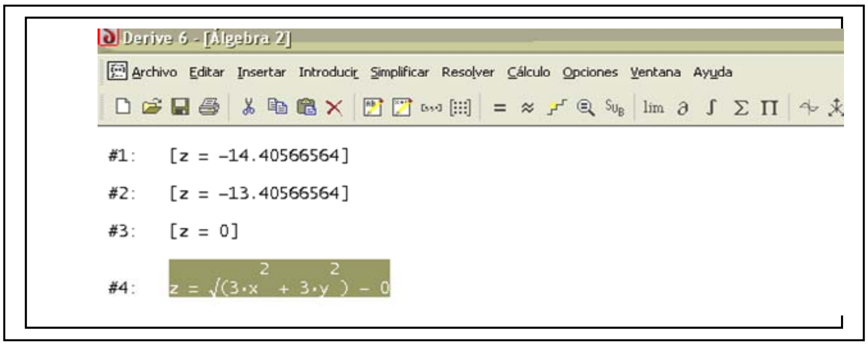
- Finalmente establecemos un tercer plano de referencia que indique que estamos a ras de la superficie y será, obviamente z=0.

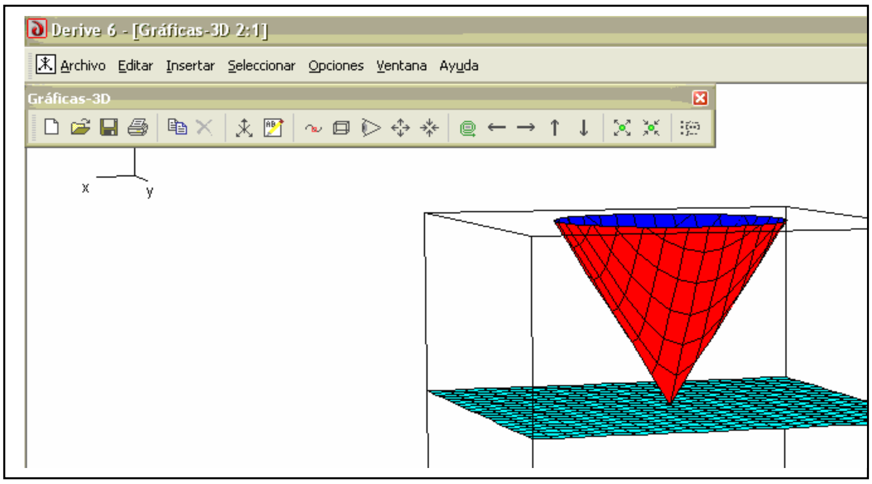




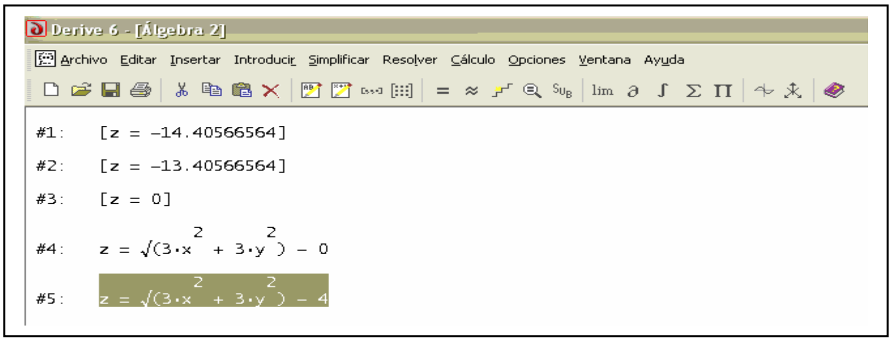
- Llegados a este punto, solo queda por introducir la ecuación del cono que representa la taladradora. Pero necesitamos ajustar la constante! Para ello, vamos a ir probando progresivamente y de forma ordenada (lo haremos, por ej, de forma creciente) con distintos valores de "a":

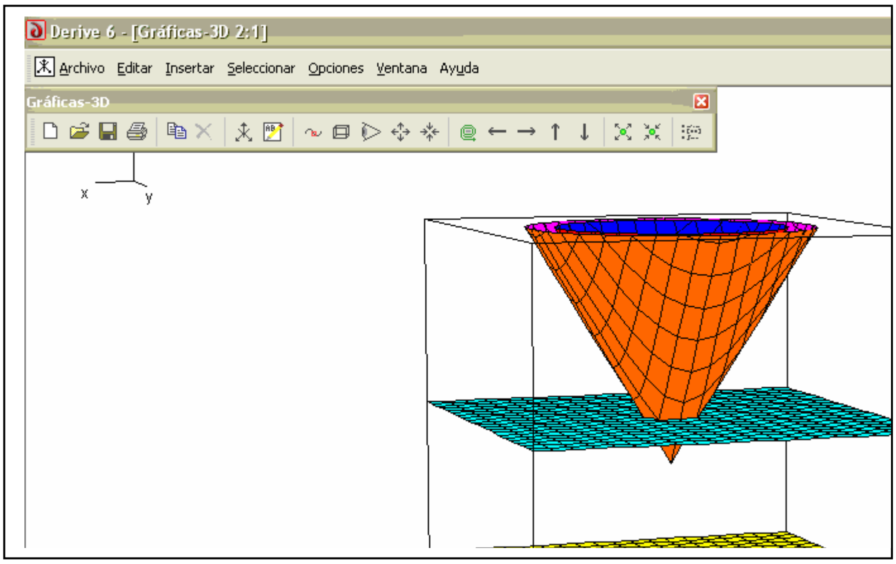
- Empecemos por a= 0





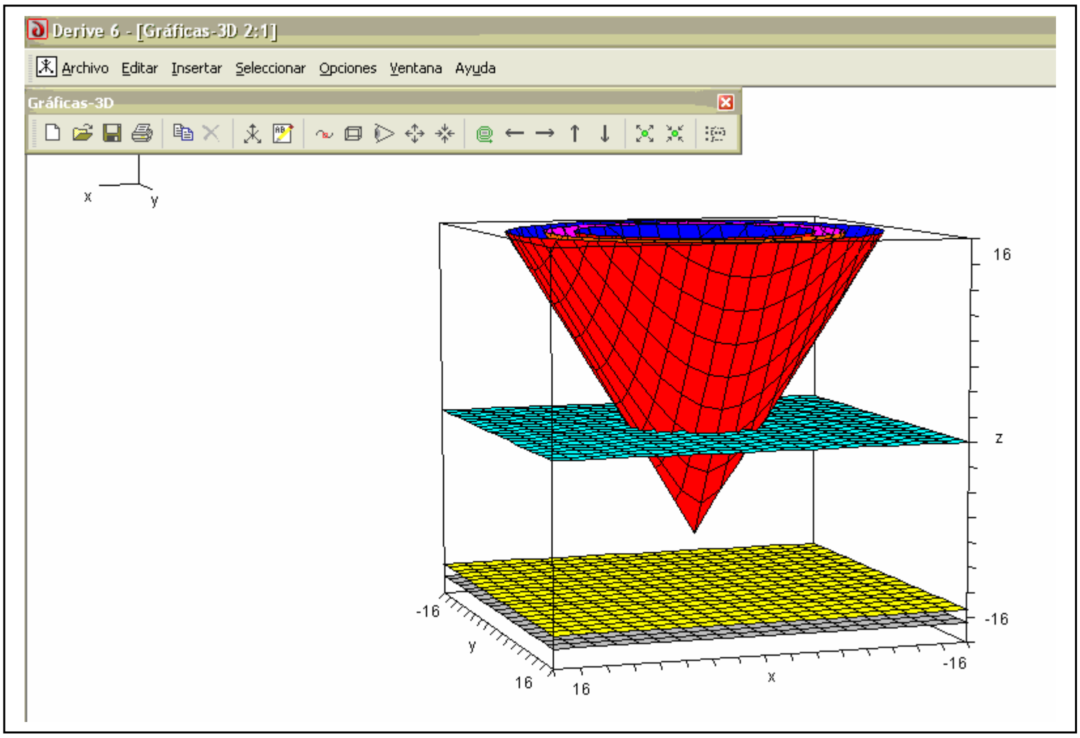
- Probamos ahora con a= 4





- Y si a=9

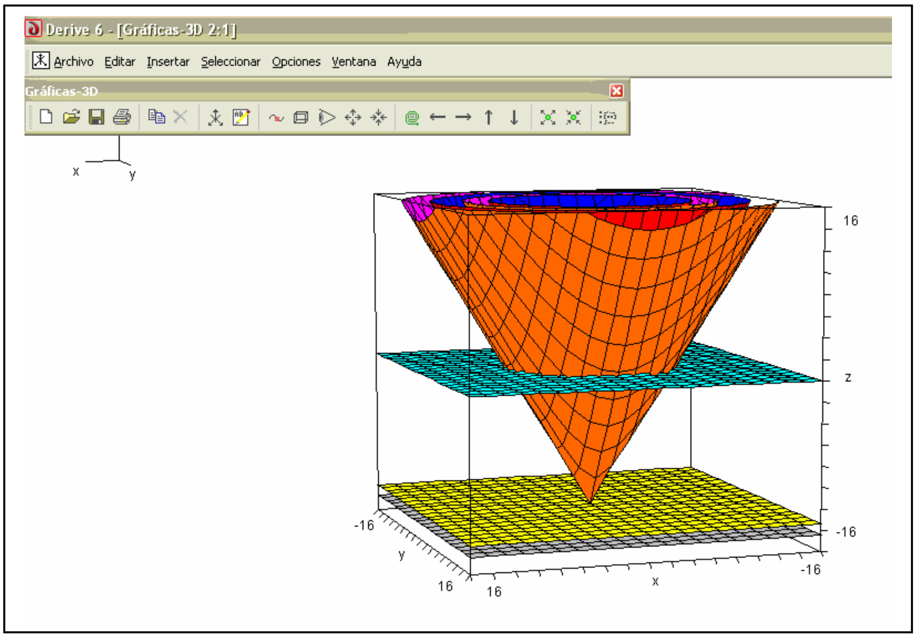
#6: $z = \sqrt{(3\cdot x^2 + 3\cdot y^2)} - 9$



Todo parece apuntar entonces a que el parámetro “a” lo que realmente hace es bajar “a” metros el cono respecto de la superficie (si a>0) y por el contrario lo sube “a” metros por encima de la misma si a<0. Según esto, y teniendo en cuenta que el cono habría de bajar exactamente 14.40566564m para acercarse lo máximo posible al artefacto pero sin atravesarlo, podríamos sospechar que la constante “a” que nos piden es, concretamente, a=14.40566564.

Comprobemos si estamos en lo cierto:

#7: $z = \sqrt{(3\cdot x^2 + 3\cdot y^2)} - 13.40566564$



Efectivamente, lo estábamos! . Por tanto, la ecuación del cono de la taladradora queda: $3x^2 + 3y^2 = (z + 14.40566564)^2$.

Como conclusión, podemos establecer que:

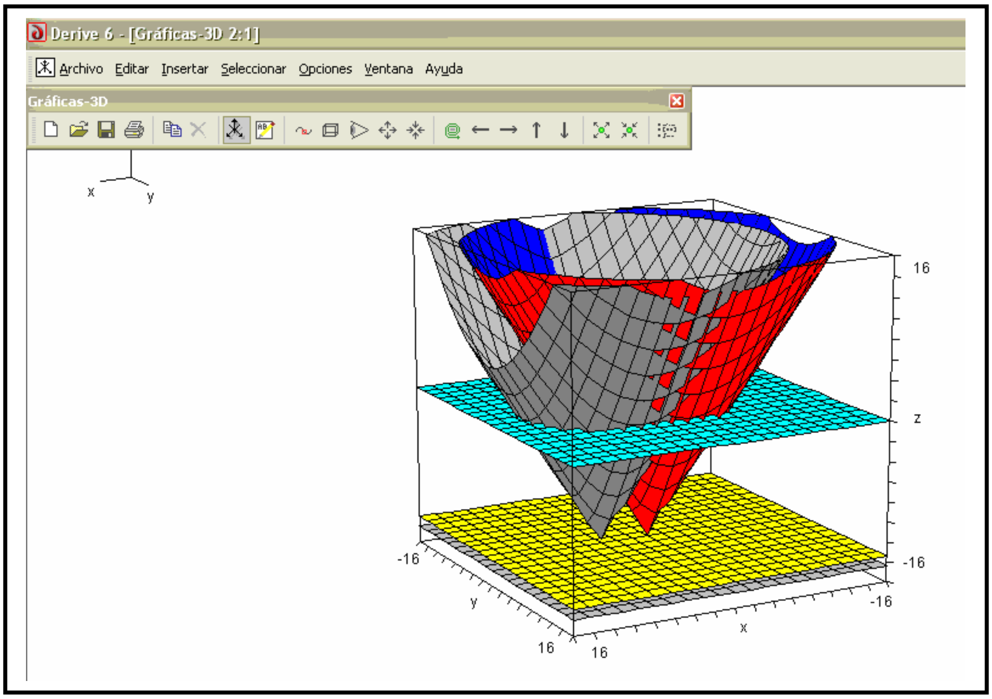
"dado un cono de ecuación $ax^2 + by^2 = (z + c)^2$, éste se desplazará: c unidades hacia arriba (si c<0), o c unidades hacia abajo (si c>0)."

Para saber si podemos generalizar de algún modo este mismo comportamiento para las variables x e y, probamos directamente:

Partimos del cono inicial que hemos "ajustado" en los apartados anteriores $3x^2 + 3y^2 = (z + 14.40566564)^2$ y lo dibujamos:

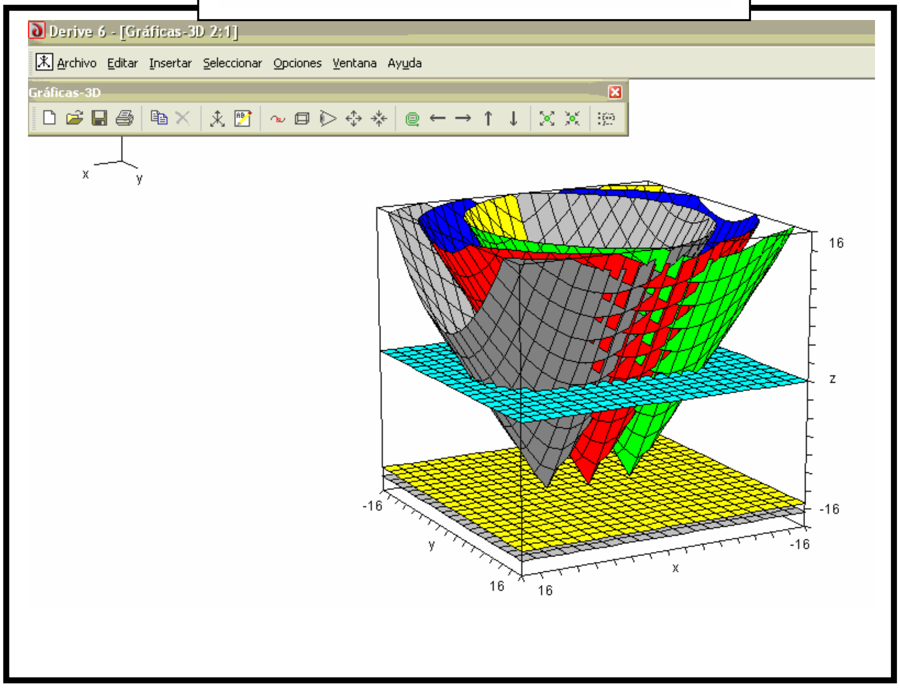
Si le quitamos, por ejemplo, 5 unidades a la x:

#8: $z = \sqrt{(3\cdot(x - 5)^2 + 3\cdot y^2)} - 13.40566564$



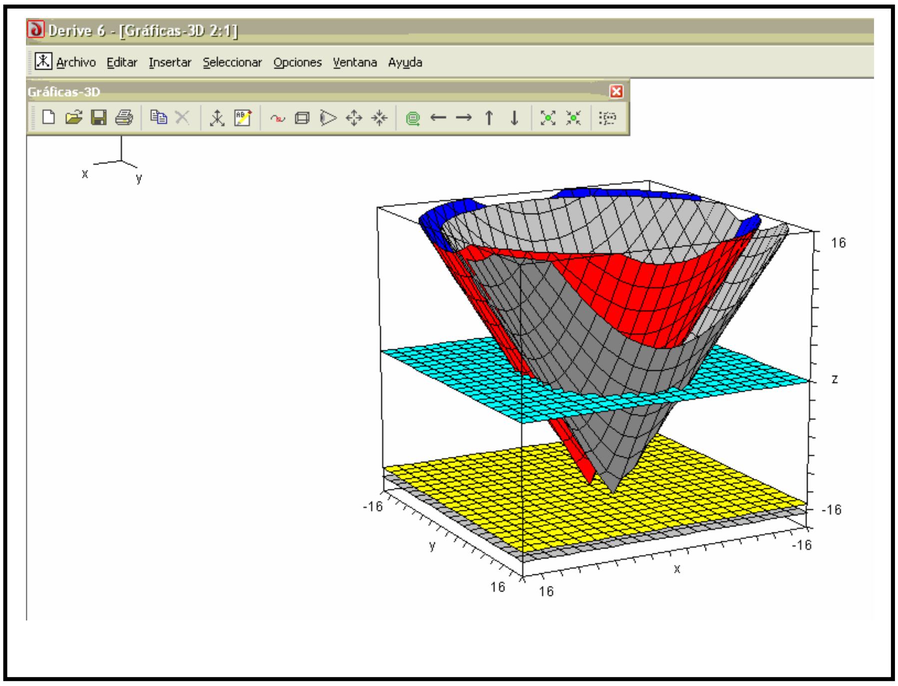
Y si se las añadimos:

#9: $z = \sqrt{3\cdot(x + 5)^2 + 3\cdot y^2} - 13.40566564$



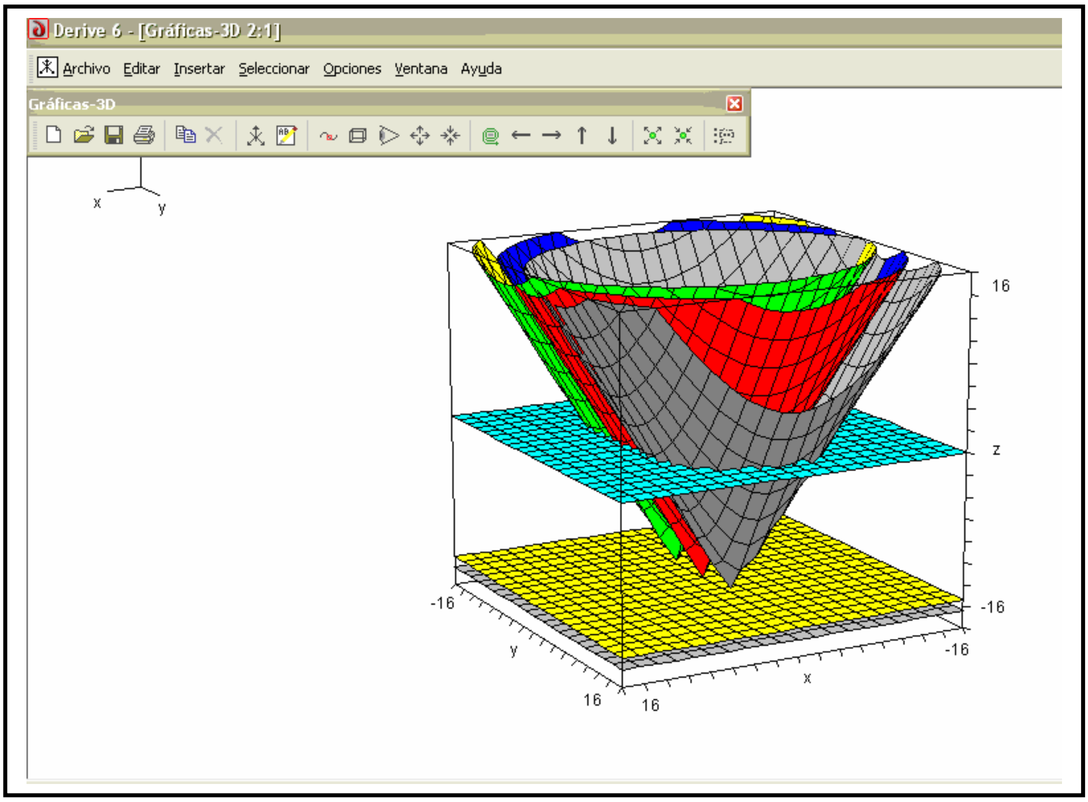
Repetimos lo mismo para la variable y:
Si le restamos 5 unidades:

#10: $z = \sqrt{(3\cdot x^2 + 3\cdot (y - 5)^2)} - 13.40566564$



Y sumadas, obtenemos:

#11: $z = \sqrt{(3 \cdot x^2 + 3 \cdot (y + 5)^2)} - 13.40566564$



Por tanto, podemos extraer como conclusión final:

"Dada la ecuación general de un cono: $(x+a)^2 + (y+b)^2 = (z+c)^2$

Si a>0, el cono retrocede "a" unidades en el eje de la x .

Si a<0, se trasladada "a" unidades en el eje de la x

Si b>0, el cono disminuye "b" unidades en el eje de la y

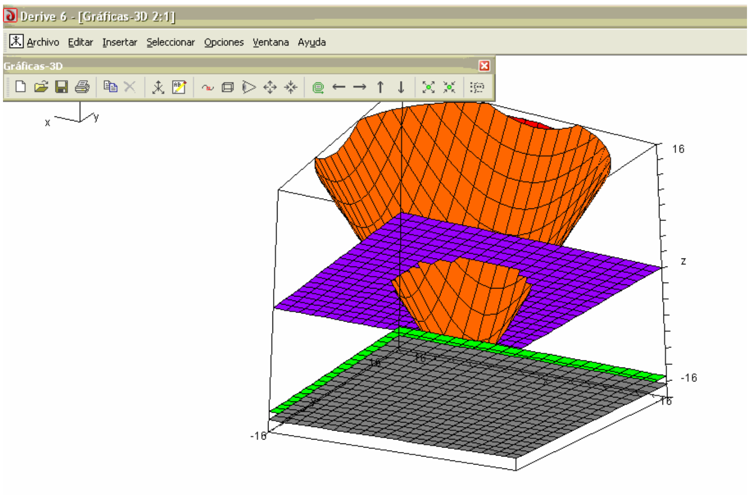
Si b<0, se aumentan "b" unidades en el eje de la y.

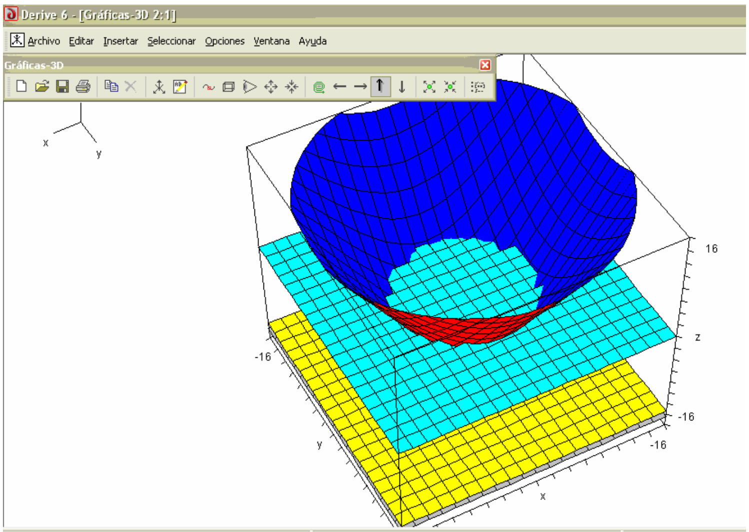
Si c>0, el cono baja "c" unidades en el eje de la z

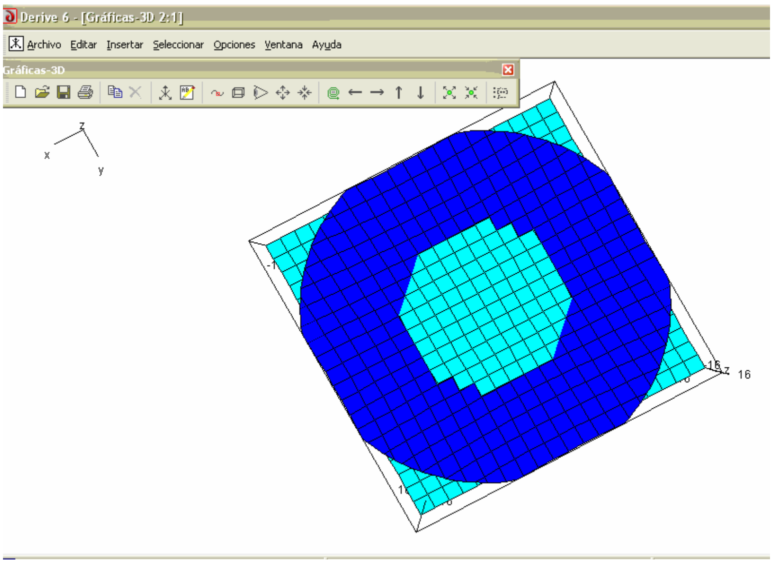
Si c<0, sube "c" unidades en el eje de la z.

Puesto que este es un anexo que pretende ser una introducción a las superficies, lo más fácil para dar respuesta a la pregunta b) es visualizarlo, aprovecharse de que estamos manejando un programa interactivo e ir moviendo la figura a nuestro antojo hasta visualizar lo que buscamos.

Según ésto, obtenemos distintas vistas que nos permitan concluir la forma de la intersección del cono con el plano que hace de suelo (ed: z=0):







Claramente, esta intersección resulta ser una circunferencia. Gráficamente ha sido más o menos fácil...pero, ¿y analíticamente? Veamos que nos dice Derive si le pedimos que resuelva el sistema formado por el plano Z=0 y el cono:

#13: $\text{SOLVE}\left(\left[z = 0,\ z = \sqrt{(3\cdot x^2 + 3\cdot y^2)} - 13.40566564\right]\right)$

#14: $\left[z = 0,\ z = 1.732050807\cdot\sqrt{(x^2 + y^2)} - 13.40566564\right]$

¿Qué significa esta respuesta? ¿Es que el programa no ha sido capaz de resolver algo que nosotros si? Evidentemente no: Derive está respondiendo exactamente lo mismo que nosotros, pero lo está expresando de la forma que considera "más simple" (matemáticamente hablando, claro está) que es, precisamente, como la intersección del plano con el cono.

La única moraleja de este último comentario es que conozcáis otra forma práctica y curiosa de representar la circunferencia y que probablemente nunca antes habréis visto.

NOTA FINAL

Hasta aquí ha dado de sí esta aventura policial. Es posible que el ejemplo propuesto os haya parecido, en ocasiones, un "poco artificial", pero no debéis olvidar que ésta ha sido una simulación adaptada; en la realidad, no todo es tan "sencillo" (recordad ese dicho de que ***"no hay nada simple, sino simplificado")**:* un proceso policial conlleva aplicar de forma combinada técnicas de todo tipo, desde las más simples (como las que habéis visto en el ejercicio) hasta otras muchos más avanzadas (especialmente de tipo probabilístico) que en este momento no estáis en disposición de entender.

Vicerrectorado de Innovación y Espacio Europeo de Educación Superior, Universidad Complutense de Madrid. **Contacto**: Prof. Inés Gómez-Chacón igomezchacon@mat.ucm.es