EL TRIÁNGULO DE LAS BERMUDAS

Modelización matemática de un problema utilizando sistemas de inecuaciones lineales, sistemas de ecuaciones lineales y DERIVE

Trabajo de dos estudiantes para profesor
Asignatura Metodología Matemáticas
Grupo de Implementación
Facultad de Ciencias Matemáticas
Noviembre 2007

1.-INTRODUCCIÓN.

El Triángulo de las Bermudas, es el área geográfica situada entre las islas Bermudas, Puerto Rico y Fort Lauderdale (Florida) en el Océano Atlántico. La unión de estos tres puntos forma un triángulo casi equilátero. Es famoso porque en esa zona ha habido numerosas desapariciones de barcos y aviones, muchas de ellas sin explicación.

En esta zona se da además un clima tempestuoso, lo que junto con el fuerte tráfico marino por la misma, hizo inevitable que los barcos se perdiesen sin dejar rastro, principalmente antes del desarrollo de las nuevas tecnologías.

A pesar de su fama por estas desapariciones, las estadísticas indican que el número aviones y barcos desaparecidos en esta zona no es mayor que en otra parte del mundo igual de transitada.

Uno de los últimos barcos que desapareció en el Triángulo de las Bermudas fue el *Witchcraft* a finales de 1967.

2.-PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.

El problema que os vamos a proponer trata de encontrar este barco dentro del Triángulo a través de una serie de datos recogidos desde que se hundió.

Gracias a las matemáticas podremos descubrir dónde se encuentra este buque.

Para resolverlo, modelizaremos matemáticamente el problema utilizando sistemas de inecuaciones lineales, sistemas de ecuaciones lineales y DERIVE, un programa comercial de cálculo simbólico, que nos ayudará a ver gráficamente y a calcular con más facilidad y rapidez las soluciones de los sistemas que surjan tras nuestra modelización.

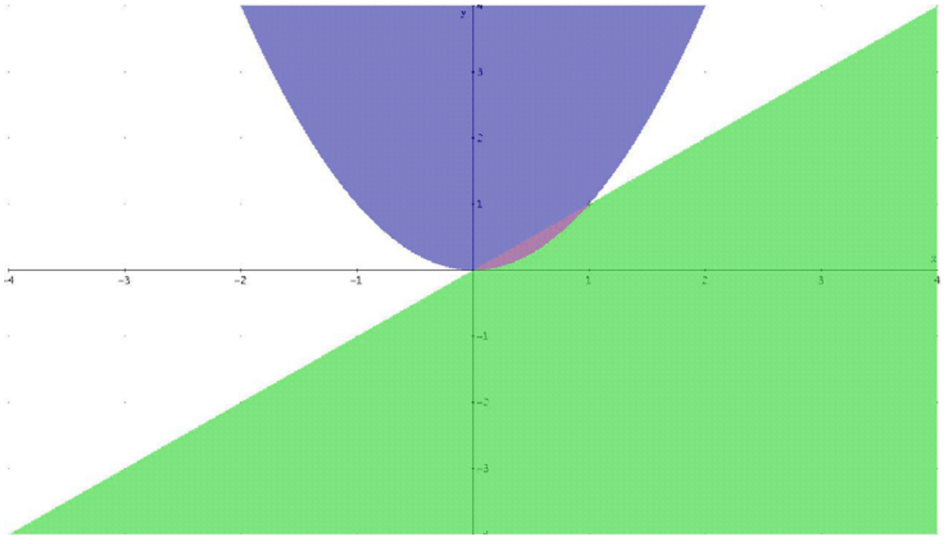
3.-FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA PARA LA MODELIZACIÓN

Vamos a recordar lo que son los sistemas de ecuaciones e inecuaciones lineales.

Una inecuación es una expresión matemática que se caracteriza por tener una desigualdad. El conjunto de soluciones de una inecuación constituye una región del espacio en el que nos encontremos y puede ser una región acotada, no acotada o vacía.

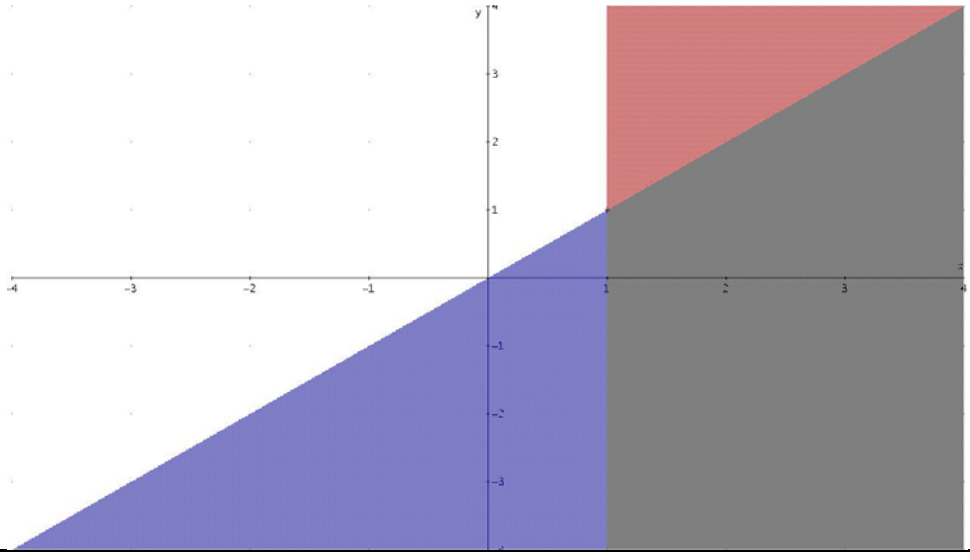
Varias inecuaciones juntas forman un sistema de inecuaciones, y la solución del mismo será la intersección de las regiones solución de cada inecuación. Como antes, esta intersección puede ser acotada, no acotada o vacía. Vamos a poner algún ejemplo:

$$\begin{cases} x > y \\ y \geq x^2 \end{cases}$$



La intersección es la parte rosa, que es una región acotada.

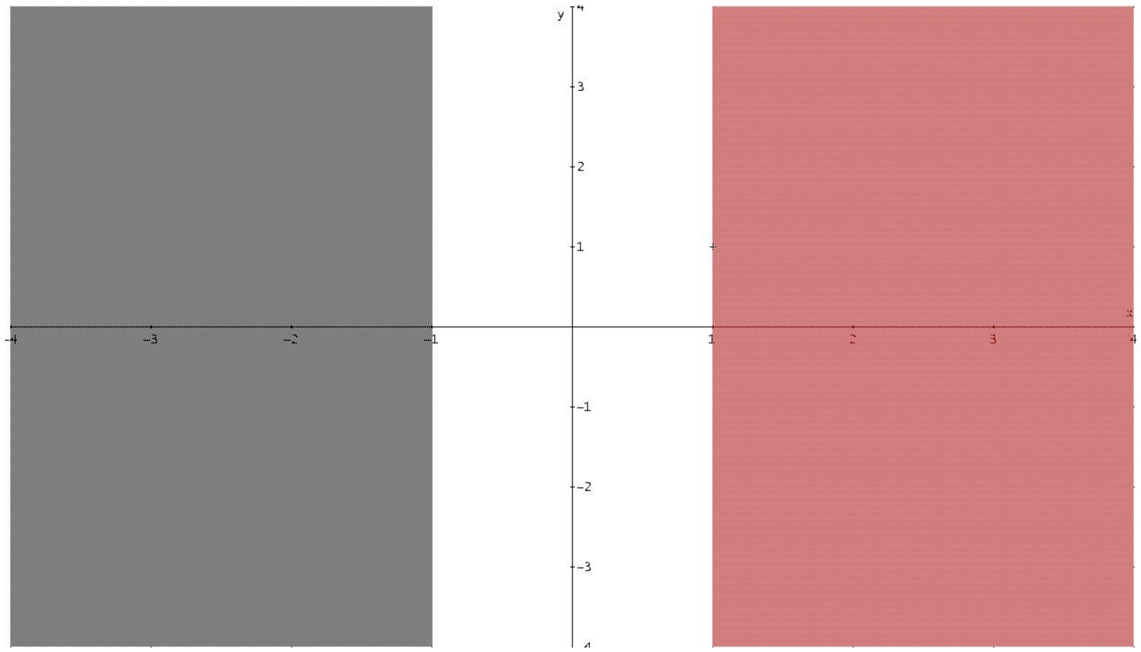
$$\begin{cases} x > y \\ x \geq 1 \end{cases}$$



Vicerrectorado de Innovación y Espacio Europeo de Educación Superior, Universidad Complutense de Madrid. **Contacto**: Prof. Inés Gómez-Chacón igomezchacon@mat.ucm.es

La intersección es la parte gris, que es una región no acotada.

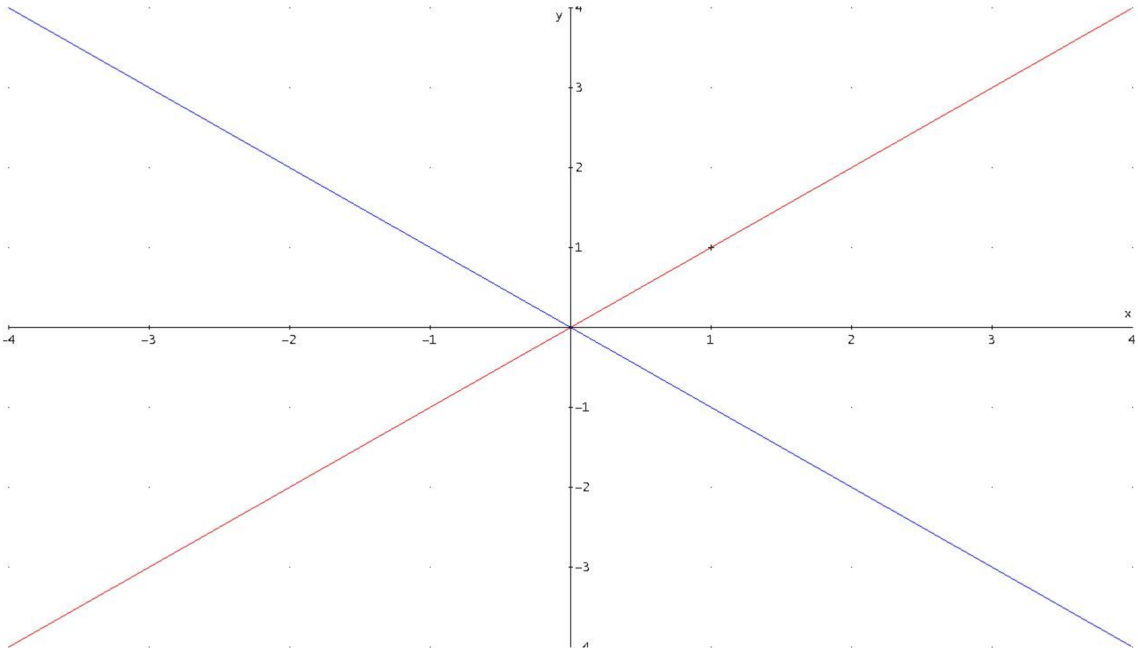
$$\begin{cases} x \leq -1 \\ x \geq 1 \end{cases}$$



La intersección es vacía, porque las dos regiones no se cortan.

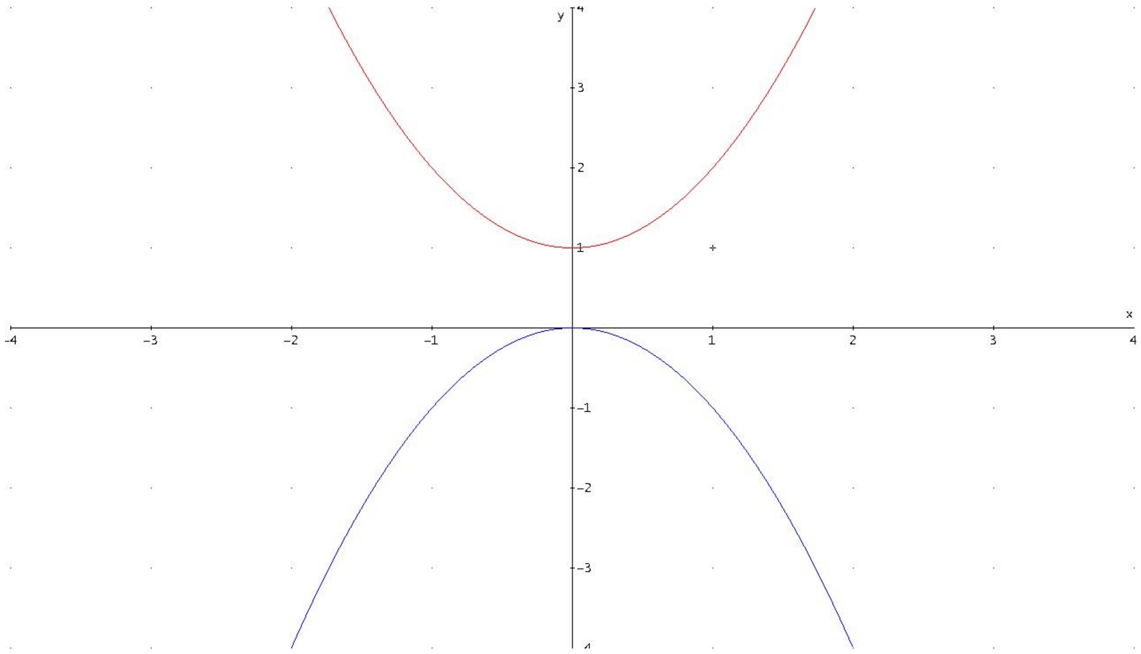
Una ecuación es una igualdad entre dos expresiones matemáticas. De nuevo, el conjunto de soluciones de una ecuación constituye una región del espacio en el que nos encontremos que puede ser una región acotada (puede constar de un único punto), no acotada o vacía.. Si tenemos un sistema de ecuaciones, el sistema puede ser compatible determinado (cuando tiene exactamente una solución), compatible indeterminado (cuando tiene infinitas soluciones) o incompatible (si no tiene ninguna solución). Veamos algún ejemplo:

$$\begin{cases} y = x \\ y = -x \end{cases}$$



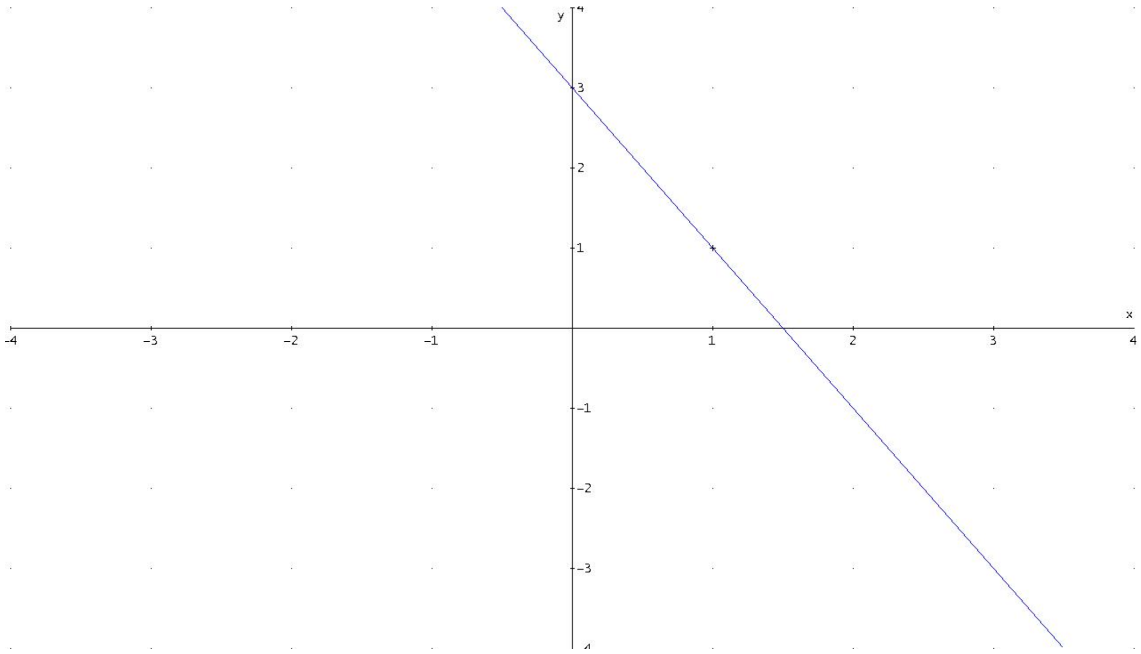
La solución es un punto.

$$\begin{cases} y = -x^2 \\ y = x^2 + 1 \end{cases}$$



La solución es vacía ya que las dos funciones no tienen ningún punto común.

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 4x + 2y = 6 \end{cases}$$



La intersección es no acotada: al representar la misma recta, las dos funciones se cortan en infinitos puntos.

Trataremos de describir las regiones planas donde se puede encontrar nuestro buque utilizando sistemas de ecuaciones e inecuaciones lineales.

Recordad que una ecuación lineal de dos variables se puede expresar de manera general así: $ax + by = c,\ a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$.

Para resolver nuestro problema, hay que saber representar geométricamente rectas, gráficas de funciones, así como los recintos que estas curvas encierran y la intersección de éstos. Nos ayudaremos con las nuevas tecnologías, en particular usando DERIVE.

4.-ENUNCIADO DEL PROBLEMA

Nuestro objetivo es encontrar el barco *Witchcraft* que se hundió en 1967. Para ello consideramos los datos siguientes:

Modeliza el Triángulo de las Bermudas para facilitar la resolución del problema así:

Aunque sabemos que el triángulo es casi equilátero, para facilitar el dibujo vamos a suponer que es un triángulo rectángulo, y utilizaremos los ejes cartesianos como dos de sus lados. Tiene un área aproximada de 1.2 millones de km², pero vamos a hacerlo a escala.

Para dibujarlo: El triángulo tiene dos lados iguales de longitud 3 (los lados que coinciden con los ejes).

La única información de la que disponemos en estos momentos es la que nos han dado otros investigadores sobre la localización del barco. Ellos han buscado ya por unas zonas del triángulo, y sabemos con certeza que ahí no está el buque que buscamos. Por tanto, debemos centrar nuestra búsqueda en la zona donde todavía no ha buscado nadie. Esta región viene dada por el siguiente sistema de inecuaciones:

$$\begin{cases} y - 2 \geq -2x \\ x \leq y \\ y < 2x + 2 \\ y \leq -2x + 4 \end{cases},\ x,\ y \in \mathbb{R}$$

Utiliza el Derive para dibujar la región.

Tras esta primera acotación de la zona, nos damos cuenta que aunque hayamos reducido mucho el lugar donde buscar el barco, todavía no somos capaces de encontrar el punto exacto donde está.

Como estamos empeñados en encontrarlo, nos ponemos a investigar cómo podríamos llegar a saber donde está. Sabemos, porque es un dato que lo podemos mirar en Internet o que nos pueden facilitar los guardacostas, que el punto exacto donde se hundió es a 1600 metros de Miami (Florida), y ese punto en nuestra representación en el Derive corresponde con el (1/2, 2).
También sabemos con certeza que el buque va a estar seguro en la región que hemos acotado anteriormente.

Para ver cuánto se ha movido el barco desde el momento de su hundimiento, nos tenemos que fijar en lo que se mueve el mar, y el movimiento del mar es consecuencia principalmente de la fuerza de la corriente marina y de los huracanes.

Para ello, nos ponemos a investigar con un objeto hundido y vemos cuánto se mueve tras el paso de un huracán y cómo influye la corriente marina sobre ella. Gracias a este experimento hemos obtenido las ecuaciones que relacionan este movimiento del objeto con el número de huracanes y la fuerza de la corriente marina, que son:

$$\begin{cases} y = 7x - h \\ 12y = 2x + c \end{cases}$$

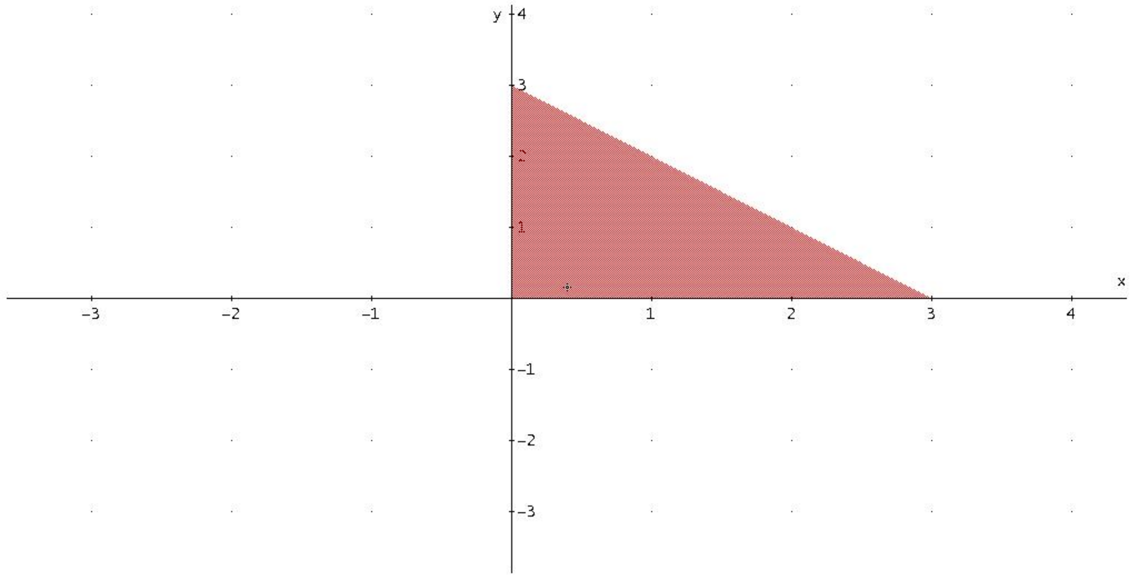
donde h son los huracanes y c las corrientes, x es lo que se ha movido el barco desde su posición inicial respecto al eje de abscisas e y lo que se ha movido desde su posición inicial respecto al eje de ordenadas.

Desde 1967 ha habido 3 huracanes, y la fuerza media de la corriente marina es 5.

Utilizar el Derive para hallar el punto exacto donde está, y dibujarlo.

5.- RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA.

1) En primer lugar hay que dibujar el Triángulo. Para ello, hay que hallar la ecuación de la hipotenusa. Como los lados miden 3 cada uno, la hipotenusa será la recta que pasa por (3,0) y (0,3), es decir, la recta y=3-x
Usamos el DERIVE para dibujar nuestro triángulo.



2) Ahora vamos a acotar la zona:

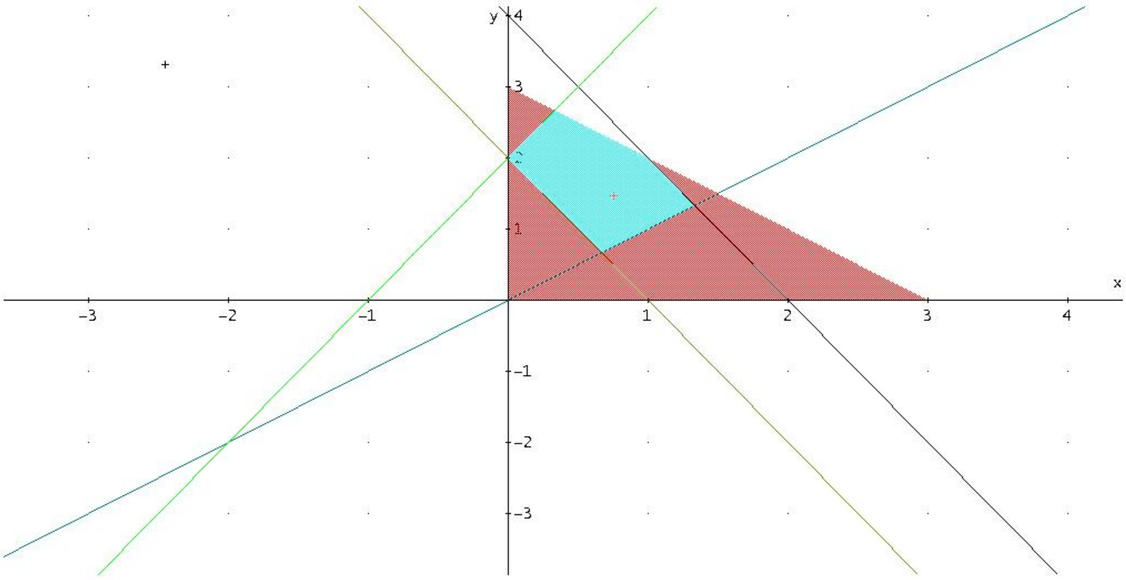
En el enunciado del problema nos daban el sistema siguiente de inecuaciones lineales:

$$\begin{cases} y-2 \geq -2x \\ x \leq y \\ y < 2x + 2 \\ y \leq -2x + 4 \end{cases}, \quad x, y \in \mathbb{R}$$

Ellos deberán darse cuenta de que la intersección de todas ellas nos va a dar la región que estamos buscando, sin olvidar que esta región estaba ya acotada por el mismo triángulo (está dentro del triángulo inicial).

Debemos recordar a los alumnos que el símbolo para intersecar las expresiones con el programa DERIVE es: ^

(y > 0) ^ (x > 0) ^ (y < -x + 3) ^ (y ≥ - 2·x + 2) ^(y ≥ x) ^ (y < 2·x + 2) ^ (y ≤ - 2·x + 4).



3) Para hallar el punto exacto donde está el barco debemos resolver el sistema de ecuaciones que nos daba el enunciado. Como tenemos los datos del número de huracanes que ha habido y la fuerza media de la corriente marina, el sistema que tenemos que resolver es:

$$\begin{cases} y = 7x - 3 \\ 12y = 2x + 5 \end{cases}$$

Usando ahora el comando SOLVE en DERIVE resolvemos el sistema:

SOLVE (y = 7·x - 3 ^ 12·y =2·x + 5, [x, y]) = (x = 1/2 ^ y = 1/2).

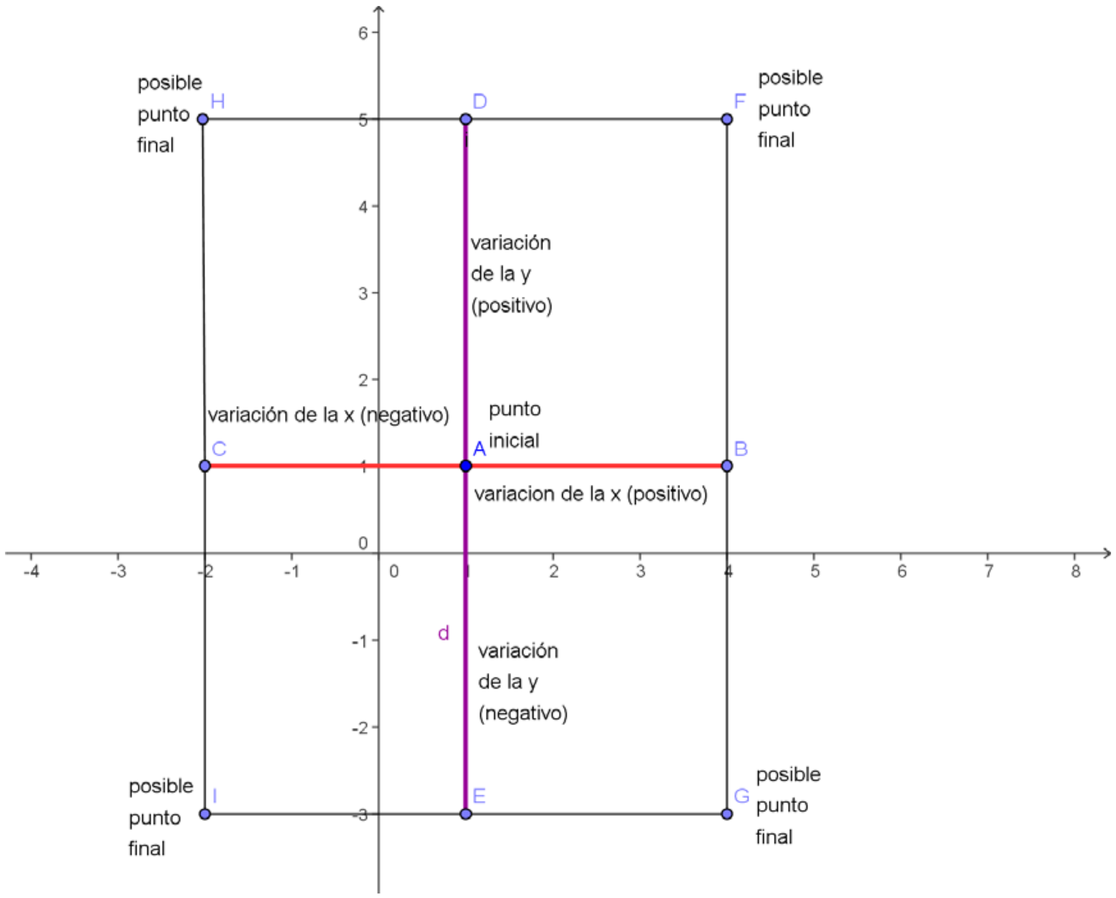
Hay que recordar que las dos incógnitas no son la solución del problema.

Para hallar las coordenadas de la posición actual del barco hay que tener en cuenta que dependen de la posición inicial, y que las dos variables del sistema es sólo la variación que las coordenadas experimentan. Entonces para hallar las coordenadas actuales bastará con sumar la variación a la posición inicial, y ya tendremos las coordenadas.

Por ejemplo, si nos dan un punto inicial (2,3) y nos dicen que x varía 3 e y varía 3/2. El punto que estaremos buscando será:

2+3=5
3+3/2=9/2

El punto será (5,9/2)



En este problema partimos del punto (1/2,2). Hay que tener en cuenta que es la distancia en valor absoluto, con lo cual tendremos que sumarle y restarle la variación, ya que al estar en valor absoluto, no sabemos si varía en sentido positivo o negativo. Entonces nos van a salir 4 puntos posibles. Teniendo esto en cuenta, como la variación de x es ½ y la de y es también ½ , las posibles coordenadas del barco serán:

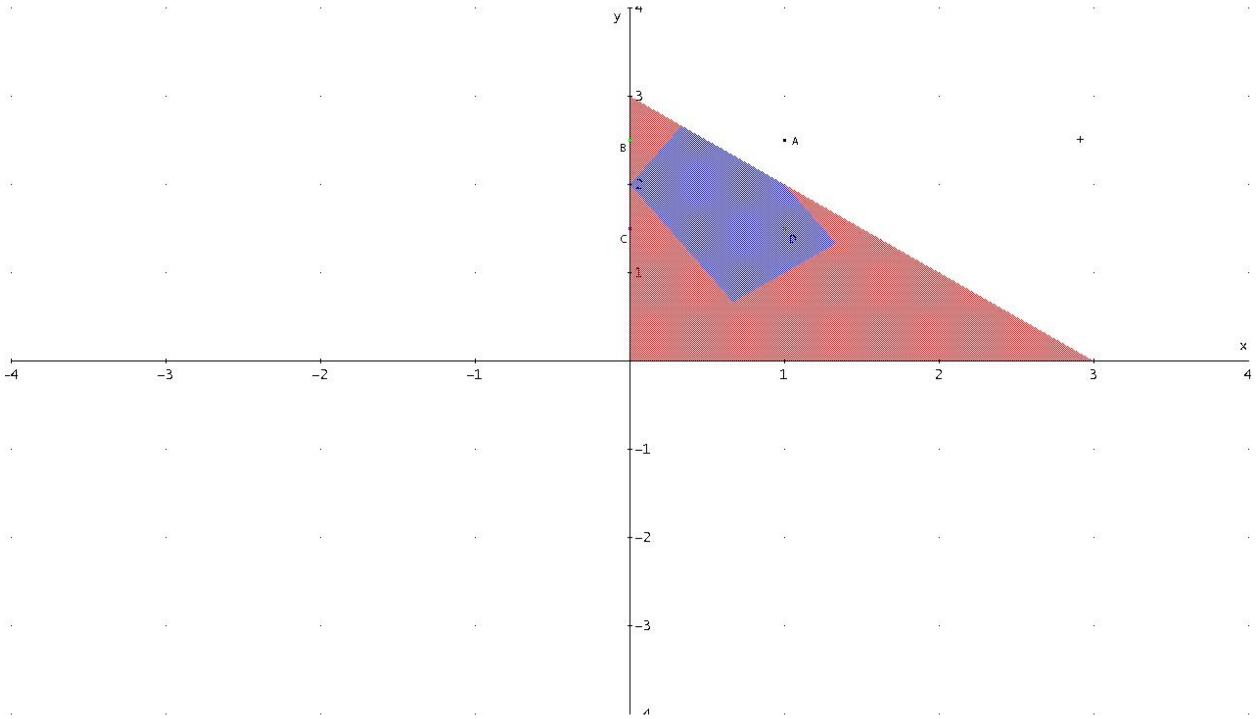
1/2+1/2 =1, 2+1/2=5/2 → (1,5/2)

1/2+1/2=1, 2-1/2=3/2 → (1,3/2)

1/2- 1/2=0, 2-1/2=3/2 → (0,3/2)

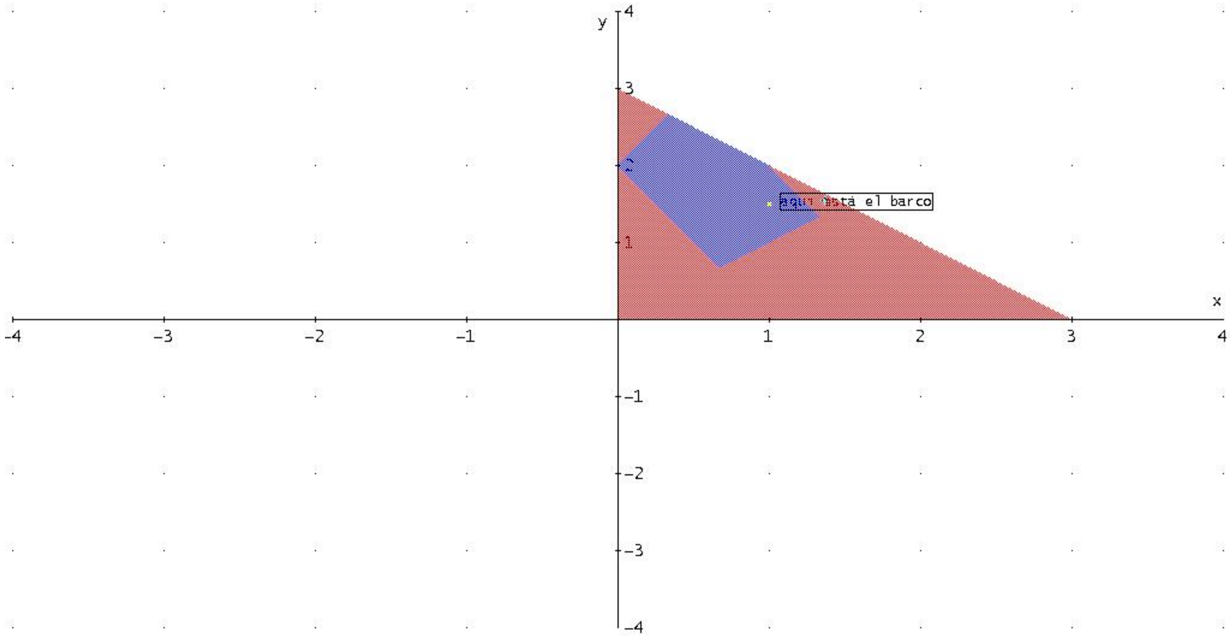
1/2-1/2=0, 2+1/2=5/2 → (0,5/2)

Si dibujamos en el DERIVE los cuatro puntos (para dibujar puntos hay que ponerlo entre corchetes), vemos que sólo uno de ellos está dentro del recinto que habíamos delimitado.



El único punto que está dentro de nuestra zona es el punto D=(1,3/2), por tanto, es el punto que estamos buscando.

El dibujo final quedaría así:


y
x
aqui está el barco
-4
-3
-2
-1
1
2
3
4