



Tema: Problemas específicos de la Didáctica del Análisis

Funciones y gráficas

Objetivos

- Analizar la evolución del concepto de función a lo largo de la historia, con especial énfasis en la conexión con los diferentes conocimientos imperantes en cada época.
- Analizar la relación proceso→objeto como elemento cognitivo epistemológico en la construcción del concepto de función.
- Introducir al alumnado en las diferentes formas de representar una relación entre variables.
- Analizar las dificultades, errores y obstáculos relativos a la dependencia funcional entre variables que manifiesta el alumnado así como sus posibles causas.
- Potenciar los aspectos globales y visuales al tratar la dependencia entre variables.
- Analizar las ventajas e inconvenientes del enfoque analítico versus la modelización en el proceso de enseñanza de la relación entre variables.
- Potenciar el uso de software educativo en la enseñanza y aprendizaje de las funciones.

Contenidos

- Diferentes nociones de la relación funcional entre variables a lo largo de la historia de la matemática. Sus implicaciones epistemológicas.
- La dificultad que presenta para el alumnado de secundaria la noción abstracta de relación funcional entre variables. Problemas de traducción entre los diferentes sistemas semióticos de presentación.
- Imagen y definición del concepto de función. Implicaciones.
- Diferentes significados subyacentes a la representación gráfica de una función.
- Las funciones lineales, afines, cuadráticas, de proporcionalidad inversa, exponenciales, logarítmicas y potenciales como modelos de fenómenos reales. El concepto de función periódica y su construcción a partir de nociones sobre funciones elementales.
- Introducción de la noción de continuidad de funciones y tendencias asintóticas mediante representaciones gráficas y su relación con los fenómenos que modelizan.
- Uso de software educativo en el tratamiento gráfico, numérico y algebraico de la relación funcional entre variables.

Tareas

1. Elaborar un módulo de aprendizaje en formato web y que incorpore aplicaciones interactivas para los estudiantes de Secundaria sobre *funciones y gráficas*, usando software *Geogebra*, *Derive*. Se darán orientaciones complementarias en clase.
2. Didáctica del Análisis. Ésta será una tarea de investigación que tendrá como base las referencias bibliográficas y otras que los componentes del grupo propongan. Teniendo en cuenta el apartado “contenidos” donde se han explicitado algunos temas en los que te puedes apoyar para desarrollar esta tarea. Realiza también en formato web ¿Cuáles son los aspectos emergentes en la Didáctica del análisis hoy?

Pautas para la realización del trabajo

Se presentan a continuación algunas situaciones generadoras de actividad que puedes utilizar en la elaboración del módulo de aprendizaje para estudiantes de Secundaria.

1. *Proporcionar ejemplos sobre la noción de función.*
2. *Diferentes formas del concepto de función a lo largo de la historia.* Se puede abordar la noción de función como tabla numérica para derivar leyes cuantitativas sobre fenómenos astronómicos (Babilonia y Grecia). Primeros intentos de representación gráfica de la dependencia entre variables (Edad Media). Primeras definiciones del concepto de función y aparición de las expresiones algebraicas (Edad Moderna).
3. *Errores más comunes que se presentan al interpretar mediante un gráfico una relación funcional.* Se pueden estudiar mediante situaciones concretas los siguientes: correspondencia entre la gráfica y un dibujo que describe la situación sujeta a análisis (dificultad de contemplar la gráfica como una representación de la relación abstracta entre variables); dificultades de lectura, y relación entre lecturas, de intervalos relativos a la variable dependiente y a la variable independiente.
4. *Una función de varias variables.* Mediante una tabla numérica se presenta una cuádruple relación entre variables. El alumnado deberá figurar gráfica y verbalmente la relación entre variables dos a dos, obtener las correspondientes relaciones numéricas así como sus expresiones algebraicas. Finalmente mediante las relaciones entre las variables, expresadas verbalmente, se concluirá en una expresión conjunta.
5. *Crecimiento lineal y exponencial.* Aproximación numérico-geométrica a los patrones de crecimiento lineal y exponencial asociados a diferencia y cociente constantes respectivamente.
6. Situaciones diversas para la presentación conjunta de la relación exponencial y logarítmica: el rumor, plantas acuáticas, estrellas de mar, impacto de la peste negra sobre la población europea, dosis de un medicamento en la sangre. Se analiza y resalta la presentación conjunta de la relación exponencial y logarítmica como inversas de la relación entre dos variables. Símbolos y significados de los parámetros que definen, algebraicamente, una relación exponencial y una relación logarítmica.
7. La gráfica de una función y su relación con los parámetros de su expresión analítica mediante el uso de software educativo. Mediante los programas de ordenador en los que combinan las tres representaciones (tabla numérica, expresión algebraica y gráfica) favoreciendo una visión integradora del concepto de función. Por ejemplo, Winplot (<http://math.exeter.edu/rparris>) o GeoGebra.

¿Qué te debería aportar como futuro profesional el trabajar este tema? Elementos para una síntesis

- Mediante las situaciones para la acción se someten a reflexión las nociones que el estudiante para profesor tiene sobre el concepto de función. Se analiza el estatus epistemológico del concepto de función a través de ejemplos históricos.
- Un punto de partida es la primera situación mediante la que se piden ejemplos de funciones. Se clasifican y se analizan los diferentes ejemplos. Tales formas de presentar una función se relacionan con las cuatro formas de dar una función y sus posibles traducciones. Se analizan

las traducciones presentes en la enseñanza.

- Los obstáculos, no contemplar la relación funcional como una relación abstracta entre variables, se analiza desde los errores manifestados por el alumnado de secundaria. La interpretación del dibujo de forma literal, como si visualizara una situación real, los errores cometidos al calcular valores y diferencias de valores (incrementos) son analizados mediante las situaciones propuestas.
- Se presentan otras situaciones, para el aprendizaje y enseñanza, en las que los elementos clave son las diferentes representaciones que conducen a diferentes patrones numéricos que caracterizan las relaciones funcionales, así como la relación que existe entre estos y las representaciones mediante el lenguaje algebraico. El uso de software educativo específico juega un papel importante para superar determinadas restricciones que se plantean en el aula tradicional al intentar profundizar en el concepto de función y sus diferentes representaciones.
- Se profundiza en la función exponencial desde el enfoque realista.

Evaluación

Se indica brevemente algunos de los elementos que se tendrán en cuenta en para la evaluación del trabajo:

- Análisis de la ubicación curricular del concepto de función en Secundaria Obligatoria y Bachillerato posibles restricciones y orientaciones.
- Diseño de una intervención didáctica sobre la introducción del concepto de función en la Secundaria Obligatoria.
- Diseño de actividades sobre el desarrollo del concepto de función en el Bachillerato, distinguiendo y justificando orientaciones y enfoques diferenciados para opciones científico-tecnológicas de ciencias sociales.
- Precisión en los elementos y problemas de la Didáctica del Análisis hoy.
- Incorporación de las Nuevas Tecnologías de la Comunicación y de la Información en el desarrollo del tema.

Bibliografía y recursos

Artigue, M. (1991). *Analysis*, en D. Tall (editor) *Advanced Mathematical Thinking*. Kluwer Academic Publishers.

Ayers, T., Davis, G., Dubinsky, E., y Lewin, P. (1988) Computer experiences in learning composition of functions, *Journal for Research in Mathematics Education*, 19, 246-259.

*Azcarate, C. (1992). 'Estudio de los esquemas conceptuales y de los perfiles de unos alumnos de segundo de BUP en relación con el concepto de pendiente de una recta', *Epsilon*, 24, 9-22.

Bell, A. y Janvier, C (1981) The interpretation of graph representing situations, *For the learning of mathematics*, 2, 34-42.



- *Carlson, M.; Oethrtman, M. (2005) Key aspects of knowing and Learning the concept of function, Researcher Sampler, MAA ONLINE, The mathematical Association of America. (www.maa.org/t_and_l/sampler/rs_9.html).
- *COMAP (1999). *Las matemáticas en la vida cotidiana*. Addison-Wesley Iberoamericana S.A. y Universidad Autónoma de Madrid. Madrid. (Traducción de la obra: *For all Practical Purpose: Introduction to Contemporary Mathematics*. W.H. Freeman and Co. New York. 1994).
- *Deulofeu, J., Azcárate, C. (1989). *Funciones y Gráficas*. Síntesis. Madrid.
- Dubinsky, E. Harel, G. (1992). 'The Nature of the Process Conception of Function' en Harel, G. y Dubinsky, E (editores) *The Concept of Function. Aspects of Epistemology and Pedagogy*. Mathematical Association of America, 85-106.
- Eisenberg T. (1991). 'Functions and associated learning difficulties', en D. Tall (editor) *Advanced Mathematical Thinking*. Kluwer Academic Publishers.
- Gonzales, M. y Carr, W. (1986) Impact of the Black Death (1348-1405) on World Population: Then and Now, *Mathematics Teacher*, 92-94 y 146.
- Harel, G. y Dubinsky, E (editores) *The Concept of Function. Aspects Epistemology and Pedagogy*. Mathematical Association of America, 85-106.
- Harel, G. y Tall, D. (1991). 'The General, the Abstract, and the Generic in Advanced Mathematics', *For the Learning of Mathematics*, 11 (1), 38-42.
- *Janvier, C. (1983). Représentation et Compréhension. Un exemple: le concept de fonction. *Bulletin AMQ*, October, 22-28.
- Kerslake, D. (1981). 'Graphs', en CSMS *Children's understanding of Mathematics: 11-16*. The Alden Press. Great Britain.
- Kleiner, I.(1989). 'Evolution of the function concept: a brief survey'. *The College Mathematics Journal*, 20, 282-300.
- *Lacasta, E. y Pascual, J.R. (1998). *Las funciones y los gráficos cartesianos*. Educación Matemática en Secundaria. Editorial Síntesis. Madrid.
- Leinhardt, G., Zaslavsky, O. y Stein, M.K. (1990). 'Functions, graphs, and graphing: Tasks, Learning, and Teaching', *Review of Educational Research*, 60 (1), 1-64.
- Philips, E. (1991). *Patterns and Functions*. Addenda Series grades 5-8, Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics. N.C.T. M. Reston. Virginia.
- *Ruiz Higuera, L. (1998) La noción de función: Análisis epistemológico y didáctico. Universidad de Jaen.
- *Shell Centre (1990). *El Lenguaje de funciones y gráficas*. (Traducción de Félix Alayo). Ministerio de Educación y Ciencia. Servicio Editorial Universidad del País Vasco.
- Shlomo, V. y Dreyfus, T. (1989) Images and definitions for the concept of functions, *Journal for Research in Mathematics Education*, 20 (4), 356-366.



*Tall, D. (1996). 'Functions and Calculus', en A. Bishop *et al* (editores) *Internacional Handbook of Mathematics Education*, Part 1, 289-324. Kluwer Academic Publishers. Dordrecht. The Netherlands.

Tall, D. (editor). (1991). *Advanced Mathematical Thinking*. Kluwer Academic Publishers.

(Otras referencias interesantes sobre el tema puedes encontrarlas en las revistas UNO, SUMA, Números, SIGMA, que están en la biblioteca de la Facultad).