



FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA ESCENARIO 1

Dominio II: Conocimientos de Educación Matemática

Tema: Sistemas de Ecuaciones Algebraicas

Asignaturas involucradas en la formación universitaria: METODOLOGÍA
MATEMÁTICA

PROFESORA: Inés M. Gómez-Chacón

CARÁCTER/CRÉDITOS: 7,5

DEPARTAMENTO: ÁLGEBRA

Facultad de Ciencias Matemáticas

Universidad Complutense de Madrid

Palabras clave: didáctica del Álgebra, historia del Álgebra, transposición didáctica



Tema: Problemas específicos de las didácticas de las diferentes materias.

Razonamiento y competencia algebraica

Objetivos

- Trabajar sobre la transposición didáctica del contenido matemático para ser enseñado en el contexto de Secundaria.
- Conocer problemas específicos de la Didáctica del Álgebra.
- Analizar el desarrollo del álgebra desde la perspectiva epistemológica-histórica y psicológica.
- Analizar la relación proceso→objeto como elemento cognitivo epistemológico en la construcción y desarrollo del lenguaje y razonamiento algebraico.
- Potenciar una enseñanza del álgebra desde la perspectiva de la conexión entre diferentes lenguajes y la integración de múltiples sistemas de representación.
- Analizar la competencia algebraica deseable en el alumnado de secundaria. Enfoque funcional versus enfoque algorítmico.
- Analizar los obstáculos, errores y dificultades que presenta el aprendizaje del lenguaje algebraico.

Contenidos

- Desarrollo histórico del álgebra. Álgebra y geometría en la matemática Clásica. El álgebra geométrica de los babilonios. *Yabra* (transposición) y *Mucabola* (reducción) en el legado árabe. El desarrollo del álgebra en el Medioevo. Vieta. Descartes. Euler.
- Habilidades cognitivas y afectivas que mediatizan el desarrollo de la competencia algebraica.
- Lenguajes, representaciones y entornos para comunicar y pensar sobre el lenguaje algebraico: expresiones, ecuaciones, tablas, gráficas cartesianas, matrices, lenguajes naturales o construcciones híbridas, representaciones geométricas, figuraciones físicas, etc. Entornos cibernéticos y tradicionales.
- Análisis epistémico de la competencia algebraica: de las acciones al proceso y al objeto. Transición de la aritmética al álgebra.
- Concepto de variable en álgebra. Enfoque funcional al álgebra.
- Abstracción y cognición en el aprendizaje algebraico. El sistema matemático de signos como medio de comunicación y aprendizaje del álgebra. Campos semánticos y elementos sintácticos del lenguaje algebraico.
- Obstáculos, errores y dificultades en álgebra.
- Álgebra lineal. Resolución de sistemas lineales.
- Álgebra y Nuevas Tecnologías de la Comunicación y de la Información

**Tareas:**

1. Elaborar un módulo de aprendizaje en formato web y que incorpore aplicaciones interactivas para los estudiantes de Secundaria sobre *Razonamiento y competencia algebraica*.
2. Didáctica del álgebra. Ésta será una tarea de investigación que tendrá como base las referencias bibliográficas y otras que los componentes del grupo propongan. Teniendo en cuenta el apartado “contenidos” donde se han explicitado algunos temas en los que te puedes apoyar para desarrollar esta tarea. Realiza también en formato web ¿Cuáles son los aspectos emergentes en la Didáctica del álgebra hoy?

Pautas para la realización del trabajo

Se presentan a continuación algunas situaciones generadoras de actividad que puedes utilizar en la elaboración del módulo de aprendizaje para estudiantes de Secundaria.

- *Fragmentos de historia del álgebra.*
- *Cuestionario diagnóstico acerca del manejo del concepto de variable en álgebra. Respuestas del alumnado a un test sobre álgebra que conlleva las siguientes tareas: sustitución y simplificación; construir, interpretar y resolver ecuaciones.*
- *Estrategias para la resolución de ecuaciones y sistemas lineales desde la perspectiva del sistema matemático de signos como medio para el aprendizaje y la comunicación en álgebra.*
- *Métodos para resolver problemas que describen mediante texto una situación.* Se analizan tipos de situaciones que pueden abordarse mediante métodos aritméticos de inferencias analíticas sucesivas, métodos analíticos de exploraciones sucesivas, método cartesiano y el uso de hojas de cálculo.
- Problemas con software informático para resolución de problemas algebraicos por ejemplo del tipo: <http://www.fi.uu.nl/wisweb/en/welcome.html> o con problemas que plantees con el software GeoGebra (<http://www.geogebra.at>), un programa interactivo en el que se combinan, por partes iguales, el tratamiento geométrico y el algebraico.
- *La ecuación de segundo grado desde el enfoque realista.* Se analiza el proceso, a largo plazo, de alcanzar el algoritmo de solución partiendo de situaciones aritméticas, combinando métodos de diferencias, gráfico geométricos y funcionales, el método babilonio y problemas contextualizados.
- Los sistemas de ecuaciones desde el enfoque realista.



¿Qué te debería aportar como futuro profesional el trabajar este tema? Elementos para una síntesis

- Enfrentarse a ejemplos históricos de construcción del álgebra introduce a los futuros profesores en las dificultades de construcción, inherentes, a todo sistema matemático de signos, donde la semántica y la sintaxis juegan un papel clave en la construcción y desarrollo del sistema.
- Discutir y analizar los diferentes significados de las expresiones algebraicas o textos que conducen a una expresión algebraica permite contemplar las diferentes expresiones algebraicas como operaciones aritméticas de cálculo, ecuaciones o expresiones funcionales.
- El análisis de las respuestas dadas por el alumnado de secundaria a un test sobre álgebra permite introducir y reflexionar sobre las diferentes formas de interpretar las letras utilizadas como incógnitas: evaluada, como objeto, no utilizada, incógnita específica, número generalizado, variable. La utilización de las categorías anteriores para definir niveles de comprensión en tareas algebraicas permite reflexionar y sacar conclusiones sobre las dificultades que muestra el alumnado con el álgebra. Implicaciones para la enseñanza y aprendizaje deben obtenerse como conclusión de tales reflexiones y análisis.
- La resolución de ciertas ecuaciones lineales y el significado del signo de igualdad se apoya en el conocimiento básico aritmético. Sin embargo, para poder progresar hacia métodos generales, dado que no es posible resolver todo tipo de ecuaciones lineales con tal conocimiento aritmético, es necesario romper con ciertas nociones básicas de la aritmética y construir una nueva sintaxis, en este caso algebraica.
- Un nuevo concepto de ecuación se construye a partir de nuevas acciones, operar sobre la variable o incógnita, introducidas que proveen de significado a la igualdad de expresiones que subyace en la representación algebraica de una ecuación. Se plantea, así, un enfoque semántico para el aprendizaje del álgebra, en vez del tradicional sintáctico, y esto requiere el uso de modelos concretos: balanza, visual-geométrico y hojas de cálculo. Sin embargo tal enfoque no garantiza, por si solo, la construcción de la sintaxis algebraica. Es necesario trasladar y separar las acciones y operaciones en el modelo concreto y construir la nueva sintaxis requerida en el sistema matemático de signos que conforma el álgebra.
- Materializaciones de los modelos: balanza, tablero de ecuaciones, cuadrados mágicos, dominós algebraicos, juegos de tablero, etc.
- La construcción del conocimiento, en este caso el algoritmo más conocido para la resolución de la ecuación de segundo grado, es el motivo de este desarrollo centrado en la resolución de problemas y en una de sus acepciones denominada *telescope learning*. A través de diferentes situaciones y utilizando diversas representaciones se construye el algoritmo a partir de conocimiento trabajado.
- Software de cálculo simbólico (Maple, Matemática, Derive), hojas de cálculo. Software específico. Calculadora científica o gráfica. Con la prevención de que el uso de entornos informáticos desatiende la operatoria con expresiones



algebraicas, dado que ésta se realiza de forma automática. También conviene resaltar la necesidad de interpretar adecuadamente las soluciones ofrecidas por los programas. Éstas pueden depender del tipo de algoritmo implementado e incluso del modo en que se introduzcan los datos.

Evaluación

Se indica brevemente algunos de los elementos que se tendrán en cuenta en para la evaluación del trabajo:

- Discusión y análisis de la posición del álgebra en el curriculum de ESO y de Bachillerato.
- Proponer situaciones de aprendizaje en las que se utilizan múltiples representaciones y entornos de aprendizaje, enfatizando el desarrollo del pensamiento algebraico.
- Precisión en los elementos y problemas de la Didáctica del Álgebra hoy.
- Incorporación de las Nuevas Tecnologías de la Comunicación y de la Información en el desarrollo del tema.

Bibliografía y recursos

- *APPA Group (2004) A toolkist for analysi in approaches to algebra. En Stacey, K; Chick, H.; Kendal, M., The future of the teaching and Learning of Algebra. The 12TH ICMI Study. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. Pp. 73-96
- Bunt, L., Jones, P. y Bedient, J. (1976). *The Historical Roots of Elementary Mathematics*. Dover Publications Inc. New York.
- Cajori, F. (1993) *A History of Mathematical Notations*. Dover Publications Inc. New York.
- Cardano, G. (1993). *Ars Magna or the rules of Algebra*. Dover Publications Inc. New York.
- *COMAP (1999). *Las matemáticas en la vida cotidiana*. Addison-Wesley Iberoamericana S.A. y Universidad Autónoma de Madrid. Madrid. (Traducción de la obra: *For all Practical Purpose: Introduction to Contemporary Mathematics*. W.H. Freeman and Co. New York. 1994).
- *Drouhard, J. P. y Teppo, A. R. (2004) Symbols and Language, En Stacey, K; Chick, H.; Kendal, M., The future of the teaching and Learning of Algebra. The 12TH ICMI Study. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. Pp. 227-264.
- *Fillooy Yagüe, E. (1993) Tendencias cognitivas y procesos de abstracción en el aprendizaje del álgebra y de la geometría. *Enseñanza de las Ciencias*, 11(2), 160- 166.
- Fillooy, E. y Sutherland, R.(1996) Desing curricula for teaching and learning algebra, en A. Bishop *et al* (editores) *International Handbook of Mathematics Education*, Kluwer Academic Publishers. Dordrecht. The Netherlands. Part 1, 139-160.
- *Grupo Azarquiel (1993). *Ideas y actividades para enseñar álgebra*. Matemáticas, cultura y aprendizaje. Editorial Síntesis. Madrid.
- Kieran, C. (1992) The learning and teaching of school algebra, en H. A. Grows (editor) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. A project of the National Council of Teachers of Mathematics. Macmillan Publishing Company. New York.



- *Kieran, C. (2004) The core of Algebra: Reflections on its Main Activities, En Stacey, K; Chick, H.; Kendal, M., The future of the teaching and Learning of Algebra. The 12TH ICMI Study. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. Pp. 21 -34.
- *Kindt, M. (1998). '-b partido por 2a'. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 33, 13-26.
- *Labraña, A., Plata, A., Peña, A., Crespo, E., y Segura, R. (1995). *Algebra lineal. Resolución de sistemas de ecuaciones*. Educación Matemática en Secundaria. Editorial Síntesis. Madrid
- *Meavilla Seguí, V. (1995). 'Estudio sobre el comportamiento visual en álgebra de los alumnos del segmento educativo 14-16'. *Enseñanza de las Ciencias*, 13 (1), 97- 105.
- *NCTM (1997) *A framework for constructing a vision of algebra. A discusión document*. http://www.nctm.org/about/frequently_requested/algebra2.pdf.
- NCTM (2000) *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston: NCTM. <http://standards.nctm.org/document/index.htm>.
- *Palarea Medina, M.M. (1999) La adquisición del lenguaje algebraico: reflexiones sobre una investigación. *Números. Revista de didáctica de las matemáticas*, 40, 3-28.
- *Rojano, T. (1994) La matemática escolar como lenguaje. Nuevas perspectivas de investigación y enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias*, 12(1), 45-46.
- *Shell Centre for Mathematical Education (2003) Problemas con pautas y números. Universidad del País Vasco.
- *Socas M. (1997) Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la etapa secundaria. En L. Rico (Ed.): *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria*, pp. 125-148. Barcelona: ICE Universitat Barcelona/Editorial Horsori.
- *Socas M., Camacho M., Hernández J. (1998) Análisis didáctico del lenguaje algebraico en la enseñanza secundaria, *Revista Interuniversitaria de Formación del Profesorado*, n. 32, pp. 73-86.
- Socas M., Camacho M., Palarea M.M., Hernández J. (1989) *Iniciación al álgebra*. Madrid: Editorial Síntesis.
- Socas, M. M.; Camacho, M.; Palarea, M. y Hernández, J. (1989) *Iniciación al Álgebra*. Síntesis. Madrid.
- *Stacey, K; Chick, H.; Kendal, M. (2004) The future of the teaching and Learning of Algebra. The 12TH ICMI Study. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers
- *Trigueros, M. Reyes, A. Ursini, S. y Quintero, R. (1996). 'Diseño de un cuestionario de diagnóstico acerca del manejo del concepto de variable en el álgebra'. *Enseñanza de las Ciencias*, 14(3), 351-363.
- Vernet, J. (1999). *Lo que Europa debe al Islam de España*. El Acantilado. Barcelona.
- Wagner, S. y Kieran, C. (editores) (1989). *Research issues in the Learning and Teaching of Algebra*. Lawrence Erlbaum Associates. National Council of Teachers of Mathematics. Reston. Virginia.
- Wigley, A., Rooke, D., Hart, M. y Bell, A. (s.f.). *Algebra. Ideas and Material for years 2-5 in the secondary education*. South Notts Project. Shell Centre for Mathematical Education. University of Nottingham. England.
- (Otras referencias interesantes sobre el tema puedes encontrarlas en las revistas UNO, SUMA, Números, SIGMA, que están en la biblioteca de la Facultad).