FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA ESCENARIO 2

Dominio I: Conocimientos de Matemáticas

Tema: Funciones reales de una variable real. La función exponencial. La función logarítmica.

Asignaturas involucradas en la formación universitaria: Análisis de variable real, Laboratorio de Matemáticas, Cálculo Diferencial, Cálculo Integral, Ecuaciones Diferenciales.

Palabras clave: funciones reales de variable real, función exponencial, función logarítmica, logaritmos, cambios de base de logaritmos, gráficas de funciones.

Estructura del Tema:

1. Introducción.
    1.1. Funciones de una variable real: dominio, rango, gráfica.
2. La función exponencial.
    2.1. Definición y ejemplos.
    2.2. Propiedades.
3. La función logarítmica.
    3.1. Definición y ejemplos.
    3.2. Propiedades

Contexto: Se resumen muy brevemente en este documento los conocimientos previos del tema que los estudiantes de la especialidad de Metodología han adquirido tras sus estudios de los tres primeros cursos el la Facultad de Ciencias Matemáticas. Son estos los conocimientos básicos los que necesitan para preparar la tarea descrita en el Escenario 2.
En este documento no se incluyen los aspectos relacionados con la modelización con GeoGebra por encontrarse dichos aspectos desarrollados en los materiales complementarios incluidos en los materiales (manual de uso de GeoGebra, ejercicios con GeoGebra, clase impartida por profesor experto).

1. Introducción.

1.1. Funciones de una variable real: dominio, rango y gráfica.

Recordamos la definición de función de una variable real con valores reales. Damos la definición de dominio y rango y revisamos también la idea de gráfica de una función incluyendo ejemplos.

Una función de una variable real con valores reales es una regla que asigna a cada elemento de un subconjunto de la recta real $A \subseteq \mathbb{R}$ un elemento de un subconjunto de la recta real $B \subseteq \mathbb{R}$. Se denota así: $f : A \to B$.
El conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ de número reales donde la función está definida se denomina *dominio* de la función. El *rango* (*recorrido* o *imagen*) de la función $f : A \to B$, es el subconjunto de B de posibles valores de $f(x)$ cuando x varía en el dominio de la función.

Ejemplo 1: Consideramos la función $f(x) = \sqrt{x+2}$. El dominio de la función consiste de los números reales que hacen mayor o igual a 0 el radicando. Concretamente:
$\mathrm{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq -2\} = [-2, \infty)$. El rango de la función es
$\mathrm{Rango}(f) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\} = [0, \infty)$.

Ejemplo 2: Consideramos la función $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - x}$. El dominio de la función consiste de los números reales que hacen el denominador no nulo. Concretamente:
$\mathrm{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0,1\} = (-\infty, 0) \cup (0,1) \cup (1, \infty)$.

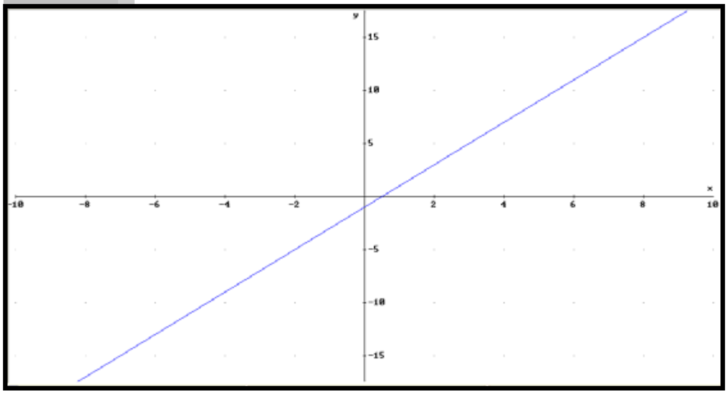
Ejemplo 3: Consideramos ahora la siguiente función definida a trozos y la evaluamos en los puntos pedidos.

$$g(x) = \begin{cases} x \sin x, & \text{si } x < 2 \\ 3x^2 + 1, & \text{si } x \geq 2 \end{cases}, \quad g(\pi)?, g(2)?, g(-\pi)?$$

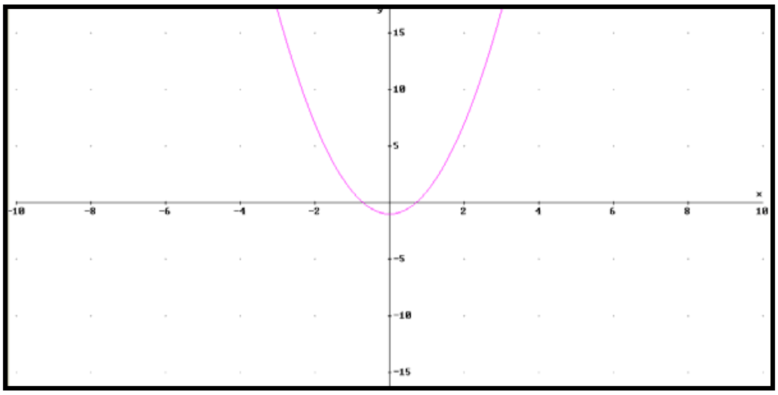
La función está definida para todos los reales, con lo que $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$. Evaluamos la función en los puntos dados observando en qué parte de la división del dominio caen. Concretamente: $g(\pi) = 3\pi^2 + 1$, $g(2) = 13$, $g(-\pi) = -\pi \sin(-\pi) = 0$.

Para terminar esta sección recordamos la noción de gráfica de una función real de una variable real. La gráfica de una función es el método más común para visualizarla. Por definición, la gráfica de una función $f : A \to B$ es el subconjunto del plano siguiente:
$\{(x, y) : y = f(x),\ x \in A\}$.
A modo de ejemplos incluimos la gráfica de una función lineal, de una polinomial de grado 2 y de una polinomial de grado 3.

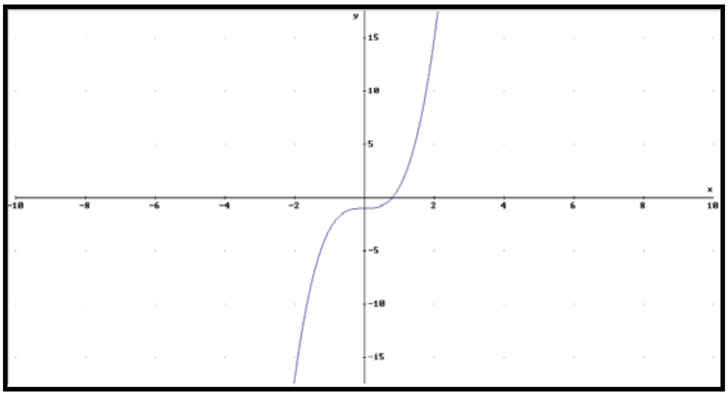
Ejemplo 4: Gráfica de la función lineal $y = 2x - 1$.



Ejemplo 5: Gráfica de la función polinomial de grado 2: $y = 2x^2 - 1$.



Ejemplo 6: Gráfica de la función polinomial de grado 3: $y = 2x^3 - 1$.



2. La función exponencial.

2.1. Definición y ejemplos.

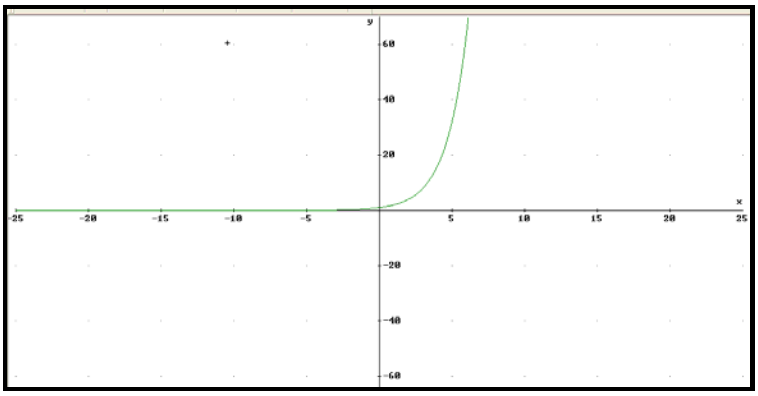
Se llama función exponencial en base a, con $a > 0$ y $a \neq 1$, a la función siguiente:

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ x \to f(x) = a^x$.
Recordemos qué significa esto. Si $x = n$ es un entero positivo, entonces
$a^n = a \cdot a \cdot a \cdots a$ (n veces). Entonces, $a^0 = 1$ y $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$, si n es un entero positivo.

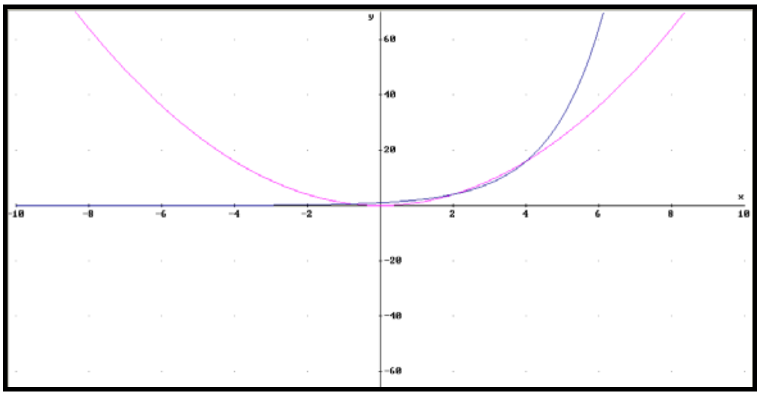
Además, $a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p}$, $p,\ q \in \mathbb{N}$. Definimos la función en los irracionales por un proceso de aproximación recordando que todo irracional se puede expresar como límite de una sucesión de racionales.

Ejemplo 1: Consideremos la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ x \to f(x) = 2^x$.

Si representamos la función gráficamente con ayuda del programa DERIVE, obtenemos lo siguiente:

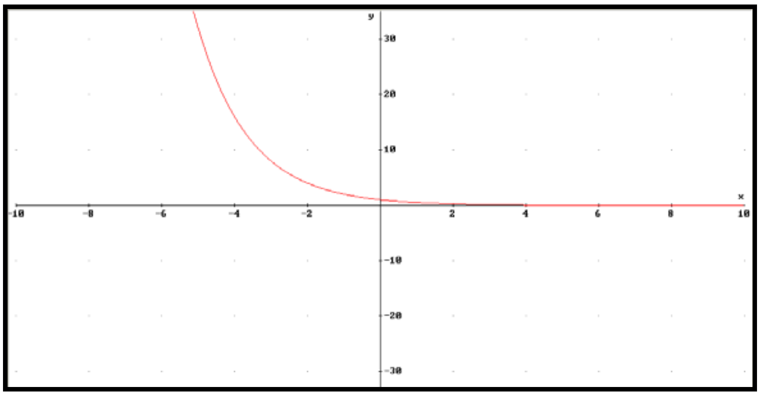


Observamos que se trata de una función estrictamente creciente, cuyo crecimiento además es muy rápido. Incluimos una comparación con la gráfica de la función cuadrática $y = x^2$ a continuación.



Ejemplo 2: Consideremos la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R};\ x\to f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$.

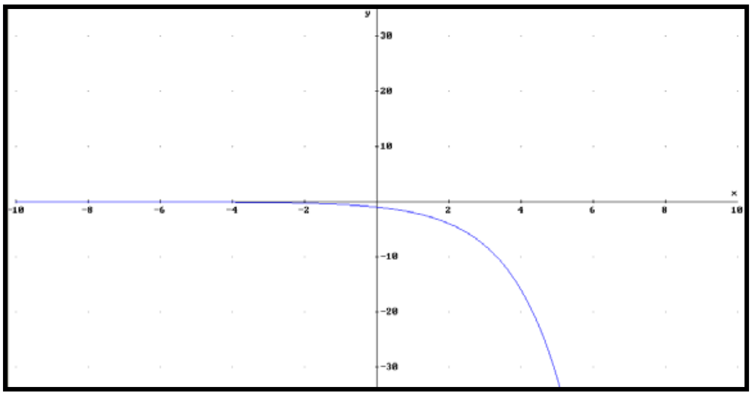
Si representamos la función gráficamente con ayuda del programa DERIVE, obtenemos lo siguiente:



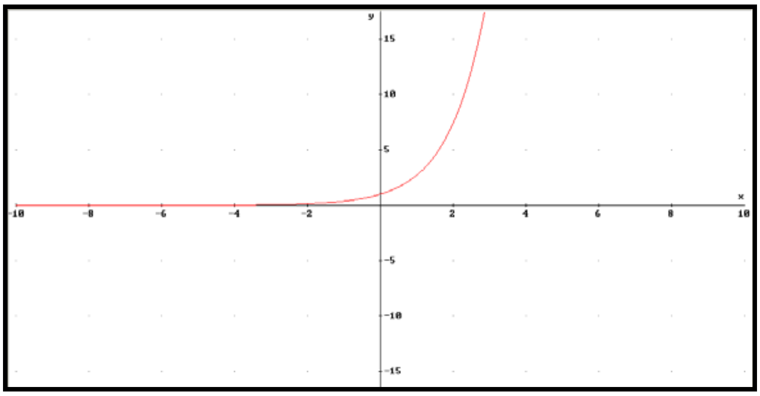
Observamos que se trata de una función estrictamente decreciente, cuyo decrecimiento hacia cero además es muy rápido.

Ejemplo 3: Consideremos la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R};\ x\to f(x)=-2^x$.

Si representamos la función gráficamente con ayuda del programa DERIVE, obtenemos lo siguiente:



Observamos que se trata de una función estrictamente decreciente, cuyo decrecimiento hacia menos infinito además es muy rápido.
De todas las bases posibles para una función exponencial, existe una que es la más conveniente para todos los propósitos del Cálculo y sus aplicaciones. Queremos elegir la base de la función exponencial de manera que la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de corte con el eje de ordenadas, el punto $(0,1)$ sea 1.
El único número que cumple esa propiedad se denota así: número *e* pues así lo eligió el matemático suizo Lehonhard Euler al utilizarlo en 1727. Este número se encuentra entre 2 y 3.
Incluimos para finalizar esta sección la gráfica de la función $y=e^x$.


y
15
10
5
x
-10
-8
-6
-4
-2
2
4
6
8
10
-5
-10
-15

2.2 Propiedades de la función exponencial.

Resumimos en esta sección las propiedades más importantes de la función exponencial.

El dominio de la función exponencial es todo $\mathbb{R}$ y el rango de la función exponencial son todos los reales positivos: $(0,\infty)$. Además, en todos los casos la función exponencial $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R};\ x\to f(x)=a^x$ corta al eje de ordenadas en el mismo punto: el $(0,1)$. Además siempre tiene como asíntota horizontal el eje de abscisas. Si la base es mayor que 1 la función es siempre creciente, y si la base es menor que 1 es siempre decreciente. Por último, destacamos que la función exponencial es siempre una función biyectiva entre $\mathbb{R}$ y $(0,\infty)$, por tanto existe su función inversa (ver sección 3).

Leyes de los exponentes:

Si $a,\ b>0$ y $x,\ y\in\mathbb{R}$, entonces:

$$a^{x+y}=a^xa^y;\ a^{x-y}=\frac{a^x}{a^y};\ \left(a^x\right)^y=a^{xy};\ \left(ab\right)^x=a^xb^x.$$

La función exponencial aparece muy a menudo en los modelos matemáticos de la naturaleza y de la sociedad. Surge, por ejemplo, para describir el crecimiento de la población y la desintegración radioactiva.

Ejemplo 1: (http://w3.cnice.mec.es/Descartes/Bach_CNST_1/Funcion_exponencial/fun-exp1.htm)

Algunos tipos de bacterias se reproducen por "mitosis", dividiéndose la célula en dos cada espacios de tiempo muy pequeños, en algunos casos cada 15 minutos. ¿Cuántas bacterias se producen en estos casos, a partir de una, en un día?

Min: 15, 30, 45, 60, ...

Bact: 2... 4... 8... 16..... $\mathbf{2^x}$.,

siendo x los intervalos de 15 minutos:..$\mathbf{2^4}$ = 16 en una hora, $\mathbf{2^8}$ = 256 en dos horas,...
$\mathbf{2^{24\cdot 4}}$ = $\mathbf{2^{96}}$ = $7{,}9\cdot 10^{28}$. ¡en un día!

Esto nos da idea del llamado ¡*crecimiento exponencial*!, expresión que se utiliza cuando algo crece muy deprisa (véanse gráficas en Ejemplo 1 de sección anterior).

3. La función logarítmica.

Tradicionalmente, el estudio de los logaritmos ha ido inevitablemente acompañado de las tablas logarítmicas y del estudio de conceptos tales como el de mantisa, característica, cologaritmo...Hoy en día esto ya no es necesario. Con la creciente utilización de las calculadoras y los ordenadores en todos los niveles, el cálculo logarítmico se ha simplificado enormemente.

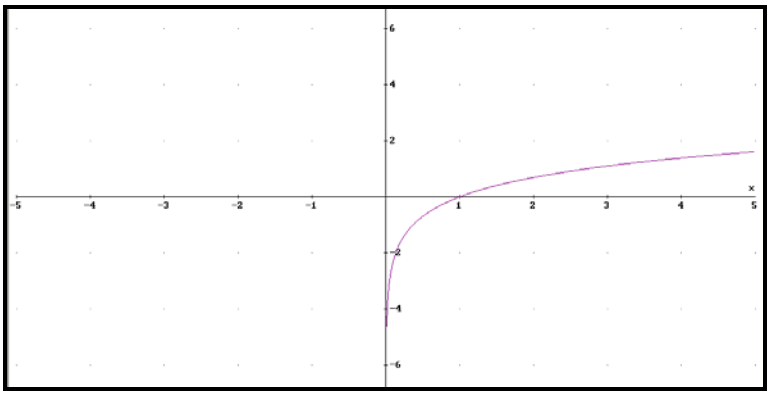
3.1 Definición y ejemplos.

Comenzamos con un poco de historia. La invención de los logaritmos (palabra de origen griego: logos (logos) = tratado, arithmos (ariqmos) = números), se debe al matemático escocés John Napier, barón de Merchiston (1550-1617), quien se interesó fundamentalmente por el cálculo numérico y la trigonometría. En 1614, y tras veinte años de trabajo, publicó su obra *Logarithmorum canonis descriptio*, donde explica cómo se utilizan los logaritmos, pero no relata el proceso que le llevó a ellos.
Un año después, en 1615, el matemático inglés Henry Briggs (1561-1631), visitó a Napier y le sugirió utilizar como base de los logaritmos el número 10. A Napier le agradó la idea y se comprometieron a elaborar las tablas de los logaritmos decimales. Napier muere al cabo de dos años escasos y se queda Briggs con la tarea.
En 1618, Briggs publicó *Logarithmorum Chiliaes prima*, primer tratado sobre los logaritmos vulgares o de Briggs, cuya base es el número 10. Briggs hizo el cálculo de las tablas de logaritmos de 1 a 20 000 y de 90 000 a 100 000.
En 1620, el hijo de Napier publicó la obra de su padre *Mirifici logarithmorum canonis constructio* (“Descripción de la maravillosa regla de los logaritmos”) donde ya se explica el proceso seguido por Napier, mediante la comparación de progresiones y la utilización de unas varillas cifradas, llamadas varillas o regletas de Napier, para llegar a sus resultados sobre los logaritmos.

La *función logarítmica*, o *función logaritmo*, se define como la función inversa de la función exponencial. Esta función existe al ser la función exponencial biyectiva entre su dominio y su rango. Entonces, la función logaritmo se denota así:
$g:(0,\infty)\to\mathbb{R};\ x\to g(x)=\log_a x$.
Es decir, las expresiones siguientes son equivalentes:
$y=\log_a x \Leftrightarrow a^y = x$.
Observemos entonces que:
$\log_a\left(a^x\right)=x,\ \forall x\in\mathbb{R}$ y $a^{\log_a x}=x,\ \forall x>0$.
Las funciones logarítmicas más usuales son en base 10 y *e*. El logaritmo en base *e* recibe el nombre especial de *logaritmo neperiano* o *logaritmo natural*, y se denota así:
$y=\ln x$.
En particular podemos rescribir las propiedades anteriores para el logaritmo neperiano así:
$y=\ln x \Leftrightarrow e^y = x$,
$\ln\left(e^x\right)=x,\ \forall x\in\mathbb{R}$ y $\mathrm{e}^{\ln x}=x,\ \forall x>0$.

Al definirse la función logaritmo como la inversa de la función exponencial, su gráfica es simétrica respecto de la recta $y = x$ de la de la función exponencial.
Incluimos la gráfica del logaritmo neperiano a modo de ejemplo.

Ejemplo 1: Gráfica de la función $y = \ln x$



Observamos que la función es siempre creciente, la gráfica pasa siempre por el punto $(1,0)$.

3.2 Propiedades.

Resumimos en esta sección las propiedades más importantes de la función logarítmica (teniendo en cuenta que la hemos definido como inversa de la función exponencial).

El dominio de la función logarítmica es el intervalo $(0,\infty)$ y el rango de la función logarítmica son todos los reales: $\mathbb{R}$. Además, en todos los casos la función logarítmica $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R};\ x\to g(x)=\log_a x$ corta al eje de abscisas en el mismo punto: el $(1,0)$.

Leyes de los logaritmos:

Si $x,\ y>0$, entonces

1. $\log_a(xy)=\log_a x+\log_a y$
2. $\log_a\left(\frac{x}{y}\right)=\log_a x-\log_a y$
3. $\log_a\left(x^r\right)=r\log_a x;\ r\in\mathbb{R}.$

Por último, recordemos cómo cambiar de base en los logaritmos: $\log_a x=\dfrac{\ln x}{\ln a}$.

Para ver esto, basta con tomar logaritmos neperianos en ambos miembros de la expresión: $a^y = x$ y despejar *y*, que de partida es $\log_a x$.