FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA ESCENARIO 1

Dominio I: Conocimientos de Matemáticas

Tema: Sistemas de Ecuaciones Algebraicas

Asignaturas involucradas en la formación universitaria: Álgebra lineal (sistemas lineales) y Estructuras Algebraicas (sistemas algebraicos)

Palabras clave: ecuaciones algebraicas, sistemas de ecuaciones lineales, espacios vectoriales y afines, matrices y determinantes, geometría algebraica, cónicas y cuádricas, álgebra conmutativa, polinomios, ideales.

Estructura del Tema:

1. Introducción y planteamiento del problema.
   1.1. Sistemas de ecuaciones lineales: método de eliminación de Gauss.
   1.2. Sistemas de ecuaciones lineales: notación vectorial.
2. Sistemas de ecuaciones lineales.
   2.1. Primer método de resolución: Teorema de Rouché-Fröbenius.
   2.2. Segundo método de resolución: Regla de Cramer.
   2.3. Visualización. Problemas geométricos: ecuaciones de subespacios vectoriales.
3. Sistemas de ecuaciones algebraicas.

Contexto: Se resumen en este documento los conocimientos previos del tema que los estudiantes de la especialidad de Metodología han adquirido tras sus estudios de los tres primeros cursos el la Facultad de Ciencias Matemáticas. Son estos los conocimientos que tienen que transformar para preparar la tarea descrita en el Escenario 1.
En este documento no se incluyen los aspectos relacionados con la resolución de sistemas algebraicos con Derive ni tampoco con la visualización de soluciones con Derive por encontrarse dichos aspectos desarrollados en el artículo presentado por el profesor E. Roanes.

1. Introducción y planteamiento del problema.

Una ecuación lineal es una ecuación en la que cada término es o bien una constante o bien el producto de una constante por una variable elevada a potencia 1 (no hay potencias mayores ni productos de variables). Las constantes a las que nos referimos en este documento serán siempre números reales. Entonces, una ecuación lineal es un polinomio de grado 1 en *n* variables igualado a cero. El problema general, cuya solución describimos en detalle en estas notas, consiste en encontrar las soluciones de sistemas (conjuntos) de ecuaciones lineales con coeficientes reales. Es decir, se trata de encontrar los valores reales de las variables que hacen que todas las ecuaciones lineales del sistema se cumplan simultáneamente.

La resolución de sistemas de ecuaciones lineales es uno de los problemas más antiguos en Matemáticas y tiene muchas aplicaciones. Entre estas aplicaciones, citamos por ejemplo: procesamiento de señales digitales, estimaciones, predicción meteorológica, programación lineal, aproximación de problemas no lineales en análisis numérico, etc. Además, estudiantes participantes en el proyecto ESCEMMat citan las siguientes aplicaciones: programación lineal,

Más generalmente, pueden estudiarse ecuaciones polinomiales (de cualquier grado) en n variables con coeficientes reales. Sistemas de estas características reciben el nombre de sistemas de ecuaciones algebraicas. Este tipo de sistemas son mucho más difíciles de manipular y requieren estructuras algebraicas más complejas y modernas como son las bases de Groebner.

1.1. <u>Sistemas de ecuaciones lineales: método de eliminación de Gauss</u>.

Recordamos los fundamentos de los sistemas de ecuaciones lineales, introduciendo la forma matricial de un sistema. A partir de diversos ejemplos se desarrolla el método de eliminación de Gauss con matrices. El teorema final determina el carácter de un sistema en función de las matrices escalonadas de las matrices del sistema.

Consideramos un sistema S de m ecuaciones con n incógnitas:

$$\left.\begin{array}{r} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right\} \quad a_{ij} \in \mathbb{k},\ b_i \in \mathbb{k}.$$

Nota: aunque en general se pueden considerar los coeficientes en un cuerpo arbitrario $\mathbb{k}$, trabajaremos siempre con el cuerpo $\mathbb{R}$ de los números reales.

Decimos que *S* es

- <u>Compatible</u> si tiene solución.
- <u>Incompatible</u> si no tiene solución.
- <u>Compatible determinado</u> si tiene solución única.
- <u>Compatible indeterminado</u> si tiene solución pero no es única.

Las matrices del sistema son:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ matriz de los coeficientes

$$\overline{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$ matriz ampliada

Si $b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0$ decimos que el sistema es homogéneo.

Observación: todo sistema homogéneo es compatible pues $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ es solución.

La forma matricial del sistema viene dada por:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{X}=\underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}}_{B}, \qquad AX = B$$

Así, resolver el sistema es "despejar la matriz *X*".

Conocemos varios métodos para resolver sistemas de ecuaciones lineales:

- *Sustitución*: despejamos una variable en una ecuación y sustituimos en las demás.
- *Eliminación* (Gauss, s. XIX): realizamos operaciones con las ecuaciones hasta "eliminar incógnitas".
- *Método de Cramer* (o *de los determinantes*): encontramos la solución como un cociente de dos determinantes. Lo veremos en la siguiente sección.

Ejemplo 1: Intersección de dos rectas en el plano

$$\left.\begin{array}{r} x+y=2 \\ 3x-y=2 \end{array}\right\} \xrightarrow{3I,-II} \left.\begin{array}{r} 3x+3y=6 \\ -3x+y=-2 \end{array}\right\} \xrightarrow{\frac{1}{3}I,II+I} \underbrace{\left.\begin{array}{r} x+y=2 \\ 4y=4 \end{array}\right\}}_{\text{"escalonado"}} \Rightarrow y=1, x=1$$

El método de Gauss busca transformar el sistema en uno escalonado.

Ejemplo 2:

$$\left.\begin{array}{r} x_1+3x_2+x_3=-3 \\ 3x_1+9x_2+4x_3=-7 \\ 2x_1-x_2+x_3=6 \end{array}\right\} \xrightarrow{I,II-3I,III-2I} \left.\begin{array}{r} x_1+3x_2+x_3=-3 \\ x_3=2 \\ -7x_2-x_3=12 \end{array}\right\} \xrightarrow{I,III,II} \underbrace{\left.\begin{array}{r} x_1+3x_2+x_3=-3 \\ -7x_2-x_3=12 \\ x_3=2 \end{array}\right\}}_{\text{"escalonado"}} \Rightarrow \cdots$$

$$\cdots \Rightarrow \boxed{x_3=2} \Rightarrow -7x_2=14 \Rightarrow \boxed{x_2=-2} \Rightarrow \boxed{x_1=1}.$$

La idea es transformar el sistema mediante una serie de operaciones con las ecuaciones llamadas Operaciones Elementales:

i. Multiplicación de una ecuación por un número no nulo
ii. Intercambio de posición de dos ecuaciones
iii. Suma a una ecuación de un múltiplo de otra ecuación

Estas operaciones producen un sistema equivalente, pero no de ecuaciones equivalentes *una a una*.

Simplificamos el método usando sólo los coeficientes de las incógnitas y los términos independientes.

Ejemplo 3: Solución con matrices del sistema en ejemplo 2

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & -3 \\ 3 & 9 & 4 & -7 \\ 2 & -1 & 1 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1, F_2-3F_1, F_3-2F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -7 & -1 & 12 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 \rightleftarrows F_3} \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & -3 \\ 0 & -7 & -1 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)}_{\text{hasta aquí en ej. 2}} \cdots$$

$$\xrightarrow{F_1, F_2+F_3, F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & -3 \\ 0 & -7 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1, \frac{-1}{7}F_2, F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1-3F_2, F_2, F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \cdots$$

$$\xrightarrow{F_1-F_3, F_2, F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -2. \\ x_3 = 2 \end{cases}$$

Definición: Una matriz se dice que es escalonada si se puede trazar una escalera (ver ej. 3) descendente tal que

i. Cada peldaño tiene altura 1
ii. Debajo de la escalera todos los términos son cero
iii. En cada esquina de un peldaño hay un 1 y encima de este 1 sólo hay ceros

Método de eliminación de Gauss

Consiste en reducir las matrices de un sistema dado a matrices escalonadas

Ejemplo 4: en el ejemplo 3 tenemos

$$\left.\begin{array}{r} x_1 + 3x_2 + x_3 = -3 \\ 3x_1 + 9x_2 + 4x_3 = -7 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 6 \end{array}\right\} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & -3 \\ 3 & 9 & 4 & -7 \\ 2 & -1 & 1 & 6 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

donde la última matriz es la matriz escalonada de A y es también la matriz escalonada de $\overline{A}$. Esta matriz escalonada tiene tres escalones, igual que el número de incógnitas.

Ejemplo 5: Estudiamos el sistema

$$\left.\begin{array}{r} x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ -2x_1 + x_2 + 2x_3 = 7 \\ x_2 - x_4 = 0 \end{array}\right\}$$

Para ello consideramos las matrices del sistema y hacemos operaciones elementales

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1, F_2+2F_1, F_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 7 & 0 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 \rightleftarrows F_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 2 & 9 \end{array}\right) \cdots$$

$$\xrightarrow{F_1, F_2, F_3-7F_2,} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 9 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1, F_2, \frac{1}{9}F_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \cdots$$

$$\xrightarrow{F_1-F_3, F_2+F_3, F_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1-3F_2, F_2, F_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \cdots$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_3 = -3 \\ x_2 = 1 \\ x_4 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -3 + c \\ x_2 = 1 \\ x_3 = c \\ x_4 = 1 \end{cases}.$$

El sistema es compatible indeterminado, la solución viene dada en función del parámetro c. La última matriz del desarrollo es la matriz escalonada de A y es también la matriz escalonada de $\overline{A}$. En este caso, el número de escalones de esta matriz escalonada es tres, uno menos que el número de incógnitas.

Ejemplo 6: Estudiamos el sistema

$$\left.\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= 3 \end{aligned}\right\}$$

Para ello consideramos las matrices del sistema y hacemos operaciones elementales

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1, F_2 - 2F_1, F_3 - 2F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

ya en este paso vemos que el sistema es incompatible, pues de la última fila se desprende $0 = 1$. Si seguimos realizado operaciones elementales obtenemos

$$\xrightarrow{F_1, \frac{1}{3}F_2, F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1/3 & -2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 + F_2, F_2, F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & -1/3 & -2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

de modo que hallamos la matriz escalonada de A. En este caso, para hallar la matriz escalonada de $\overline{A}$ tenemos que dar un paso más

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & -1/3 & -2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 - \frac{1}{3}F_3, F_2 + \frac{2}{3}F_3, F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 1 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

en este caso, la matriz escalonada de A tiene distinto número de escalones que la matriz escalonada de $\overline{A}$.

Teorema: Si A y $\overline{A}$ son la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada de un sistema S tenemos

1. S es compatible determinado si y sólo si el número de peldaños de la matriz escalonada de A coincide con el número de peldaños de la matriz escalonada de $\overline{A}$ y a su vez este número coincide con el número de incógnitas de S.
2. S es compatible indeterminado si y sólo si el número de peldaños de la matriz escalonada de A coincide con el número de peldaños de la matriz escalonada de $\overline{A}$ y a su vez este número es estrictamente menor que el número de incógnitas de S.
3. S es incompatible si y sólo si el número de peldaños de la matriz escalonada de A es estrictamente menor que el número de peldaños de la matriz escalonada de $\overline{A}$.

1.2. Sistemas de ecuaciones lineales: notación vectorial.

Para terminar esta primera sección, volvemos sobre los sistemas de ecuaciones lineales desarrollando un planteamiento "vectorial" del problema. De esta manera se estudiarán las soluciones del sistema utilizando todas las herramientas de espacios vectoriales desarrolladas.

Consideramos un sistema S de m ecuaciones lineales con n incógnitas

$$\left.\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right\} \quad a_{ij} \in \mathbb{K},\ b_i \in \mathbb{K}.$$

El objetivo es encontrar las n-tuplas $(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{K}^n$ que cumplen las m condiciones.
Podemos considerar la forma matricial del sistema

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}}_{B}, \qquad AX = B,$$

y plantear el problema desde un punto de vista más teórico.
Se consideran espacios vectoriales E y F definidos por

$$E = \text{Espacio vectorial sobre } \mathbb{K} \text{ con base } \{\overline{u}_1,\ldots,\overline{u}_n\},$$

$$F = \text{Espacio vectorial sobre } \mathbb{K} \text{ con base } \{\overline{v}_1,\ldots,\overline{v}_m\}.$$

La matriz A puede interpretarse entonces como la matriz de una aplicación lineal $f : E \to F$ respecto de las bases dadas. Si

$$\overline{x} = x_1 \cdot \overline{u}_1 + x_2 \cdot \overline{u}_2 + \cdots + x_n \cdot \overline{u}_n,$$

$$\overline{b} = b_1 \cdot \overline{v}_1 + b_2 \cdot \overline{v}_2 + \cdots + b_m \cdot \overline{v}_m,$$

tenemos que $AX = B$ es equivalente a $f(\overline{x}) = \overline{b}$.
Así el problema original queda traducido de la siguiente manera: hallar las n-tuplas $(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{K}^n$ que cumplen las m condiciones del sistema es equivalente a hallar los vectores de E cuya imagen por $f : E \to F$ es $\overline{b}$ (trabajando siempre con coordenadas respecto de las dos bases de E y F dadas).
Es decir que

$$\{\text{soluciones del sistema } S\} = f^{-1}(\overline{b}).$$

Antes de establecer el primer resultado "vectorial" en los sistemas de ecuaciones lineales, vamos a concretar qué significa "resolver" un sistema:

a) Decidir si el sistema tiene solución o no.
b) Determinar cuántas soluciones tiene el sistema (¿finitas o infinitas?).
c) Describir, en su caso, el conjunto de soluciones.

Proposición: Sean E y F dos espacios vectoriales y $f : E \to F$ una aplicación lineal. Sean $\overline{b} \in F$ y $\overline{a} \in f^{-1}(\overline{b})$, entonces

$$\overline{s} \in f^{-1}(\overline{b}) \Leftrightarrow \exists\, \overline{c} \in Ker(f) \text{ t.q. } \overline{s} = \overline{a} + \overline{c}.$$

Demostración:
"$\Leftarrow$" Obvio.
"$\Rightarrow$" Tenemos $f(\overline{s}) = \overline{b}$, $f(\overline{a}) = \overline{b} \Rightarrow f(\overline{s}) - f(\overline{a}) = \overline{0} \Rightarrow f(\overline{s} - \overline{a}) = \overline{0} \Rightarrow \cdots$

$$\cdots \Rightarrow \overline{s} - \overline{a} \in Ker(f) \Rightarrow \overline{s} = \overline{a} + \overline{c} \text{ con } \overline{c} \in Ker(f).$$

Esto nos dice que toda solución del sistema viene dada por una solución más un elemento de $Ker(f)$. En particular el conjunto de soluciones tiene el mismo cardinal que $Ker(f)$, que sabemos es siempre unitario o infinito.

2. Sistemas de ecuaciones lineales.

2.1. Primer método de resolución: Teorema de Rouché-Fröbenius.

Establecemos un resultado sobre la compatibilidad de un sistema de ecuaciones lineales en términos de los rangos de la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada.

Consideramos un sistema S de m ecuaciones lineales con n incógnitas

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}}_{B}, \qquad AX = B.$$

Tenemos espacios vectoriales $E = \langle \overline{u}_1, \ldots, \overline{u}_n \rangle$ y $F = \langle \overline{v}_1, \ldots, \overline{v}_m \rangle$ y una aplicación lineal $f : E \to F$ de modo que $AX = B$ es equivalente a $f(\overline{x}) = \overline{b}$.

Nos planteamos primero el problema de la existencia de soluciones del sistema.

Tenemos que el sistema tiene soluciones si y sólo si

$$\exists\, \overline{x} \in E \text{ t.q. } f(\overline{x}) = \overline{b},$$

lo cual es equivalente a decir que

$$\overline{b} \in \mathrm{Im}(f),$$

equivalente a su vez a

$$\langle f(\overline{u}_1), \ldots, f(\overline{u}_n) \rangle = \langle f(\overline{u}_1), \ldots, f(\overline{u}_n), \overline{b} \rangle,$$

que, por último, es equivalente a

$$rango(A) = rango(A, b).$$

Así tenemos que el sistema tiene solución si y sólo si el rango de la matriz de los coeficientes coincide con el rango de la matriz ampliada.

Una vez determinado si el sistema es compatible, estudiamos cuántas soluciones tiene.

Ya vimos en la sección anterior que el conjunto de soluciones es unitario o infinito.

Tenemos que el sistema tiene solución única si y sólo si

$$Ker(f) = \{\overline{0}\},$$

lo cual es equivalente, por la fórmula de las dimensiones, a

$$\dim(\mathrm{Im}(f)) = n,$$

que a su vez es equivalente a

$$rango(A) = n.$$

Así tenemos que el sistema tiene una única solución si y sólo si el rango de la matriz de los coeficientes coincide con el rango de la matriz ampliada y además coincide con el número de incógnitas.

Juntando todo tenemos el siguiente teorema.

Teorema de* Rouchê-Fröbenius*: Sea $AX = B$ un sistema de ecuaciones lineales con m ecuaciones y n incógnitas. Entonces

d) El sistema es compatible determinado si y sólo si $rango(A) = rango(A, b) = n$.
e) El sistema es compatible indeterminado si y sólo si $rango(A) = rango(A, b) < n$.
f) El sistema es incompatible si y sólo si $rango(A) < rango(A, b)$.

Ejemplo: El sistema

$$\left.\begin{array}{r} x_1+x_2+x_3=1 \\ x_1+x_2+x_3=\lambda \end{array}\right\}$$

es compatible indeterminado si $\lambda=1$ e incompatible si $\lambda\neq 1$.

2.2. Segundo método de resolución: Regla de Cramer.

Desarrollamos el método de Cramer para sistemas compatibles determinados y lo generalizamos a sistemas compatibles indeterminados.

Caso $m=n$: Consideramos un sistema S de n ecuaciones lineales con n incógnitas

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}_{B}, \qquad A\cdot X = B,$$

y suponemos que es compatible determinado. Por el teorema de Rouchê-Fröbenius, esto equivale a decir que $\det(A)\neq 0$. Tenemos

$$A\cdot X = B \Rightarrow X = A^{-1}\cdot B,$$

o lo que es lo mismo

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{1i} & A_{2i} & \cdots & A_{ni} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}}_{adj(A)} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\det(A)}.$$

Es decir que

$$x_i = (A_{1i}\cdot b_1 + A_{2i}\cdot b_2 + \cdots + A_{ni}\cdot b_n)\cdot\frac{1}{\det(A)},$$

lo cual se escribe normalmente en forma de determinante de la siguiente manera

$$x_i = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,i-1} & b_2 & a_{2,i+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,i-1} & b_n & a_{n,i+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\det(A)} = \frac{\det(a_1,\ldots,a_{i-1},b,a_{i+1},\ldots,a_n)}{\det(A)},$$

donde el determinante del numerador se obtiene cambiando la i-ésima columna de la matriz A por los términos independientes del sistema. Esto es lo que se conoce como Regla de Cramer.

Ejemplo: Consideramos el sistema

$$\left.\begin{array}{r} x_1+x_2+x_3=1 \\ x_1+2x_2+x_3=2 \\ x_1+2x_2+3x_3=3 \end{array}\right\}.$$

Tenemos que

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 2,$$

y por lo tanto el sistema es compatible determinado. Podemos aplicar entonces la regla de Cramer y obtenemos

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix}}{2} = \frac{-1}{2}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix}}{2} = \frac{2}{2} = 1, \quad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}}{2} = \frac{1}{2},$$

Caso general: Consideramos un sistema S de m ecuaciones lineales con n incógnitas

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}}_{B}, \qquad A \cdot X = B,$$

y supongamos que es compatible, es decir que $rango(A) = rango(A,b) = r$.
Reordenando las ecuaciones (i.e. realizando operaciones elementales) podemos suponer que

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Así, las últimas $m-r$ ecuaciones (filas de la matriz ampliada (A,b)) son combinaciones lineales de las anteriores. El sistema es pues equivalente a

$$\left.\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1r}x_r + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{r1}x_1 + \cdots + a_{rr}x_r + \cdots + a_{rn}x_n & = & b_r \end{array}\right\} (r \text{ ecuaciones}),$$

y, por lo visto anteriormente, equivalente a su vez a

$$\left.\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1r}x_r & = & b_1 - (a_{1,r+1}x_{r+1} + \cdots + a_{1n}x_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{r1}x_1 + \cdots + a_{rr}x_r & = & b_r - (a_{r,r+1}x_{r+1} + \cdots + a_{rn}x_n) \end{array}\right\}.$$

Como

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0$$

tenemos que cada elección de $(x_{r+1},\ldots,x_n)$ produce un sistema compatible determinado con una única solución $(x_1,\ldots,x_r)$ de modo que la n-tupla $(x_1,\ldots,x_r,x_{r+1},\ldots,x_n)$ es solución del sistema inicial. Las "variables" $x_{r+1},\ldots,x_n$ juegan el papel de parámetros. Así podemos resolver el sistema hallando $(x_1,\ldots,x_r)$ en función de $(x_{r+1},\ldots,x_n)$ usando la regla de Cramer:

$$x_i = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,i-1} & (b_1 - a_{1,r+1}x_{r+1} - \cdots - a_{1n}x_n) & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1r} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,i-1} & (b_2 - a_{2,r+1}x_{r+1} - \cdots - a_{2n}x_n) & a_{2,i+1} & \cdots & a_{2r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{r,i-1} & (b_r - a_{r,r+1}x_{r+1} - \cdots - a_{rn}x_n) & a_{r,i+1} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix}}, \quad i = 1, \ldots, r$$

Ejemplo: Consideramos el sistema

$$\left.\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ 2x + 2y + 3z &= 2 \\ x + y + 2z &= 1 \end{aligned}\right\}, \quad \text{con matriz ampliada} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right).$$

Tenemos

$$|A| = 0, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow rango(A) = 2, \quad \left|\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\right| = 0 \Rightarrow rango(A,b) = 2,$$

con lo que el sistema es compatible indeterminado.

Al tener

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \neq 0,$$

podemos "eliminar" la última ecuación y tomar a la variable " y " como un parámetro.

Tenemos pues que el sistema es equivalente a

$$\left.\begin{aligned} x + z &= 1 - y \\ 2x + 3z &= 2 - 2y \end{aligned}\right\}.$$

Aplicando Cramer tenemos

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1-y & 1 \\ 2-2y & 3 \end{vmatrix}}{1} = (3-3y) - (2-2y) = 1 - y, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1-y \\ 2 & 2-2y \end{vmatrix}}{1} = 0,$$

que nos da la solución definitiva del sistema como

$$\begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{cases}$$

2.3. <u>Visualización. Problemas geométricos: ecuaciones de subespacios vectoriales.</u>

Se muestra, en tres ejemplos, cómo cambiar la descripción de un subespacio vectorial: en términos de una base, con ecuaciones implícitas y con ecuaciones paramétricas.

Ejemplo: (Base → Ecuaciones paramétricas. Base → Ecuaciones implícitas)

Consideramos el subespacio S dado por

$$S = \langle (1,1,2), (2,1,0), (3,2,2) \rangle \subseteq \mathbb{R}^3.$$

Hallamos la dimensión y una base de S calculando el rango de la matriz

$$A=\begin{pmatrix}1&1&2\\2&1&0\\3&2&2\end{pmatrix}.$$

Tenemos

$$\begin{vmatrix}1&1&2\\2&1&0\\3&2&2\end{vmatrix}=0,\ \begin{vmatrix}1&1\\2&1\end{vmatrix}\neq 0\Rightarrow rango(A)=\dim(S)=2\Rightarrow\{(1,1,2),(2,1,0)\}\text{ base de }S.$$

Así

$$(x,y,z)\in S\Leftrightarrow(x,y,z)=\alpha\cdot(1,1,2)+\beta\cdot(2,1,0)\Rightarrow\boxed{S:\begin{cases}x=\alpha+2\beta\\y=\alpha+\beta\\z=2\alpha\end{cases}}.$$

Esta descripción de S se conoce como ecuaciones paramétricas de S y es muy útil para generar elementos de S (basta dar valores a los parámetros). Obsérvese que en este caso la dimensión del subespacio coincide con el número de parámetros. Aunque se podría dar otra descripción "paramétrica" con más parámetros, la dimensión de un subespacio siempre es el mínimo número de parámetros necesarios.
Partiendo de su base podemos dar otra descripción de S recurriendo al concepto de dependencia lineal. Tenemos

$$(x,y,z)\in S\Leftrightarrow\{(x,y,z),(2,1,0),(1,1,2)\}\text{ linealmente dependiente}\Leftrightarrow rango\begin{pmatrix}1&1&2\\2&1&0\\x&y&z\end{pmatrix}=2\Leftrightarrow\cdots$$

$$\cdots\Leftrightarrow\begin{vmatrix}1&1&2\\2&1&0\\x&y&z\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow\boxed{S:\{-2x+4y-z=0}\cdot$$

Esta descripción de S se conoce como ecuaciones implícitas de S y es muy útil para comprobar si un vector está en S (basta ver si satisface la ecuación).
Ejemplo: (Ecuaciones paramétricas → Base → Ecuaciones implícitas)
Consideramos el subespacio S dado por las siguientes ecuaciones paramétricas

$$S:\begin{cases}x=\alpha+\beta\\y=\alpha\\z=\beta\\t=\alpha-\beta\end{cases}.$$

De los coeficientes de los parámetros "leemos" un sistema generador de S:
$(x,y,z,t)\in S\Leftrightarrow(x,y,z,t)=\alpha\cdot(1,1,0,1)+\beta\cdot(1,0,1,-1)\Rightarrow\{(1,1,0,1),(1,0,1,-1)\}$ generador.

En este caso es fácil ver que este sistema generador es además base de S.
Para hallar las ecuaciones implícitas de S, procedemos como en el ejemplo anterior:

$$(x,y,z,t)\in S\Leftrightarrow\{(x,y,z,t),(1,1,0,1),(1,0,1,-1)\}\text{ lin. dep.}\Leftrightarrow rango\begin{pmatrix}1&1&0&1\\1&0&1&-1\\x&y&z&t\end{pmatrix}=2$$

,

lo cual, teniendo en cuenta que la submatriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ tiene determinante no nulo, es equivalente a que los dos determinantes orlados a partir de la submatriz sean nulos. Es decir que

$$(x,y,z,t)\in S \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ x & y & t \end{vmatrix} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{S : \begin{cases} x-y-z=0 \\ -x+2y-t=0 \end{cases}}.$$

Obsérvese que en este caso tenemos dos ecuaciones. En general, si S es un subespacio de V, para dar las ecuaciones implícitas de S son necesarias al menos $\dim(V)-\dim(S)$ ecuaciones.

Ejemplo: (*Ecuaciones implícitas → Ecuaciones paramétricas*)

Consideramos el subespacio S dado por las siguientes ecuaciones implícitas

$$S : \begin{cases} x+y+z=0 \\ x+y-z=0 \end{cases}.$$

Para hallar las ecuaciones paramétricas de S, vemos las ecuaciones implícitas como un sistema de ecuaciones lineales y usamos la regla de Cramer:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow rango(A) = rango(A,b) = 2 \Rightarrow S \text{ sistema equivalente a } \begin{cases} y+z=-x \\ y-z=-x \end{cases} \Rightarrow \cdots$$

$$\cdots \underset{Cramer}{\Rightarrow} y = \frac{\begin{vmatrix} -x & 1 \\ -x & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{x+x}{-2} = -x, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -x \\ 1 & -x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-x+x}{-2} = 0 \Rightarrow S : \begin{cases} x=\lambda \\ y=-\lambda \\ z=0 \end{cases}.$$

La solución de un sistema lineal con n incógnitas no homogéneo no es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$, pero tenemos "las mismas" ecuaciones paramétricas e implícitas.

Ejemplo: Consideramos el sistema de ecuaciones lineales S siguiente

$$S : \begin{cases} x+y+z=2 \\ x+y-z=1 \\ 2x+2y=3 \end{cases}.$$

Obsérvese que el propio sistema *es* las ecuaciones implícitas de S. Para hallar las ecuaciones paramétricas de S, usamos, como en el ejemplo anterior, la regla de Cramer:

$$|A| = 0, \ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow rango(A) = rango(A,b) = 2 \Rightarrow S \text{ sistema equivalente a } \begin{cases} y+z=2-x \\ y-z=1-x \end{cases} \Rightarrow \cdots$$

$$\cdots \underbrace{\Rightarrow}_{Cramer} y=\frac{\begin{vmatrix} 2-x & 1 \\ 1-x & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}=\frac{x-2-1+x}{-2}=\frac{2x-3}{-2},\quad z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 2-x \\ 1 & 1-x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}=\frac{1-x-2+x}{-2}=\frac{1}{2}\Rightarrow S:\begin{cases} x=\lambda \\ y=\dfrac{-3}{2}-\lambda \\ z=\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

3. Sistemas de ecuaciones algebraicas.

La mayoría de los problemas en Matemáticas, Ciencias e Ingeniería son nolineales: se pueden modelizar con sistemas de ecuaciones polinomiales (no lineales). Las herramientas entonces para resolver estos sistemas son mucho más complejas y modernas que las utilizadas en el caso lineal descritas en las secciones anteriores.

Una de las herramientas clave para encontrar las soluciones a un conjunto de ecuaciones polinomiales son las *bases de Groebner*.

Ejemplos de ecuaciones algebraicas nolineales en 2 y 3 variables son por ejemplo: $y - x^2 = 0$ y $x^2 + 2y^2 - z = 0$. El conjunto de soluciones de las ecuaciones citadas en el plano real y en el espacio de tres dimensiones real son, respectivamente, una parábola y un paraboloide elíptico. Vemos entonces que, intuitivamente hablando, los conjuntos de soluciones de ecuaciones algebraicas nolineales están *curvados*, no son *planos* como en el caso lineal descrito anteriormente.

El conjunto de soluciones de un sistema de ecuaciones algebraicas nolineales es la intersección del conjunto de soluciones de cada ecuación por separado (*hipersuperficie*). Dichos conjuntos reciben el nombre de *variedades algebraicas*. Como en el caso lineal, los sistemas de ecuaciones algebraicas nolineales pueden tener solución única, infinitas soluciones o ninguna solución. Además, una cuarta posibilidad surge en el caso no lineal: el conjunto de soluciones puede tener varias componentes conexas.

Dichas variedades algebraicas vienen representadas entonces como conjuntos de soluciones de ecuaciones algebraicas. Cuando se consideran *combinaciones algebraicas lineales* de polinomios (es decir sumas de polinomios con coeficientes polinomiales) se generan unas estructuras algebraicas llamadas *ideales* dentro del *anillo* de los polinomios en *n* variables con coeficientes reales. Un conjunto de polinomios que genera un ideal (en términos de combinaciones algebraicas lineales) se llama *base* del ideal. La noción de base de un ideal es similar a la de conjunto de generadores de un espacio vectorial. Hay que observar que no todas las bases de un ideal tienen el mismo número de elementos, incluso cuando los no necesarios se eliminan. Cada variedad tiene entonces un ideal de polinomios asociado: el ideal generado por las ecuaciones que definían la variedad.

Durante décadas, geómetras algebraicos conjeturaron que cada ideal de polinomios (cada variedad algebraica) tenía una base que le identificaba completamente. A principios de los años 60 del siglo pasado, H. Hironaka y B. Buchberger demostraron, de manera independiente, que este resultado era cierto. Llamaron a sus bases *bases estándar* y *bases de Groebner* respectivamente. Las últimas tienen la ventaja adicional de incluir un algoritmo para su construcción (el *algoritmo de Buchberger*). Dicho algoritmo está implementado por ejemplo en *Maple*.

Ejemplos de variedades algebraicas y bases de Groebner aparecen por ejemplo en los siguientes artículos disponibles en la sección de Referencias de los materiales:

- *The Geometry of Algebraic Systems and their exact solving using Groebner Basis*, escrito por E. Roanes-Lozano, E. Roanes-Macías y Luis M. Laita. En ese mismo artículo, el lector interesado puede encontrar una introducción a las bases de Groebner.
- *Pictures at a DERIVE's exhibition (interpreting DERIVE's SOLVE command)*, escrito por E. Roanes-Lozano.

Para más información sobre bases de Groebner y la teoría de ideales damos como referencia el libro de David Cox, John Little and Donal O'Shea (1997) *Ideals, Varieties and Algorithms: An Introduction to Computacional Algebraic Geometry and Commutative Álgebra*, Springer. ISBN: 0-387-94680-2.