



**ASIGNATURA:** METODOLOGÍA MATEMÁTICA  
**CURSO:** Op. 2ci.; 2007-2008  
**PROFESORA:** Inés M. Gómez-Chacón  
**CARÁCTER/CRÉDITOS:** 7,5  
**DEPARTAMENTO:** ÁLGEBRA

FACULTAD DE CC. MATEMÁTICAS, UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

## Tema 8: Utilización de los medios tecnológicos en el aprendizaje matemático

### Bloque II: Software para trabajar geometría y álgebra: GeoGebra

Una de las características principales del Geogebra es su facilidad para introducir los datos, ya que dispone de una entrada geométrica y otra algebraica, lo que vamos a hacer a continuación es hacer un pequeño análisis de las herramientas, que luego se podrá completar con la ayuda del programa.

Veámoslo por modos (bloques de herramientas)

Modo general:



**Desplaza**

Para arrastrar y soltar objetos libres con el ratón.

Selección de un objeto dándole clic en el modo de desplazamiento para poder

- eliminarlo pulsando la tecla Supr
- desplazarlo apelando a las teclas-flecha

Para seleccionar varios objetos, se debe mantener pulsada la tecla Ctrl.



**Rota alrededor de un punto**

Se selecciona en primer lugar, el punto que será dentro de rotación. Luego se pueden rotar objetos libres alrededor de este punto, simplemente arrastrándolos con el mouse.



**Relación**

Para marcar un par de objetos y obtener información sobre sus relaciones

Entrada algebraica:

**Relación[objeto a, objeto b]**

Expone un cuadro de mensaje que nos informa la relación de a y b.

Modo punto:



Al dar “clic” sobre área gráfica se crea un nuevo punto. Sus coordenadas quedan establecidas al soltar el botón del mouse nuevamente.

Al dar un “clic” sobre un segmento, recta o sección cónica se crea un punto sobre el objeto en cuestión.

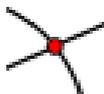
Al dar “clic” sobre la intersección de dos objetos se crea este punto de intersección.

Entrada algebraica:

Para introducir un punto debe nombrarse en mayúsculas, ya que sino lo identifica como un vector y se puede poner con coordenadas cartesianas o polares:

$P=(3,0)$  en cartesianas,  $P=(3,0^\circ)$  (cuidado, el cerillo superíndice debe introducirse con el ratón).

Si ponemos simplemente (3,0) se le asigna automáticamente como un punto.

**Intersección de dos objetos**

Los puntos de intersección de los dos objetos pueden producirse de dos maneras.

1. Marcar dos objetos: se crean todos los puntos de intersección (si fuese posible)
2. Al dar clic" sobre la intersección de los dos objetos: sólo se crea este único punto de intersección.

Entrada algebraica:

Intersecta

- ✗ Intersecta[recta g, recta h]: Punto de intersección de f rectas g y h
- ✗ Intersecta[recta g, cónica c]: Todos los puntos de Intersección de recta g y sección cónica c (máx. 2)
- ✗ Intersecta[recta g, cónica c, número n]: punto número n de intersección de recta g y sección cónica c
- ✗ Intersecta[cónica c1, cónica c2]: Todo punto de intersecciones de secciones cónicas c1 y c2 (máx. 4)
- ✗ Intersecta[cónica c1, cónica c2, número n]: punto número n de intersección de secciones cónicas c1 y c2



- ✗ Intersecta[polinomio f1, polinomio f2]: Todo punto de intersecciones de polinomios f1 y f2
- ✗ Intersecta[polinomio f1, polinomio f2, número n]: punto número n de intersección de polinomios f1 y f2
- ✗ Intersecta[polinomio f, recta g]: Todo punto de intersecciones de polinomio f y recta g
- ✗ Intersecta[polinomio f, recta g, número n]: punto número n de intersección de polinomio f y recta g
- ✗ Intersecta[función f, función g, punto A]: Punto de intersección de funciones f y g con punto inicial A (por método de Newton)
- ✗ Intersecta[función f, recta g, punto A]: Punto de intersección de función f y recta g con punto inicial A (por método de Newton)



### Punto Medio

Dar clic sobre . . .

1. dos puntos para obtener su punto medio.
2. un segmento para obtener su punto medio.
3. una sección cónica para obtener su punto central.

Entrada algebraica:

PuntoMedio[punto A, punto B]: Punto Medio de puntos A y B

PuntoMedio[segmento s]: Punto Medio de segmento s

Centro[cónica c]: Centro de una sección cónica c (circunferencia, elipse, hipérbola)

Modo Vector

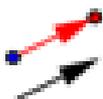


### Vector entre dos puntos

Marca el punto de inicio y el de aplicación del vector.

Entrada algebraica:

Vector[punto A, punto B]: Vector desde el punto A al punto B



### Vector desde un punto

Al marcar un punto A y un vector  $v$  se crea el punto  $B = A + v$  y el vector de A hacia B.

Entrada algebraica:

Si tenemos el punto A y el vector  $v$ : `vector[A,A+v]` aunque en este caso no se crea el punto B.

Hay muchos comandos en la entrada algebraica con vectores, para mas información mirar la ayuda que vienen muy bien explicados.

Modo rectas:



### Segmento entre dos puntos

Al marcar dos puntos A y B se establece un segmento entre A y B. En la ventana algebraica podrá verse la longitud de dicho segmento.



### Segmento con una longitud dada a partir de un punto

Al dar "clic" sobre un punto A que desea fijarse como uno de los extremos del segmento y especificar la longitud deseada al aparecer la ventana que se despliega a continuación, queda fijado el segmento.

De este modo se creará un segmento con una longitud determinada ente el punto A y el B que será su otro extremo. El extremo B puede rotarse en modo *Desplaza* alrededor del extremo inicial A.

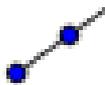
Entrada algebraica:

`Segmento[punto A, punto B]`

Segmento entre dos puntos A y B

`Segmento[punto A, número a]`

Segmento con extensión a desde el punto A. Se crea, también, el extremo opuesto a A del segmento.



### Semirrecta a través de dos puntos

Al marcar dos puntos A y B se crea una semirrecta que parte de A y cruza B. En la ventana algebraica se expone la ecuación correspondiente a la recta.



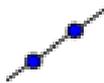
Entrada algebraica:

Semirrecta[**punto A, punto B**]

Semirrecta que se inicia en A y pasa por B

Semirrecta[**punto A, vector v**]

Semirrecta que se inicia en A con dirección v



### Recta entre dos puntos

Al marcar dos puntos A y B se fija la recta entre A y B. El vector que fija la dirección de la recta es (B-A).

Entrada algebraica:

Recta[**punto A, punto B**]

Recta entre dos puntos A y B



### Recta Paralela

Al seleccionar una recta g y un punto A, queda definida la recta que pasa por A y es paralela a g. La dirección de esta recta es la de g.

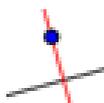
Entrada algebraica:

Recta[**punto A, recta g**]

Recta paralela a g que pasa por A

Recta[**punto A, vector v**]

Recta con dirección v que pasa por A



### Recta Perpendicular

Al seleccionar una recta g y un punto A, queda definida la recta que pasa por A y es perpendicular a g. La dirección de esta recta es equivalente a la del vector perpendicular a g.

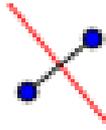
Entrada algebraica:

Perpendicular[**punto A, recta g**]

Recta perpendicular a g que pasa por A

Perpendicular[**punto A, vector v**]

Recta perpendicular a v que pasa por A

**Mediatriz**

La recta mediatriz de un segmento queda establecida por un segmento  $s$  o por dos puntos  $A$  y  $B$ . La dirección de esta recta es equivalente a la del vector perpendicular al segmento  $s$  o a  $AB$ .

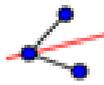
Entrada algebraica:

Mediatriz[**punto A, punto B**]

Mediatriz al segmento  $AB$

Mediatriz[**segmento s**]

Mediatriz al segmento  $s$

**Bisectriz**

La bisectriz de un ángulo puede definirse de dos maneras:

1. Al marcar los tres puntos  $A$ ,  $B$ ,  $C$  se produce la bisectriz del ángulo determinado por  $A$ ,  $B$  y  $C$ , con  $B$  como vértice.
2. Al marcar dos rectas se producen las bisectrices de sendos ángulos.

Los vectores directrices de todas las bisectrices tienen longitud 1.

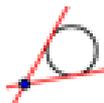
Entrada algebraica:

Bisectriz[**punto A, punto B, punto C**]

Bisectriz del ángulo  $(A, B, C)$ .  $B$  es el vértice de dicho ángulo.

Bisectriz[**recta g, recta h**]

Sendas bisectrices angulares de  $g$  y  $h$ .

**Tangentes**

Las tangentes a una cónica pueden determinarse de dos maneras:

1. Al marcar un punto  $A$  y una cónica  $c$  se producen todas las tangentes a  $c$  que pasan por  $A$ .
2. Al marcar una recta  $g$  y una cónica  $c$  se producen todas las tangentes a  $c$  que son paralelas a  $g$ .

¡OJO! Al marcar el punto  $A$  y la función  $f$  se traza la recta tangente a  $f$  por  $x=x(A)$ .

Entrada algebraica:

Tangente[**punto A, cónica c**]

(Toda) tangente a  $c$  a través de  $A$

Tangente[**recta g, cónica c**]

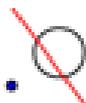
(Toda) tangente a  $c$  que sea paralela a  $g$

Tangente[**número a, función f**]

Tangente a  $f(x)$  en  $x=a$

Tangente[**punto A, función f**]

Tangente a  $f(x)$  en  $x=x(A)$



### Recta Polar o Diámetro

Este modo crea la recta polar / diámetro de una sección cónica:

1. Se marca un punto y una sección cónica para establecer la recta polar.
2. Se marca una recta o vector y una sección cónica para fijar su diámetro.

Entrada algebraica:

Polar[**punto A**, **cónica c**]

Recta polar a A relacionada a c

Diámetro[**recta g**, **cónica c**]

Diámetro paralelo a g relacionado a c

Diámetro[**vector v**, **cónica c**]

Diámetro con dirección v relacionado a c



### Polígono

#### Polígono

Para que quede expuesta el área del polígono en la ventana algebraica, basta marcar al menos tres puntos y volver a dar “clic” nuevamente sobre el primero de ellos.

Entrada algebraica:

Polígono[ **punto A**, **punto B**, **punto C**, ...]

Polígono definido por los puntos marcados

Modo Conicas

#### Circunferencias:



#### Circunferencia por centro y punto de la circunferencia

Al marcar un punto M y un punto P queda definida una circunferencia con centro en M que pasa por P. El radio del círculo es la distancia MP.



#### Circunferencia con centro y radio

Tras marcar un punto M como centro, se despliega la ventana para ingresar el valor del radio.



#### Circunferencia dados tres de sus puntos



Al marcar tres puntos A, B, C queda definida una circunferencia que cruza por dichos puntos.

Si los tres puntos pertenecen a una recta, la circunferencia queda reducida a dicha recta.

Entrada algebraica:

Circunferencia[**punto M, número r**]

Circunferencia con centro M y radio r

Circunferencia[**punto M, segmento s**]

Circunferencia con centro en M y radio = Longitud[s]

Círculo[**punto M, punto A**]

Circunferencia con centro M que pasa por A

Circunferencia[**punto A, punto B, punto C**]

Circunferencia que pasa por A, B y C

**Cónicas:**



**Cónica dados cinco de sus puntos**

Al marcar cinco puntos queda definida una sección cónica que pasa por ellos. Siempre que no yazcan sobre una recta cuatro de estos cinco puntos, la sección cónica queda efectivamente definida.

Entrada algebraica:

**Elipse**

Elipse[**punto F, punto G, número a**]

Elipse con focos F, G y eje principal de longitud a. Condición:  $2a > \text{Distancia}[F,G]$

Elipse[**punto F, punto G, segmento s**]

Elipse con focos F, G y longitud del eje principal = Longitud[s]

**Hipérbola**

Hipérbola[**punto F, punto G, número a**]

Hipérbola con focos F, G y eje principal de longitud a. Condición:

$0 < 2a < \text{Distancia}[F,G]$

Hipérbola[**punto F, punto G, segmento s**]

Hipérbola con focos F, G y longitud del eje principal = Longitud[s]

**Parábola**



Parábola[**punto F, recta g**]

Parábola con foco F y directriz g

Otras entradas algebraicas relacionadas con las cónicas:

Asíntota[**hipérbola c**]

Ambas asíntotas a una hipérbola

Directriz[**parábola c**]

Directriz de una parábola

Ejes[**cónica c**]

Eje principal y secundario de una sección cónica

PrimerEje[**cónica c**]

Eje principal de una sección cónica

EjeSecundario[**cónica c**]

Eje secundario de una sección cónica

## Arco y Sector

El valor algebraico de un arco es su longitud, el valor de un sector es su área.



### Arco

Al marcar dos puntos A y B se produce un semicírculo por encima del segmento AB.

Entrada algebraica:

Semicircunferencia[**punto A, punto B**]

Semicircunferencia sobre el segmento AB.



### Arco circular dado un centro y dos puntos extremos

Al marcar tres puntos M, A y B se produce un arco circular con centro en M, que tiene como extremo inicial A y tiende hacia B. Nota: el punto B no tiene que yacer necesariamente en el arco.

Entrada algebraica:

ArcoCircular[**punto M, punto A, punto B**]

Arco circular con punto medio M entre dos puntos: A y B. Atención: el punto B no debe estar sobre el arco.

En la entrada algebraica enlodemos hacer arcos sobre cónicas:

**Arco[cónica c, punto A, punto B]**

Arco de sección cónica entre dos punto A y B de la sección cónica c (circunferencia o elipse)

**Arco[cónica c, número t1, número t2]**

Arco de sección cónica entre dos valores parametricos t1 y t2 para las siguientes formas paramétricas:

- circunferencia:  $(r \cos(t), r \sin(t))$ , donde r es el radio de la circunferencia
- elipse:  $(a \cos(t), b \sin(t))$ , donde a y b son las longitudes del primero y del segundo eje

**Sector circular dado un centro y dos puntos extremos**

Al marcar tres puntos M, A y B se produce un sector circular con centro en M, que tiene como extremo inicial A y tiende hacia B.

Nota: el punto B no tiene que yacer necesariamente en el sector.

Entrada algebraica:

**SectorCircular[punto M, punto A, punto B]**

Sector circular con punto medio M entre dos puntos A y B. Atención: el punto B no debe estar sobre el arco.

**Arco circular que atraviesa tres puntos**

Al marcar tres puntos se produce un arco circular que pasa por dichos puntos.

**Sector circular que atraviesa tres puntos**

Al marcar tres puntos se produce un sector circular que pasa por dichos puntos.

Entrada algebraica:

**SectorCircunferencia[punto, punto, punto]**

Sector de circunferencia que pasa a través de tres puntos

Modo numeros y angulos

**Distancia**

Este modo establece la distancia entre . . .



1. dos puntos
2. dos rectas
3. un punto y una recta

Entrada algebraica:

Distancia[**punto A, punto B**]

Distancia entre dos puntos A y B

Distancia[**punto A, recta g**]

Distancia de un punto A a una recta g

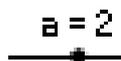
Distancia[**recta g, recta h**]

Distancia entre las rectas g y h. La distancia de rectas secantes es 0. Esta función es de interés para rectas paralelas.

También tenemos:

Longitud[**vector**]

Longitud de un vector



### Deslizador

Al dar clic sobre cualquier lugar libre de la zona gráfica, se crea un "dial" o deslizador para ajustar el valor de un número o ángulo allí presentes. La ventana que se despliega permite especificar el intervalo [mín, máx] del número o ángulo acorde al ancho del dial o deslizador (expresado en pixel).

En GeoGebra un deslizador no es sino la representación gráfica de un número o ángulo libres. Puede crearse fácilmente un deslizador correspondiente a un número o ángulo existentes, simplemente apuntando a este objeto (con un clic del botón derecho del mouse y eligiendo *expone objeto*).



### Angulo

Este modo crea . . .

1. el ángulo entre tres puntos
2. el ángulo entre dos segmentos
3. el ángulo entre dos rectas
4. el ángulo entre dos vectores
5. todos los ángulos interiores de un polígono



### Angulo de amplitud dada

Al marcar dos puntos A y B aparece una ventana donde puede anotarse la amplitud del ángulo. Este modo produce un punto C y un ángulo  $\sphericalangle$ , donde  $\sphericalangle = \sphericalangle(ABC)$ .

Angulo[**vector, vector**]

Ángulo entre dos vectores (entre 0 y 360o)

Angulo[**recta, recta**]

Ángulo entre los vectores directrices de dos rectas (entre 0 y 360o)



Angulo[**punto A, punto B, punto C**]

Ángulo tendido entre BA y BC (entre 0 y 360o). B es el vértice.

Angulo[**punto A, punto B, Angulo alpha**]

Angulo de amplitud alpha trazado desde B con vértice en A. El punto Rota[B, A, a] también se crea.

Angulo[**cónica**]

Angulo de revolución del eje principal de una sección cónica (4.3.9)

Angulo[**vector v**]

Angulo entre el eje x y el vector v

Angulo[**punto A**]

Angulo entre el eje x y el vector de posición del punto A

Angulo[**número**]

Convierte un número en un ángulo (resultando entre 0 y 2pi)

Angulo[**polígono**]

Todos los ángulos interiores de un polígono



### Lugar Geométrico

Lo primero que debe seleccionarse es el punto Q cuyo lugar geométrico debiera trazarse. Luego, con un clic"se marca un punto P del que Q dependerá. Debe advertirse que el punto P debe pertenecer a un objeto (recta, segmento, circunferencia, . . . ).

Entrada algebraica:

Lugar Geométrico[**punto Q, punto P**]

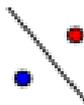
Traza el lugar geométrico del punto Q dependiente del punto P. El punto P debe ser el punto de un objeto (recta, segmento, circunferencia, ...).

Modo transformaciones



### Refleja un objeto a través de un punto

Lo primero que debe seleccionarse es el objeto a ser reflejado. Luego, con un clic"se marca el punto a través del cual se operará la reflexión.



### Refleja un objeto a través de una recta

Lo primero que debe seleccionarse es el objeto a ser reflejado. Luego, con un "clic" se marca la recta -eje a través de la que se operará la reflexión.

Entrada algebraica:

Reflexión[**punto A, punto B**]



Refleja el punto A por el punto B  
Reflexión[**recta g, punto B**]  
Refleja la recta g por el punto B  
Reflexión[**cónica c, punto B**]  
Refleja la sección cónica c por el punto B  
Reflexión[**polígono P, punto B**]  
Refleja el polígono P por el punto B. También se crean los nuevos vértices y segmentos.  
Reflexión[**imagen p, punto B**]  
Refleja la imagen p por el punto B  
Reflexión[**punto A, recta h**]  
Refleja el punto A por la recta h  
Reflexión[**recta g, recta h**]  
Refleja la recta g por la recta h  
Reflexión[**cónica c, recta h**]  
Refleja la cónica c por la recta h  
Reflexión[**polígono P, recta h**]  
Refleja el polígono P según el eje de la recta h. También se crean los nuevos vértices y segmentos.  
Reflexión[**imagen p, recta h**]  
Refleja la imagen p según el eje de simetría de la recta h



### **Rota un objeto a través de un punto**

Lo primero que debe seleccionarse es el objeto a ser rotado. Luego, con un clic se marca el punto que obrará como centro de rotación. Aparecerá, entonces, una ventana donde puede especificarse la amplitud en grados del ángulo de rotación.

Entrada algebraica:

Rotación[**punto A, ángulo phi**]  
El punto A rota el ángulo phi alrededor del eje al origen  
Rotación[**vector v, ángulo phi**]  
El vector v rota el ángulo phi  
Rotación[**recta g, ángulo phi**]  
La recta g rota el ángulo phi alrededor del eje al origen  
Rotación[**cónica c, ángulo phi**]  
La sección cónica c rota el ángulo phi alrededor del eje al origen  
Rotación[**polígono P, ángulo phi**]  
El polígono P rota el ángulo phi alrededor del eje al origen. También se crean los nuevos vértices y segmentos.  
Rotación[**imagen p, ángulo phi**]  
La imagen p rota un ángulo phi alrededor del eje al origen.  
Rotación[**punto A, ángulo phi, punto B**]  
El punto A rota el ángulo phi alrededor del punto B  
Rotación[**recta g, ángulo phi, punto B**]  
La recta g rota el ángulo phi alrededor del punto B

**Rotación[cónica c, ángulo phi, punto B]**

La sección cónica c rota el ángulo phi alrededor del punto B

**Rotación[polígono P, ángulo phi, punto B]**

El polígono P rota un ángulo phi alrededor del punto B. También se crean los nuevos vértices y segmentos.

**Rotación[imagen p, ángulo phi, punto B]**

La imagen p rota un ángulo phi alrededor del punto B

**Traslada un objeto por un vector**

Lo primero que debe seleccionarse es el objeto a ser trasladado. Luego, con un clic se marca el vector de translación.

Entrada algebraica:

**Traslación[punto A, vector v]**

El punto A se traslada según el vector v

**Traslación[recta g, vector v]**

La recta g se traslada según el vector v

**Traslación[cónica c, vector v]**

La sección cónica c se traslada según el vector v

**Traslación[función c, vector v]**

La función f se traslada según el vector v

**Traslación[polígono P, vector v]**

El polígono P se traslada según el vector v. También se crean los nuevos vértices y segmentos.

**Traslación[imagen p, vector v]**

La imagen p se traslada según el vector v

**Traslación[vector v, punto P]**

El vector v se traslada al punto P

**Dilata un objeto desde un punto**

Lo primero que debe seleccionarse es el objeto a ser dilatado. Luego, con un clic se marca el punto que obrará como centro de dilatación. Aparecerá, entonces, una ventana donde puede especificarse el factor de dilatación.

Entrada algebraica:

**Dilatación[punto A, número f, punto S]**

Dilata el punto A desde el punto S según el factor f

**Dilatación[recta h, número f, punto S]**

Dilata la recta h desde el punto S según el factor f

**Dilatación[cónica c, número f, punto S]**

Dilata la sección cónica c desde el punto S según el factor f

**Dilatación[polígono P, número f, punto S]**



Dilata el polígono P desde el punto S según el factor f. También se crean los nuevos vértices y segmentos.

Dilatación[**imagen p, número f, punto S**]

Dilata imagen p desde el punto S según el factor f .

