A diez años de la muerte de Edward N. Lorenz, matemático y meteorólogo

José M. Rodríguez Sanjurjo
Departamento de Álgebra, Geometría y Topología
Facultad de Ciencias Matemáticas (UCM)

El 16 de Abril de 2018 se cumplen diez años de la muerte en Cambridge, Massachusetts, del matemático y meteorólogo norteamericano Edward N. Lorenz, cuyo nombre está asociado a la teoría del caos y al estudio de la predicción del tiempo atmosférico. Lorenz nació en 1917 en West Hartford, Connecticut y estudió Matemáticas en Harvard y Meteorología en el Instituto de Tecnología de Massachusetts (MIT). Uno de sus profesores en Harvard fue George Birkhoff, eminente matemático, muy conocido por su trabajo en el campo de los sistemas dinámicos. Lorenz trabajó como meteorólogo durante la segunda guerra mundial y fue profesor de esta disciplina en el MIT. Toda su vida estuvo fascinado por la predicción del tiempo y sus principales contribuciones científicas están motivadas por el deseo de conocer la viabilidad de esta actividad, así como sus límites.

En su doble faceta de matemático y meteorólogo Lorenz estaba familiarizado con los escritos de Poincaré, en los que el matemático francés reflexionaba sobre el papel del azar y de la probabilidad en los fenómenos físicos. Poincaré creía en el determinismo clásico y refiriéndose, entre otras cosas, a la poca fiabilidad de los pronósticos sobre el tiempo atmosférico aseguraba que muchos fenómenos que parecen obra del azar están, sin embargo, rigurosamente determinados y es, tan solo, nuestro impreciso conocimiento de las condiciones iniciales, motivado por ejemplo por errores inevitables en las mediciones, el que nos hace incapaces de predecir su evolución. En concreto, Poincaré escribe lo siguiente:

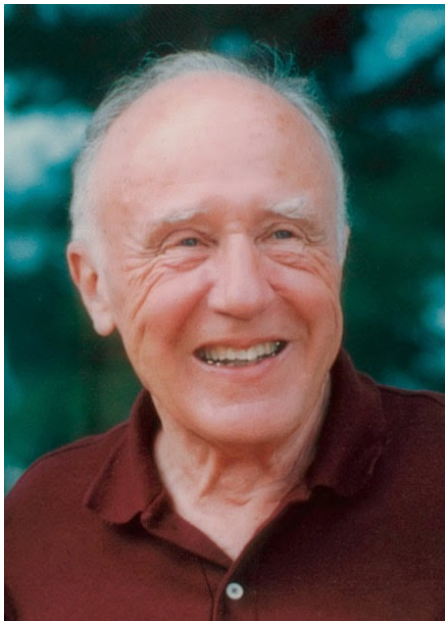

Figura 1: Edward Lorenz (1917-2008)

"Puede suceder que pequeñas diferencias en las condiciones iniciales produzcan grandes diferencias en los fenómenos finales. Un pequeño error

en las primeras puede causar un error enorme en los últimos. La predicción se hace imposible y aparece el fenómeno fortuito...Una causa muy pequeña, que se nos escapa, determina un efecto considerable que no podemos ignorar, y entonces decimos que el efecto es debido al azar" (Henri Poincaré, Science et Méthode, 1908).

Evidentemente, las observaciones anteriores no cuestionan el punto de vista determinista de Poincaré pues, como J. C. Maxwell había dicho antes, el hecho de que las mismas causas producen siempre los mismos efectos no debe ser confundido con que causas semejantes producen efectos semejantes.

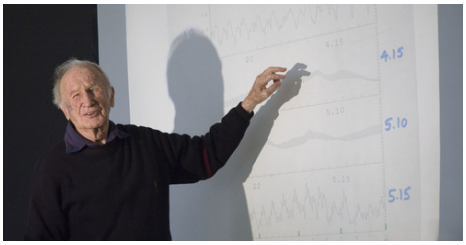

Figura 2: Edward Lorenz (1917-2008)

Lorenz estaba interesado en formular unas ecuaciones que modelasen algunas de las características del proceso de convección en el seno de la atmósfera y que fuesen útiles para la predicción del tiempo. Cualquier modelo que se aproxime a la realidad debe tener en cuenta una cantidad muy grande de variables, pero Lorenz decidió simplificar drásticamente la situación y estudió el movimiento de convección de un estrato 2-dimensional de un fluido que se calienta desde abajo y se enfría desde arriba y que queda descrito, simplemente, por un sistema tridimensional de ecuaciones diferenciales ordinarias en el que una variable mide la intensidad de la convección y las otras dos la variación horizontal y vertical de temperatura.

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= -\sigma x_1 + \sigma x_{2,} \\
\dot{x}_2 &= \rho x_1 - x_2 - x_1 x_3, \\
\dot{x}_3 &= -\beta x_3 + x_1 x_{2,}
\end{aligned}$$

En las ecuaciones anteriores, σ, ρ y β son tres parámetros positivos proporcionales respectivamente al número de Prandtl, al número de Rayleigh y a ciertas magnitudes de la región considerada. Estas ecuaciones se conocen desde entonces con el nombre de *Ecuaciones de Lorenz.* Los resultados de esta investigación están publicados en el *Journal of the Atmospheric Sciences* en 1963, en un artículo titulado *Deterministic Nonperiodic Flow* cuyo propósito es examinar en qué medida es posible predecir el tiempo a muy largo plazo. Lorenz comienza estudiando estas ecuaciones por los procedimientos analíticos que tenía a su disposición. Invoca los precedentes de Poincaré y Birkhoff en la teoría de los sistemas dinámicos y utiliza un punto de vista cualitativo que por entonces era bastante novedoso y que acababa de ser expuesto de modo sistemático por V.V.

Niemitskii y V.V. Stepanov en su libro *Qualitative theory of differential equations.* De este modo llega, por métodos rigurosos, a la conclusión de que, con el tiempo, todas las soluciones del sistema quedan confinadas en regiones cercanas a un subespacio que tiene volumen cero. En lenguaje moderno diríamos que el sistema dinámico asociado a estas ecuaciones tiene un *atractor global.*

Sin embargo, simulaciones numéricas realizadas con su ordenador (un Royal McBee LGP-30) parecían indicar que, para ciertos valores de los parámetros, casi todas las soluciones se aproximaban a una región aún más pequeña, contenida en este atractor global, cuyas proyecciones sobre los planos coordenados tenían una intrigante forma que podía recordar la silueta de una mariposa, como se puede ver en las ilustraciones de este artículo, tomadas de internet. No todas las soluciones se acercaban a esta mariposa pues había un par de órbitas estacionarias (puntos fijos) en su exterior y algunas otras trayectorias que se acercaban a estos puntos fijos. Pero las imágenes de ordenador parecían sugerir fuertemente que los puntos de las proximidades de la mariposa (un entorno) eran atraídos por ella. Lorenz demostró que algunas soluciones de su sistema eran periódicas, pero otras no lo eran y registraban una forma de inestabilidad que estaba, sin duda, relacionada con los fenómenos a los que se había referido Poincaré y que eran, por así decirlo, el reverso de la estabilidad que un contemporáneo de Poincaré, el matemático ruso Liapunov, había estudiado. En el sistema de Lorenz se observaba que las soluciones no periódicas estaban rodeadas por otras trayectorias que temporalmente están muy próximas a ellas pero que después llegan a alejarse de modo arbitrario y tienen un comportamiento absolutamente divergente. Este tipo de inestabilidad tiene una implicación de enorme importancia en lo que respecta a la capacidad de predecir la evolución del fluido que estamos estudiando. A pesar de que contamos con una descripción *determinista* perfectamente definida por las ecuaciones de Lorenz, cualquier error insignificante o pequeña imprecisión en las mediciones del estado actual del sistema (por ejemplo, la temperatura) nos lleva a errores extraordinarios en la predicción de su evolución futura. Y esto es cierto para cualquier error, por mínimo que sea; solo un conocimiento exacto de las magnitudes (en términos más técnicos, de las *condiciones iniciales*) nos permitiría una predicción de la evolución futura. Teniendo en cuenta que en el mundo real es imposible medir con error cero, se deduce de la investigación de Lorenz que, al menos en el fluido que es objeto de su estudio, la predicción de su evolución a largo plazo es

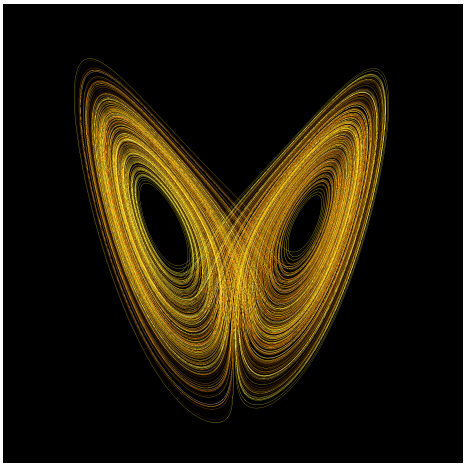

Figura 3: El atractor de Lorenz

imposible. En las conclusiones de su artículo, Lorenz escribe lo siguiente:

"Queda pendiente la cuestión de en qué medida nuestros resultados se aplican realmente a la atmósfera. En general la atmósfera no se considera determinista o finita y su falta de periodicidad no es una certeza matemática, ya que la atmósfera no ha sido observada por toda la eternidad".

De modo que la investigación de Lorenz no arroja una conclusión definitiva. Sin embargo, si es imposible predecir la evolución de un sistema como el de Lorenz, cabe pensar que para un sistema mucho más complejo, como es la atmósfera, la predicción precisa a largo plazo queda fuertemente cuestionada.

En el artículo de Lorenz aparecen ilustradas de modo muy atractivo muchas de las ideas en las que, posteriormente, se ha basado la llamada teoría del caos. En concreto, el modo en que cualquier mínima imprecisión en las mediciones se plasma en tremendos errores en la predicción futura no es otra cosa que la *sensibilidad respecto a las condiciones iniciales,* y esa misteriosa figura en forma de mariposa cuya existencia tan poderosamente parecen sugerir las imágenes del ordenador es, si realmente existe, un *atractor extraño.* La existencia de este atractor, sin embargo, no fue rigurosamente demostrada por Lorenz, por más que en su artículo su presencia sea ubicua.

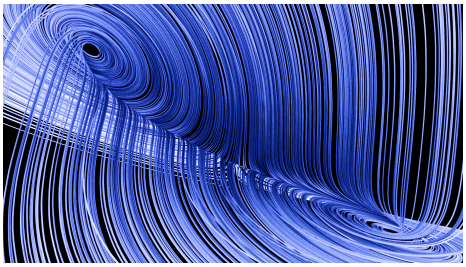

Figura 4: El atractor de Lorenz

Los resultados de este artículo permanecieron, en un principio, restringidos al mundo de la meteorología, pero, algún tiempo despues llegaron a conocimiento del famoso matemático Stephen Smale a través de James Yorke. Smale enseguida los dio a conocer en el mundo de los sistemas dinámicos, donde fueron acogidos con gran interés pues, en palabras del propio Lorenz, muchos de estos especialistas veían por primera vez un atractor extraño de carne y hueso.

Hubo otro acontecimiento científico que contribuyó a proyectar luz sobre el tipo de matemáticas que habían aflorado en el artículo de Lorenz. Se trata de un trabajo de David Ruelle y Floris Takens publicado en 1971 titulado *On the Nature of Turbulence.* Los autores presentaban en este artículo un mecanismo para la generación de la turbulencia en los fluidos según el cual ésta quedaba explicada por la aparición de atractores extraños en las ecuaciones que describen la evolución del sistema. Aquí jugaba nuevamente un papel destacado la dependencia sensible respecto de las condiciones iniciales y otras ideas que estaban presentes en el artículo de Lorenz. El artículo de Ruelle y Takens tuvo una gran influencia pues su teoría resolvía discrepancias de teorías anteriores de L.D. Landau y de E. Hopf con los estudios numéricos realizados por Paul Martin y los experimentos con fluidos de Jerry Gollub y Harry Swinney.

El atractor del artículo de Lorenz pasó a conocerse, lógicamente, con el nombre de *Atractor de Lorenz.* Inmediatamente se despertó el deseo de conocer algo

más de él, y muchos autores dedicaron energías a su estudio. En 1982 apareció un libro de Colin Sparrow dedicado, básicamente, al atractor. Lo paradójico de esta situación es que no existía certeza matemática de su existencia, de modo que los esfuerzos de estas personas podían revelarse, a la postre, inútiles si resultase que esa figura misteriosa que aparecía en la pantalla de los ordenadores no revelaba nada más que un comportamiento *transitorio* de las ecuaciones de Lorenz, pero no un comportamiento *asintótico.* Algunos autores, como J. Guckenheimer y R.F. Williams elaboraron modelos geométricos de las ecuaciones de Lorenz que estaban inspirados por las ecuaciones reales y que era plausible pensar que se correspondiesen con ellas. Para estos modelos se demostró rigurosamente la existencia de atractores, pero la incertidumbre sobre si los modelos se correspondían con el original permanecía. En cualquier caso, comenzó a cobrar cada vez más fuerza un tipo de matemáticas dedicadas al estudio de las estructuras complejas que se originaban con frecuencia en el estudio de ecuaciones diferenciales no lineales (las ecuaciones de Lorenz, aunque de aspecto muy simple, son no lineales) y aparecieron revistas como *Nonlinear Analysis*, *Physica D* o *Nonlinearity,* que están consagradas a este tipo de estudios.

Es interesante referirse, aunque sea mínimamente, al contexto en el que tuvo lugar la actividad de Lorenz. En rigor, los fenómenos no lineales habían estado presentes en la matemática y en la física desde mucho tiempo atrás y, contemporáneamente con la actividad de Lorenz, se manifestaron también en otros campos que atrajeron la curiosidad de los matemáticos y otros científicos. El innegable punto de partida se señala en la obra de Henri Poincaré. En él se originan las ideas relativas al tratamiento cualitativo de las ecuaciones diferenciales, las nociones de estabilidad y bifurcación y la introducción de conceptos probabilísticos en dinámica. Estas nociones y técnicas aparecieron en la serie de memorias *Sur les courbes définies par une équation différentielle* publicadas entre 1881 and 1886 y llevarían inevitablemente a la Topología y al papel relevante que esta rama de la matemáticas juega en dinámica. La primera manifestación del caos aparecería en el estudio de la estabilidad del sistema solar, que Poincaré llevó a cabo en su ensayo *Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique*, aparecido en 1890. Aquí estudia las trayectorias que él llamó dóblemente asintóticas, que se aproximan en el pasado y en el futuro a la misma órbita periódica. Estas trayectorias se corresponden con lo que hoy llamamos puntos *homoclínicos* del sistema dinámico discreto al que se reduce el estudio de la ecuación diferencial cuando consideramos la intersección de sus trayectorias con una sección transversal (sección de Poincaré). Birkhoff descubriría más tarde que la existencia de puntos homoclínicos da lugar a una infinidad de puntos periódicos. Smale reconoció la importancia de los puntos homoclínicos en el estudio sistemático de la dinámica discreta de un difeomorfismo que emprendió en su artículo *Differentiable dynamical systems.* Este artículo puede ser considerado como la base fundacional de un área extensa de los sistemas dinámicos. Allí demostraría que los puntos homoclínicos transversales producen no solo una infinidad de puntos periódicos, sino herraduras, una de las más genuinas manifestaciones del caos. También en este artículo se muestra la relevancia de un bello objeto topológico, el *solenoide de Van Dantzig*, que Smale presenta como

atractor de un sistema dinámico discreto.

Paralelamente a estos descubrimientos se conocieron resultados de Balthasar Van der Pol y de Mary Cartwright y John Littlewood sobre sistemas disipativos de ecuaciones diferenciales relativos a las oscilaciones de circuitos eléctricos. Estos sistemas tenían soluciones con estructuras sorprendentes que no eran plenamente entendidas en aquellos momentos y que más tarde se reconocerían como ligadas al caos. Cartwright y Littlewood describieron estas soluciones como "un conjunto muy extraño de trayectorias no periódicas que es conexo, de medida cero y separa el plano en dos regiones, acotada y no acotada, pero muy complicado". En una nota de su artículo reconocían que su fe en el resultado se sostenía solo en la evidencia experimental. Estas líneas de investigación serían continuadas por Solomon Lefschetz, que dirigió durante bastantes años el llamado *Nonlinear Oscillation Project.* Lefschetz estaba convencido de que las ecuaciones no lineales eran un campo vital de la matemática en el que la Unión Soviética había adelantado a Estados Unidos y decidió impulsar una reacción organizando lo que algunos llamarían después las *matemáticas de la guerra fría.* Este tipo de matemática se benefició sustancialmente del punto de vista topológico propugnado por Cartwright, Littlewood y Norman Levinson.

Otra importante línea de investigación está representada por Robert May, quien observó que las más simples ecuaciones no lineales en diferencias (es decir, sistemas dinámicos discretos) pueden poseer un espectro extraordinariamente rico de propiedades dinámicas, evolucionando desde puntos estables a través de cascadas de ciclos estables hasta un comportamiento en muchos aspectos caótico, aunque completamente determinista. May encontró este tipo de propiedades en ecuaciones que modelan procesos de la dinámica de poblaciones, estrechamente ligadas a la ecuación logística.

En el contexto que hemos descrito, las ecuaciones de Lorenz brillaban con luz propia. A finales del siglo XX, el problema de demostrar la existencia del atractor de Lorenz comenzó a ser considerado como uno de los retos fundamentales de las matemáticas. En 1998 Smale elaboró una lista que contenía los 18 problemas que, según él, constituían el principal desafío que las matemáticas del siglo XX proponían al siglo XXI. Algunos de estos problemas eran, por ejemplo, la hipótesis de Riemann, la conjetura de Poincaré o el problema 16 de Hilbert. El problema número 14 de la lista proponía, precisamente, demostrar la existencia del atractor de Lorenz o, en lenguaje ligeramente diferente, demostrar que la dinámica del modelo geométrico de Guckenheimer, Williams y Yorke coincidía con la del sistema definido por las ecuaciones de Lorenz. El nombre de James Yorke fue añadido por Smale a los de Guckenheimer y Williams por sus contribuciones a la teoría del atractor de Lorenz, aunque no precisamente a la del modelo geométrico.

La solución al problema fue anunciada un año después por Warwick Tucker, un estudiante de doctorado del matemático sueco Lennart Carleson en la Universidad de Upsala, aunque la demostración completa sólo apareció en 2002, en el artículo titulado *A Rigorous ODE Solver and Smale's 14th Problem.* La prueba es una combinación de métodos basados en las formas normales, una técnica de la teoría de ecuaciones diferenciales ya utilizada por Birkhoff en el

ámbito de los sistemas dinámicos, y análisis numérico riguroso. Este último le permite identificar una región contenida en una sección del flujo con la propiedad de que todas las órbitas que parten de ella siempre retornan. Es de aquí, básicamente, de donde se deduce la existencia del atractor. Para evitar la acumulación de errores cuando el flujo pasa cerca del origen, Tucker hace uso de la teoría de formas normales, de modo que puede aproximar linealmente el flujo y obtener una estimación eficiente de los errores cometidos en la aproximación. La parte numérica de la demostración es asistida por ordenador. De hecho, Tucker obtiene un algoritmo que le permite computar soluciones rigurosas para una clase amplia de ecuaciones diferenciales. El algoritmo se basa en un método de partición y aritmética de intervalos. En su artículo, Tucker prueba también que el atractor de Lorenz es robusto, es decir que persiste después de pequeñas perturbaciones del sistema. En definitiva, Tucker demuestra en su artículo que el atractor de Lorenz es tal y como el modelo geométrico predice. Contiene el origen y tiene una estructura complicada de "libro de Cantor", como describió R.F. Williams.

Figura 5: Warwick Tucker

Las ecuaciones de Lorenz han sido un banco de pruebas para muchas ramas de las matemáticas, que han encontrado allí motivos de inspiración. Desde el análisis numérico a los sistemas dinámicos y desde la topología y la teoría de nudos a la teoría de la computación, todas han bebido en aquella fuente y todas han contribuido a desvelar algunos de los secretos que encierran. Probablemente falta mucho tiempo aún para tener un conocimiento completo de estas ecuaciones, pero en el camino recorrido hasta ahora se han recogido abundantes frutos y se han abierto nuevas perspectivas para las matemáticas.