

NÚMEROS Y CONVERGENCIA (Primeros pasos en el Análisis Matemático)

Autor y Editor: Baldomero Rubio

ISBN: 84-934918-0-2

Depósito legal: M-9800-2006

Diseño de cubierta: La fábrica de diseño

EXTRACTO DEL PRÓLOGO

Se pueden entender de varias maneras los pasos iniciales que debe dar quien desea introducirse con buen pie en el Análisis Matemático. Una posibilidad es admitir los números reales mediante su definición axiomática y seguir con las funciones y la noción $\varepsilon \rightarrow \delta$ de límite para ellas, lo cual permite llegar de forma rápida a la continuidad, la derivada y la integral (en el orden *derivada* \rightarrow *integral*, que es el que suele seguirse con más frecuencia, en oposición al orden *integral* \rightarrow *derivada* que sería aconsejable si se tiene en cuenta el desarrollo histórico de las matemáticas). Esta manera de entender un primer curso universitario de Análisis Matemático ha sido aceptada por muchos profesores quizás porque proporciona un acceso rápido al corazón del Cálculo integral y diferencial, y posiblemente ésta sería una interpretación aceptable si hubiera para la enseñanza secundaria otros contenidos bien diferentes a los actuales, entre los que no podrían faltar, por citar sólo algunos ejemplos, análisis de procesos numerables muy significativos como un modelo de Fibonacci relativo al desarrollo de determinada especie animal, o los asociados a la evolución de un capital a través del interés bancario, o el aumento del perímetro de un polígono regular inscrito en un círculo al duplicarse de forma reiterada el número de lados, que son tres procesos con su raíz en la realidad o en intuiciones geométricas sencillas, y que conducen al número áureo, a e y a π .

Deseo señalar con lo anterior que, en mi opinión, quien desee manejarse con soltura en el Análisis Matemático debe pasar previamente por el estudio de las sucesiones de números y, en particular y principalmente, de las series. Todo parece indicar que el análisis de procesos numerables debe ser previo al de los fenómenos continuos, desde un punto de vista técnico y psicológico.

Mi propósito inicial al concebir este trabajo ha sido elaborar un nuevo texto de Análisis de una variable real o compleja con las suficientes precisiones técnicas para quien desea hacer un estudio completo en este campo. Este libro sería la primera parte de tal proyecto, y he pensado que quizás tiene interés por sí mismo en cuanto que de su contenido se puede extraer algo que sea de utilidad en una posible nueva concepción del bachillerato, suavizando quizás algunos aspectos técnicos, y por otra parte puede estimular a profesores y estudiantes para que lo utilicen como punto de partida en el primer año de enseñanza universitaria. Mi experiencia en el segundo aspecto es que merece la pena dedicar algún tiempo a esta materia al comienzo del curso, por las razones ya apuntadas y porque ello supone además agilizar de forma considerable los pasos siguientes.

¿Qué pretende “*Números y convergencia (Primeros pasos en el Análisis Matemático)*”? El título indica una declaración de intenciones. El comienzo del Análisis, y en realidad de toda la matemática, son los números, y el paso de los racionales a los reales no se puede entender sin las nociones de sucesión y convergencia. El objetivo es hacer una construcción detallada y con todos los requisitos técnicos de lo fundamental en torno a estos conceptos, tomando como punto de partida los números naturales definidos por los axiomas de Peano. La estructura del libro responde al esquema usual de hilvanar definiciones, teoremas y sus demostraciones, lo cual, en principio, no significa necesariamente que su lectura sea dura o árida. He buscado en lo posible justificar el sentido de las definiciones y teoremas, así como aderezarlos con múltiples ejemplos. Hay que tener en cuenta además que no se requiere en una primera lectura ejercitarse en la demostración de cada teorema. La mayor atención hay que prestarla siempre a las definiciones, puesto que éstas precisan el significado de las palabras y la manera de expresarse con los conceptos que establecen. De cada teorema lo fundamental es conocer en profundidad la verdad que éste asegura, aunque en principio se soslaye en ocasiones la justificación de la misma. Puede ser aconsejable tratar de hacer primero alguna aplicación del teorema en una situación concreta, a través de los ejemplos que se proponen, para pasar en una etapa posterior, mediante el ejercicio de la demostración, al convencimiento de su veracidad. Conviene recordar a este respecto que en matemáticas no es necesario aceptar dogmas, aunque no es inconveniente hacerlo de modo provisional. Lo que sí debe tenerse en cuenta es que la práctica de las demostraciones pone en contacto con los métodos y recursos del trabajo matemático, que son necesarios para la resolución de problemas.

El capítulo 1 empieza con una breve descripción de las nociones elementales de la teoría de conjuntos, y continúa con la definición de los números naturales mediante los axiomas de Peano. Se pone énfasis en el significado y utilidad de los dos principios de inducción matemática y se justifican las propiedades de sumas y de productos. Las construcciones de los enteros y los racionales, así como las definiciones concernientes a ellos están adecuadamente motivadas. El capítulo incluye también la numerabilidad de los racionales, las nociones de ínfimo y de supremo, la fórmula de Newton y la extensión de la propiedad asociativa.

El capítulo 2 está dedicado a la construcción de los números reales tomando como punto de partida la representación decimal de los racionales. Para ello se introducen las sucesiones y la noción de convergencia, y se estudian en particular las series geométricas y alguna otra muy significativa. El método “diagonal” de Cantor permite obtener un conjunto de sucesiones que no es numerable. El intervalo real $[0, 1)$ está descrito con todo detalle, y de aquí resulta la definición del conjunto \mathbb{R} de los números reales, la ordenación de éstos y los intervalos. El capítulo termina con la descripción de los números irracionales $\sqrt{2}$ y e .

Es en el capítulo 3 donde se establecen las construcciones y resultados fundamentales con números reales, comenzando por el teorema del supremo, que establece la gran diferencia entre \mathbb{R} y \mathbb{Q} y permite introducir la aritmética en \mathbb{R} , además de constituir una herramienta insustituible en muchos otros procesos. Se profundiza en la idea de convergencia y se establecen resultados relativos a ésta para potencias y logaritmos, lo cual permite la definición completa de funciones muy básicas en el Análisis. Uno de los apartados se dedica al importante teorema de Bolzano-Weierstrass. Merece especial atención el tratamiento que se ofrece de los límites inferior y superior de una sucesión, del cual se obtienen muy importantes resultados sobre convergencia que se describen con detalle y muchos ejemplos. Al estudiar la propiedad de Cauchy se dan indicaciones sobre la construcción de \mathbb{R} a partir de las sucesiones con esta propiedad. Otro apartado se refiere a la topología de los reales y al teorema de Borel. La parte final del capítulo se dedica a un estudio de las series muy pormenorizado y con abundantes ejemplos, y también se describen las propiedades más importantes de los productos infinitos, con referencia a la función ζ de Riemann y a problemas y propiedades de números primos. Se incluye también la noción de convergencia uniforme para un conjunto de sucesiones o de series, con los teoremas clásicos de Weierstrass, Dirichlet y Abel relativos a la misma. Es de destacar especialmente en este capítulo la gran

colección de problemas que contiene, con las indicaciones oportunas para su resolución cuando ello ha parecido conveniente.

El capítulo final está dedicado a los números complejos. Consideraciones de tipo geométrico permiten dar una primera definición del número π , del argumento de un número complejo distinto de cero, y de las funciones coseno y seno. La notación de Euler e^{it} para los números complejos de módulo 1 permite llevar las funciones exponencial y logaritmo neperiano al campo complejo. Para conjuntos de números complejos se extienden muchas de las nociones y propiedades de los conjuntos de números reales estudiadas en el capítulo anterior. También las sucesiones y series de números complejos heredan una buena parte de las propiedades analizadas en el caso real. Se estudia en particular la serie exponencial compleja, que permite dar una interpretación en conexión con e del número complejo designado e^{it} , de las funciones coseno y seno, y de π . Se incluye también una sección dedicada a las funciones racionales, con el teorema de descomposición de las funciones racionales reales como suma de un polinomio y de funciones racionales simples. Se ofrece una versión de este teorema que permite el cálculo directo de los coeficientes de tal descomposición. Con esta sección se completa la exposición en el libro de todas las funciones elementales.

Como un apéndice se presenta una breve reseña biográfica de matemáticos cuya incidencia en algunos de los temas tratados en este libro ha sido importante.

CONTRAPORTADA

Este libro pretende rellenar cierto vacío que sin duda existe, al menos en el campo del Análisis Matemático, entre la enseñanza secundaria y la universitaria. En él se exponen de forma asequible las construcciones de todos los números, así como herramientas necesarias para su estudio como son la inducción, la fórmula de Newton, las series geométricas y algunas desigualdades. El paso crucial para obtener los números reales se hace a partir de las representaciones decimales de los racionales. Al mismo tiempo, se definen las funciones elementales y se hace un estudio relativo a convergencias que prepara el terreno para un posterior análisis de la continuidad, integración... de estas funciones, aspectos que se tratan en el libro del mismo autor "Funciones de variable real". Este esquema de tratamiento responde a que el análisis de los procesos numerables debe ser previo al de los continuos porque así lo aconseja el desarrollo de la matemática.

“Números y convergencia” y “Funciones de variable real” cubre bien la materia correspondiente a un primer curso universitario de Análisis Matemático. El autor ha tenido ocasión de experimentarlo en su docencia de muchos años.

Baldomero Rubio, catedrático de Análisis Matemático, inicia su tarea profesional en 1961 simultaneando docencia secundaria y universitaria. Desde 1967 es profesor en la Facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad Complutense. En 1971 obtiene el doctorado, siendo Miguel de Guzmán su director de tesis. En 1969 comienza una gran amistad y colaboración entre ambos, fruto de la cual son los libros “Integración: teoría y técnicas”, Alhambra, Madrid, 1979, y “Problemas, conceptos y métodos del Análisis Matemático”, tres volúmenes, Ediciones Pirámide, Madrid, 1990-1993.

CONTENIDO

1. De los naturales a los racionales

- 1.1. Conjuntos
- 1.2. Números naturales. Axiomas de Peano
- 1.3. El conjunto \mathbb{Z} de los enteros
- 1.4. El conjunto \mathbb{Q} de los racionales
- 1.5. Números combinatorios. Fórmula de Newton
- 1.6. La propiedad asociativa
- 1.7. Problemas

2. Sucesiones. Números reales

- 2.1. Producto de conjuntos. Sucesiones
- 2.2. Sucesiones de números racionales
- 2.3. Series de números racionales
- 2.4. Representación decimal de los racionales
- 2.5. El intervalo real $[0, 1)$
- 2.6. El conjunto \mathbb{R} de los reales. Intervalos
- 2.7. Sucesiones de números reales
- 2.8. Dos números irracionales
- 2.9. Problemas

3. Análisis de los números reales

- 3.1. El teorema del supremo
- 3.2. Suma y producto de reales. Valor absoluto
- 3.3. Definición axiomática de \mathbb{R}

- 3.4. Sucesiones de números reales
- 3.5. Potencias y Logaritmos
- 3.6. Tres funciones básicas
- 3.7. Teorema de Bolzano-Weierstrass
- 3.8. Límites inferior y superior de una sucesión
- 3.9. La propiedad de Cauchy
- 3.10. Topología en \mathbb{R} . Teorema de Borel
- 3.11. Series de números reales
- 3.12. Productos infinitos
- 3.13. La convergencia uniforme
- 3.14. Problemas

4. Los números complejos

- 4.1. Construcción de los complejos
- 4.2. Las funciones trigonométricas y π
- 4.3. Potencias, polinomios y logaritmos
- 4.4. La desigualdad de Schwarz
- 4.5. Conjuntos de números complejos
- 4.6. Sucesiones y series de complejos
- 4.7. Coordenadas polares
- 4.8. Funciones racionales
- 4.9. Problemas

Apéndice: Reseñas biográficas

1. Abel (1802 \rightarrow 1829)
2. Arquímedes ($-287 \rightarrow -212$)
3. Bolzano (1781 \rightarrow 1848)
4. Borel (1871 \rightarrow 1956)
5. Cantor (1845 \rightarrow 1918)
6. Cauchy (1789 \rightarrow 1857)
7. Dedekind (1831 \rightarrow 1916)
8. Dirichlet (1805 \rightarrow 1859)
9. Euler (1707 \rightarrow 1783)
10. Fibonacci (hacia 1179 \rightarrow después de 1204)
11. Peano (1858 \rightarrow 1932)
12. Raabe (1801 \rightarrow 1859)
13. Stolz (1842 \rightarrow 1905)
14. Tartaglia (1499 ó 1500 \rightarrow 1557)
15. Weierstrass (1815 \rightarrow 1897)

PRECIO DEL LIBRO: 20€ + 0,8€ IVA, más gastos de envío: 4,2€ para España, 11€ para Europa y 18 € para América, si se trata de un único ejemplar.

PEDIDOS AL AUTOR:

Al tfno. 630 715 194 (llamada o SMS) o mediante correo electrónico a la dirección: baldomero.rubio@gmail.com

La cantidad que corresponda puede hacerse efectiva por talón de Banco nominal enviado a la dirección del autor:

Baldomero Rubio. c/ Leopoldo Alas Clarín, 4. 28035 Madrid.

También mediante ingreso en la cuenta corriente:
2038 1116 7760 0068 9071 (IBAN ES35).