Contribuciones matemáticas en homenaje a **Juan Tarrés**

Editores

Marco Castrillón López
María Isabel Garrido Carballo
Jesús Ángel Jaramillo Aguado
José María Martínez Ansemil
José Rojo Montijano

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE
MADRID

PRÓLOGO

El pasado 28 de febrero de 2012 se celebró en la Facultad de Matemáticas de la UCM una Jornada de Homenaje a Joan Tarrés, con motivo de su jubilación. El acto contó con la presencia de un buen número de amigos, compañeros, colegas y familiares de Joan, quienes tuvimos así ocasión de mostrarle nuestro aprecio y reconocimiento. La Jornada se abrió con una presentación a cargo del profesor José Manuel Rodríguez Sanjurjo, director del Departamento de Geometría y Topología de la UCM. Siguieron a continuación las conferencias de los profesores Antonio Costa (UNED), Marco Castrillón (UCM) y José Rojo (USP-CEU). Finalmente, el acto concluyó con unas emotivas palabras del propio Joan, que se recogen aquí.

En el presente volumen se incluye un amplio conjunto de contribuciones matemáticas, de muy diversa temática y planteamiento, presentadas por todos aquellos que han querido sumarse a esta iniciativa y colaborar de este modo en el Homenaje. Nuestra labor aquí, como editores, ha consistido en reunir, organizar y preparar el material. Queremos agradecer profundamente a todos los autores por su generosa contribución, su disponibilidad y su paciencia a lo largo de todo este proceso. También nos gustaría agradecer a la Revista Matemática Complutense, por habernos permitido utilizar la plantilla de estilo con la que los autores han presentado sus colaboraciones.

El Comité Editorial:

Marco Castrillón
María Isabel Garrido
Jesús Ángel Jaramillo
José María Martínez Ansemil
José Rojo

PALABRAS DEL PROFESOR JOAN TARRÉS

Me toca a mí tomar la palabra y sólo me sale una GRACIAS. Estoy abrumado. Todo es tan bonito que parece un sueño. Gracias a los que habéis organizado esta jornada, Jose, Maribel, Marco, Jesús; gracias al Departamento de Geometría y Topología y a Pepe Sanjurjo, su director. Gracias a quienes han dictado estas charlas maravillosas. Gracias a todos los que habéis venido. Gracias a los que han querido venir y les ha sido imposible. Gracias a la Facultad de Matemáticas, en la que he sido feliz desarrollando mi labor profesional. Gracias a la Universidad Complutense, mi Universidad, mi alma Mater. Permitidme pues unas palabras, que voy a comenzar con el título de una canción del cantante de Xàtiva, Raimon, que se ajusta bastante a lo que ha sido mi vida:

"Jo vinc d'un silenci"

El silencio de un pueblo, Suria, situado en la Catalunya Central, lejos de Barcelona. Un pueblo situado entre montañas, que por no ser, ni siquiera son altas, encerrado en un valle estrecho en el que apenas llueve, con un río que apenas lleva agua y cuya principal fuente de riqueza son unas minas de sales potásicas, probablemente las más importantes de Europa. Allí viví hasta los catorce años.

En Suria cursé los cuatro primeros cursos del Bachillerato de entonces, el Bachillerato Elemental, examinándome por libre en el Instituto de Manresa. Esto fue posible gracias al empeño de mi maestro de Suria, que fue quien convenció a mis padres, que en aquellos tiempos tenían serias dificultades económicas, de que yo debía estudiar. No creo que sea necesario decir lo grande que es mi agradecimiento. Siguis on siguis, Sr. Riera, de tot cor, gràcies.

El verano después de aprobar la Reválida de 4^o apareció un día mi padre diciendo que había echado una solicitud para que yo fuera a estudiar a la Universidad Laboral de Tarragona. Aquello fue una sorpresa

para mí, que cambió totalmente mi vida. A primeros de octubre de ese mismo año llegó la carta en la que me decían que me habían aceptado. Fue el comienzo de tres años con experiencias nuevas. En Tarragona hice el Bachillerato Superior y como consecuencia de todo aquello me quedé con un título en el que, además de reconocer mis estudios de bachillerato me habilitaba para trabajar como tornero fresador, opción que nunca ejercí. Pero lo más importante que pasó allí es que me concedieron una beca para estudiar en la Universidad ¡el sueño de mi vida! ¡y el de mis padres! Por razones que no vienen al caso, esa beca me exigía realizar mis estudios en Madrid y así fue como vine a parar a la Complutense y comencé mis estudios de Matemáticas. Corría el año 1962.

Lo que sigue ya es más conocido: La Licenciatura, mis primeras clases como Profesor Ayudante; oposiciones a Profesor Agregado de Instituto primero y de Catedrático después; mi traslado a Burgos como consecuencia de esta última oposición. Allí me reencontré con la Universidad y fui profesor del Colegio Universitario (hoy Universidad) de aquella ciudad. Además, fui Secretario General de esa institución, cuando solamente contaba con 27 años, cargo que ejercí durante un lustro. También, durante los años de Burgos redacté y defendí mi Tesis Doctoral. Tras un año de transición en Barcelona, fui convocado para realizar los ejercicios de la oposición gracias a la cual he permanecido desde 1979 en el Departamento que hoy se llama de Geometría y Topología, del que, por otra parte, tuve la osadía de ser su Director durante cuatro años, como bien sabéis todos.

Ésta es, a grandes rasgos, la historia de mi vida profesional. Quiero decir dos cosas al respecto: he sido feliz en mi trabajo y nada de esto habría ocurrido sin la ayuda de muchas personas. También tengo que decir que el camino no siempre ha sido fácil y ha habido momentos complicados, como en todas las cosas de la vida. No obstante, el resultado final es muy, pero que muy positivo.

Llega ahora el momento de los agradecimientos. En primer lugar, destacados del resto, quiero colocar a mis padres; por desgracia, ellos no pueden estar hoy aquí, pero sin su ayuda, su empeño y sus sacrificios, quien no estaría hablando ahora en este lugar, sería yo. Tenían una formación académica muy escasa, pero tenían muy claro lo que querían y lo lograron. La lucha por la supervivencia en los años cuarenta y cincuenta del siglo pasado no les asustó. Se quitaron literalmente de comer y de hacer muchas cosas para que tanto mi hermano (tres años mayor que yo y que hoy me acompaña) como yo mismo tuviéramos una formación adecuada y poseyéramos los medios necesarios para abrirnos

camino en la vida.

Junto a mis padres quiero poner a la persona que me ha acompañado siempre. La compañera de mi vida, la que siempre ha estado a mi lado en los momentos buenos y en los malos, mi consejera, mi esposa, mi querida María. Sin su aliento, su comprensión, su infinita capacidad de aguantar, yo no estaría aquí. A ella le debo también todo lo que soy. Gràcies, Maria, sense tu, res hagués sigut possible.

A mis cuatro hijos, Mariona, Ramón, Montserrat y Nuria que hoy me acompañan. Ellos son mi orgullo, mi alegría. Además de siete nietos preciosos, nos han dado siempre muchas satisfacciones. El amor que nos tienen son la fuerza que nos ha empujado hacia arriba en todo momento. Naturalmente, a esto han contribuido sus parejas, que en absoluto son ajenas a la armonía y la colaboración dentro de la familia.

A mi hermano le que quiero dedicar unas palabras especiales, que voy a decir en nuestra lengua materna y no creo que sea necesario traducir:

Josep, gràcies per haver vingut. Tu i jo sabem el que representa que avui tots dos siguem aquí. Només vull dir-te que ara mateix, no sé ni com ni des de on, estic segur que els nostres pares ens estan mirant i són feliços de que tot això que passa aquí, estigui passant. Gràcies també a tu, Isabel, per acompanyar-nos

Al resto de mi familia. Hoy me acompaña uno de mis primos, Ramón, que ha hecho un gran esfuerzo para estar aquí; con él, y con el resto, siempre ha habido una "química" muy poderosa.

A mis amigos, de los que hay hoy una buena representación aquí. Siempre han estado a mi lado y han sido un estímulo para superar tantas y tantas dificultades. ¡Qué importante es en la vida tener amigos como vosotros!

Y, por supuesto, a todos vosotros, compañeros de profesión y también amigos. En vosotros he encontrado siempre un apoyo y una colaboración inestimables. Merecía la pena estar aquí, a vuestro lado, codo con codo.

No quiero pasar por alto la presencia de Manuel Castellet, catedrático de Topología de la Universidad Autónoma de Barcelona, con quien me une una buena amistad. Prueba de ello es el sacrificio que ha tenido que hacer para viajar hoy hasta aquí y estar presente en estos momentos tan emotivos.

Hay dos personas a las que quiero destacar especialmente: los profesores Joaquín Arregui Fernández y José Javier Etayo Miqueo. Gracias a ellos pude regresar a la Universidad cuando estaba en Burgos. Además de este hecho, con ambos he mantenido una buena amistad y mi respeto por los dos siempre ha sido muy grande.

Dejadme que dedique unos momentos muy emocionados a Joaquín Arregui. Hace pocos días que recibimos la triste noticia de su fallecimiento. Fue él quien me alentó a quedarme en la Universidad al terminar la Licenciatura y fue él quien dirigió mi tesis doctoral, con la paciencia infinita que normalmente requiere esta circunstancia. Siempre fuimos buenos amigos y su desaparición me ha llenado de tristeza. Descansa en paz querido Joaquín.

Llega así el momento de decir adiós a todos estos años de profesión. Si algo no me ha faltado en este tiempo ha sido el entusiasmo y la dedicación. Siempre he intentado que todo aquello que era difícil, pareciera sencillo. Han sido muchos los estudiantes que han asistido a mis clases y creo que la mayoría valoran mis enseñanzas de manera positiva. He dirigido cinco Tesis Doctorales en estos años; todos mis doctorandos han acabado siendo excelentes amigos.

La Universidad española está pasando por tiempos de cambios profundos y no pocas dificultades de todo tipo. No obstante, tengo fe en que vendrán de nuevo los buenos tiempos. Para ello hay que perseverar en el trabajo y la ilusión que tenemos en esta institución.

Me vais a permitir que os lea una estrofa de una canción de Lluís Llach titulada Cal que neixin flors a cada instant que dice:

> ...no esperem el blat sense haver sembrat
> No esperem que l'arbre doni fruits sense poda'l
> L'hem de treballar, l'hem d'anar a regar
> encara que l'ossada ens faci mal
> No somiem passats, que el vent s'ha emportat
> Una flor d'avui és massa justa l'endemà
> Cal que neixin flors a cada instant

Esta ha sido mi actitud frente al trabajo. Intentar que nazcan flores sin descanso.

La Universidad en general, y la Complutense en particular estarán siempre en mi corazón y mi recuerdo. Dejadme, finalmente, que os lea un verso de esa canción maravillosa de Serrat, Paraules d'amor:

> ...sovint, en fer-se fosc, de lluny m'arriba una cançó

Podéis tener la absoluta certeza de que mientras viva habrá muchos atardeceres en los que, dondequiera que esté, desde la lejanía, va a llegar a mis oídos el eco de vuestras canciones.

¡¡ GRACIAS AMIGOS !!... GAUDEAMUS IGITUR

ÍNDICE

Lie Algebras obtained as extensions by derivations of the nilpotent algebra $\mathcal{L}_{5,3}$ 1
Ancochea Bermúdez, J.M., Campoamor Stursberg, R., García Vergnolle, L.

An extension of Whitney approximation theorem 17
Andradas, C., Aneiros, E., Díaz Cano, A.

Analtyic completion of an open set 27
Ansemil, J.M., López-Salazar, J., Ponte, S.

Topological classification of finite groups acting on compact surfaces 39
Bujalance, E., Cirre, F.J.

Disonancia, escalas y Matemáticas 51
Castrillón López, M., Dominguez, M.

Cubismo y constructivismo 61
Corrales, C.

Ultrametric spaces, valued and semivalued groups from the Theory of Shape 81
Cuchillo-Ibáñez, E., Morón, M.A., Ruiz del Portal, F.R.

Remarks on the Monge-Ampère equation: some free boundary problems in Geometry 93
Díaz, G., Díaz, J.I.

Fórmulas trigonométricas para poliedros esféricos e hiperbólicos 127
Díaz, R.

Singular 2-weebs. An introduction 141
Etayo, F.

On the minimum genus problem on bordered Klein surfaces 149
Etayo, J.J., Martínez, E.

Sobre las propiedades de la frontera exterior de las imágenes polinómicas y regulares de $\mathbb{R}^n$ 159
Fernando, J.F., Gamboa, J.M., Ueno, C.

Some classes of Bounded sets in Metric Spaces 179
Garrido, M.I., Meroño, A.S.

Continuación de atractores y conjuntos "non-saddle" 187
Giraldo, A., Sanjurjo, J.

Visualización matemática: intuición y razonamiento 201
Gómez-Chacón, I.M.

Un método original de cálculo de curvaturas para la clasificación de subvariedades en espacios homogéneos 221
Guijarro, J.L., Lafuente, J.

Utilización de material divulgativo para la enseñanza de la Topología 243
Lupiáñez, F.G.

Manifolds with Corners Modeled on Convenient Vector Spaces 255
Margalef, J., Outerelo, E.

Normality on Topological Groups 287
Martín-Peinador, E.

Branched folded coverings and 3-manifolds 295
Montesinos-Amilibia, J.M.

An unexpected 3D geometric locus 317
Roanes Macías, E., Roanes Lozano, E.

Dinámica de curvas cerradas sobre agujeros negros esféricos 327
Rojo, J.

Teodoro Ardemans, Benito Bails y Ramón Pignatelli, tres grandes matemáticos y arquitectos del siglo XVIII 335
Romo Santos, C.

Calibración euclídea a partir de longitudes de segmentos 343
Ronda, J.I., Valdés, A.

Lie Algebras obtained as extensions by derivations of the nilpotent algebra $\mathcal{L}_{5,3}$

José María Ancochea Bermúdez, Rutwig Campoamor Stursberg, and Lucía García Vergnolle

Departamento de Geometría y Topología
Facultad de Ciencias Matemáticas
Universidad Complutense de Madrid
E-28040 Madrid, Spain
ancochea@mat.ucm.es
rutwig@pdi.ucm.es

Departamento de Matemática Aplicada
ETS Arquitectura, UPM
E-28040 Madrid, Spain
lucia.garcia@upm.es

Dedicado a Juan Tarrés, amigo y maestro, con motivo de su jubilación académica.

ABSTRACT

For the only quasi-filiform Lie algebra $\mathcal{L}_{5,3}$ admitting a Levi factor in its Lie algebra of derivations, the extensions by derivations are classified over $\mathbb{C}$ and $\mathbb{R}$. Moreover, the invariants of these extensions are computed.

Key words: derivation algebra, semi-direct product, solvable Lie algebra.

2010 Mathematics Subject Classification: 17B30, 17B56.

1. Introduction

The problem of determining the extensions by derivations of Lie algebras is an old one, and constitutes an important technique both from the cohomological and geometrical point of view. Although it is known that any semisimple Lie algebra arises as the Levi factor of the algebra of derivations of a nilpotent algebra [1], there are still no generic criteria to determine, given a nilpotent algebra, whether the algebra of derivations is solvable or not, up to some special classes of nilpotent algebras. In [2], it was proved that a semidirect sum $\mathfrak{g} = \mathfrak{s} \oplus_R \mathfrak{r}$ of a semisimple Lie algebra $\mathfrak{s}$ and a solvable Lie algebra $\mathfrak{r}$ with respect to a representation of $\mathfrak{s}$ which does not decompose into a direct sum of ideals, cannot have filiform Lie algebra either as radical or nilradical. Therefore derivation algebras of filiform Lie algebras are solvable. For the case of quasi-filiform algebras, i.e., those having the second highest nilindex, this feature remains valid for parameterized families [3], but can fail for low dimensional representatives of the class.
The aim of this paper is to determine these exceptions and classify the corresponding

Partially supported by the project MTM2010-18556 of the MICINN (RCS).

semi-direct products arising. There are specific reason for this distinction in low dimension. The algebra considered here is actually the only among the quasi-filiform algebras to admit an associative. bilinear non-degenerated form, which is of interest in the construction of non-Abelian gauge theories [4]. In addition to the non-solvable extensions, we determine thei invariants for the coadjoint representation, which are shown to be rational functions.

2. Algebras of low dimension with $\mathcal{L}_{5,3}$ as nilradical

To any Lie algebra $\mathfrak{g}$, we can associate the lower central sequence $\mathfrak{C}^0\mathfrak{g} = \mathfrak{g} \supseteq \mathfrak{C}^1\mathfrak{g} \supseteq \cdots \supseteq \mathfrak{C}^k\mathfrak{g} \supseteq \ldots$ defined recursively by:

$$\mathfrak{C}^0\mathfrak{g} = \mathfrak{g} \qquad \mathfrak{C}^{k+1}\mathfrak{g} = \left[\mathfrak{C}^k\mathfrak{g}, \mathfrak{g}\right] \quad k \geq 0$$

If there exists $k \in \mathbb{N}$ such that $\mathfrak{C}^k\mathfrak{g} = \{0\}$ then $\mathfrak{g}$ is a nilpotent Lie algebra. The lowest value of k for which we have $\mathfrak{C}^k\mathfrak{g} = 0$ is the nilindex of $\mathfrak{g}$. If $\mathfrak{g}$ is a nilpotent Lie algebra and k its nilindex, we will say that $\mathfrak{g}$ is k-nilpotent.
Any n-dimensional Lie algebra $\mathfrak{g}$ is called filiform if

$$\dim \mathfrak{C}^k\mathfrak{g} = n - 1 - k \quad k \geq 1$$

i.e., if $\mathfrak{g}$ is $n-1$-nilpotent.
Here we shall consider the nilpotent algebra $\mathcal{L}_{5,3}$ defined over the basis $\{X_0, X_1, X_2, X_3, X_4\}$ by the brackets:

$$[X_0, X_1] = X_2, \quad [X_0, X_2] = X_3, \quad [X_1, X_2] = X_4. \tag{1}$$

Let $\mathfrak{g}$ be a real non-split Lie algebra of dimension 6 or 7 with $\mathcal{L}_{5,3}$ as nilradical. For those dimensions, $\mathfrak{g}$ must be solvable so its derived algebra is nilpotent and:

$$[\mathfrak{t}, \mathfrak{t}] \subseteq [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subseteq \mathcal{L}_{5,3} \tag{2}$$

Therefore, $\mathfrak{g}$ admits the decomposition $\mathfrak{g} = \mathcal{L}_{5,3} \vec{\oplus} \mathfrak{t}$ where $\vec{\oplus}$ denotes the semidirect sum and $[\mathfrak{t}, \mathfrak{t}] \subseteq \mathcal{L}_{5,3}$.

Proposition 2.1. *Let $\mathfrak{g}$ be a real non-split Lie algebra of dimension 6 with nilradical isomorphic to $\mathcal{L}_{5,3}$ then $\mathfrak{g}$ is solvable and is one of the algebras $\mathfrak{g}_{5,3}^{6,1}, \ldots, \mathfrak{g}_{5,3}^{6,9}$ represented by a basis $\{X_0, \ldots, X_4, Y\}$ and the Lie brackets involving Y given by:*

(i) $\mathfrak{g}_{5,3}^{6,1}$:
$[Y, X_0] = X_0, \quad [Y, X_i] = (i - 1 + \lambda)X_i \quad$ *for* $i = 1, 2, 3, \quad [Y, X_4] = (1 + 2\lambda)X_4.$

(ii) $\mathfrak{g}_{5,3}^{6,2}$:
$[Y, X_i] = X_i \quad$ *for* $i = 0, 3, \quad [Y, X_1] = -X_1 + X_4, \quad [Y, X_4] = -X_4.$

(iii) $\mathfrak{g}_{5,3}^{6,3}$:
$[Y, X_0] = X_0 + X_4, \quad [Y, X_2] = X_2, \quad [Y, X_3] = 2X_3, \quad [Y, X_4] = X_4.$

(iv) $\mathfrak{g}_{5,3}^{6,4}$:
$[Y, X_0] = X_0 - X_4, \quad [Y, X_2] = X_2, \quad [Y, X_3] = 2X_3, \quad [Y, X_4] = X_4.$

(v) $\mathfrak{g}_{5,3}^{6,5}$:
$[Y,X_0]=X_0+X_1,\quad [Y,X_i]=iX_i \quad for\ i=1,2,4,\quad [Y,X_3]=3X_3+X_4.$

(vi) $\mathfrak{g}_{5,3}^{6,6}$:
$[Y,X_0]=X_0-X_1,\quad [Y,X_1]=X_0+X_1,\quad [Y,X_2]=2X_2,$
$[Y,X_3]=3X_3-X_4,\quad [Y,X_4]=X_3+3X_4.$

(vii) $\mathfrak{g}_{5,3}^{6,7}$:
$[Y,X_i]=-X_{i+1} \quad for\ i=0,3,\quad [Y,X_i]=X_{i-1} \quad for\ i=1,4.$

(viii) $\mathfrak{g}_{5,3}^{6,8}$:
$[Y,X_0]=-X_1+X_4,\quad [Y,X_1]=X_0,\quad [Y,X_3]=-X_4,\quad [Y,X_4]=X_3.$

(ix) $\mathfrak{g}_{5,3}^{6,9}$:
$[Y,X_0]=-X_1-X_4,\quad [Y,X_1]=X_0,\quad [Y,X_3]=-X_4,\quad [Y,X_4]=X_3.$

Proof. Following the notations above and assuming that $\mathfrak{g}$ satisfies the hypothesis, $\mathfrak{t}$ is generated by a single vector Y such that $f=ad(Y)\mid_{\mathcal{L}_{5,3}}$ is a derivation of $\mathcal{L}_{5,3}$. We consider the basis $\{X_0,X_1,X_2,X_3,X_4\}$ of (1) and we denote derivations by $f(X_j)=\sum_{i=0}^{4} f_j^i X_i$ for $j=0,\ldots,4$. Now it can be easily shown that the matrix $\{f_j^i\}_{i,j\in\{0,1,2,3,4\}}$ is given by:

$$\begin{pmatrix} f_0^0 & f_1^0 & 0 & 0 & 0\\ f_0^1 & f_1^1 & 0 & 0 & 0\\ f_0^2 & f_1^2 & f_0^0+f_1^1 & 0 & 0\\ f_0^3 & f_1^3 & f_1^2 & 2f_0^0+f_1^1 & f_1^0\\ f_0^4 & f_1^4 & -f_0^2 & f_0^1 & f_0^0+2f_1^1 \end{pmatrix}$$

The change of basis $Y\to Y-f_1^2X_0+f_0^2X_1+f_0^3X_2$ allows us to suppose:

$$f\sim\begin{pmatrix} f_0^0 & f_1^0 & 0 & 0 & 0\\ f_0^1 & f_1^1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & f_0^0+f_1^1 & 0 & 0\\ 0 & f_1^3 & 0 & 2f_0^0+f_1^1 & f_1^0\\ f_0^4 & f_1^4 & 0 & f_0^1 & f_0^0+2f_1^1 \end{pmatrix}$$

(i) Let $f_1^0=0$, we shall divide our investigation into subcases determined by values of f_0^0 and f_1^1.

(a) Let $f_0^0\neq 0$, a scaling change allows us to suppose that $f_0^0=1$.

1. If $f_1^1\neq 1$, f_0^1, f_0^4, f_1^4 can be removed and we deduce:
$f\sim diag(1,f_1^1,1+f_1^1,2+f_1^1,1+2f_1^1)$
$$\begin{cases} [Y,X_0] &=& X_0\\ [Y,X_1] &=& f_1^1X_1\\ [Y,X_2] &=& (1+f_1^1)X_2\\ [Y,X_3] &=& (2+f_1^1)X_3\\ [Y,X_4] &=& (1+2f_1^1)X_4 \end{cases}$$
We obtain the family of algebras $\mathfrak{g}_{5,3}^{6,1}(\mathfrak{f}_1^1)$ described in [3].

2. If $f_1^1 = -1$, we put f_0^1 and f_0^4 to zero. If $f_0^4 = 0$, we obtain the algebra $\mathfrak{g}_{5,3}^{6,1}(-\mathtt{1})$ so we can suppose that $f_0^4 \neq 0$. By the change of basis $X_i \to f_1^4 X_i$ for $i = 1, 2, 3$, $X_4 \to (f_1^4)^2 X_4$, we put $f_0^4 = 1$. Therefore,

$$f \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} [Y, X_0] &= & X_0 \\ [Y, X_1] &= & -X_1 + X_4 \\ [Y, X_2] &= & 0 \\ [Y, X_3] &= & X_3 \\ [Y, X_4] &= & -X_4 \end{cases}$$

and we obtain the algebra $\mathfrak{g}_{5,3}^{6,2}$.

3. If $f_1^1 = 0$, we put $f_1^4 = 0$. When $f_0^4 = 0$, we reach the algebra $\mathfrak{g}_{5,3}^{6,1}(\mathfrak{o})$ so we can suppose $f_0^4 = 1$, in $\mathbb{C}$ and $f_0^4 = \pm 1$ in $\mathbb{R}$.
We deduce that:

$$f \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ \delta & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} [Y, X_0] &= & X_0 + \delta X_4 \\ [Y, X_1] &= & 0 \\ [Y, X_2] &= & X_2 \\ [Y, X_3] &= & 2X_3 \\ [Y, X_4] &= & X_4 \end{cases}$$

with $\delta = 1$ in $\mathbb{C}$ and $\delta = \pm 1$ in $\mathbb{R}$. We obtain the algebras $\mathfrak{g}_{5,3}^{6,3}$ and $\mathfrak{g}_{5,3}^{6,4}$.

4. If $f_1^1 = 1$, we put $f_0^4 = f_1^4 = 0$ and we can suppose $f_0^1 = 1$.

$$f \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} [Y, X_0] &= & X_0 + X_1 \\ [Y, X_1] &= & X_1 \\ [Y, X_2] &= & 2X_2 \\ [Y, X_3] &= & 3X_3 + X_4 \\ [Y, X_4] &= & 3X_4 \end{cases}$$

We obtain the algebra $\mathfrak{g}_{5,3}^{6,5}$.

(b) Let us suppose now that $f_0^0 = 0$. We have $f_1^1 \neq 0$ because f cannot be nilpotent, then by a scaling transformation we can suppose that $f_1^1 = 1$. We can also put $f_0^1 = f_0^4 = f_1^4 = 0$.
If $f_1^3 = 0$ then we obtain:

$$f \sim diag(0, 1, 1, 1, 2) \quad \begin{cases} [Y, X_0] &= & 0 \\ [Y, X_1] &= & X_1 \\ [Y, X_2] &= & X_2 \\ [Y, X_3] &= & X_3 \\ [Y, X_4] &= & 2X_4 \end{cases}$$

If $f_1^3 \neq 0$, we can make $f_1^3 = 1$ in $\mathbb{C}$ and $f_1^3 = \pm 1$ in $\mathbb{R}$ therefore:

$$f \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \delta & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} [Y, X_0] &= & 0 \\ [Y, X_1] &= & X_1 + \delta X_3 \\ [Y, X_2] &= & X_2 \\ [Y, X_3] &= & X_3 \\ [Y, X_4] &= & 2X_4 \end{cases}$$

where $\delta = 1$ in $\mathbb{C}$ and $\delta = \pm 1$ in $\mathbb{R}$.
These subcases provides us the algebras $\mathfrak{g}_{5,3}^{6,1}(\mathfrak{o})$, $\mathfrak{g}_{5,3}^{6,3}$ and $\mathfrak{g}_{5,3}^{6,5}$ by the change of basis:
$X_0 \to X_1$
$X_1 \to X_0$
$X_2 \to -X_2$
$X_3 \to -X_4$
$X_4 \to -X_3$

(ii) If $f_1^0 \neq 0$, the change of basis $X_0 \to f_1^0 X_0$, $X_i \to (f_1^0)^{i-1} X_i$ for i=1,2,3 and $X_4 \to f_1^0 X_4$ allows us to suppose that $f_1^0 = 1$ and then the characteristic polynomial of f is:

$$(f_0^0 + f_1^1 - \lambda) \quad \underbrace{[(f_0^0 - \lambda)(f_1^1 - \lambda) - f_0^1]}_{p(\lambda)} \quad \underbrace{[(2f_0^0 + f_1^1 - \lambda)(f_0^0 + 2f_1^1 - \lambda) - f_0^1]}_{q(\lambda)}$$

Note that λ is a root of p if, and only if, $\lambda + f_0^0 + f_1^1$ is a root of q, therefore we just have to find the roots of p:

$$\lambda_{\pm} = \frac{\xi \pm \sqrt{\Delta}}{2} \quad \text{where} \quad \xi = f_0^0 + f_1^1 \quad \text{and} \quad \Delta = (f_0^0 + f_1^1)^2 - 4(f_0^0 f_1^1 - f_0^1)$$

When $\Delta > 0$, the eigenvalues of f are:

$$\frac{\xi - \sqrt{\Delta}}{2} \quad \frac{\xi + \sqrt{\Delta}}{2} \quad \xi \quad \frac{3\xi - \sqrt{\Delta}}{2} \quad \frac{3\xi + \sqrt{\Delta}}{2}$$

By making the change of basis:
$X_0 \to X_0 + \alpha X_1$
$X_1 \to X_1 + \beta X_0$
$X_2 \to (1 - \alpha\beta) X_2$ where $\alpha = \frac{-f_0^0 + f_1^1 - \sqrt{\Delta}}{2}$ y $\beta = \frac{2}{-f_0^0 + f_1^1 + \sqrt{\Delta}}$
$X_3 \to (1 - \alpha\beta)(X_3 + \alpha X_4)$
$X_4 \to (1 - \alpha\beta)(X_4 + \beta X_3)$
We obtain:

$$\begin{cases} [Y, X_0] &= \frac{\xi - \sqrt{\Delta}}{2} X_0 + f_0^4 X_4 \\ [Y, X_1] &= \frac{\xi + \sqrt{\Delta}}{2} X_1 + f_1^3 X_3 + f_1^4 X_4 \\ [Y, X_2] &= \xi X_2 \\ [Y, X_3] &= \frac{3\xi - \sqrt{\Delta}}{2} X_3 \\ [Y, X_4] &= \frac{3\xi + \sqrt{\Delta}}{2} X_4 \end{cases}$$

This subcase brings back to the family of algebras $\mathfrak{g}_{5,3}^{6,1}(\lambda)$.
If $\Delta = 0$, the eigenvalues of f are $\frac{\xi}{2}$, ξ, $\frac{3\xi}{2}$ and by means of the change basis $X_0 \to X_0 + \alpha X_1$, $X_3 \to X_3 + \alpha X_4$ with $\alpha = \frac{-f_0^0 + f_1^1}{2}$, we obtain:

$$f \sim \begin{pmatrix} \frac{\xi}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\xi}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \xi & 0 & 0 \\ 0 & f_1^3 & 0 & \frac{3\xi}{2} & 0 \\ f_0^4 & f_1^4 & 0 & 0 & \frac{3\xi}{2} \end{pmatrix}.$$

Because of the non-nilpotency of f, we can scale ξ to 1 and we can suppose that $f_0^4 = f_1^4 = f_1^3 = 0$, therefore:

$$\begin{cases} [Y, X_0] &= X_0 \\ [Y, X_1] &= X_0 + X_1 \\ [Y, X_2] &= 2X_2 \\ [Y, X_3] &= 3X_3 \\ [Y, X_4] &= X_3 + 3X_4 \end{cases}$$

The change after-specified, brings back to the algebra $\mathfrak{g}_{5,3}^{6,5}$.

$X_0 \to X_1$
$X_1 \to X_0$
$X_2 \to -X_2$
$X_3 \to -X_4$
$X_4 \to -X_3$

If $\Delta < 0$, we can't reach new algebras over $\mathbb{C}$. In $\mathbb{R}$, by making the change of basis:

$X_0 \to 2X_0 + \alpha X_1$
$X_1 \to \sqrt{-\Delta} X_1$
$X_2 \to 2\sqrt{-\Delta} X_2$ with $\alpha = -f_0^0 + f_1^1$,
$X_3 \to 2\sqrt{-\Delta}(2X_3 + \alpha X_4)$
$X_4 \to -2\Delta X_4$

we obtain:

$$f \sim \begin{pmatrix} \frac{\xi}{2} & \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{-\Delta}}{2} & \frac{\xi}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \xi & 0 & 0 \\ 0 & f_1^3 & 0 & \frac{3\xi}{2} & \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} \\ f_0^4 & f_1^4 & 0 & -\frac{\sqrt{-\Delta}}{2} & \frac{3\xi}{2} \end{pmatrix}.$$

If ξ is nonzero, we rescale f and this give the algebra $\mathfrak{g}_{5,3}^{6,6}$.
If $\xi = 0$, we can put f_1^3 and f_1^4 to zero and we can get the algebras $\mathfrak{g}_{5,3}^{6,7}$ when $f_0^4 = 0$ and, in the opposite case, the algebras $\mathfrak{g}_{5,3}^{6,8}$ and $\mathfrak{g}_{5,3}^{6,9}$.

□

Proposition 2.2. *Let $\mathfrak{g}$ be a real non-split Lie algebra of dimension 7 with nilradical isomorphic to $\mathcal{L}_{5,3}$ then $\mathfrak{g}$ is solvable and is isomorphic to the algebra $\mathfrak{g}_{5,3}^{7,1}$ or to $\mathfrak{g}_{5,3}^{7,2}$, each one represented over the basis $\{X_0, \ldots, X_4, Y, Z\}$ and the Lie brackets involving Y and Z given by:*

(i) $\mathfrak{g}_{5,3}^{7,1}$*:* $[Y, X_i] = X_i$ *for* $i = 0, 2, 4$, $[Y, X_3] = 2X_3$
$[Z, X_i] = X_i$ *for* $i = 1, 2, 3$, $[Z, X_4] = 2X_4$

(ii) $\mathfrak{g}_{5,3}^{7,2}$*:* $[Y, X_i] = -X_{i+1}$ *for* $i = 0, 3$, $[Y, X_i] = X_{i-1}$ *for* $i = 1, 4$
$[Z, X_0] = X_0$, $[Z, X_i] = iX_i$ *for* $i = 1, 2, 3$, $[Z, X_4] = 3X_4$

Proof. If $\mathfrak{g}$ is a non-split Lie algebra of dimension 7 with $\mathcal{L}_{5,3}$ as nilradical, $\mathfrak{g}$ decomposes into the semi-direct sum $\mathcal{L}_{5,3} \vec{\oplus} \mathfrak{t}$ where $\mathfrak{t}$ is generated by two vectors Y and Z like $f = ad(Y)\,|_{\mathcal{L}_{5,3}}$ and $g = ad(Z)\,|_{\mathcal{L}_{5,3}}$ are derivations of $\mathcal{L}_{5,3}$.

(i) If $f_1^0 = g_1^0 = 0$, by taking linear combinations of f and g we can suppose that $f_1^1 = g_0^0 = 0$ and $f_0^0 = g_1^1 = 1$. The eigenvalues of $f + 2g$ and $f + 3g$ are all different then they are diagonalizable, so are f and g. It follows that:

$f \sim diag(1, 0, 1, 2, 1)$ $\qquad$ $g \sim diag(0, 1, 1, 1, 2)$

$$\begin{cases} [Y, X_0] = X_0 \\ [Y, X_1] = 0 \\ [Y, X_2] = X_2 \\ [Y, X_3] = 2X_3 \\ [Y, X_4] = X_4 \end{cases} \qquad \begin{cases} [Z, X_0] = 0 \\ [Z, X_1] = X_1 \\ [Z, X_2] = X_2 \\ [Z, X_3] = X_3 \\ [Z, X_4] = 2X_4 \end{cases}$$

and we reach the algebra $\mathfrak{g}_{5,3}^{7,1}$.

(ii) If $f_1^0 \neq 0$ or $g_1^0 \neq 0$, without loss of generality, we can suppose that $f_1^0 = 1$ and $g_1^0 = 0$. The condition (2), implies that f and g must commute to an inner derivation then $g_1^0 = 0$ and $g_0^0 = g_1^1$. Furthermore, g_0^0 is nonzero because g cannot be nilpotent. By making the change of base $f \to f - \frac{f_0^0}{g_0^0} g$, $g \to \frac{1}{g_0^0} g$, we deduce that:

$$f \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ f_0^1 & f_1^1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f_1^1 & 0 & 0 \\ 0 & f_1^3 & 0 & f_1^1 & 1 \\ f_0^4 & f_1^4 & 0 & f_0^1 & 2f_1^1 \end{pmatrix} \qquad g \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & g_1^3 & 0 & 3 & 0 \\ g_0^4 & g_1^4 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(a) If $f_0^1 = 0$, we can put $f_1^1 = 1$. Since f y g are diagonalizable, we come back to the previous case.

(b) If $f_0^1 \neq 0$, f_0^1 can be scaled to 1 over the field $\mathbb{C}$, or to ± 1 over the field $\mathbb{R}$. Preserving the form of f, it is possible to diagonalize g.

1. For $f_0^1 = 1$, f is also diagonalizable so this case brings back the algebra $\mathfrak{g}_{5,3}^{7,1}$.
2. For $f_0^1 = -1$ and $|f_1^1| < 2$, by making the change of variables:

$$\begin{array}{rcl} X_0 & \to & 2X_0 + f_1^1 X_1 \\ X_1 & \to & \sqrt{-\Delta} X_1 \\ X_2 & \to & 2\sqrt{-\Delta} X_2 \\ X_3 & \to & 2\sqrt{-\Delta}(2X_3 + f_1^1 X_4) \\ X_4 & \to & -2\Delta X_4 \\ f & \to & \frac{2}{\sqrt{-\Delta}}(f - \frac{f_1^1}{2} g) \text{ where } \Delta = (f_1^1)^2 - 4 \end{array}$$

we obtain:

$$f \sim \left(\begin{array}{c|c|c} R & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & R \end{array}\right), \quad with \quad R \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad g \sim diag(1, 1, 2, 3, 3)$$

$$\begin{cases} [Y, X_0] = -X_1 \\ [Y, X_1] = X_0 \\ [Y, X_2] = 0 \\ [Y, X_3] = -X_4 \\ [Y, X_4] = X_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} [Z, X_0] = X_0 \\ [Z, X_1] = X_1 \\ [Z, X_2] = 2X_2 \\ [Z, X_3] = 3X_3 \\ [Z, X_4] = 3X_4 \end{cases}$$

This case provides the new algebra $\mathfrak{g}_{5,3}^{7,1}$.

3. For $f_0^1 = -1$ and $|f_1^1| > 2$, we get again the algebra $\mathfrak{g}_{5,3}^{7,1}$ because f is diagonalizable.
4. For $f_0^1 = -1$ and $|f_1^1| = \pm 2$, after the change of basis $X_0 \to X_0 \pm X_1$, $X_3 \to X_3 \pm X_4$, f and g take the form:

$$f \sim \begin{pmatrix} 1 & \pm 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad g \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

This leads to a contradiction because $f - g$ should be nilpotent.

□

3. Lie algebras with $\mathcal{L}_{5,3}$ as nilradical

Once the low dimensional cases have been treated in detail, we can enumerate all Lie algebras admitting $\mathcal{L}_{5,3}$ as nilradical.

Proposition 3.1. *Let $\mathfrak{g}$ be a real non-split Lie algebra with nilradical isomorphic to $\mathcal{L}_{5,3}$.*

(i) *If $\mathfrak{g}$ is solvable then $\dim \mathfrak{g} \leq 7$ and $\mathfrak{g}$ is isomorphic to one of the following algebras:*

(a) $\mathfrak{g}_{5,3}^{6,1}, \ldots, \mathfrak{g}_{5,3}^{6,9}$ for $\dim \mathfrak{g} = 6$.

(b) $\mathfrak{g}_{5,3}^{7,1}$ or $\mathfrak{g}_{5,3}^{7,2}$ for $\dim \mathfrak{g} = 7$.

(ii) *If $\mathfrak{g}$ is not solvable then $\mathfrak{g}$ is 8 or 9 dimensional and is respectively isomorphic to:*

(a) the algebra $\mathfrak{g}_{5,3}^{8,1}$ represented by a basis $\{X_0, \ldots, X_4, Y, Z, V\}$ and the Lie brackets involving Y, Z and V given by:
$[Y, X_0] = X_0, \quad [Y, X_1] = -X_1, \quad [Y, X_3] = X_3, \quad [Y, X_4] = -X_4,$
$[Z, X_1] = X_0, \quad [Z, X_4] = X_3,$
$[V, X_0] = X_1, \quad [V, X_3] = X_4,$
$[Y, Z] = 2Z, \quad [Y, V] = -2V, \quad [Z, V] = Y.$

(b) the algebra $\mathfrak{g}_{5,3}^{9,1}$ represented by a basis $\{X_0, \ldots, X_4, Y, Y', Z, V\}$ and the Lie brackets involving Y, Y', Z and V given by:
$[Y, X_0] = X_0, \quad [Y, X_1] = -X_1, \quad [Y, X_3] = X_3, \quad [Y, X_4] = -X_4,$
$[Y', X_1] = X_1, \quad [Y', X_2] = X_2, \quad [Y', X_3] = X_3, \quad [Y', X_4] = 2X_4,$
$[Z, X_1] = X_0, \quad [Z, X_4] = X_3,$
$[V, X_0] = X_1, \quad [V, X_3] = X_4,$
$[Y, Z] = Z, \quad [Y, V] = -V, \quad [Y', Z] = -Z, \quad [Y', V] = V,$
$[Z, V] = Y - Y'.$

The classification of complex algebras with nilradical $\mathcal{L}_{5,3}$ is analogous to the real one, except for the isomorphisms:

$$\begin{array}{lcll}
\mathfrak{g}_{5,3}^{6,3}\otimes\mathbb{C} & \sim & \mathfrak{g}_{5,3}^{6,4}\otimes\mathbb{C} & \\
\mathfrak{g}_{5,3}^{6,6}\otimes\mathbb{C} & \sim & \mathfrak{g}_{5,3}^{6,1}(\frac{1+i}{1-i})\otimes\mathbb{C} & \\
\mathfrak{g}_{5,3}^{6,7}\otimes\mathbb{C} & \sim & \mathfrak{g}_{5,3}^{6,1}(-1)\otimes\mathbb{C} & \\
\mathfrak{g}_{5,3}^{6,8}\otimes\mathbb{C} & \sim & \mathfrak{g}_{5,3}^{6,9}\otimes\mathbb{C} & \sim \quad \mathfrak{g}_{5,3}^{6,3}\otimes\mathbb{C} \\
\mathfrak{g}_{5,3}^{7,1}\otimes\mathbb{C} & \sim & \mathfrak{g}_{5,3}^{7,2}\otimes\mathbb{C} &
\end{array}$$

Proof. Let $\mathfrak{g}$ be a real non-split algebra with $\mathcal{L}_{5,3}$ as nilradical.If $\mathfrak{g}$ has dimension 5, then $\mathfrak{g}$ is obviously isomorphic to $\mathcal{L}_{5,3}$, otherwise $\mathfrak{g}$ has the form $\mathcal{L}_{5,3}\vec{\oplus}\mathfrak{t}$. In previous sections, we have obtain the algebras of this form when dimension of $\mathfrak{t}$ is 1 or 2. Let us suppose now that dimension of $\mathfrak{t}$ is 3, the three generators of $\mathfrak{t}$ are associated to three derivations of $\mathcal{L}_{5,3}$ called f, g and h. There are two possible cases:

(i) We suppose that f, g and h take the form:

$$f\sim\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ f_0^1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & f_1^3 & 0 & 2 & 0\\ f_0^4 & f_1^4 & 0 & f_0^1 & 1\end{pmatrix},\quad g\sim\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ g_0^1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & g_1^3 & 0 & 1 & 0\\ g_0^4 & g_1^4 & 0 & g_0^1 & 2\end{pmatrix},$$

$$h\sim\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ h_0^1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & h_1^3 & 0 & 0 & 1\\ h_0^4 & h_1^4 & 0 & h_0^1 & 0\end{pmatrix}.$$

The brackets involving these derivations are:

$$[f,g]=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ -f_0^1-g_0^1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ f_1^3g_0^1-g_1^3f_0^1 & 2g_1^3 & 0 & 0 & 0\\ f_1^4g_0^1-g_1^4f_0^1-2f_0^4 & -f_1^4+f_0^1g_1^3+g_1^4-g_0^1f_1^3 & 0 & -f_0^1-g_0^1 & 0\end{pmatrix},$$

$$[g,h]=\begin{pmatrix} -g_0^1 & -1 & 0 & 0 & 0\\ h_0^1 & g_0^1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ g_1^3h_0^1-g_0^4-h_1^3g_0^1 & -g_1^4 & 0 & -g_0^1 & -1\\ g_1^4h_0^1-h_1^4g_0^1+2h_0^4 & g_0^1h_1^3+g_0^4-g_1^3h_0^1+h_1^4 & 0 & h_0^1 & g_0^1\end{pmatrix},$$

$$[h,f]=\begin{pmatrix} f_0^1 & -1 & 0 & 0 & 0\\ h_0^1 & -f_0^1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ h_1^3f_0^1+f_0^4+f_1^3h_0^1 & f_1^4-2h_1^3 & 0 & f_0^1 & -1\\ h_1^4f_0^1-f_1^4h_0^1 & h_0^1f_1^3-f_0^4-h_1^3f_0^1-h_1^4 & 0 & h_0^1 & -f_0^1\end{pmatrix}.$$

These derivations must commute to a linear combination of them and an inner derivation of $\mathcal{L}_{5,3}$, thereby we deduce the following conditions:

$$\left\{\begin{array}{lcl} g_0^1 & = & -f_0^1\\ h_0^1 & = & (f_0^1)^2\end{array}\right.$$

If we consider the change of basis in the nilradical $X_0 \to X_0 + f_0^1 X_1$, $X_3 \to X_3 + f_0^1 X_4$ and $h \to h - f_0^1 f + f_0^1 g$, we obtain the brackets:

$$[f,g] = 0, \quad [f,h] = h, \quad [g,h] = -h.$$

This case leads to a contradiction because the vector space generated by $\mathcal{L}_{5,3}$ and the vector associated to h is a nilpotent ideal.

(ii) On the other hand, if f, g and h take the form:

$$f \sim \begin{pmatrix} f_0^0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f_1^1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f_0^0 + f_1^1 & 0 & 0 \\ 0 & f_1^3 & 0 & 2f_0^0 + f_1^1 & 0 \\ f_0^4 & f_1^4 & 0 & 0 & f_0^0 + 2f_1^1 \end{pmatrix}, g \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g_1^3 & 0 & 0 & 1 \\ g_0^4 & g_1^4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$h \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_1^3 & 0 & 0 & 0 \\ h_0^4 & h_1^4 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

we are led to the bracket:

$$[g,h] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h_0^4 + g_1^3 & h_1^4 & 0 & 1 & 0 \\ -g_1^4 & -h_0^4 - g_1^3 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

and the condition $f_0^0 = -f_1^1 = 1$.
The others brackets involving f, g and h are:

$$[f,g] = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -f_0^4 & 2g_1^3 - f_1^4 & 0 & 0 & 2 \\ -2g_0^4 & f_0^4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[f,h] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ f_1^3 & 2h_1^3 & 0 & 0 & 0 \\ f_1^4 - 2h_0^4 & -f_1^3 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

From these we deduce that $f_1^3 = f_0^4 = f_1^4 = g_1^3 = g_0^4 = g_1^4 = h_1^3 = h_0^4 = h_1^4 = 0$, thereby f, g and h turns to:

$$f \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, g \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, h \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

The final commutators are:

$$[g,h]=f;\quad [f,g]=2g;\quad [f,h]=-2h$$

Thus we obtain the algebra $\mathfrak{g}_{5,3}^{8,1}$.

Finally, if the dimension of $\mathfrak{t}$ is four, we can suppose that the derivations associated to the generators of $\mathfrak{t}$ are:

$$f\sim\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&f_1^3&0&2&0\\f_0^4&f_1^4&0&0&1\end{pmatrix},\quad f'\sim\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&f_1'^3&0&1&0\\f_0'^4&f_1'^4&0&0&2\end{pmatrix},$$

$$g\sim\begin{pmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&g_1^3&0&0&1\\g_0^4&g_1^4&0&0&0\end{pmatrix},\quad h\sim\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&h_1^3&0&0&0\\h_0^4&h_1^4&0&1&0\end{pmatrix}$$

By computing the brackets involving these derivations and by making a simple change of basis in the nilradical, we obtain that $f_1^3=f_0^4=f_1^4=f_1'^3=f_0'^4=f_1'^4=g_1^3=g_0^4=g_1^4=h_1^3=h_0^4=h_1^4=0$ and:
$[f,f']=0$, $[f,g]=g$, $[f,h]=-h$,
$[g,h]=f-f'$, $[f',g]=-g$, $[f',h]=h$,
so we get the algebra $\mathfrak{g}_{5,3}^{9,1}$.
We see that the dimension of $\mathfrak{t}$ can be at most four. In fact, if dimension of $\mathfrak{t}$ is five or more, we can find an external and nilpotent derivation associated to an element of $\mathfrak{t}$ commuting with the others derivations associated to $\mathfrak{t}$. □

Remark: The classification of six dimensional solvable Lie algebras over the real and complex fields is essentially due to a series of works due to Mubarakzyanov from 1963 to 1966 [5, 6]. This result was revised and completed later by distinct authors [7, 8]. However, innacuracies have still been found, concerning either redundancies or omissions in the list. More specifically, six isomorphism classes having $\mathcal{L}_{5,3}$ as nilradical have been listed, denoted respectively by $\mathfrak{g}_{6,76},\mathfrak{g}_{6,77}\dots,\mathfrak{g}_{6,81}$. We note that the algebra $\mathfrak{g}_{6,80}$ is isomorphic to the algebra $\mathfrak{g}_{6,76}$ for $h=0$, and $\mathfrak{g}_{6,81}$ to $\mathfrak{g}_{6,77}$. Furthermore, by the preceding theorem, it follows that the algebra $\mathfrak{g}_{6,76}$ is isomorphic to $\mathfrak{g}_{5,3}^{6,1}$, $\mathfrak{g}_{6,77}$ to $\mathfrak{g}_{5,3}^{6,3}$ and $\mathfrak{g}_{5,3}^{6,4}$, $\mathfrak{g}_{6,78}$ to $\mathfrak{g}_{5,3}^{6,2}$ and $\mathfrak{g}_{6,80}$ to $\mathfrak{g}_{5,3}^{6,5}$. This means that the algebras $\mathfrak{g}_{5,3}^{6,6},\dots,\mathfrak{g}_{5,3}^{6,9}$ have been omitted in [5, 7].

4. Generalized Casimir invariants

The generalized Casimir invariants of a Lie algebra, corresponding to the invariants of the coadjoint representation, play an important role in many applications of Lie algebras. While for the class of algebraic algebras it is known that a fundamental basis can always be found among the polynomials, the situation differs radically for

solvable Lie algebras and semidirect products, where rational and even transcendental functions can appear [9]. In this section we consider the analytical approach to determine the invariants of Lie algebras [10].
Let $\mathcal{B} = \{X_1, \ldots, X_n\}$ be a basis of $\mathfrak{g}$ and consider the variables $\{x_1, \ldots, x_n\}$ of $\mathfrak{g}^*$ associated to the dual basis of $\mathcal{B}$. If $\{C_{ij}^k\}$ denote the structure constants of $\mathfrak{g}$, we can define the differential operators

$$\widehat{X}_i = -C_{ij}^k x_k \partial_{x_j} \quad \text{for} \quad 1 \leq i \leq n.$$

A function $F \in \mathcal{C}^\infty(\mathfrak{g}^*)$ is an invariant of $\mathfrak{g}$ only if it satisfies the following system of PDEs:

$$\widehat{X}_i F(x_1, \ldots, x_n) = -C_{ij}^k x_k \partial_{x_j} F(x_1, \ldots, x_n) = 0 \tag{3}$$

A maximal system of functionally independent solution of the system is called a fundamental set of invariants. The number of independent solution $\mathcal{N}(\mathfrak{g})$ is given by the Beltrami-Blasi formula:

$$\mathcal{N}(\mathfrak{g}) = \dim \mathfrak{g} - rang(A(\mathfrak{g})) \tag{4}$$

where $A(\mathfrak{g})$ is the skew-symmetric matrix:

$$A(\mathfrak{g}) = \begin{pmatrix} 0 & C_{12}^k x_k & \cdots & C_{1n}^k x_k \\ -C_{12}^k x_k & 0 & \cdots & C_{2n}^k x_k \\ \vdots & & \ddots & \\ -C_{1,n-1}^k x_k & \cdots & 0 & C_{n-1,n}^k x_k \\ -C_{1n}^k x_k & \cdots & -C_{n-1,n}^k x_k & 0 \end{pmatrix}.$$

For the Lie algebra $\mathcal{L}_{5,3}$, finding the invariants reduces to solve the following system of PDEs:

$$\begin{aligned} \widehat{X}_0\,(F) &:= x_2 \frac{\partial F}{\partial x_1} + x_3 \frac{\partial F}{\partial x_2} = 0, \\ \widehat{X}_1\,(F) &:= -x_2 \frac{\partial F}{\partial x_0} + x_4 \frac{\partial F}{\partial x_2} = 0, \\ \widehat{X}_2\,(F) &:= x_3 \frac{\partial F}{\partial x_0} + x_4 \frac{\partial F}{\partial x_1} = 0. \end{aligned} \tag{5}$$

The rank of the matrix $A(\mathcal{L}_{5,3})$ is two then by the Beltrametti-Blasi formula, the algebra have exactly three invariants. Moreover, since X_3 and X_4 are generators of the center, we can choose $I_1 = x_3$ and $I_2 = x_4$. We can easily verify that the quadratic operator

$$I_3 = 2\,(x_0 x_4 - x_1 x_3) + x_2^2$$

is a solution of the system (5), so $\{I_1, I_2, I_3\}$ is a fundamental set of invariants of $\mathcal{L}_{5,3}$.

Proposition 4.1. *Let $\mathfrak{g}$ be a solvable algebra whose nilradical is isomorphic to $\mathcal{L}_{5,3}$, then invariants of $\mathfrak{g}$ are functions of the variables associated to the nilradical.*

Proof. We should divide our proof into two cases , depending on the dimension of $\mathfrak{g}$.

(i) If dimension of $\mathfrak{g}$ is six, every non-nilpotent derivation acts, at least, on one central element of $\mathfrak{g}$ in a non-trivial way. We deduce that every invariant F verifies:

$$\frac{\partial F}{\partial y}=0,$$

(ii) If dimension of $\mathfrak{g}$ is two, $\mathfrak{g}_{5,3}^{7,1}$ (respectively $\mathfrak{g}_{5,3}^{7,2}$)

$$S_1=\left\{\begin{array}{l} 2x_3\frac{\partial F}{\partial y}+x_3\frac{\partial F}{\partial z}=0 \\ x_4\frac{\partial F}{\partial y}+2x_4\frac{\partial F}{\partial z}=0 \end{array}\right. ,$$

respectively

$$S_2=\left\{\begin{array}{l} -x_4\frac{\partial F}{\partial y}+3x_3\frac{\partial F}{\partial z}=0 \\ x_3\frac{\partial F}{\partial y}+3x_4\frac{\partial F}{\partial z}=0 \end{array}\right. .$$

Making elementary transformations, we deduce that the solutions must satisfy:

$$\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{\partial F}{\partial z}=0,$$

therefore, invariants of $\mathfrak{g}$ depend only on the variables associated to the nilradical.

□

Table 1 describes the invariants of the solvable algebras with nilradical $\mathcal{L}_{5,3}$ as functions of $\{I_1,I_2,I_3\}$.

Table 1: Invariants of the solvable algebras with $\mathcal{L}_{5,3}$-nilradical

$\mathfrak{g}$	Fundamental system of invariants	
$\mathfrak{g}_{5,3}^{6,1}(\lambda)$	$J_1=I_1^{1+2\lambda}I_2^{-2-\lambda}$,	$J_2=I_3^{2+\lambda}I_1^{-2-2\lambda}$
$\mathfrak{g}_{5,3}^{6,2}$	$J_1=I_3I_1^{-1}I_2^{-1}+2\ln(I_1)$,	$J_2=I_1I_2$
$\mathfrak{g}_{5,3}^{6,3}$	$J_1=I_1I_2^{-2}$,	$J_2=2\ln(I_2)-I_3I_2^{-2}$
$\mathfrak{g}_{5,3}^{6,4}$	$J_1=I_2^2I_1^{-1}$,	$J_2=I_3I_2^{-2}+2\ln(I_2)$
$\mathfrak{g}_{5,3}^{6,5}$	$J_1=I_3^3I_2^{-4}$,	$J_2=\ln(I_2)-3I_1I_2^{-1}$
$\mathfrak{g}_{5,3}^{6,6}$	$J_1=-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{I_1^2+I_2^2}{I_1^2}\right)+3\arctan\left(I_2I_1^{-1}\right)-\ln(I_1)$,	
	$J_2=\ln(I_3)+4\arctan\left(I_1I_2^{-1}\right)$.	
$\mathfrak{g}_{5,3}^{6,7}$	$J_1=I_3$,	$J_2=I_1^2+I_2^2$
$\mathfrak{g}_{5,3}^{6,8}$	$J_1=I_3+I_1I_2-\left(I_1^2+I_2^2\right)\arctan\left(I_2I_1^{-1}\right)$	
	$J_2=I_1^2+I_2^2$	
$\mathfrak{g}_{5,3}^{6,9}$	$J_1=I_3-I_1I_2+\left(I_1^2+I_2^2\right)\arctan\left(I_2I_1^{-1}\right)$	
	$J_2=I_1^2+I_2^2$	
$\mathfrak{g}_{5,3}^{7,1}$	$J_1=I_3^3\left(I_1I_2\right)^{-2}$	
$\mathfrak{g}_{5,3}^{7,2}$	$J_1=I_3^3\left(I_1^2+I_2^2\right)^{-2}$	

Proposition 4.2. *The algebra $\mathfrak{g}_{5,3}^{8,1}$ has exactly two independent invariants that can be chosen as:*
$J_1 = X_2^2 + 2X_0X_4 - 2X_1X_3$,
$J_2 = X_2^3 + 3X_2(X_0X_4 - X_1X_3) - 3X_3^2V + 3X_3X_4Y + 3X_4^2Z$.
The algebra $\mathfrak{g}_{5,3}^{9,1}$ has only one independent invariant which is function of J_1 and J_2 and can be chosen as $J = J_1^3J_2^{-2}$.

Proof. In order to determine the independent invariants of $\mathfrak{g}_{5,3}^{8,1}$, we have to solve the system:

$$\begin{array}{l}
\widehat{X_0}F = (x_2\partial_{x_1} + x_3\partial_{x_2} - x_0\partial_y - x_1\partial_v)F = 0\\
\widehat{X_1}F = (-x_2\partial_{x_0} + x_4\partial_{x_2} + x_1\partial_y - x_0\partial_z)F = 0\\
\widehat{X_2}F = (-x_3\partial_{x_0} - x_4\partial_{x_1})F = 0\\
\widehat{X_3}F = (-x_3\partial_y - x_4\partial_v)F = 0\\
\widehat{X_4}F = (x_4\partial_y - x_3\partial_z)F = 0\\
\widehat{Y}F = (x_0\partial_{x_0} - x_1\partial_{x_1} + x_3\partial_{x_3} - x_4\partial_{x_4} + 2z\partial_z - 2v\partial_v)F = 0\\
\widehat{Z}F = (x_0\partial_{x_1} + x_3\partial_{x_4} - 2z\partial_y + y\partial_v)F = 0\\
\widehat{V}F = (x_1\partial_{x_0} + x_4\partial_{x_3} + 2v\partial_y - y\partial_z)F = 0
\end{array} \tag{6}$$

If we consider the new variables $x_0' = x_0x_4 - x_1x_3$ and $u = -x_3^2v + x_3x_4y + x_4^2z$, the system reduces to the following equation:

$$x_2\partial_{x_0'}F(x_0', x_2, u) - \partial_{x_2}F(x_0', x_2, u) - x_0'\partial_uF(x_0', x_2, u) = 0 \tag{7}$$

Since $x_2^2 + x_0'$ and $x_2^3 + 3x_0'x_2 + 3u$ are two particular solutions of (7), the system (6) has two solutions $J_1 = x_2^2 + 2x_0x_4 - 2x_1x_3$ and $J_2 = x_2^3 + 3x_2(x_0x_4 - x_1x_3) - 3x_3^2v + 3x_3x_4y + 3x_4^2z$, clearly functionally independent, thus we have found the fundamental set of solutions.

The system associated to the algebra $\mathfrak{g}_{5,3}^{9,1}$ is:

$$\begin{array}{l}
\widehat{X_0}F = (x_2\partial_{x_1} + x_3\partial_{x_2} - x_0\partial_y - x_1\partial_v)F = 0\\
\widehat{X_1}F = (-x_2\partial_{x_0} + x_4\partial_{x_2} + x_1\partial_y - x_0\partial_z - x_1\partial_{y'})F = 0\\
\widehat{X_2}F = (-x_3\partial_{x_0} - x_4\partial_{x_1} - x_2\partial_{y'})F = 0\\
\widehat{X_3}F = (-x_3\partial_y - x_4\partial_v - x_3\partial_{y'})F = 0\\
\widehat{X_4}F = (x_4\partial_y - x_3\partial_z - 2x_4\partial_{y'})F = 0\\
\widehat{Y}F = (x_0\partial_{x_0} - x_1\partial_{x_1} + x_3\partial_{x_3} - x_4\partial_{x_4} + 2z\partial_z - 2v\partial_v)F = 0\\
\widehat{Z}F = (x_0\partial_{x_1} + x_3\partial_{x_4} - 2z\partial_y + y\partial_v - z\partial_{y'})F = 0\\
\widehat{V}F = (x_1\partial_{x_0} + x_4\partial_{x_3} + 2v\partial_y - y\partial_z - v\partial_{y'})F = 0\\
\widehat{Y'}F = (x_1\partial_{x_1} + x_2\partial_{x_2} + x_3\partial_{x_3} + 2x_4\partial_{x_4} - z\partial_z + v\partial_v)F = 0
\end{array} \tag{8}$$

The rank of the matrix $A(\mathfrak{g}_{5,3}^{9,1})$ is 8 so there is only one fundamental invariant and we can verify that $J = J_1^3J_2^{-2}$ is a solution of the system (8). □

It turns out that all invariants are of rational type, and appear as the quotient of commuting polynomials. This fact may suggest the use of these algebras in the construction of integrable systems of coadjoint orbits, as has been done for large classes of classical Lie algebras [11].

References

[1] Y. Benoist. La partie semisimple de l'algèbre des dérivations d'une algèbre de Lie nilpotente, CRAS **307** (1988), 901-904.

[2] J.M. Ancochea Bermúdez, R. Campoamor-Stursberg, L. García Vergnolle, Indecomposable Lie algebras with nontrivial Levi decomposition cannot have filiform radical, Int. Math. Forum **1** (2006), 309-316.

[3] J.M. Ancochea Bermúdez, R. Campoamor-Stursberg, L. García Vergnolle, Classification of Lie algebras with naturally graded quasi-filiform nilradical, J. Geom. Phys. **61** (2011), 2168-2186.

[4] S. Okubo. Gauge theory based upon solvable Lie algebras, J. Phys. A: Math. Gen. **31** (1998), 7603-7610.

[5] G. M. Mubarakzyanov, Klassifikaciya razreshimykh algebr Lie shestovo poryadka s odnim nenilpotentym bazisnym elementom, Izv. Vysš. Učebn. Zaved. Mat. **35** (1963), 104-116.

[6] G. M. Mubarakzyanov. O razreshimykh algebrakh Li, Izv. Vysš. Učebn. Zaved. Mat. **32** (1963), 114-123.

[7] R. Campoamor-Stursberg, Some Remarks Concerning the Invariants of Rank One Solvable Real Lie Algebras, Algebra Colloquium **12** (2005), 497-518.

[8] P. Turkowski, Solvable Lie algebras of dimension six, J. Math. Phys. **31** (1990) 1344-1350.

[9] R. Campoamor-Stursberg. Structural data and invariants of nine dimensional real Lie algebras with nontrivial Levi decomposition, (Nova Science Publ., N.Y.) 2008.

[10] E. G. Beltrametti, A. Blasi. On the number of Casimir operators associated with any Lie group, Phys. Lett. **20** (1966), 6264.

[11] A. M. Perelomov. Itegriruemye sistemy klassicheskoi' mekhaniki i algebry Li, Nauka, Moskva 1990.

An extension of Whitney approximation theorem

Carlos ANDRADAS, Eva ANEIROS,

and Antonio DÍAZ-CANO

IMI and Departamento de Álgebra
Facultad de Ciencias Matemáticas
Universidad Complutense de Madrid
E-28040 Madrid, Spain
andradas@mat.ucm.es
eaneiros@mat.ucm.es
adiaz@mat.ucm.es

Dedicado al Profesor Juan Tarrés.

ABSTRACT

The classical Whitney approximation theorem states that a smooth function $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ can be approximated by analytic functions. We prove that these analytic functions approximating f can be taken as *real* holomorphic functions on the whole space $\mathbb{C}^n$.

Key words: Whitney approximation theorem, approximation by analytic functions

2010 Mathematics Subject Classification: 58C25, 26E05, 41A30, 32C05, 14P15.

1. Introduction

In 1934 H. Whitney proved that a smooth function $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ can be approximated by analytic functions, cf. [7]. This result is known as Whitney approximation theorem and is of fundamental importance in the study of differentiable and analytic manifolds. We refer to [1] or the survey [6] and the many references therein for applications and generalizations of it.

The aim of this paper is to extend Whitney approximation theorem proving that the analytic functions approximating f can be taken as *real* holomorphic functions on $\mathbb{C}^n$.

In other words, the classical Whitney approximation theorem asserts that the ring $\mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ of analytic functions on $\mathbb{R}^n$ is a dense subset of the space $C^m(\mathbb{R}^n)$ of real-valued functions on $\mathbb{R}^n$ with respect to the so called Whitney topology. In this paper, we found a strictly smaller ring which is also a dense subset of $C^m(\mathbb{R}^n)$. This is the ring

Authors partially supported by Spanish MTM2011-22435 and Grupo UCM 910444.

of *real* holomorphic functions, denoted as $\mathcal{O}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}^n)$, whose elements are holomorphic functions on $\mathbb{C}^n$ which are invariant under conjugation or, alternatively, real analytic functions on $\mathbb{R}^n$ which can be extended analytically to $\mathbb{C}^n$.

Real holomorphic functions are of interest in the study of real analytic sets, that is, subsets of $\mathbb{R}^n$ defined as the zero set of some real analytic functions. For example, the full normalization of some real analytic sets can have complex parts, see [4], and then real analytic functions which can be extended analytically to these complex parts arise. Real holomorphic functions also appear in the solution of Hilbert 17th problem for non-coherent analytic surfaces, cf. [2].

2. Preliminaries

We consider in $\mathbb{R}^n$ the usual topology. Given a compact subset $K \subset \mathbb{R}^n$, an integer $p \in \mathbb{N}$ and a function $f \in C^m(\mathbb{R}^n)$, the seminorm $\| f \|_p^K$ of $f \in C^m(\mathbb{R}^n)$ is defined as:

$$\| f \|_p^K = \sum_{|\alpha| \leq p} \frac{1}{\alpha!} \sup_{x \in K} |D^\alpha f(x)| ,$$

where we use the standard notations

$$D^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}},\ \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n,\ |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$$

and we suppose $|\alpha| \leq m \leq \infty$.

A fundamental system of neighborhoods of $f \in \mathbb{C}^m(\mathbb{R}^n)$ in the *weak topology* is the collection:

$$\{ g \in C^m(\mathbb{R}^n) \mid \ \| f - g \|_p^K < \varepsilon \} ,$$

where K is a compact subset of $\mathbb{R}^n$, $p \in \mathbb{N}$ (of course, $p \leq m$) and ε is a positive real number. Intuitively, we can say that in the weak topology two functions are close if in a compact subset K the values of both functions and of their p first derivatives are close.

As $\mathbb{R}^n$ is not compact, the closeness of functions at infinity is not controlled by the weak topology. For that reason, we introduce the *Whitney topology* as a limit of the weak topology. In this topology, a fundamental system of neighborhoods of $f \in \mathbb{C}^m(\mathbb{R}^n)$ is given by the sets:

$$\{ g \in C^m(\mathbb{R}^n) \mid \ \| f - g \|_{m_1}^{K_1} < \varepsilon_1, ..., \| f - g \|_{m_i}^{K_i} < \varepsilon_i, ... \} ,$$

where $\{m_i\}$ is a sequence of positive integers ($m_i \leq m, \forall i$), $\{\varepsilon_i\}$ is an arbitrary sequence of positive real numbers and the K_i are compact subsets of $\mathbb{R}^n$ verifying $K_i \subset V_i$ for some locally finite covering $\{V_i\}$ of $\mathbb{R}^n$ (that is, $\bigcup V_i = \mathbb{R}^n$ and every point of $\mathbb{R}^n$ has a neighborhood which intersects only finitely many sets in the covering). Now, we can state the

Theorem 2.1. *(Classical Whitney aproximation theorem) Consider the sequences $\{K_i\}$, $\{m_i\}$ and $\{\varepsilon_i\}$ as above, and let $f \in \mathbb{C}^m(\mathbb{R}^n)$. Then there exists an analytic function $g \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ such that*

$$\| f - g \|_{m_i}^{K_i} < \epsilon_i, \quad \textit{for each } i \geq 1.$$

The proof can be found in the paper of H. Whitney, cf. [7], or in the book by R. Narasimhan [5]. A similar theorem is proved in [3] for analytic submanifolds of $\mathbb{R}^n$. An immediate corollary of this theorem is the following:

Corollary 2.2. *The ring $\mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ of analytic functions on $\mathbb{R}^n$ is a dense subset of the space $C^m(\mathbb{R}^n)$ with respect to the Whitney topology.*

3. Extended Whitney approximation theorem

First we are going to see how to approximate in the weak topology a smooth function f having compact support (that is, a function $f \in C^m(\mathbb{R}^n)$ such that the closure of $\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \neq 0\}$ is a compact set) by an analytic function. This can be achieved by convolution with a suitable exponential function. For the proof of this key lemma we will closely follow the proof of lemma 1.6.1 in [5]. A similar result can be also found in [1].

Lemma 3.1. *Let $f \in C^m(\mathbb{R}^n)$ be a function with compact support, $0 \leq m < \infty$. For $\lambda > 0$, set:*

$$g_\lambda(x) \equiv I_\lambda(f)(x) := c\lambda^{\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \mathrm{e}^{-\lambda \|x-y\|^2} dy$$

where $c = \pi^{-\frac{n}{2}}$, so that $c\lambda^{\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-\lambda\|x\|^2} dx = 1$. Then

$$g_\lambda \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n) \quad \textit{and} \quad \lim_{\lambda \to \infty} \| g_\lambda - f \|_m^{\mathbb{R}^n} = 0.$$

Proof. By a change of variables, we can write $g_\lambda(x)$ in the form:

$$g_\lambda(x) = c\lambda^{\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) \mathrm{e}^{-\lambda\|y\|^2} dy$$

and so, for any $\alpha \in \mathbb{N}^n$ such that $|\alpha| \leq m$, we have

$$D^\alpha g_\lambda(x) = c\lambda^{\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} (D^\alpha f)(x-y) \mathrm{e}^{-\lambda\|y\|^2} dy = c\lambda^{\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} (D^\alpha f)(y) \mathrm{e}^{-\lambda\|x-y\|^2} dy$$

Therefore,

$$D^\alpha g_\lambda(x) - D^\alpha f(x) = c\lambda^{\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} (D^\alpha f(y) - D^\alpha f(x)) \mathrm{e}^{-\lambda\|x-y\|^2} dy.$$

Now, since f has compact support and $|\alpha| \leq m < \infty$ there is $M > 0$ such that

$$|D^\alpha f(y)| < M \quad \text{for all } y.$$

Also, given $\epsilon > 0$ there exists $\delta > 0$ such that

$$|D^\alpha f(y) - D^\alpha f(x)| < \epsilon/2 \quad \text{for } \| x - y \| < \delta.$$

Thus

$$|D^\alpha g_\lambda(x) - D^\alpha f(x)| = c\lambda^{\frac{n}{2}} \left| \int_{\|x-y\|<\delta} (D^\alpha f(y) - D^\alpha f(x)) \mathrm{e}^{-\lambda\|x-y\|^2} dy \right.$$

$$\left. + \int_{\|x-y\|\geq\delta} (D^\alpha f(y) - D^\alpha f(x)) \mathrm{e}^{-\lambda\|x-y\|^2} dy \right|$$

$$\leq \frac{1}{2}\epsilon c\lambda^{\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-\lambda\|x-y\|^2} dy + 2Mc\lambda^{\frac{n}{2}} \int_{\|x-y\|\geq\delta} \mathrm{e}^{-\lambda\|x-y\|^2} dy$$

As $c\lambda^{\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-\lambda\|x-y\|^2} dy = 1$ and

$$c\lambda^{\frac{n}{2}} \int_{\|x-y\|\geq\delta} \mathrm{e}^{-\lambda\|x-y\|^2} dy = c\lambda^{\frac{n}{2}} \int_{\|x-y\|\geq\delta} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\lambda\|x-y\|^2} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\lambda\|x-y\|^2} dy$$

$$\leq \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\lambda\delta^2} c\lambda^{\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\lambda\|x-y\|^2} dy = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\lambda\delta^2} 2^{\frac{n}{2}},$$

we have

$$|D^\alpha g_\lambda(x) - D^\alpha f(x)| \leq \frac{1}{2}\epsilon + 2M\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\lambda\delta^2} 2^{\frac{n}{2}}.$$

We can choose λ as large as needed, so

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |D^\alpha g_\lambda(x) - D^\alpha f(x)| \to 0 \quad \text{as } \lambda \to \infty.$$

Finally, as f has compact support and x appears only in the analytic function $\mathrm{e}^{-\lambda\|x-y\|^2}$, then

$$g_\lambda(x) = c\lambda^{\frac{n}{2}} \int_{\mathrm{supp}\ f} f(y) \mathrm{e}^{-\lambda\|x-y\|^2} dy$$

is an analytic function on $\mathbb{R}^n$, that is, $g_\lambda \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$. Even more, as the function $\mathrm{e}^{-\lambda\|x-y\|^2}$ is holomorphic on $\mathbb{C}^n$, $g_\lambda(x)$ is also holomorphic on $\mathbb{C}^n$. □

We recall that a complex-valued function $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ is *holomorphic* on $\mathbb{C}^n$ if each point $w = (w_1, \ldots, w_n) \in \mathbb{C}^n$ has an open neighborhood U, $w \in U$, such that the function f has a power series expansion

$$f(z) = \sum_{\nu_1,\ldots,\nu_n=0}^{\infty} a_{\nu_1\ldots\nu_n} (z_1 - w_1)^{\nu_1} \ldots (z_n - w_n)^{\nu_n},\ a_{\nu_1\ldots\nu_n} \in \mathbb{C}$$

which converges for all $z = (z_1, \ldots, z_n) \in U$. The set of all functions holomorphic on $\mathbb{C}^n$ is called the ring of holomorphic functions and is denoted by $\mathcal{O}(\mathbb{C}^n)$.

We say that a holomorphic function $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^n)$ is *real* if it is invariant under complex conjugation, that is, if $f(\overline{z}) = \overline{f(z)}$ for every $z \in \mathbb{C}^n$. The set of all real holomorphic functions is denoted as $\mathcal{O}_\mathbb{R}(\mathbb{C}^n)$.

Remark 3.2. The ring $\mathcal{O}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}^n)$ is contained in the ring of analytic functions on $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$. In fact, real holomorphic functions can be identified with real analytic functions on $\mathbb{R}^n$ which can be extended analytically to $\mathbb{C}^n$. It can be checked that real holomorphic functions can be also characterized as holomorphic functions on $\mathbb{C}^n$ which take real values on $\mathbb{R}^n$.

It is easy to see that the ring $\mathcal{O}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}^n)$ is strictly smaller than $\mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$. For example, the real analytic function $\frac{1}{x_1^2+1}$ is not real holomorphic.

Before proving the approximation theorem we need the following technical lemma.

Lemma 3.3. *Let U_p, $p \geq 1$, be the open (complex) subset of $\mathbb{C}^n$:*

$$U_p = \mathrm{Int}\left\{ z \in \mathbb{C}^n \;\middle|\; \mathrm{Re}\left[\sum_{k=1}^{n}(z_k - x_k)^2\right] > \frac{1}{2}\,,\ \forall x \in \mathbb{R}^n \text{ such that } \parallel x \parallel \geq p+1 \right\},$$

where $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\mathrm{Re}(\zeta)$ denotes the real part of the complex number ζ and Int *denotes the interior with respect to the usual topology in $\mathbb{C}^n$. Then*

$$\bigcup_{p\geq 1} U_p = \mathbb{C}^n.$$

Proof. To have an idea of how the U_p are, in figure 1 we can see the shape that they have in dimension 1.

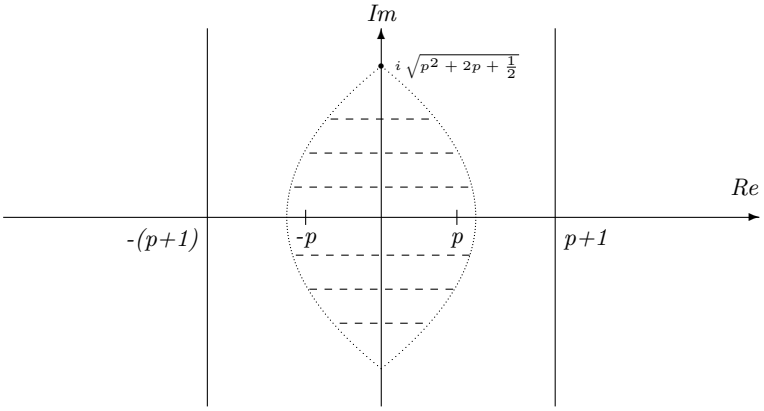


Figure 1

Take $z \in C^n$ and we will prove that $z \in U_p$ for some p. We write $z = (z_1, \ldots, z_n) = (a_1 + ib_1, \ldots, a_n + ib_n)$, $a_i, b_i \in \mathbb{R}$. Thus we have

$$\mathrm{Re}\left[\sum_{k=1}^{n}(z_k - x_k)^2\right] = \mathrm{Re}\left[\sum_{k=1}^{n}(a_k + ib_k - x_k)^2\right] = \mathrm{Re}\left[\sum_{k=1}^{n}\Big((a_k - x_k)^2 - b_k^2 + 2(a_k - x_k)b_k i\Big)\right]$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left((a_k - x_k)^2 - b_k^2 \right) = \sum_{k=1}^{n} (a_k - x_k)^2 - \sum_{k=1}^{n} b_k^2$$

We search for $p \in \mathbb{N}$ such that for every $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ verifying $\| x \| \geq p+1$:

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k - x_k)^2 - \sum_{k=1}^{n} b_k^2 > \frac{1}{2} \, .$$

If we consider points $a = (a_1, \ldots, a_n)$ and $b = (b_1, \ldots, b_n)$ of $\mathbb{R}^n$, the previous inequality can be rewritten as:

$$\| a - x \|^2 > \frac{1}{2} + \| b \|^2 \quad . \tag{1}$$

Take p such that

$$p + 1 > \| a \| + \| b \| + 1 \, .$$

If $\| x \| \geq p+1$ then $\| a - x \| \geq p + 1 - \| a \| > 1 + \| b \|$ and inequality (1) is satisfied. Hence for this p the point z is in U_p, so that the lemma is proved. □

Now we can prove our main theorem. Without loss of generality, in the definition of the Whitney topology we take the sequence of compact sets $K_i = \{x \in \mathbb{R}^n \mid i-1 \leq \| x \| \leq i\}$. Our proof follows the classical one of [5], but our particular election of the sequence $\{K_i\}$ allow us to prove that the approximating function is, in fact, a real holomorphic function.

Theorem 3.4. *(Extended Whitney approximation theorem) Let $f \in C^m(\mathbb{R}^n)$, $0 \leq m \leq \infty$, and let $K_i = \{x \in \mathbb{R}^n \mid i-1 \leq \| x \| \leq i\}$. Let $\{m_i\}$ be an arbitrary sequence of positive integers ($m_i \leq m$) and $\{\epsilon_i\}$ any sequence of strictly positive real numbers. Then there exists a real holomorphic function $g \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}^n)$ verifying that*

$$\| f - g \|_{m_i}^{K_i} < \epsilon_i$$

for each $i \geq 1$.

Proof. Since for any subset $S \subset \mathbb{R}^n$ and any pair of integers $k \leq k'$ we have the inequality $\| f \|_k^S \leq \| f \|_{k'}^S$, for the proof of the theorem we can suppose $m_{p+1} \geq m_p$, for every $p \geq 1$.
The following property of seminorms will be used: if $\varphi, \psi \in C^m(\mathbb{R}^n)$ and $S \subset \mathbb{R}^n$, then we have that:

$$\| \varphi\psi \|_k^S \leq \| \varphi \|_k^S \, \| \psi \|_k^S \, .$$

We take a sequence of functions $\varphi_p \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $p \geq 1$, with compact support, such that $\varphi_p(x) = 1$ if $x \in K_p$ and $\varphi_p(x) = 0$ if $x \notin \{y \in \mathbb{R}^n \mid p - \frac{3}{2} \leq \| y \| \leq p + \frac{1}{2}\}$. Corollary 1.2.6 of [5] assures that such functions φ_p exist.
Let

$$M_p = 1 + \| \varphi_p \|_{m_p}^{\mathbb{R}^n} \, .$$

Note that $1 < M_p < \infty$, because φ_p has compact support.
Take a sequence $\{\delta_p\}$ of positive numbers such that $\delta_{p+1} \leq \delta_p / 2$ and

$$\sum_{q \geq p} \delta_q M_{q+1} \leq \frac{1}{4} \, \epsilon_p, \quad \text{for} \quad p \geq 1.$$

For example, we can take $\delta_p = \frac{1}{4}\frac{\epsilon_1 \dots \epsilon_p}{2^p M_2 \dots M_{p+1}}$, as we can suppose that $\epsilon_i < 1$, $\forall i \geq 1$. We define $B_p := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \parallel x \parallel \leq p\}$, so that $B_p = \bigcup_{i=1}^{p} K_i$. By lemma 3.1, there exists $\lambda_1 > 0$ such that if $g_1 := I_{\lambda_1}(\varphi_1 f)$, then

$$\parallel g_1 - \varphi_1 f \parallel_{m_1}^{B_1} < \delta_1.$$

Also, by lemma 3.1, there exists $\lambda_2 > 0$ such that if $g_2 := I_{\lambda_2}(\varphi_2(f - g_1))$, then

$$\parallel g_2 - \varphi_2(f - g_1) \parallel_{m_2}^{B_2} < \delta_2.$$

By induction, we define $\lambda_p > 0$ and g_p such that if $g_p := I_{\lambda_p}(\varphi_p(f - g_1 - \ldots - g_{p-1}))$, then

$$\parallel g_p - \varphi_p(f - g_1 - \ldots - g_{p-1}) \parallel_{m_p}^{B_p} < \delta_p \,. \tag{2}$$

As $\varphi_p = 0$ in a neighbourhood of B_{p-2}, (2) implies that

$$\parallel g_p \parallel_{m_p}^{B_{p-2}} < \delta_p. \tag{3}$$

The function we are looking for is $g := \sum_{q=1}^{\infty} g_q$. First, we are going to prove that $g \in C^{m_p}(\mathbb{R}^n)$ for every p.
As $\varphi_p(x) = 1$ in a neighbourhood of K_p, from (2) we have that

$$\parallel f - g_1 - \ldots - g_p \parallel_{m_p}^{K_p} < \delta_p. \tag{4}$$

Substituting p by $p+1$ in (2), using (4) and that $m_p \leq m_{p+1}$, we have:

$$\parallel g_{p+1} \parallel_{m_p}^{K_p} \leq \parallel \varphi_{p+1}(f - \sum_{q=1}^{p} g_q) \parallel_{m_p}^{K_p} + \parallel g_{p+1} - \varphi_{p+1}(f - \sum_{q=1}^{p} g_q) \parallel_{m_p}^{K_p}$$

$$\leq \parallel \varphi_{p+1} \parallel_{m_p}^{\mathbb{R}^n} \parallel f - \sum_{q=1}^{p} g_q \parallel_{m_p}^{K_p} + \parallel g_{p+1} - \varphi_{p+1}(f - \sum_{q=1}^{p} g_q) \parallel_{m_{p+1}}^{B_{p+1}} \leq M_{p+1}\delta_p + \delta_{p+1}$$

and

$$\parallel g_{p+1} \parallel_{m_p}^{B_p} \leq \parallel g_{p+1} \parallel_{m_p}^{B_{p-1}} + \parallel g_{p+1} \parallel_{m_p}^{K_p} \leq \delta_{p+1} + (M_{p+1}\delta_p + \delta_{p+1})$$

$$= M_{p+1}\delta_p + 2\delta_{p+1} \leq M_{p+1}\delta_p + \delta_p \leq 2\delta_p M_{p+1}.$$

Therefore

$$\parallel \sum_{q>p} g_q \parallel_{m_p}^{B_p} \leq 2 \sum_{q>p} \delta_q M_{q+1} < \frac{1}{2}\,\epsilon_p \,, \tag{5}$$

which implies that, for every p,

$$g = \sum_{q=1}^{\infty} g_q \in C^{m_p}(\mathbb{R}^n).$$

Now, using (4) and (5) we see that g approximates f as desired:

$$\| f - g \|_{m_p}^{K_p} \leq \| f - \sum_{q=1}^{p} g_q \|_{m_p}^{K_p} + \| \sum_{q>p} g_q \|_{m_p}^{K_p} < \delta_p + \frac{1}{2}\,\epsilon_p < \epsilon_p\,.$$

Finally, we will see that, with an adequate choice of the λ_p, the function g is analytic over $\mathbb{C}^n$, that is, g is a real holomorphic function.
As seen in lemma 3.1 the function $g_r(x)$ is analytic on $\mathbb{R}^n$ and, moreover, it can be extended holomorphically to $\mathbb{C}^n$ by the same formula

$$g_r(z) = c\lambda_r^{n/2} \int_{\text{supp }\varphi_r} \varphi_r(y)\Big(f(y) - \sum_{q=1}^{r-1} g_q(y)\Big)\, \mathrm{e}^{-\lambda_r \sum_{i=1}^{n}(z_i - y_i)^2} dy.$$

We take open (complex) subsets U_p of $\mathbb{C}^n$ as in lemma 3.3. If $y \in \text{supp }\varphi_r$, with $r > p+2$, then $\| y \| \geq p+1$ and for $z \in U_p$ we have that

$$\mathrm{Re}\Big[\sum_{j=1}^{n}(z_j - y_j)^2\Big] > \frac{1}{2}\,,$$

so

$$|g_r(z)| \leq c\lambda_r^{n/2}\mathrm{e}^{-\lambda_r/2} \int_{\text{supp }\varphi_r} \Big|\varphi_r(y)\Big(f(y) - \sum_{q=1}^{r-1} g_q(y)\Big)\Big| dy \leq c\lambda_r^{n/2}\, \mathrm{e}^{-\lambda_r/2}\, H_r \quad (6)$$

where H_r depends only of $\lambda_1, ..., \lambda_{r-1}$, because g_q depends only on the λ_j with $j \leq q$. Thus, we can choose inductively, the λ_q large enough to assure that

$$\sum_{q\geq 1} \lambda_q^{n/2}\mathrm{e}^{-\lambda_q/2}\, H_q < \infty.$$

With this choice of the $\{\lambda_q\}$, we have from (6) that the series

$$g(z) = \sum g_q(z)$$

converges uniformly over each U_p for every p. In fact, for any $z \in U_p$ we have

$$|g(z)| \leq \sum_{q=1}^{p+2} \sup_{z\in U_p} |g_q(z)| + \sum_{q=p+3}^{\infty} \lambda_q^{n/2}\mathrm{e}^{-\lambda_q/2}\, H_q.$$

From this it can be deduced, by the Weierstrass convergence theorem and lemma (3.3), that g is holomorphic over $\mathbb{C}^n = \bigcup U_p$.

□

Corollary 3.5. *The ring $\mathcal{O}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}^n)$ is dense in $\mathbb{C}^m(\mathbb{R}^n)$, $0 \leq m \leq \infty$, with respect to the Whitney topology.*

References

[1] F. Acquistapace, F. Broglia, A. Tognoli, "Smooth and Analytic Solutions for Analytic Linear Systems", Rev. Mat. Complut., **9** (1996), 17–54.

[2] E. Aneiros, Ph. D. Dissertation, Universidad Complutense de Madrid, in preparation.

[3] J. Bochnak, W. Kucharz, M. Shiota, "On equivalence of ideals of real global analytic functions and the 17th Hilbert problem", Invent. Math., **63** (1981), 403–421.

[4] F. Guaraldo, P. Macrì, A. Tancredi, *Topics on Real Analytic Spaces*, Advanced Lectures in Mathematics, Vieweg (1986).

[5] R. Narasimhan, *Analysis on Real and Complex Manifolds*, North Holland (1968).

[6] A. Tognoli, "Approximation theorems in real analytic and algebraic geometry", Lectures in real geometry (Madrid, 1994), de Gruyter Exp- Math. **23**, Berlin 1996.

[7] H. Whitney, "Analytic extensions of differentiable functions defined in closed sets", Trans. Amer. Math. Soc. **36** (1934), 63–89.

Analytic completion of an open set

José M. Ansemil, Jerónimo López-Salazar, and Socorro Ponte

Departamento de Análisis Matemático
Facultad de Ciencias Matemáticas
Universidad Complutense de Madrid
E-28040 Madrid, Spain
ansemil@mat.ucm.es
jlopezsalazar@mat.ucm.es
ponte@mat.ucm.es

Dedicado al profesor Juan Tarrés con ocasión de su jubilación.

ABSTRACT

Let f be a holomorphic function on a complex normed space E. The possibility of extending f to the completion of E has been studied by Hirschowitz [6], Noverraz [10], Dineen [3] and Dineen-Noverraz [5]. Here, following the ideas in [4, Section 6.1], we study the extension problem for functions defined on open subsets of E. Moreover, through a complexification process, we use these results to obtain the analogous ones for analytic functions on real normed spaces. We note that in the real case we do not have, among other things, Cauchy inequalities and they are essential in the complex case.

Key words: Normed Space, Holomorphic Function, Bounding set.

2010 Mathematics Subject Classification: 46G20, 26E05.

1. Notations

The letter E will denote a normed space over the real or the complex field and $\widehat{E}$ will represent the completion of E. The open ball in E with center in x and radius r will be denoted by $B_E(x,r)$ and the corresponding ball in $\widehat{E}$ by $B_{\widehat{E}}(x,r)$. If n is a natural number n, $\mathcal{P}({}^nE)$ will denote the space of all $n-$homogeneous continuous polynomials on E. If U is a non void open subset of E, then $\mathcal{A}(U)$ will denote the space of all analytic functions on U; when E is a complex space, we will write $\mathcal{H}(U)$ instead of $\mathcal{A}(U)$. Given $f \in \mathcal{A}(U)$ and $S \subset U$, let

$$|f|_S = \sup\{|f(z)| : z \in S\}.$$

The second author has been supported by University Complutense de Madrid, grant BE45/08.

We recall that a subset $A \subset U$ is a *bounding* subset in U if every $f \in \mathcal{A}(U)$ is bounded on A. If U is an open subset of E, $\widehat{U}$ will be the following open subset of $\widehat{E}$:

$$\widehat{U} = \bigcup \left\{ B_{\widehat{E}}(x,r) : x \in U,\, r > 0 \text{ and } B_E(x,r) \subset U \right\}.$$

Note that $\widehat{U}$ is the biggest open subset of $\widehat{E}$ such that $\widehat{U} \cap E = U$ and $\widehat{U} \subset \overline{U}^{\widehat{E}}$.

2. Extension to a neighborhood of each point

Throughout sections 2 and 3, the letter E will always represent a complex normed space and U will be an open subset of E.

Let $z \in U$. If f is a holomorphic function on U, then the polynomial coefficients of the Taylor series of f at z, $\frac{\widehat{d^n f(z)}}{n!}$, are locally uniformly continuous [4, Proposition 1.11]. Therefore, each $\frac{\widehat{d^n f(z)}}{n!}$ admits an extension to $\widehat{E}$ which will also be denoted by $\frac{\widehat{d^n f(z)}}{n!}$. Thus, we can consider the set

$$A_f = \left\{ B_{\widehat{E}}(z,r) : B_E(z,r) \subset U \text{ and } \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{\widehat{d^n f}(z)}{n!} \right|_{B_{\widehat{E}}(0,r)} < \infty \right\}.$$

The next proposition shows that A_f is non void.

Proposition 2.1. *For every $z \in U$ and every $f \in \mathcal{H}(U)$ there exists $r > 0$ such that $B_{\widehat{E}}(z,r) \in A_f$.*

Proof. Let $z \in U$ and $f \in \mathcal{H}(U)$. As U is open and f is continuous on U, there exists $r > 0$ such that $B_E(z,2r) \subset U$ and $|f|_{B_E(z,2r)} < \infty$. By the density of $B_E(0,r)$ in $B_{\widehat{E}}(0,r)$ and the Cauchy inequalities,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{\widehat{d^n f}(z)}{n!} \right|_{B_{\widehat{E}}(0,r)} = \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{\widehat{d^n f}(z)}{n!} \right|_{B_E(0,r)} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot |f|_{B_E(z,2r)} < \infty.$$

Then $B_{\widehat{E}}(z,r) \in A_f$. □

Proposition 2.2. *If $f \in \mathcal{H}(U)$, then there exist an open subset $\Omega_f \subset \widehat{E}$ and $\widehat{f} \in \mathcal{H}(\Omega_f)$ such that $U \subset \Omega_f \subset \widehat{U}$ and $\widehat{f}|_U = f$.*

Proof. We define

$$\Omega_f = \bigcup \left\{ B_{\widehat{E}}(z,r) : B_{\widehat{E}}(z,r) \in A_f \right\}.$$

Let $z_0 \in U$ and $r > 0$ be such that $B_{\widehat{E}}(z_0,r)$ belongs to A_f. Then

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{\widehat{d^n f}(z_0)}{n!} \right|_{B_{\widehat{E}}(0,r)} < \infty,$$

so the series

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\widehat{d^n f}(z_0)}{n!} (z - z_0)$$

is uniformly convergent on $B_{\widehat{E}}(z_0, r)$. This implies that the function

$$\widehat{f}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\widehat{d^n f}(z_0)}{n!} (z - z_0), \tag{1}$$

is holomorphic on $B_{\widehat{E}}(z_0, r)$. By definition, $\widehat{f} = f$ on $B_E(z_0, r)$.

Let us assume now that $B_{\widehat{E}}(z_1, r_1)$ and $B_{\widehat{E}}(z_2, r_2)$ are two elements of A_f such that

$$B_{\widehat{E}}(z_1, r_1) \cap B_{\widehat{E}}(z_2, r_2) \neq \emptyset$$

and that $\widehat{f}_1$ and $\widehat{f}_2$ are extensions of f to $B_{\widehat{E}}(z_1, r_1)$ and $B_{\widehat{E}}(z_2, r_2)$ respectively. Let w be a point in $B_{\widehat{E}}(z_1, r_1) \cap B_{\widehat{E}}(z_2, r_2)$. Since $w \in \widehat{U} \subset \overline{U}^{\widehat{E}}$, there is a sequence $(w_n)_{n=1}^{\infty} \subset U$ which converges to w. Hence there is $n_0 \in \mathbb{N}$ such that

$$w_n \in B_{\widehat{E}}(z_1, r_1) \cap B_{\widehat{E}}(z_2, r_2)$$

for every $n \geq n_0$. This implies that

$$\widehat{f}_1(w_n) = f(w_n) = \widehat{f}_2(w_n)$$

for every $n \geq n_0$. As $\widehat{f}_1$ and $\widehat{f}_2$ are continuous at w, we have that $\widehat{f}_1(w) = \widehat{f}_2(w)$; that is, $\widehat{f}_1 = \widehat{f}_2$ on $B_{\widehat{E}}(z_1, r_1) \cap B_{\widehat{E}}(z_2, r_2)$. Therefore, if we extend the function f to each $B_{\widehat{E}}(z, r) \in A_f$ by the formula (1), then we obtain a holomorphic function $\widehat{f}$ on Ω_f such that $\widehat{f}|_U = f$. □

3. Extension to a given open set in the completion

In this section we deal with the problem of the extension of holomorphic functions from an open subset of E to a subset of $\hat{E}$.

Proposition 3.1. *If $f \in \mathcal{H}(U)$, $w \in E$ and $n \in \mathbb{N}$, then the function*

$$\begin{array}{rccc} g: & U & \to & \mathbb{C} \\ & z & \mapsto & g(z) = \frac{\widehat{d^n f(z)}}{n!}(w) \end{array}$$

is holomorphic on U.

Proof. Let us define

$$\begin{array}{rccc} F: & U & \to & \mathcal{P}({}^n E) \\ & z & \mapsto & F(z) = \frac{\widehat{d^n f(z)}}{n!} \end{array}$$

and

$$\begin{array}{rccc} G: & \mathcal{P}({}^n E) & \to & \mathbb{C} \\ & P & \mapsto & G(P) = P(w). \end{array}$$

The mapping F is holomorphic because f has derivatives of all orders. The function G is holomorphic because it is linear and continuous. Therefore, $g = G \circ F$ is holomorphic. □

Definition 3.2. The symbol τ_δ denotes the locally convex topology on $\mathcal{H}(U)$ defined by the seminorms p with this property: for every increasing countable open cover $(V_n)_{n=1}^\infty$ of U there are $C > 0$ and $n_0 \in \mathbb{N}$ such that

$$p(f) \leq C\,|f|_{V_{n_0}} \text{ for every } f \in \mathcal{H}(U).$$

This topology has been deeply studied in many papers, as it is possible to see in [4] and its list of references. It is the bornological topology associated with the compact open topology on $\mathcal{H}(U)$ [4, Proposition 3.18]. We recall that if A is a bounding subset A in U, the mapping

$$f \in \mathcal{H}(U) \mapsto |f|_A$$

is a τ_δ continuous seminorm on $\mathcal{H}(U)$ [4, Example 3.20(c)].

Theorem 3.3. *The following conditions are equivalent:*

a) Every $f \in \mathcal{H}(U)$ admits an extension $\widehat{f} \in \mathcal{H}(\widehat{U})$.

b) If $\widehat{z} \in \widehat{U}$, then every sequence in U which converges to $\widehat{z}$ is a bounding sequence in U.

c) Every point in $\widehat{U}$ is the limit of a bounding sequence in U.

Proof. $(a) \Rightarrow (b)$ Let $(z_n)_{n=1}^\infty$ be a sequence in U which converges to a point $\widehat{z} \in \widehat{U}$. If $f \in \mathcal{H}(U)$, by (a) there is a holomorphic extension $\widehat{f}$ of f to $\widehat{U}$. Then

$$\sup\{|f(z_n)| : n \in \mathbb{N}\} = \sup\left\{\left|\widehat{f}(z_n)\right|, \left|\widehat{f}(z)\right| : n \in \mathbb{N}\right\} < \infty.$$

This supreme is finite because $\{z_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{z\}$ is a compact subset in $\widehat{U}$ and $\widehat{f}$ is continuous on $\widehat{U}$.

$(b) \Rightarrow (c)$ If $\widehat{z} \in \widehat{U} \subset \overline{U}^{\widehat{E}}$, then there is a sequence $(z_n)_{n=1}^\infty$ in U which converges to $\widehat{z}$. By (b), the sequence $(z_n)_{n=1}^\infty$ is bounding in U.

$(c) \Rightarrow (a)$ Let us fix $f \in \mathcal{H}(U)$. We will prove that $\Omega_f = \widehat{U}$ and then we will apply Proposition 2.2. The proof will be divided in several steps.

(i) For every $k, n \in \mathbb{N}$, let us consider the sets

$$U_k = \left\{z \in U : B_E\left(z, \frac{2}{k}\right) \subset U \text{ and } |f|_{B_E\left(z,\frac{2}{k}\right)} \leq k\right\}$$

and

$$V_n = \bigcup_{k=1}^{n}\left[U_k + B_E\left(0, \frac{1}{k}\right)\right].$$

The family $(V_n)_{n=1}^\infty$ is an increasing open cover of U contained in U. Indeed, it is clear that $(V_n)_{n=1}^\infty$ is an increasing sequence of open subsets. Moreover, if $n \in \mathbb{N}$ and $z \in V_n$, there are $k \in \{1, \ldots, n\}$, $z_1 \in U_k$ and $z_2 \in B_E\left(0, \frac{1}{k}\right)$ such

that $z = z_1 + z_2$. By the definition of U_k, we have that $B_E\left(z_1, \frac{2}{k}\right) \subset U$. As $\|z - z_1\| = \|z_2\| < \frac{1}{k}$, we obtain that

$$z \in B_E\left(z_1, \frac{1}{k}\right) \subset B_E\left(z_1, \frac{2}{k}\right) \subset U$$

and then $V_n \subset U$.

Let $z \in U$. Since U is open and f is continuous on U, there exists $n \in \mathbb{N}$ such that

$$B_E\left(z, \frac{2}{n}\right) \subset U \quad \text{and} \quad |f|_{B_E\left(z, \frac{2}{n}\right)} \leq n.$$

Then $z \in U_n \subset V_n$ and, therefore, $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n$.

(ii) For every $n \in \mathbb{N}$, the set $V_n + B_E\left(0, \frac{1}{n}\right)$ is contained in U. Indeed, let $z \in V_n$ and $w \in B_E\left(0, \frac{1}{n}\right)$. There exist $k \in \{1, \ldots, n\}$, $z_1 \in U_k$ and $z_2 \in B_E\left(0, \frac{1}{k}\right)$ such that $z = z_1 + z_2$. Then

$$\begin{aligned} z + w &= z_1 + z_2 + w \in z_1 + B_E\left(0, \frac{1}{k}\right) + B_E\left(0, \frac{1}{n}\right) \\ &\subset z_1 + B_E\left(0, \frac{1}{k}\right) + B_E\left(0, \frac{1}{k}\right) = B_E\left(z_1, \frac{2}{k}\right). \end{aligned}$$

Since $z_1 \in U_k$, the ball $B_E\left(z, \frac{2}{k}\right)$ is contained in U. This proves that $z + w \in U$ and hence $V_n + B_E\left(0, \frac{1}{n}\right) \subset U$.

(iii) For every $n \in \mathbb{N}$ we have $|f|_{V_n + B_E\left(0, \frac{1}{n}\right)} \leq n$.

Let $z \in V_n$ and $w \in B_E\left(0, \frac{1}{n}\right)$. In (ii) we have seen that there are $k \in \{1, \ldots, n\}$ and $z_1 \in U_k$ such that $z + w \in B_E\left(z_1, \frac{2}{k}\right)$. By the definition of U_k,

$$|f(z + w)| \leq |f|_{B_E\left(z_1, \frac{2}{k}\right)} \leq k \leq n.$$

(iv) Finally we prove that f admits an extension $\widehat{f} \in \mathcal{H}(\widehat{U})$. Let $\widehat{z} \in \widehat{U}$. By hypothesis there is a bounding sequence $A = \{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ in U which converges to $\widehat{z}$. Then the seminorm

$$g \in \mathcal{H}(U) \mapsto |g|_A$$

is $\tau_\delta-$continuous. As $(V_n)_{n=1}^{\infty}$ is an increasing countable open cover of U, there are $C > 0$ and $n_0 \in \mathbb{N}$ such that

$$|g|_A \leq C \cdot |g|_{V_{n_0}} \tag{2}$$

for every $g \in \mathcal{H}(U)$. As $(V_n)_{n=1}^{\infty}$ is increasing we may assume that n_0 is such that $B_{\widehat{E}}\left(\widehat{z}, \frac{1}{n_0}\right) \subset \widehat{U}$.

Since $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ converges to $\widehat{z}$, there exists $k \in \mathbb{N}$ such that $z_k \in B_{\widehat{E}}\left(\widehat{z}, \frac{1}{2n_0}\right)$ and

$$B_{\widehat{E}}\left(z_k, \frac{1}{2n_0}\right) \subset B_{\widehat{E}}\left(\widehat{z}, \frac{1}{n_0}\right) \subset \widehat{U}.$$

Then $B_E\left(z_k, \frac{1}{2n_0}\right) \subset U$.

Let $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ and let $w \in B_{\widehat{E}}\left(0, \frac{1}{2n_0}\right)$. By Proposition 3.1, the function

$$\begin{array}{rccc} g: & U & \to & \mathbb{C} \\ & z & \mapsto & g(z) = \frac{\widehat{d^n} f(z)}{n!}(w) \end{array}$$

is holomorphic on U. As $z_k \in A$, by (2) we get that

$$\left|\frac{\widehat{d^n} f(z_k)}{n!}(w)\right| = |g(z_k)| \leq C \cdot |g|_{V_{n_0}} = C \sup_{z \in V_{n_0}} \left|\frac{\widehat{d^n} f(z)}{n!}(w)\right|.$$

Therefore,

$$\left|\frac{\widehat{d^n} f(z_k)}{n!}\right|_{B_{\widehat{E}}\left(0, \frac{1}{2n_0}\right)} \leq C \sup_{z \in V_{n_0}} \left(\left|\frac{\widehat{d^n} f(z)}{n!}\right|_{B_{\widehat{E}}\left(0, \frac{1}{2n_0}\right)}\right).$$

We now use that the ball $B_E\left(0, \frac{1}{2n_0}\right)$ is dense in $B_{\widehat{E}}\left(0, \frac{1}{2n_0}\right)$:

$$\begin{aligned} \left|\frac{\widehat{d^n} f(z_k)}{n!}\right|_{B_{\widehat{E}}\left(0, \frac{1}{2n_0}\right)} &\leq C \sup_{z \in V_{n_0}} \left(\left|\frac{\widehat{d^n} f(z)}{n!}\right|_{B_E\left(0, \frac{1}{2n_0}\right)}\right) \\ &= \frac{C}{2^n} \sup_{z \in V_{n_0}} \left(\left|\frac{\widehat{d^n} f(z)}{n!}\right|_{B_E\left(0, \frac{1}{n_0}\right)}\right). \end{aligned}$$

By the Cauchy inequalities,

$$\left|\frac{\widehat{d^n} f(z_k)}{n!}\right|_{B_{\widehat{E}}\left(0, \frac{1}{2n_0}\right)} \leq \frac{C}{2^n} \sup_{z \in V_{n_0}} \left(|f|_{B_E\left(z, \frac{1}{n_0}\right)}\right) = \frac{C}{2^n} |f|_{V_{n_0} + B_E\left(0, \frac{1}{n_0}\right)}.$$

Using (iii), we obtain

$$\left|\frac{\widehat{d^n} f(z_k)}{n!}\right|_{B_{\widehat{E}}\left(0, \frac{1}{2n_0}\right)} \leq \frac{C}{2^n} n_0.$$

This inequality holds for all n, so

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{\widehat{d^n} f(z_k)}{n!}\right|_{B_{\widehat{E}}\left(0, \frac{1}{2n_0}\right)} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C}{2^n} n_0 < \infty.$$

This implies that $B_{\widehat{E}}\left(z_k, \frac{1}{2n_0}\right) \in A_f$ and then $B_{\widehat{E}}\left(z_k, \frac{1}{2n_0}\right) \subset \Omega_f$. Therefore,

$$\widehat{z} \in B_{\widehat{E}}\left(z_k, \frac{1}{2n_0}\right) \subset \Omega_f.$$

As $\widehat{z}$ is arbitrary in $\widehat{U}$, we get that $\widehat{U} \subset \Omega_f$. As always $\Omega_f \subset \widehat{U}$, we have $\Omega_f = \widehat{U}$.

□

4. The real case

In this section we obtain the results proved in the above sections in the context of real normed spaces. Analytic functions on those spaces have been studied by Bochnak [1] and Chae [2], among others.

If E is a real normed space, then the symbol $\widetilde{E}$ will denote the Taylor complexification of E. That is, $\widetilde{E}$ is the complex normed space $E \times E$ endowed with the natural operations

$$\begin{aligned} (x,y)+(x',y') &= (x+x',y+y') \qquad \text{for } (x,y),(x',y') \in \widetilde{E}, \\ (\alpha+i\beta)(x,y) &= (\alpha x-\beta y, \alpha y+\beta x) \qquad \text{for } \alpha+i\beta \in \mathbb{C} \text{ and } (x,y) \in \widetilde{E} \end{aligned}$$

and with the norm

$$\|(x,y)\|_{\widetilde{E}} = \sup\left\{\sqrt{\varphi(x)^2+\varphi(y)^2} : \varphi \in E',\ \|\varphi\|=1\right\}.$$

Note that $\|(x,y)\|_{\widetilde{E}} = \|x\|$ for every $x \in E$.

Proposition 4.1. *Let U be an open subset of a real normed space E. If $f \in \mathcal{A}(U)$, then there is an open subset $\widetilde{U}_f$ in $\widetilde{E}$ and there is $\widetilde{f} \in \mathcal{H}(\widetilde{U}_f)$ such that $U \times \{0\} \subset \widetilde{U}_f$ and $\widetilde{f}(x,0) = f(x)$ for all $x \in U$.*

Proof. For every $a \in U$ there is $r_a > 0$ and there is a sequence $(P_{a,n})_{n=0}^{\infty}$ of polynomials, where each $P_{a,n}$ belongs to $\mathcal{P}({}^nE)$, such that the series

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_{a,n}(x-a)$$

converges to $f(x)$ uniformly on $B_E(a,r_a)$. Every polynomial $P_{a,n}$ has a complex extension $\widetilde{P}_{a,n} \in \mathcal{P}({}^n\widetilde{E})$ such that $\left\|\widetilde{P}_{a,n}\right\| \leq 2^n \|P_{a,n}\|$ (see [7] or [9]). Hence

$$\left(\limsup \left\|\widetilde{P}_{a,n}\right\|^{\frac{1}{n}}\right)^{-1} \geq \left(\limsup 2\|P_{a,n}\|^{\frac{1}{n}}\right)^{-1} = \frac{1}{2}\left(\limsup \|P_{a,n}\|^{\frac{1}{n}}\right)^{-1} \geq \frac{1}{2}r_a,$$

so the radius of convergence of the series

$$\sum_{n=0}^{\infty} \widetilde{P}_{a,n}(z-(a,0)) \tag{3}$$

is bigger than or equal to $\frac{r_a}{2}$. Therefore, the function

$$\widetilde{f}_a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \widetilde{P}_{a,n}(z-(a,0))$$

is holomorphic on $B_{\widetilde{E}}\left((a,0), \frac{r_a}{2}\right)$. By definition, $\widetilde{f}_a(x,0) = f(x)$ for all $x \in B_E\left(a, \frac{r_a}{2}\right)$.

Let

$$\widetilde{U}_f = \bigcup \left\{B_{\widetilde{E}}\left((a,0), \frac{r_a}{2}\right) : a \in U\right\}.$$

Suppose that $a, b \in U$ and

$$B_{\widetilde{E}}\left((a,0), \frac{r_a}{2}\right) \cap B_{\widetilde{E}}\left((b,0), \frac{r_b}{2}\right) \neq \emptyset.$$

Then

$$V = B_E\left(a, \frac{r_a}{2}\right) \cap B_E\left(b, \frac{r_b}{2}\right)$$

is a non void open subset of E.

Since $\widetilde{f_a}(x,0) = f(x) = \widetilde{f_b}(x,0)$ for all $x \in V$, we obtain that $\widetilde{f_a} = \widetilde{f_b}$ on $B_{\widetilde{E}}\left((a,0), \frac{r_a}{2}\right) \cap B_{\widetilde{E}}\left((b,0), \frac{r_b}{2}\right)$ (see [2, Theorem 12.11]). Therefore, we can define a holomorphic function $\widetilde{f} : \widetilde{U}_f \to \mathbb{C}$ as

$$z \in B_{\widetilde{E}}\left((a,0), \frac{r_a}{2}\right) \mapsto \widetilde{f}(z) = \widetilde{f_a}(z)$$

for every $a \in U$. □

Proposition 4.2. *Let E be a real normed space. Suppose that g is a holomorphic function in an open subset V in $\widetilde{E}$ such that $V \cap (E \times \{0\}) \neq \emptyset$ and let*

$$U = \{x \in E : (x,0) \in V\}.$$

Then:

(a) U is open in E and the functions

$$u: \begin{array}{ccc} U & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & u(x) = Re\,[g(x,0)] \end{array} \quad \textit{and} \quad v: \begin{array}{ccc} U & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & v(x) = Im\,[g(x,0)] \end{array}$$

are real analytic on U.

(b) If A is a subset of U which is bounding for $\mathcal{A}(U)$, then $A \times \{0\}$ is bounding for $\mathcal{H}(V)$.

Proof. (a) Let $x_0 \in U$. There is $r > 0$ such that $B_{\widetilde{E}}((x_0,0), r) \subset V$. If $x \in B_E(x_0, r)$, then

$$\|(x,0) - (x_0,0)\|_{\widetilde{E}} = \|x - x_0\| < r,$$

so $(x,0) \in B_{\widetilde{E}}((x_0,0), r) \subset V$. Therefore, $B_E(x_0, r) \subset U$, so U is an open subset in E.

As g is holomorphic on V, there are $R > 0$ and a sequence $(P_n)_{n=0}^{\infty}$, where $P_n \in \mathcal{P}(^n\widetilde{E})$ for every n, such that $B_{\widetilde{E}}((x_0,0), R) \subset V$ and the series

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n((x,y) - (x_0,0)) = \sum_{n=0}^{\infty} Re\,[P_n(x - x_0, y)] + i \sum_{n=0}^{\infty} Im\,[P_n(x - x_0, y)]$$

converges to $g(x,y)$ uniformly for $(x,y) \in B_{\widetilde{E}}((x_0,0), R)$.

For every n, the function

$$x \in E \mapsto Re\,[P_n(x,0)] \in \mathbb{R}$$

is an $n-$homogeneous continuous polynomial on E. If $x \in B_E(x_0, R)$, then

$$u(x) = Re\,[g(x,0)] = \sum_{n=0}^{\infty} Re\,[P_n(x - x_0, 0)]$$

and this series converges uniformly on $B_E(x_0, R)$, so u is real analytic on U. The proof for the function v is analogous.

(b) Let g be a holomorphic function on V. By Proposition 4.2(a), the functions

$$u : x \in U \mapsto Re\,[g(x,0)] \qquad \text{and} \qquad v : x \in U \mapsto Im\,[g(x,0)]$$

are real analytic in U. Then

$$\sup_{(x,0)\in A\times\{0\}} |g(x,0)| \leq \sup_{x\in A} |u(x)| + \sup_{x\in A} |v(x)| < \infty.$$

□

Theorem 4.3. *Let U be an open subset of a real normed space E. The following conditions are equivalent:*

(a) Every $f \in \mathcal{A}(U)$ admits an extension $\widehat{f} \in \mathcal{A}(\widehat{U})$.

(b) If $\widehat{x} \in \widehat{U}$, then every sequence in U which converges to $\widehat{x}$ is a bounding sequence in U.

(c) Every point in $\widehat{U}$ is the limit of a bounding sequence in U.

Proof. The proof of (a)⇒(b) and (b)⇒(c) are completely similar to the corresponding case in Theorem 3.3. In order to prove that (c)⇒(a), let us take a function $f \in \mathcal{A}(U)$. By Proposition 4.1, there is an open subset $\widetilde{U}_f$ in $\widetilde{E}$ and there is $\widetilde{f} \in \mathcal{H}(\widetilde{U}_f)$ such that $U \times \{0\} \subset \widetilde{U}_f$ and $\widetilde{f}(x,0) = f(x)$ for all $x \in U$.

By Proposition 2.2, there is an open subset $\Omega_{\widetilde{f}}$ in $\widehat{\widetilde{E}}$ and there is $\widehat{\widetilde{f}} \in \mathcal{H}(\Omega_{\widetilde{f}})$ such that $\widetilde{U}_f \subset \Omega_{\widetilde{f}}$ and $\widehat{\widetilde{f}}|_{\widetilde{U}} = \widetilde{f}$. Then the set

$$\Omega_f = \left\{x \in \widehat{E} : (x,0) \in \Omega_{\widetilde{f}}\right\}$$

is open in $\widehat{E}$ and the function

$$\widehat{f} : x \in \Omega_f \mapsto \widehat{f}(x) = Re\left[\widehat{\widetilde{f}}(x,0)\right]$$

is analytic on Ω_f by Proposition 4.2. If $x \in U$, then $(x,0) \in \widetilde{U}_f \subset \Omega_{\widetilde{f}}$, so $x \in \Omega_f$; that is, $U \subset \Omega_f$. Also, if $x \in U$, then

$$\widehat{f}(x) = Re\left[\widehat{\widetilde{f}}(x,0)\right] = Re\left[\widetilde{f}(x,0)\right] = Re\,[f(x)] = f(x).$$

Let $\widehat{x} \in \widehat{U}$. By (c), there is a sequence $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ in U which converges to $\widehat{x}$ and it is a bounding subset for $\mathcal{A}(U)$. By Proposition 4.2, the set $\{(x_n, 0) : n \in \mathbb{N}\}$ is bounding for $\mathcal{H}(\widetilde{U}_f)$. As $(x_n, 0) \to (\widehat{x}, 0)$, the proof of (c)⇒(a) in Theorem 3.3 shows that $(\widehat{x}, 0) \in \Omega_{\widetilde{f}}$. Therefore, $\widehat{x} \in \Omega_f$. □

In the proof of Theorem 4.3 we have also obtained the following result:

Proposition 4.4. *Let U be an open subset of a real normed space E. If $f \in \mathcal{A}(U)$, then there is an open subset Ω_f in $\widehat{E}$ and there is $\widehat{f} \in \mathcal{A}(\Omega_f)$ such that $U \subset \Omega_f$ and $\widehat{f}|_U = f$.*

5. Some examples

In this section we give examples of spaces and open subsets U of them in which it is impossible to extend every function from U to $\widehat{U}$ and others in which this extension is possible. We first need to recall the definition of domain of existence of a holomorphic function and the definition of pseudoconvex set.

Definition 5.1. A connected open subset U of a complex normed space E is the domain of existence of a function $f \in \mathcal{H}(U)$ if there are no open sets V and W in E and no function $\widetilde{f} \in \mathcal{H}(V)$ with the following properties:

(i) V is connected and not contained in U.

(ii) $\emptyset \neq W \subset U \cap V$.

(iii) $\widetilde{f} = f$ on W.

Definition 5.2. A function $\theta : U \to [-\infty, +\infty)$ is plurisubharmonic on U if θ is upper semicontinuous and

$$\theta(a) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \theta\left(a + e^{it} b\right) d\theta$$

for all $a \in U$ and $b \in E$ such that $\{a + \lambda b : |\lambda| \leq 1\} \subset U$.

Given $x \in U$, let $d_U(x)$ denote the distance from x to the boundary of U. The set U is said to be pseudoconvex if the function $-\log d_U$ is plurisubharmonic on U.

Definition 5.3. Given an open subset U of a real or complex normed space E, we define

$$U_{\mathcal{O}} = \bigcap \{\Omega_f : f \in \mathcal{A}(U)\}.$$

Note that $U \subset U_{\mathcal{O}} \subset \widehat{U}$.

Proposition 5.4. *If U is an open subset of a real or complex normed space E, then*

$$U_{\mathcal{O}} = \bigcup \left\{ \overline{A}^{\widehat{U}} : A \text{ is a bounding subset of } U \right\}.$$

Proof. Let us take $z \in U_{\mathcal{O}}$ and let $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ be a sequence in U such that $z_n \to z$. If $f \in \mathcal{A}(U)$, then, by Proposition 2.2 in the complex case, and by Proposition 4.4 in the real one, there is $\widehat{f} \in \mathcal{A}(\Omega_f)$ such that $\widehat{f}_{|U} = f$. As $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ and z are in $U_{\mathcal{O}}$, then $\{z_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{z\} \subset \Omega_f$. Therefore, $f(z_n) \to \widehat{f}(z)$, so $\{f(z_n)\}_{n=1}^{\infty}$ is bounded. This implies that $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ is a bounding subset of U and z belongs to its closure in $\widehat{U}$.

Now suppose that $z_0 \in \overline{A}^{\widehat{U}}$, where A is a bounding subset of U. Let $f \in \mathcal{A}(U)$. The proof of (c)⇒(a) in Theorem 3.3 in the complex case and Theorem 4.3 in the real one, shows that $z_0 \in \Omega_f$. As f is arbitrary in $\mathcal{A}(U)$, we deduce that $z_0 \in U_{\mathcal{O}}$. □

Proposition 5.5. *If E is a real or complex normed space of countable dimension and U is an open subset of E, then $U = U_{\mathcal{O}}$. Therefore, there is at least one analytic function f on U such that $\Omega_f \subsetneq \widehat{U}$; that is, f cannot be extended to $\widehat{U}$.*

Proof. We first assume that E is a complex space. The symbol ℓ_1 will denote the space of absolutely summing sequences of complex numbers.

Suppose there is $z_0 \in U_{\mathcal{O}} \backslash U$. By Proposition 5.4, there is a bounding subset A in U such that $z_0 \in \overline{A}^{\widehat{U}}$. Let $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ be a sequence in A such that $z_n \to z_0$. The construction in [4, Exercise 6.6(c)] gives a continuous linear mapping $T : \widehat{E} \to \ell_1$ and a plurisubharmonic function $\theta : \ell_1 \to [-\infty, +\infty)$ such that

$$V = \{z \in \ell_1 : \theta(z) < \theta(T(z_0))\}$$

is a pseudoconvex open subset of ℓ_1 and $T(E) \subset V$. By [8, Theorem 45.8], V is a domain of existence.

The sequence $(T(z_n))_{n=1}^{\infty}$ converges to $T(z_0)$, $T(z_n) \in V$ for all n and $T(z_0) \notin V$. Since V is a domain of existence, by [8, Theorem 11.4] there is $g \in \mathcal{H}(V)$ such that

$$\sup\{|g(T(z_n))| : n \in \mathbb{N}\} = \infty.$$

However, as $g \circ T|_U$ is holomorphic on U and A is bounding in U,

$$\sup\{|g \circ T(z_n))| : n \in \mathbb{N}\} \leq \sup\{|g \circ T(z))| : z \in A\} < \infty.$$

We have obtained a contradiction. Therefore, such $z_0 \in U_{\mathcal{O}} \backslash U$ does not exist; that is, $U = U_{\mathcal{O}}$.

Now let us assume that E is a real space. Suppose there is $x_0 \in U_{\mathcal{O}} \backslash U$. Again by Proposition 5.4, there is a bounding subset A in U such that $x_0 \in \overline{A}^{\widehat{U}}$. Let $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ be a sequence in A such that $x_n \to x_0$. As we have seen before, there are a continuous linear mapping $T : \widehat{\widehat{E}} \to \ell_1$, an open subset $V \subset \ell_1$ and a holomorphic function $g \in \mathcal{H}(V)$ such that

$$\sup\{|g(T(x_n))| : n \in \mathbb{N}\} = \infty.$$

The functions $Re(g \circ T|_U)$ and $Im(g \circ T|_U)$ are analytic on U. As A is bounding in U,

$$\sup\{|Re(g \circ T(x))| : x \in A\} < \infty \quad \text{and} \quad \sup\{|Im(g \circ T(x))| : x \in A\} < \infty,$$

so

$$\sup\{|g(T(x_n))| : n \in \mathbb{N}\} < \infty.$$

This contradiction gives that $U = U_{\mathcal{O}}$. □

Remark 5.6. An example of a normed space of countable dimension is c_{00}, the space of all eventually null sequences, with any of the p norms, $1 \leq p \leq \infty$. We note that the above proposition is an adaptation to open sets of [10, Theorem 5.3.7]. Our proof follows the arguments in [4, Example 6.6(d)].

Proposition 5.7. [5, Corollary 11] *If F is an infinite dimensional complex Banach space, then there is a dense hyperplane H in F such that $H_{\mathcal{O}} = F$. Therefore, every holomorphic function on H can be extended to a holomorphic function on F.*

Remark 5.8. We note that the argument in [5, Corollary 11] really proves that there are infinitely many dense hyperplanes with this property.

References

[1] J. Bochnak, Analytic functions in Banach spaces, Studia Math., **XXXV** (1970), 272–292.

[2] S.B. Chae, Holomorphy and Calculus in Normed Spaces, New York and Basel, Marcel Dekker Inc., 1985.

[3] S. Dineen, Holomorphically complete locally convex topological vector spaces, Séminaire P. Lelong (Analyse), 1971–1972, Lecture Notes in Math., **332** (1973), 77–111.

[4] S. Dineen, Complex Analysis on Infinite Dimensional Spaces, Springer Monographs in Mathematics, 1999.

[5] S. Dineen, Ph. Noverraz, Gaussian Measures and Polar Sets in Locally Convex Spaces, Ark. Mat., **17** (1979), 217–223.

[6] A. Hirschowitz, Prolongement des fonctions analytiques, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), **22** (1972), 255–292.

[7] P. Kirwan, Complexification of multilinear mappings and polynomials, Math. Nachr., **231** (2001), 39–68.

[8] J. Mujica, Complex Analysis in Banach Spaces, Dover Publications, 2010.

[9] G. Muñoz, Y. Sarantopoulos, A. Tonge, Complexifications of real Banach spaces, polynomials and multilinear maps, Studia Math., **134** (1999), 1–33.

[10] Ph. Noverraz, Pseudo-Convexité, Convexité Polynomiale et Domains d'Holomorphie en Dimension Infinie, Notas de Matemática, **48**, North-Holland Math. Stud., Amsterdam, 1973.

Topological classification of finite groups acting on compact surfaces

Emilio Bujalance and Francisco Javier Cirre

Departamento de Matemáticas Fundamentales
Facultad de Ciencias, UNED
c/ Senda del Rey, 9, E-28040 Madrid, Spain
eb@mat.uned.es
jcirre@mat.uned.es

Dedicado a nuestro amigo Juan, con ocasión de su jubilación.

ABSTRACT

This is a survey on results about topological classification of finite groups acting as orientation-preserving homeomorphisms on compact connected oriented two dimensional manifolds.

Key words: finite group action, topological equivalence, Riemann surface.

2010 Mathematics Subject Classification: Primary: 57M60; Secondary: 30F10

1. Introducción

The goal of this note is to survey known results on the classification up to topological equivalence of finite group actions on surfaces of genus $g \geq 2$. By a surface here we mean a compact connected oriented two dimensional manifold. These surfaces have the hyperbolic plane $\mathcal{H}$ as their universal covering and therefore they are orbit spaces $\mathcal{H}/\Gamma$ of $\mathcal{H}$ under the action of a Fuchsian group Γ. This endows the surface $\mathcal{H}/\Gamma$ with an analytic structure and yields the concept of Riemann surface. It follows from the positive answer to the Nielsen realization problem, see [25], that *finite groups acting on surfaces can be seen as groups of analytic automorphisms of Riemann surfaces.*

There is a vast literature on the study of groups of automorphisms of Riemann surfaces, see for instance the introductory chapter in [9] or the recent survey [7]. Much effort has been devoted to find lists of non-isomorphic abstract groups acting on prescribed families of surfaces. The problem we deal with here, that is, the classification of inequivalent topological group actions, is a finer classification since the same abstract group may act on the same surface in different topological ways.

There are important motivations for classifying topological group actions rather than just the groups. One of them is the existence of a one-to-one correspondence between equivalence classes of group actions on a surface and conjugacy classes of

Both authors partially supported by MTM2011-23092.

finite subgroups of the *mapping class group,* that is the group of homotopy classes of homeomorphisms of the surface. Therefore, the topological classification gives a better understanding of the structure of such group. Another motivation comes from the study of the stratification that topological actions of finite groups induce in the moduli space $\mathcal{M}_g$ of Riemann surfaces of genus g. The singular locus of this moduli space consists, if $g > 2$, of the classes of Riemann surfaces with non-trivial automorphism group. This locus can be decomposed into a finite union of irreducible subvarieties, each of which is characterized by a topological action of a finite group. Thus, the study of groups of automorphisms of surfaces and also of their different topological actions, is necessary for the study of the singular locus of this moduli space. The interested reader may consult the papers [5, 41, 43], among others, for a deep understanding of the natural stratification of $\mathcal{M}_g$.

2. Preliminaries

Let S be a surface and let $\mathrm{Hom}(S)$ be the group of its orientation-preserving homeomorphisms. An (effective) *action* of a finite group G on S is defined to be an injective homomorphism $\varepsilon : G \to \mathrm{Hom}(S)$. We consider here three different notions of topological equivalence between group actions.

Definitions 2.1. Two actions $\varepsilon_1 : G \to \mathrm{Hom}(S_1)$ and $\varepsilon_2 : G \to \mathrm{Hom}(S_2)$ of the same abstract group G are *weakly topologically equivalent* if there exist an automorphism $\beta : G \to G$ and a homeomorphism $h : S_1 \to S_2$ such that

$$\varepsilon_2(x) = h\varepsilon_1(\beta(x))h^{-1} \quad \text{for all } x \in G.$$

If the automorphism β is replaced by the identity then we get the notion of *strongly topologically equivalent* actions. If the actions $\varepsilon_i(G)$ yield isomorphic quotient orbifolds $S_i/\varepsilon_i(G)$ then the actions are said to be *q-equivalent.*

Obviously, strong topological equivalence implies weak topological equivalence which in turn implies q-equivalence.

A natural tool to study finite groups acting on surfaces is the theory of Fuchsian groups. The reason is that every such action may be obtained by means of a pair of Fuchsian groups Γ and Λ with Γ a normal subgroup of finite index in Λ. For a general background on the theory of Fuchsian groups, the reader may consult [29, 22] or Chapters 0 and 1 in [9], among others. We briefly introduce in this section the main ideas and results to be used in the sequel.

The upper half plane $\mathcal{H}$ endowed with the Poincaré metric is a model for the hyperbolic plane. By a Fuchsian group we mean a discrete subgroup Λ of the group $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ of orientation preserving isometries of $\mathcal{H}$ such that the quotient space $\mathcal{H}/\Lambda$ is compact. The *signature* $\sigma(\Lambda)$ of a Fuchsian group Λ is a collection of non-negative integers of the form

$$\sigma(\Lambda) = (g; m_1, \ldots, m_r) \tag{1}$$

which collects algebraic and topological features of Λ. The quotient space $\mathcal{H}/\Lambda$ is an orientable hyperbolic orbifold with underlying surface of topological genus g, which is called the *orbit genus* of Λ. The integers $m_1, \ldots, m_r$ are called *periods*, and they are

the orders of the cone points in $\mathcal{H}/\Lambda$ under the projection $\mathcal{H} \to \mathcal{H}/\Lambda$. When there is no period we simply write $\sigma(\Lambda) = (g; -)$.

The signature $\sigma(\Lambda)$ provides a presentation of Λ by means of generators and defining relations as follows:

- Generators: $x_1, \ldots, x_r$ (elliptic isometries); $a_1, b_1, \ldots, a_g, b_g$ (hyperbolic isometries).
- Defining relations: $x_1^{m_1} = \cdots = x_r^{m_r} = x_1 \ldots x_r a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \ldots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} = 1$.

The area $\mu(\Lambda)$ of a fundamental region for a Fuchsian group Λ with signature (1) is

$$\mu(\Lambda) = 2\pi \left(2g - 2 + \sum_{i=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{m_i} \right) \right).$$

If Λ' is a subgroup of finite index of Λ then Λ' is also a Fuchsian group, and its area is given by the so called *Riemann-Hurwitz formula*:

$$\mu(\Lambda') = [\Lambda : \Lambda'] \cdot \mu(\Lambda).$$

A torsion free Fuchsian group is called a *surface Fuchsian group*, its signature being $(g; -)$. Observe that if Γ is such a group then the quotient $\mathcal{H}/\Gamma$ is a compact surface of genus g. It follows from the Uniformization Theorem that any surface S of genus $g \geq 2$ is of the form $\mathcal{H}/\Gamma$ for some surface Fuchsian group Γ.

An important fact in the study of finite group actions is that, given a surface S so represented, a finite group G acts on S if and only if there exist a Fuchsian group Λ and an epimorphism from Λ onto G with Γ as its kernel. All finite group actions on surfaces arise in this way. An epimorphism whose kernel is a surface Fuchsian group is called a *smooth epimorphism*. Consequently, we may study finite group actions by means of smooth epimorphisms. The weak topological equivalence relation between group actions can be translated into an (algebraic) equivalence relation between smooth epimorphisms as follows.

Let $\varepsilon_1 : G \to \mathrm{Hom}(S_1)$ and $\varepsilon_2 : G \to \mathrm{Hom}(S_2)$ be two actions of the finite group G and let $\theta_i : \Lambda_i \to G$ be the smooth epimorphism associated to ε_i for $i = 1, 2$. Assume that ε_1 and ε_2 are weakly topologically equivalent. Then there exist an automorphism $\beta : G \to G$ and a homeomorphism $h : S_1 \to S_2$ such that $\varepsilon_2(x) = h\varepsilon_1(\beta(x))h^{-1}$ for all $x \in G$. Let $h^* : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ be a lift of h to the universal covering of S_1 and S_2. Then h^* satisfies $h^*\Lambda_1(h^*)^{-1} = \Lambda_2$ and so it induces an isomorphism $\alpha : \Lambda_1 \to \Lambda_2$ given by

$$\alpha(\lambda_1) = h^*\lambda_1(h^*)^{-1} \quad \text{for all } \lambda_1 \in \Lambda_1.$$

It follows that the diagram

$$\begin{array}{ccc} & \overset{\theta_1}{} & \\ \Lambda_1 & \longrightarrow & G \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \beta \\ \Lambda_2 & \longrightarrow & G \\ & \underset{\theta_2}{} & \end{array}$$

commutes, that is, $\beta\theta_1 = \theta_2\alpha$.

Conversely, assume now that there exist an isomorphism $\alpha : \Lambda_1 \to \Lambda_2$ and an automorphism $\beta : G \to G$ such that the above diagram commutes. Then the group actions constructed by means of the smooth epimorphisms θ_1 and θ_2 are weakly topologically equivalent. This is a consequence of the fact every isomorphism α between Fuchsian groups can be realised geometrically, see [29], that is, there exists a homeomorphism $h^* : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ such that $\alpha(\lambda_1) = h^*\lambda_1(h^*)^{-1}$. Thus we have the following algebraic translation of weak topological equivalence of actions.

Proposition 2.2. *Let $\varepsilon_i : G \to \mathrm{Hom}(S_i)$ be a finite group action and $\theta_i : \Lambda_i \to G$ the corresponding smooth epimorphism, for $i = 1, 2$. The group actions ε_1 and ε_2 are weakly topologically equivalent if and only if there exist an isomorphism $\alpha : \Lambda_1 \to \Lambda_2$ and an automorphism $\beta : G \to G$ such that $\beta\theta_1 = \theta_2\alpha$.*

Since any smooth epimorphism $\theta : \Lambda \to G$ with kernel Γ is equivalent to the natural epimorphism $\Lambda \to \Lambda/\Gamma$, it is easier to say that two actions $\theta_1 : \Lambda_1 \to G$ and $\theta_2 : \Lambda_2 \to G$ are equivalent if there exists an isomorphism $\alpha : \Lambda_1 \to \Lambda_2$ such that $(\ker\theta_1)^\alpha = \ker\theta_2$. Accordingly, finding inequivalent actions associated with a given Fuchsian group Λ is the same as finding normal subgroups (of finite index) in Λ up to conjugacy within $\mathrm{Aut}\,\Lambda$ (the automorphism group of Λ), and hence within $\mathrm{Out}\,\Lambda = \mathrm{Aut}\,\Lambda/\mathrm{Inn}\,\Lambda$ (the outer automorphism group of Λ).

Using this algebraic characterization, the different weak topological equivalence classes can be specified by three data: a presentation of G, the signature of the group Λ, and a *generating vector* for G. The latter is a generating set of elements of G which consists of the images of the canonical generators of Λ under a smooth epimorphism.

3. Actions of prescribed families of groups

The first attempts to classify weakly topologically group actions are given by Nielsen, who considers cyclic actions. Let u be a generator of a cyclic group, say of order n, acting on a compact surface S and let $z \in S$ be a point fixed by u. Then, locally, u acts as a rotation by a multiple of $2\pi/n$ about z. Such multiples are called rotation numbers, and they are determined by u up to a constant coprime with n (since changing u by u^t multiplies the rotation numbers by t). In [33] Nielsen classifies cyclic actions with a fixed number of fixed points and quotient surface of fixed genus in terms of rotation numbers.

Nielsen's results have been extended in several directions. Lloyd in [28] gives a generating function to count the number of weak topological equivalence classes of cyclic actions of prime power order with quotient surface of genus zero. Generating functions for finite actions on surfaces are also carefully studied by Maclachlan and Miller in [31]. For each of the three equivalence relations given in Definitions 2.1, Maclachlan and Miller determine several properties of the generating function $\sum_{g\geq 0} N_g z^g$ where N_g is the number of appropriate equivalence classes of actions of G on S. For instance, the generating function is rational for q-equivalence. For strong topological equivalence, they restrict to abelian actions and obtain the deepest results when the group is cyclic.

Free abelian actions up to strong topological equivalence have also been considered by several authors. Smith in [35] pays special attention to $(\mathrm{Z}_p)^r$-actions with p prime,

and shows that in this case the equivalence classes are in one-to-one correspondence with the equivalence classes of certain matrices over Z_p under certain operations on the columns. Edmonds in [15] gives a complete classification of the free actions of an abelian group G by an invariant in an oriented G-bordism group (which can be identified with the second homology group $\mathrm{H}_2(G)$). There is an injective map between the set of classes of such actions and $\mathrm{H}_2(G)$. The author also shows that if the action of the abelian group G is not free then there exists an induced free action such that the equivalence class of G is determined by two invariants, one being the free cobordism class of the induced free action and the other being the fixed point data of G.

Using the language of regular G-coverings, results of Smith are generalized to arbitrary abelian p-groups by Jassim in [23]. The problem of enumerating topological equivalence classes of free abelian actions is reduced to the case of p-primary groups, and then solved completely for groups of the form $(\mathrm{Z}_{p^k})^r$.

The injective map described by Edmonds in [15] is also surjective if the rank m of G is not bigger than the genus γ of the quotient surface S/G. This is no longer true if $m > \gamma$, and a natural question is to characterize the image of the map for these values. This problem is addressed by Jassim in [24], where the case of $G = (\mathrm{Z}_p)^m$ is solved. It is also worth mentioning that for non-abelian groups G, Livingston [27] and Zimmermann [44] study independently the relation between $\mathrm{H}_2(G)$ and the stable equivalence classes of G-actions on surfaces.

Abelian groups are also considered by Costa and Natanzon in [13] where, using covering space theory, the authors classify Z_p^m-actions up to both strong and weak topological equivalence. The main idea of their work is the fact that a fixed point-free action of Z_p^m provides an alternating bilinear form on Z_p^m. They first show, refining the results by Smith in [35], that two such actions are strongly topologically equivalent if and only if the induced alternating bilinear forms are the same. The results are then extended to the case of actions with fixed points. The same authors consider the more general case of $\mathrm{Z}_{p^k}^m$-actions in [14]. Again they classify such actions up to both strong and weak topological equivalence and show, for instance, that the classes of strong equivalence are in one-to-one correspondence with symplectic forms on $\mathrm{Z}_{p^k}^m$.

Non-abelian actions have been considered by Edmonds in [16], where he first shows that the inequivalent strong topological free actions of a non-abelian split metacyclic group G are in a one-to-one correspondence with the second homology group $\mathrm{H}_2(G)$. He then deals with weak topological equivalence and obtains a classification of "indecomposable" non-free actions in terms of fixed point data, both for split metacyclic groups and for the groups $\mathrm{SL}_2(F_q)$.

4. Actions on prescribed families of surfaces

Instead of fixing a type of groups and classify topologically their actions, another point of view can be considered. One can fix a family of surfaces and classify all group actions on such surfaces. This is the approach adopted by Macbeath in [30] and Broughton in [6]. In [30] the author describes an algorithm which determines all weakly topologically inequivalent group actions on surfaces of genus g not bigger than a given integer $n \geq 2$. The algorithm looks for all pair of cocompact Fuchsian groups (Λ, K) where K is a surface normal subgroup of Λ whose orbit genus does not exceed n. The goal is to construct all possible terms that can arise in a chief series

for a finite group acting on a surface of genus bounded by n.

Broughton in [6] considers the problem of finding all weakly topologically inequivalent finite group actions on surfaces of low genus. He translates the topological problem to an algebraic one in the sense of Proposition 2.2. Analyzing in detail the automorphism group of some Fuchsian groups with orbit genus $\gamma = 0$ or 1, the complete classification of finite group actions on surfaces of genus 2 and 3 is achieved. For instance, there are 18 non-isomorphic groups acting in 20 topologically inequivalent ways on surfaces of genus 2, the (abstract) cyclic groups C_2 and C_6 acting in two inequivalent ways each one. Inequivalence in these two cases is easy to prove since for either $G = \mathrm{C}_2$ or C_6, the branching data of the two normal covers $S_i \to S_i/\varepsilon_i(G)$ are different for the two actions $\varepsilon_1(G)$ and $\varepsilon_2(G)$. In other words, the two actions $\varepsilon_i(G)$ are not q-equivalent (see Definitions 2.1). However, inequivalence is more difficult to prove in other cases, as it happens for the three different actions of the abelian group $\mathrm{C}_2 \times \mathrm{C}_4$ in genus 3. Here the branching datum of $S_i \to S_i/\varepsilon_i(G)$ is $(0; 2, 2, 4, 4)$ for $i = 1, 2$ and 3. In other words, the three actions are q-equivalent but they turn out to be pairwise weakly topologically inequivalent. It must be pointed out that there is a group of order 48 missing in Broughton's list, see [38].

Using also the theory of Fuchsian groups as applied by Broughton, Bogopolski in [4] classifies up to weak topological equivalence all group actions on surfaces of genus 4. In addition, Bogopolski also obtains a list of all the maximal finite groups which act in genus 4. The same problem was considered independently by Kimura in [26]. Here the author considers the weak topological equivalence between pairs (S, G) consisting of a compact Riemann surface S and a group G of automorphisms of S. The author shows that there exist seventy five topological equivalence classes in genus four. Each pair (S, G) induces a matrix representation $\rho : G \to \mathrm{GL}(g, \mathbb{C})$ given by the action of G on the space of all holomorphic 1-forms of S. If $(S_1, G_1) \sim (S_2, G_2)$ then ρ_1 is equivalent to ρ_2 and hence the topological equivalence class $[(S, G)]$ of (S, G) determines the equivalence class $[\rho]$ of ρ. The map $[(S, G)] \to [\rho]$ is injective for $g = 2$ and 3; this is not so for $g = 4$, as the author shows in [26] as a by-product of his results.

Other families of surfaces not characterized topologically (by the genus) but by the existence of a particular automorphism can also be considered. The most general concept here is (n, m)-gonality: a surface S is called (n, m)-gonal if it admits an automorphism ρ of order m such that the quotient surface $S/\langle\rho\rangle$ has genus n. The smallest non-trivial values of m (namely, $m = 2$) or n (namely, $n = 0$) are of special interest.

When $m = 2$ the surface is said to be n-hyperelliptic. The classical hyperelliptic surfaces are therefore 0-hyperelliptic, and the 1-hyperelliptic ones are also known as elliptic-hyperelliptic surfaces. On the other hand, when $n = 0$, that is, when $S/\langle\rho\rangle$ is the Riemann sphere, the surface is said to be cyclic m-gonal.

Inequivalent topological group actions on m-hyperelliptic surfaces are carefully studied by Tyszkowska in a series of papers. Special attention is paid to surfaces S of genus $g > 4m+1$ since this condition on the genus guarantees that an m-hyperelliptic involution ρ is unique and therefore central in the full group $\mathrm{Aut}(S)$ of automorphisms of S. Tyszkowska determines the weak topological equivalence classes of finite group actions on 1- and 2-hyperelliptic surfaces in [36] and [37], respectively. A throughout study of 0-hyperelliptic surfaces has been previously done by Weaver in [42].

Analogous results are obtained by Tyszkowska for pq-hyperelliptic surfaces in [38]; a surface S is pq-hyperelliptic if it is simultaneously p- and q-hyperelliptic. Tyszkoswska also considers surfaces which are simultaneously p-hyperelliptic and (q,n)-gonal with n prime, and whose p-hyperelliptic involution and (q,n)-gonal automorphism commute, [39]. She classifies topologically inequivalent group actions on surfaces of this type, for some values of p, q and n. The last family of surfaces that Tyszkowska has dealt with up to now is the family of cyclic p-gonal surfaces with p an odd prime, [40]. She classifies inequivalent group actions on cyclic p-gonal surfaces of genus $g > (p-1)^2$ and determines which of them can be maximal. The inequality implies, by the classical Castelnuovo-Severi theorem, that the group generated by a p-gonal automorphism is unique.

As said in the Introduction, topological actions of finite groups induce a stratification in the moduli space $\mathcal{M}_g$ of compact Riemann surfaces of genus g, see for instance [41, Section5]. Let G be a finite group of orientation preserving homeomorphisms of a surface of genus g and let $\mathcal{M}_g^{[G]}$ be the subset of $\mathcal{M}_g$ consisting of all classes of surfaces with a group G_1 of holomorphic homeomorphisms of the same topological type as G. The set $\mathcal{M}_g^{[G]}$ is an irreducible subvariety of $\mathcal{M}_g$ and it is determined by an equivalence class of smooth epimorphisms from a Fuchsian group Λ onto G. This has been studied in recent years. Ries in [34] examines the singularity of $\mathcal{M}_g$ along this subset through the knowledge of the full automorphism group of a generic surface in $\mathcal{M}_g^{[G]}$. Let $\mathcal{M}_g^G$ be the subvariety of $\mathcal{M}_g$ consisting of all Riemann surfaces of genus g whose automorphism group contains a subgroup isomorphic to G. Ries shows that the irreducible components of $\mathcal{M}_g^G$ do not necessarily correspond to the irreducible subvarieties $\mathcal{M}_g^{[G]}$ and so the former may not be in one-to-one correspondence with the topological actions of G.

The singular locus $\mathcal{S}_g$ of the moduli space $\mathcal{M}_g$ consists of the classes of surfaces with non-trivial automorphism group. The hyperelliptic surfaces constitute a connected subvariety $\mathcal{H}_g$ of $\mathcal{S}_g$ of dimension $2g-1$. A detailed description of the stratification of $\mathcal{H}_g$ is given by Weaver in [42]. The author decomposes $\mathcal{H}_g$ into a lattice of nondisjoint subvarieties corresponding precisely with the lattice of maximal g-hyperelliptic group actions, classified up to weak topological equivalence.

The case of genus $g = 4$ is carefully studied by Costa and Izquierdo in [11]. Using Fuchsian groups they determine the 41 equisymmetric strata of the singular locus of the moduli space $\mathcal{M}_4$ of Riemann surfaces of genus 4. Two surfaces of genus g are equisymmetric if their automorphism groups determine conjugate finite subgroups of the mapping class group in genus g. Therefore, equisymmetric strata in the singular locus of $\mathcal{M}_g$ are in one-to-one correspondence with weak topological equivalence classes of finite group actions on surfaces of genus g. This extends the results by Bogopoloski [4] and Kimura [26]. The description of the equisymmetric strata is used by the same authors in [12] to show the connectedness of the branch locus of the moduli space $\mathcal{M}_4$. Working with classes of surfaces admitting an automorphism of prime order with quotient surface of fixed genus, the authors exhibit sufficient intersections and inclusions among different strata to show that the branch locus of $\mathcal{M}_4$ is connected.

The same idea has been successfully applied by Bartolini and Izquierdo in [3] to other moduli spaces of low genus. Studying first the strata of surfaces with auto-

morphisms of order 2 and 3, they then show that the branch loci of $\mathcal{M}_5$ and $\mathcal{M}_6$ are connected with the exception of one isolated point in each, the branch locus of $\mathcal{M}_7$ is connected, and the branch locus of $\mathcal{M}_8$ is connected with the exception of two isolated points. The reader interested in this topic is referred to the survey [2].

The relation between strong topological equivalence and conformal equivalence of group actions have also received a good deal of attention. It is clear that conformal conjugacy implies topological conjugacy but the converse is not true. Let G_0 be an abstract finite group and let $G = \varepsilon(G_0)$ be an action of G_0 on a surface S of genus g. Let $\mathcal{M}_g(G)$ be the locus in $\mathcal{M}_g$ consisting of classes of surfaces S' which admit a group action $G' = \varepsilon'(G_0)$ such that there is a homeomorphism $h : S \to S'$ with $G' = h \circ G \circ h^{-1}$. It is known, see [19] that $\mathcal{M}_g(G)$ is an irreducible subvariety of $\mathcal{M}_g$ which fails to be normal if and only if there is a Riemann surface S' of genus g admitting two group actions G_1 and G_2 which are topologically conjugate to G but not conformally conjugate to each other.

It is shown by González-Díez in [18] that two cyclic groups H_1, H_2 of the same prime order and with quotient S/H_i of genus zero are always conformally conjugate, see also the paper by Gromadzki [21] for a generalization. This means that in this situation topological conjugacy implies conformal conjugacy and so $\mathcal{M}_g(H)$ is normal. The primality of the order of the cyclic group is a necessary condition as González-Díez and Hidalgo show in [20]. In this paper they exhibit, by means of algebraic equations, a family of Riemann surfaces of genus 9 admitting two automorphisms f_1 and f_2 or order 8 such that the groups $\langle f_1 \rangle$ and $\langle f_2 \rangle$ are topologically conjugate but not conformally conjugate, except for a finite number of exceptional surfaces. Therefore the subvariety $\mathcal{M}_9(\langle f_1 \rangle)$ is not normal.

Classical results concerning topological conjugacy of cyclic automorphism groups by purely algebraic means are found in [32], [22] and [17]. Less results are known for non-cyclic actions. In [10] the author gives an explicit description of a subvariety of $\mathcal{M}_3$ characterized by a non-cyclic action chosen so that the subvariety is non-normal. As in [20], interest is put on algebraic equations and, accordingly, defining equations of a one dimensional family of curves representing non-normal points of this subvariety are computed.

5. Generalizations to other types of actions and surfaces

To finish, let us briefly mention two important fields of research which arise as natural generalizations of the results mentioned here. First, one can consider the group $\mathrm{Hom}^{\pm}(S)$ of all homeomorphisms of an oriented surface S, including those which reverse its orientation, and classify group actions $\varepsilon : G \to \mathrm{Hom}^{\pm}(S)$ up to topological equivalence. On the other hand, the definition of surface can be modified to include non-orientable surfaces and also surfaces (orientable or non-orientable) with boundary. When endowed with a dianalytic structure, these surfaces are known as *Klein surfaces,* see [1]. Under this point of view, classical Riemann surfaces may be seen as a particular type of Klein surfaces, namely, those which are orientable and without boundary. The theory of Fuchsian groups has to be broadened to the theory of non-euclidean crystallographic groups, see [9, 8] and the references given there.

References

[1] N. L. Alling, N. Greenleaf, *Foundations of the Theory of Klein Surfaces,* Lecture Notes in Math., 219, Springer-Verlag, 1971.

[2] G. Bartolini, A. F. Costa, M. Izquierdo, *On the connectedness of the branch locus of the moduli space of Riemann surfaces.* Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat. Ser. A Math. RACSAM **104**, (2010), no. 1, 81–86.

[3] G. Bartolini, M. Izquierdo, *On the connectedness of the branch locus of the moduli space of Riemann surfaces of low genus.* Proc. Amer. Math. Soc. **140** (2012), no. 1, 35–45.

[4] O. V. Bogopolski, *Classifying the actions of finite groups on orientable surfaces of genus* 4*,* Siberian Adv. Math. **7**, (1997), no. 4, 9–38.

[5] S. A. Broughton, *The equisymmetric stratification of the moduli space and the Krull dimension of mapping class groups.* Topology Appl. **37** (1990), no. 2, 101–113.

[6] S. A. Broughton, *Classifying finite group actions on surfaces of low genus,* J. Pure Appl. Algebra **69**, (1991), 233-270.

[7] E. Bujalance, F. J. Cirre, G. Gromadzki, *A survey of research inspired by Harvey's theorem on cyclic groups of automorphisms,* Geometry of Riemann surfaces, 15–37, London Math. Soc. Lecture Note Ser. 368, Cambridge Univ. Press, 2010.

[8] E. Bujalance, F. J. Cirre, J. J. Etayo, G. Gromadzki, E. Martínez. *A survey on the minimum genus and maximum order problems for bordered Klein surfaces*, Groups St Andrews 2009 in Bath, Vol. 1, pp. 161–182. London Math. Soc. Lecture Note Ser. 387, Cambridge Univ. Press, 2011.

[9] E. Bujalance, J. Etayo, J. M. Gamboa and G. Gromadzki, *Automorphism groups of compact bordered Klein surfaces*, Lecture Notes in Maths. 1439, Springer Verlag, Berlin 1990.

[10] F. J. Cirre, *On a subvariety of the moduli space.* Rev. Mat. Iberoamericana **20** (2004), no. 3, 953–960.

[11] A. F. Costa, M. Izquierdo, *Equisymmetric strata of the singular locus of the moduli space of Riemann surfaces of genus* 4. Geometry of Riemann surfaces, 120–138, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 368, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2010.

[12] A. F. Costa, M. Izquierdo, *On the connectedness of the branch locus of the moduli space of Riemann surfaces of genus* 4. Glasg. Math. J. **52** (2010), no. 2, 401–408.

[13] A. F. Costa, S. M. Natanzon, *Topological classification of* Z_p^m *actions on surfaces.* Michigan Math. J. **50** (2002), no. 3, 451–460. Addendum: *Topological classification of* Z_p^m *actions on surfaces.* Michigan Math. J. **51** (2003), no. 2, 448.

[14] A. F. Costa, S. M. Natanzon, *Classification of* $\mathrm{Z}_{p^k}^m$ *orientation preserving actions on surfaces.* Mosc. Math. J. **7** (2007), no. 3, 419–424, 574.

[15] A. L. Edmonds, *Surface symmetry I*, Michigan Math. J. **29** (1982), no. 2, 171–183.

[16] A. L. Edmonds, *Surface symmetry II,* Michigan Math. J. **30** (1983), no. 2, 143–154.

[17] J. Gilman, *On conjugacy classes in the Teichmuller modular group.* Michigan Math. J. **23** (1976) 53–63.

[18] G. González-Díez, *On prime Galois coverings of the Riemann sphere.* Ann. Mat. Pura Appl. (4) **168** (1995), 1–15.

[19] G. González-Díez, W. J. Harvey, *Moduli of Riemann surfaces with symmetry.* Discrete groups and geometry (Birmingham, 1991), 75–93, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 173, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1992.

[20] G. González-Díez, R. Hidalgo, *Conformal versus topological conjugacy of automorphisms on compact Riemann surfaces.* Bull. London Math. Soc. **29** (1997), no. 3, 280–284.

[21] G. Gromadzki, *On the number of p-gonal coverings of Riemann surfaces.* Rocky Mountain J. Math. **40**, (2010), no. 4, 1221–1226.

[22] W. J. Harvey, *On branch loci in Teichmüller space.* Trans. Amer. Math. Soc. **153** (1971), 387–399.

[23] S. A. Jassim, *Finite abelian surface coverings,* Glasgow Math. J. **25** (1984), no. 2, 207–218.

[24] S. A. Jassim, *Finite abelian actions on surfaces,* Glasgow Math. J. **35** (1993), no. 2, 225–234.

[25] S. P. Kerckhoff, *The Nielsen realization problem.* Ann. of Math. (2) **117** (1983), no. 2, 235–265.

[26] H. Kimura, *Classification of automorphism groups, up to topological equivalence, of compact Riemann surfaces of genus* 4, J. Algebra **264** (2003), no. 1, 26–54.

[27] C. Livingston, *Inequivalent, bordant group actions on a surface,* Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **99** (1986), no. 2, 233–238.

[28] E. K. Lloyd, *Riemann surface transformation groups,* J. Combinatorial Theory Ser. A **13** (1972), 17–27.

[29] A. M. Macbeath, *The classification of non-euclidean plane crystallographic groups*, Canad. J. Math., **19**, (1967), 1192–1205.

[30] A. M. Macbeath, *Automorphisms of Riemann surfaces.* Combinatorial group theory (College Park, MD, 1988), 107–112, Contemp. Math., **109**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1990.

[31] C. Maclachlan, A. Miller, *Generating functions for finite group actions on surfaces*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **124** (1998), no. 1, 21–49.

[32] J. Nielsen, *Untersuchungen zur Topologie der geschlossenen zweisetigen Flachen.* Acta Math., **50**, (1927), 264–275.

[33] J. Nielsen, *Die Struktur periodischer Transformationen von Flächen,* Danske Vid. Selsk. Mat.-Fys. Medd., **15**, (1937), 1–77.

[34] J. F. X. Ries, *Subvarieties of moduli space determined by finite groups acting on surfaces,* Trans. Amer. Math. Soc., **335**, (1993), no. 1, 385–406.

[35] P. A. Smith, *Abelian actions on* 2*-manifolds,* Michigan Math. J. **14** (1967) 257–275.

[36] E. Tyszkowska, *Topological classification of conformal actions on elliptic-hyperelliptic Riemann surfaces,* J. Algebra, **288**, (2005), no. 2, 345–363.

[37] E. Tyszkowska, *Topological classification of conformal actions on* 2*-hyperelliptic Riemann surfaces,* Bull. Inst. Math. Acad. Sinica, **33**, (2005), no. 4, 345–368.

[38] E. Tyszkowska, *Topological classification of conformal actions on pq-hyperelliptic Riemann surfaces,* Int. J. Math. Math. Sci., (2007), Art. ID 47839, 29 pp.

[39] E. Tyszkowska, *Topological classification of conformal actions on p-hyperelliptic and* (q, n)*-gonal Riemann surfaces.* Opuscula Math. **29** (2009), no. 4, 443–452.

[40] E. Tyszkowska, *Topological classification of conformal actions on cyclic p-gonal Riemann surfaces.* J. Algebra **344** (2011), 296–312.

[41] A. Weaver, *Automorphisms of surfaces,* Combinatorial and geometric group theory, 257–275, Contemp. Math., **296**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002.

[42] A. Weaver, *Hyperelliptic surfaces and their moduli,* Geom. Dedicata, **103**, (2004), 69–87.

[43] A. Weaver, *Stratifying the space of moduli,* Teichmüller theory and moduli problem, 597–618, Ramanujan Math. Soc. Lect. Notes Ser., 10, Ramanujan Math. Soc., Mysore, 2010.

[44] B. Zimmermann, *Surfaces and the second homology of a group.* Monatsh. Math. **104** (1987), no. 3, 247–253.

Disonancia, escalas y Matemáticas

Marco Castrillón López y Manuel Domínguez

Dept. Geometría y Topología
Facultad de Ciencias Matemáticas
Universidad Complutense de Madrid
E-28040 Madrid, Spain
mcastri@mat.ucm.es

Dept. Matemática Aplicada
ETS Arquitectura
Universidad Politécnica de Madrid
E-28040 Madrid, Spain
mdrmanuel@gmail.com

Dedicado al profesor Juan Tarrés.

ABSTRACT

El objetivo de esta nota es el de dar una sencilla formulación matemática de algunos principios de la construcción de escalas musicales y de las leyes de la consonancia clásicas.

The goal of this article is to give a simple formulation of some aspects about the construction of musical scales and the classical laws of consonance.

Key words: Consonancia, escalas musicales, suma de armónicos.

2010 Mathematics Subject Classification: 00A65.

1. Introducción

Como la mayoría de las artes, la música contiene una maravillosa mezcla de subjetividad y de un deseo de escribir sus propias reglas objetivas. Del lado subjetivo, el refranero dice que hay tantas opiniones o gustos como personas y que una misma pieza musical puede despertar la mayor admiración o la peor crítica. La consonancia, como cualidad de los sonidos que al oírlos simultáneamente producen un efecto agradable, está sujeta a estas decisiones caprichosas. Sin embargo, la composición musical ha contado a lo largo de la historia con diversas y precisas reglas que aportan a la música un valor objetivo de peso. Así, si se tocan en un piano simultáneamente las notas Do y Do#, o Si y Do, la mayoría de los asistentes a este pobre concierto dirían que el sonido resultante es menos consonante que, por ejemplo, el par Do y Sol. Es por ello que la composición clásica occidental no incluía los primeros pares en sus obras o los reservaba a momentos en los que se quería despertar sentimientos encontrados en el oyente. Las Matemáticas, como inseparable compañera de viaje de la Música desde las construcciones de Pitágoras de Samos, han sido el lenguaje con el que se han descrito las leyes de la composición a lo largo de la historia. El objetivo de este trabajo es el de presentar algunos de los ingredientes de dicho acompañamiento, con especial énfasis en la modelización de los fenómenos que, apelando a sencillas propiedades matemáticas, permite dar explicación a la consonancia de los instrumentos de

cuerda o viento y, en particular, a la comparación de los pares de notas citados anteriormente. La música occidental, heredera de la música pitagórica, hunde sus raíces en la tradición de viento y cuerda de la cultura mediterránea. La modelización que se muestra permite pensar que nuestra música hubiera sido muy distinta si Pitágoras hubiese trabajado fundamentalmente con instrumentos de percusión.

2. Nociones fundamentales

2.1. Las escalas musicales

Un sonido es una variación de la presión del aire perceptible por nuestro sentido auditivo. Atendiendo a la naturaleza de la ecuación de ondas que modeliza el comportamiento del fluido aéreo, esta función presión es localmente (tanto en sentido espacial como temporal) en buena medida periódica. En un desarrollo de Fourier, podemos por tanto realizar una descomposición de dicha onda en sus frecuencias elementales. De las cuatro características fundamentales del sonido, a saber, la intensidad, el timbre (asociado a los coeficientes de Fourier de la onda), la duración y la altura (frecuencia de la contribución de Fourier dominante), vamos a atender fundamentalmente a la última, es decir, vamos a trabajar con tonos. Los sonidos producidos por los instrumentos musicales tiene una frecuencia fundamental (su timbre) muy definida. Más aun, algunos instrumentos y especialmente si trabajamos con instrumentos electrónicos, pueden producir sonidos sinusoidales prácticamente puros. Pensemos por un momento que trabajamos con estos sonidos puros.

Son pocos oídos afortunados los que pueden describir de forma exacta una frecuencia determinada. Sin embargo, sí es normal el poder distinguir, una vez que se tiene dos sonidos, cuál es más agudo (tiene un tono mayor) que el otro. Por ello, al hablarse de los tonos de un sonido, se suele hacer partiendo de una referencia. En la música occidental se suele escoger la frecuencia de 440 Hz (La) como frecuencia fundamental, aunque cualquier otra f_0 es igualmente válida. Igualmente, como se puede comprobar experimentalmente, a partir de una frecuencia aproximada de unos 500 Hz el oído aprecia las distancias entre dos tonos no por la diferencia de frecuencias sino por la razón entre las mismas (Ley de Weber-Fechner para el oído). Eso quiere decir que dentro del espectro auditivo humano (20 Hz - 20.000 Hz), la percepción de los tonos menores de 500 Hz es lineal, pero a partir de ahí es logarítmica. Así se habla de razones (o intervalos) de frecuencia como una aplicación del conjunto de frecuencias $\mathcal{F}$ del cual podemos olvidar en qué unidades se mide, a la semirecta real como

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ f &\mapsto \frac{f}{f_0}. \end{aligned} \tag{1}$$

Se dice que dos tonos f_1 y f_2 están separados una *octava* si $f_2 = 2f_1$. Los sonidos separados por una o varias octavas son percibidos por el oído humano como prácticamente indistinguibles si son escuchados simultáneamente. Por esta razón, la aplicación

(1) se puede describir de forma más ajustada al oído humano como

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\mapsto \log_2 \frac{f}{f_0} \end{aligned}$$

que además podemos simplificar si consideramos la relación de equivalencia $\mathcal{R}$ "estar separado por una octava" de forma que la proyección al conjunto cociente es

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &\longrightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z} \\ f &\mapsto \left(\log_2 \frac{f}{f_0}\right)_{\mathcal{R}} \end{aligned} \tag{2}$$

donde $(x)_{\mathcal{R}}$ es la clase de x. Si identificamos $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ con el intervalo $[0,1)$, entonces $(x)_{\mathcal{R}}$ no es más que $\{x\}$, es decir, tomar la parte fraccionaria de x. Si en cambio identificamos $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ con la circunferencia unidad S^1 de complejos unitarios, la aplicación queda por tanto definida como

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &\longrightarrow S^1 \\ f &\mapsto \exp\left(i2\pi \left\{\log_2 \frac{f}{f_0}\right\}\right), \end{aligned} \tag{3}$$

es decir, el análisis de tonos puede analizarse de forma geométrica como puntos de la circunferencia.

De los infinitos elementos de S^1 con las que un compositor puede trabajar a la hora de elegir los tonos que formen parte de su obra, se suele tomar tonos que formen parte de un subconjunto discreto (y por tanto finito) de S^1 elegido de antemano. Estos subconjuntos se denominan *escalas*, y el cómo elegirlos constituye toda una disciplina musical que ha vivido a lo largo de los siglos múltiples interpretaciones y teorías. Vamos, sin embargo, a centrarnos en la construcción de la escala de la escuela de Pitágoras. Si, como hemos dicho antes, las potencias de dos (las octavas) definen sonidos de naturaleza similar, parece natural estudiar que sucede cuando se toman potencias del siguiente número natural, es decir, el tres. Así, partiendo de la nota fundamental f_0 que hayamos escogido, se toma el conjunto $(3^k f_0)_{k\in\mathbb{Z}}$. La imagen de estos puntos por medio de las aplicaciones (2) o (3) representan un conjunto denso de $[0,1)$ o S^1. Si consideramos las K primeras notas $\{\log_2 3^k\}$, $k = 0, ..., K-1$, partiendo de 0, dado que 2 y 3 son primos entre sí, nunca podremos volver a ese valor inicial. Sin embargo hay valores concretos de K para los que nos acercamos mucho a 0. Este es el caso de 3^7. En efecto, tenemos

$$\begin{array}{lll} \left\{\log_2(3^0)\right\} = 0, & \left\{\log_2(3^1)\right\} = 0'5949..., & \left\{\log_2(3^2)\right\} = 0'1699..., \\ \left\{\log_2(3^3)\right\} = 0'7649..., & \left\{\log_2(3^4)\right\} = 0'3398..., & \left\{\log_2(3^5)\right\} = 0'9248..., \\ \left\{\log_2(3^6)\right\} = 0'5098..., & \left\{\log_2(3^7)\right\} = 0'0947..., & \end{array}$$

en el que el último elemento dista menos de una décima del 0. Si ahora consideramos las primeras 7 notas y los ordenados de menor a mayor obtenemos los números

$$0 \quad 0'1699... \quad 0'3398... \quad 0'5098... \quad 0'5949... \quad 0'7649... \quad 0'9248... \tag{4}$$

que son las 7 notas de la escala pitagórica, inicialmente etiquetadas con letras del alfabeto griego. Nótese que el valor $\{\log_2(3^1)\} = 0'5849...$ ocupa el quinto puesto en el reordenamiento dado en (4). Es por esta razón que la frecuencia asociada al número 3 con el que se ha construido esta escala es denominada *quinta* (o *quinta pitagórica*). Igualmente, el octavo valor de la escala corresponde (salvo la pequeña desviación comentada anteriormente y que se conoce como *coma pitagórica*) al 1 o 0 de $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ y que justifica que la potencia 2 se conozca como octava. Como nota histórica, hay que esperar hasta el siglo XI cuando, a partir de la música añadida por Guido de Arezzo a unos versos dedicados a San Juan Bautista, se asignó a las correspondientes notas la primera sílaba de dichos versos, a saber: *Ut, Re, Mi, Fa, Sol, La* y *Si*. La primera nota fue posteriormente cambiada a *Do*, apócope del *Dominus* latino.

2.2. El teorema de los tres pasos

Si inspeccionamos los valores de frecuencias ajustadas por los logaritmos dados en (4) podemos ver que las diferencias entre notas consecutivas (considerando la última diferencia con el valor 1) toman los valores

$$0 \quad 0'1699... \quad 0'1699... \quad 0'1699... \quad 0'0850... \quad 0'1699... \quad 0'1699... \quad 0'0850...$$

es decir, recordando que tomamos el tono inicial f_0 como el La (440 Hz), el intervalo entre dos notas consecutivas de la escala pitagórica toma un valor constante (un tono) salvo entre Si-Do y Mi-Fa en donde se tiene un valor distinto aproximadamente la mitad de un tono (y llamado hemitono). La existencia de dos tipos distintos de intervalos en la escala pitagórica es una propiedad esencial de la misma y es piedra angular de su riqueza musical. Sin embargo, al hilo de esta propiedad, cabe preguntarse si la elección de la quinta pitagórica ha sido determinante en la existencia de exactamente dos intervalos distintos. Esta cuestión está estrechamente relacionada con una conocida conjetura de Steinhaus (demostrada simultáneamente por Sós y Świerczkowski en 1958) que enunciamos a continuación (véase [8]).

Teorema 2.1 (de los tres pasos)**.** *Para cualquier $\theta \in \mathbb{R}^+$ y cualquier entero positivo K, la sucesión de puntos $\exp(2\pi k\theta i)$, $k = 0, \ldots, K-1$, divide la circunferencia unidad en subintervalos de, a lo sumo, tres longitudes distintas.*

En concreto, si $\theta = p/q$ es un número racional (escrito de forma irreducible) y $K \geq q$, tenemos exactamente un polígono regular y por tanto un único paso. Si θ es irracional, siempre habrá dos o más pasos. Ése es el caso de la escala pitagórica en donde $\theta = \log_2 3$. Para distinguir cuándo se tienen dos o tres pasos distintos hay que recurrir a la teoría de números de la mano de las fracciones simples. Recordemos que todo número real (positivo) θ se puede escribir como

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots}}}$$

en donde los a_i, $i \geq 1$ son enteros positivos. La secuencia $[a_0; a_1 a_2 a_3 ...]$ acaba con una división exacta únicamente si θ es racional. En caso contraro, la secuencia de θ es infinita y única. Se denomina *convergente* de θ al número racional que se obtiene

truncando su desarrollo en fracciones contínuas simples $[a_0; a_1 a_2 ... a_r]$ en cualquier orden r. Se denomina *semiconvergente* a la fracción $[a_0; a_1 a_2 ... n]$, $0 < n < a_r$ (si $a_r \geq 2$). Los convergentes y semiconvergentes gozan de propiedades muy interesantes. Referimos al clásico manual [3] para estas y otras muchas propiedades.

En relación con las escalas, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 2.2. *Dado un número θ irracional positivo, la sucesión de puntos* $\exp(2\pi k\theta i)$, $k = 0, \ldots, K-1$, *divide la circunferencia unidad en arcos de exactamente dos longitudes distintas si y sólo si K es el denominador de un convergente o de un semiconvergente de θ.*

Por ejemplo, para $\theta = \log_2 3 = [1; 1, 1, 2, 2...]$, el denominador del semiconvergente $[1; 1, 1, 2, 1]$ es precisamente 7, lo que nos da la escala pitagórica construida anteriormente.

2.3. Los instrumentos musicales

Consideremos una cuerda tensa de longitud L, densidad lineal λ y tensión (es decir, la fuerza que tira de la cuerda en cualquiera de sus extremos fijos) de valor T. Supongamos que la cuerda es considerada infinitesimalmente delgada, de tal manera que pueda ser modelizada como un segmento al cual se le aplica la ecuación de ondas unidimensional. Se puede probar entonces que la cuerda en vibración tiene una frecuencia fundamental de valor

$$f_1 = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{\lambda}} \tag{5}$$

que es acompañada por todos sus múltiplos $f_n = nf_1$, $n \in \mathbb{N}$. Estos valores f_n son conocidos como *armónicos* de la vibración de la cuerda y simplemente quieren decir que cualquier estado vibracional de la misma se puede escribir como suma infinita de vibraciones sinusoidales de frecuencia f_n, $n \in \mathbb{N}$. Aunque con la técnica adecuada puede conseguirse que, cuando se pulsa una cuerda de un instrumento, la misma vibre predominantemente con una frecuencia f_2 o f_3, lo general es que al tocar un instrumento de cuerda, el sonido predominante de cada cuerda sea el asociado a la vibración fundamental f_1. Sin embargo, dicho sonido contendrá contribuciones de los armónicos superiores f_n, $n > 1$, cuya aportación determina el timbre del instrumento. Como primera aproximación, se puede considerar que la intensidad de cada aportación f_n, $n > 1$, decrece geométricamente por un factor 0'7 a medida que crece n.

En el caso de una columna hueca de longitud L con un gas (ideal) en su interior, el sonido producido por la vibración de dicho gas tiene un comportamiento muy parecido. Se cuenta con una frecuencia fundamental

$$f_1 = \frac{c}{2L}, \tag{6}$$

siendo c la velocidad del sonido en ese gas, que es acompañada por sus múltiplos $f_n = nf_1$, $n > 1$, presentes en la descomposición de cualquier sonido.

Como se ve, el comportamiento de los instrumentos de cuerda y viento es a grandes rasgos bastante similar. Sin embargo la familia de percusión tiene características diferentes. Se puede acudir a monografías de organología o de acústica musical para

analizar más detalladamente el complejo análisis del tambor, la campana o el xilófono. Por ejemplo, la vibración de un paralelepípedo sólido (en particular, las láminas de un xilófono sencillo) contiene una frecuencia fundamental f_1 y los siguientes primeros armónicos

$$f_2 \simeq 2,75 f_1, \quad f_3 \simeq 5,40 f_1, \quad f_4 \simeq 8,93 f_1, \quad f_5 \simeq 13,34 f_1, ... \tag{7}$$

El lector interesado puede encontrará un excelente manual sobre la física de los instrumentos musicales en [5].

3. Algunos capítulos históricos de la consonancia musical

Es ingente la cantidad de trabajos y teorías alrededor de la armonía y la consonancia musical. Damos a continuación tres brevísimas pinceladas de algunos momentos de relevancia en dicho desarrollo desde un punto de vista matemático.

La construcción de la escala de 7 notas a partir de la tercera pitagórica forma parte de una entera concepción musical basada en los números naturales. La escuela de Pitágoras concedía al *número* un valor de marcado carácter ontológico en el cosmos. El número, como origen de toda explicación del mundo, era también la pieza fundamental de la perfecta composición musical y de las reglas que determinan el carácter consonante y disonante de varios sonidos coincidentes. Si bien se exploraban todas las familias de instrumentos, la tradición pitagórica escribía sus conclusiones generalmente por medio de experimentos de instrumentos de cuerda y de viento. Así, con dos cuerdas tensas de la misma tensión, la ley pitagórica de los números sencillos afirma que el sonido simultáneo de ambas resulta agradable (consonante) si las longitudes de las cuerdas están relacionadas por números naturales pequeños. Por ejemplo, una cuerda de longitud L y otra de longitud $L' = L/2$ suenan perfectamente consonantes. En efecto, las frecuencias fundamentales (véase (5)) son una el doble de la otra, es decir, el intervalo definido por ambas frecuencias es exactamente una octava. Si $L' = 2L/3$ o $L' = L/3$ estamos tratando con sonidos separados por una quinta o por una quinta más una octava. En el caso $L' = 3L/4$ tenemos la llamada *cuarta* (un intervalo de cuatro notas). Heredera de la cultura helénica, en la música occidental medieval (en particular, en la polifonía inicial, aproximadamente entre el 900 y el 1.300 d.C.) se consideraban consonantes únicamente los intervalos octava (2:1), quinta (3:2), cuarta (4:3), octava más quinta (3:1), octava más cuarta (8:3) y doble octava (4:1). Este conjunto de consonancias es aumentado con las terceras (4:5) y las sextas (3:5) en el contrapunto.

Galileo y Mersenne dan un primer avance matemático a la relación entre frecuencias, consonancia y la ley de los números pequeños de Pitágoras. En concreto Galileo afirma, dentro de su concepción matematizante de la Naturaleza, que si dos notas tienen sus frecuencias relacionadas por un entero pequeño, la onda resultante presentará una regularidad o simetría no presente para otras razones más complejas y tendrá, por tanto, más armonía. Es sin embargo Rameau quien primero pensó en la escala musical a partir de consideraciones vibracionales.

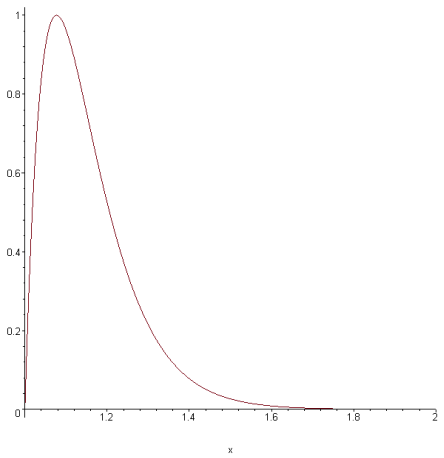
De cualquier manera hay que esperar al descubrimiento de la estructura de los armónicos (5) y (6) para poder elaborar teorías más elaboradas. En el siglo XIX, Helmholtz explota esa idea en dos direcciones. Primeramente, partiendo de la identidad trigonométrica

$$\operatorname{sen} f_1 + \operatorname{sen} f_2 = 2 \operatorname{sen}\left(\frac{f_1 + f_2}{2}\right) \cos\left(\frac{f_1 - f_2}{2}\right),$$

tenemos que el sonido resultante de la suma de dos frecuencias f_1 y f_2 tiene dos comportamientos periódicos acoplados, con frecuencias respecticas la semisuma y la semidiferencia de f_1 y f_2. Si nos centramos en la segunda, y atendiendo a la sensación del oído humano, ésta provoca unos pulsos lentos cuando f_1 o f_2 son próximos. Helmoltz afirmaba que alrededor de una diferencia de 30 ó 40 Hz se tenía la máxima sensación de desasosiego. A partir de ahí, esta sensación desaparece y se recupera la consonancia. En segundo lugar, Helmholtz aplicaba esta idea a las relaciones entre los distintos armónicos del instrumento con el que se tocase las correspondientes notas. De esta manera Helmholtz trazó unas curvas de "aspereza" que presenta unos mínimos precisamente en las notas construídas de la forma pitagórica.

4. La teoría de Plomp y Levelt

Parece ser que fueron los americanos Plomp y Levelt (véase [4]) quienes elaboraron el primer análisis experimental de consonancia y disonancia de ondas sinusoidales puras. A los sujetos del experimento se les hacía oir sonidos puros a distintas relaciones de frecuencias quienes tenían que además valorar el grado de consonancia y disonancia. Los datos así obtenidos promediados proporcionaron una curva similar a la siguiente



en donde el eje de ordenadas va de 0 (consonancia total) a 1 (disonancia total) y el de abscisas parametriza la razón entre las frecuencias f y f' confrontadas, es decir $f' = xf$. Esta aportación está relacionada con la idea de *banda crítica*, es decir la mínima banda de frecuencias alrededor de una frecuencia determinada que activan

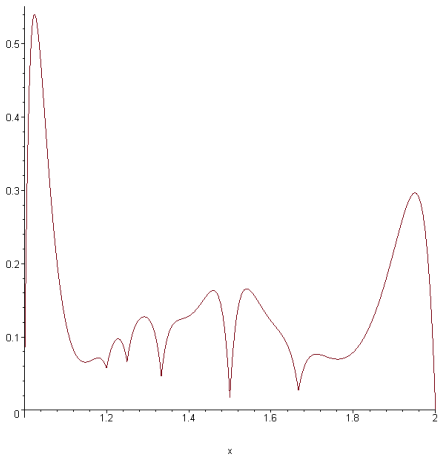
la misma zona de la membrana basilar en el caracol del oído. Podemos dar varias funciones que definan una gráfica con un perfil similar al anterior. Por ejemplo, en [1] se opta por la función

$$d(x) = a\,|x|\,e^{1-b|x|},$$

en donde a, b son constantes a ajustar y además asumimos un rango de frecuencias superior a 500 Hz para poder aplicar las relaciones de frecuencias por razones y no por diferencias (véase la siguiente sección para un estudio con el segundo caso). Como se puede ver, en esta curva no hay vestigio de las consonancias o disonancias de la construcción pitagórica. Parece que el oído humano (principalmente por el tipo de análisis de Fourier que elabora el órgano de Corti en el caracol), experimenta una sensación desagradable a cierto rango de frecuencias cercanas, mientras que fuera de ese rango (fuera ya de la banda crítica), cualquier par de frecuencias suena "bien". Sin embargo, los instrumentos emiten sonidos compuestos por armónicos, tal y como vimos en §2.3. En la línea sugerida por Hemlholtz, el trabajo de Plomp y Levelt analizó además el grado de consonancia o disonancia total de dos notas de un instrumento de viento o de cuerda sumando el valor de la función $D(x)$ en distintos armónicos de los sonidos confrontados. Es decir, se considera la función

$$D(x) = \sum_{n,n'=1}^{\infty} \nu_n \nu_{n'} d\left(\frac{n}{n'}x\right)$$

que estudia la disonancia de dos notas de frecuencias f_0 y $f = xf_0$, junto con todos sus armónicos, en donde ν_n es la amplitud (relativa) del n-ésimo armónico. Por simplicidad se puede limitar la suma a los primeros 6 armónicos y considerar, como se comentó en §2.3, que la intensidad relativa es $\rho_n = 0'7^n$, por lo que aproximadamente $\nu_n = 0'84^n$, para todo n. En ese caso se obtiene la gráfica



En ella observamos: que la consonancia es máxima (la gráfica tiene mínimo absoluto) para $x = 2$, es decir, notas separadas una octava. El siguiente valor de consonancia máxima (el siguiente mínimo de la gráfica) se da para $x = 3/2$, es decir, para una quinta pitagórica. Los siguientes mínimos locales (ordenados de mayor a menor consosnancia) están ubicados en los valores $x = 4/3$ (una cuarta), $x = 5/4$ (una tercera mayor), $x = 6/5$ (tercera menor) y $x = 5/3$ (una sexta). Se recuperan los valores clásicos de la consonancia polifónica.

5. Consonancia local de Sethares y otras construcciones

Partiendo de los trabajos de Plomp y Levelt, W. Sethares [6] determina la disonancia que produce un timbre completamente arbitrario, en el que la relación entre las frecuencias de los armónicos no tiene por qué ser necesariamente un número racional como ocurre con las notas de los instrumentos de cuerda o de viento. Para este autor la disonancia entre las frecuencias f_1 y f_2 de amplitudes respectivas ν_1 y ν_2 se determina mediante la función:

$$d(f_1, f_2, \nu_1, \nu_2) = \nu_1\nu_2 \left(e^{-3'5\lambda(f_2-f_1)} - e^{-5'75\lambda(f_2-f_1)}\right)$$

siendo $\lambda = 0'24/(0'021f_1 + 19)$. Obsérvese que en este caso se considera un rango de frecuencias en donde la percepción del oído es considerada lineal (frecuencias bajas).

A partir de esta función es posible determinar la disonancia $D_{\mathfrak{F}}$ de un timbre $\mathfrak{F}$ dado por una colección de n sinusoidales de frecuencias $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ y amplitudes $\nu_1, \ldots, \nu_n$. Esta disonancia viene dada por la suma de las disonancias de todos los pares posibles (f_i, f_j), es decir,

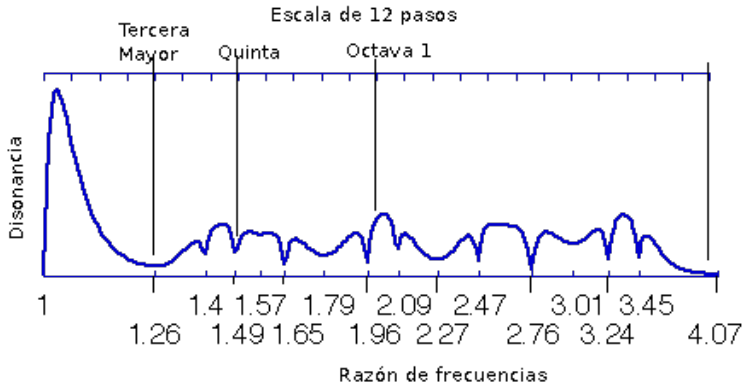
$$D_{\mathfrak{F}} = \sum_{i<j} d(f_i, f_j, \nu_i, \nu_j).$$

Denotamos por $\alpha\mathfrak{F}$ el timbre determinado por las frecuencias $\alpha f_1 < \alpha f_2 < \cdots < \alpha f_n$ y amplitudes $\nu_1, \ldots, \nu_n$ siendo $\alpha \in \mathbb{R}^+$ cualquiera. La disonancia $D_{\mathfrak{F}}(\alpha)$ que se produce cuando las notas de timbres $\mathfrak{F}$ y $\alpha\mathfrak{F}$ suenan simultáneamente –esto es, la disonancia del intervalo α respecto del timbre $\mathfrak{F}$– será el resultado de sumar la disonancia de $\mathfrak{F}$, la de $\alpha\mathfrak{F}$ y la producida al interactuar los armónicos de $\mathfrak{F}$ con los de $\alpha\mathfrak{F}$. Es decir,

$$D_{\mathfrak{F}}(\alpha) = D_{\mathfrak{F}} + D_{\alpha\mathfrak{F}} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} d(f_i, \alpha f_j, \nu_i, \nu_j).$$

Por ejemplo, si se toma el timbre dado por $\{1, 2, \ldots, 7\}$ y amplitudes $\nu_i = 0'84^{i-1}$ (el caso de un instrumento de viento o de cuerda) se obtiene una función $D_{\mathfrak{F}}(\alpha)$ que tiene una gráfica similar a la dada en la sección anterior.

Con este modelo W. Sethares encuentra una manera de asociar a cada timbre una escala que le es *particularmente consonante*: una escala $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_k$ y un timbre $\mathfrak{F}$ están asociados si todos los intervalos α_i de la escala son mínimos locales de la función de disonancia $D_{\mathfrak{F}}(\alpha)$. La cuestión depende fuertemente de α y $\mathfrak{F}$. Por ejemplo, si se trabaja con los armónicos del xilófono simple (7) entonces la curva presenta una distribución de mínimos distinta a la de Plomp y Levelt como se ve a continuación (en una imagen de [7] cedida por el autor).



W. Sethares se plantea también el problema inverso: dada una escala de intervalos $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$, cómo ha de ser el timbre $\mathfrak{F}$ para que cada intervalo α_i de la escala sea una consonancia local de $\mathfrak{F}$, es decir, sea un mínimo local de la función $D_{\mathfrak{F}}(\alpha)$.

El espectacular desarrollo de la música electrónica en el segundo tercio del siglo XX permitió realizar interesantes construcciones a partir de estas ideas. En particular, con un sintetizador, se puede emitir sonidos formados por una frecuencia fundamental y una distribución de armónicos f_n de valores arbitrarios. De esa manera, el compositor puede tener control de los valores para los que se tiene los intervalos de máxima consonancia. Por ejemplo, si se construye un sonido de armónicos

$$f_2 = 2^{5/4} f_1, \quad f_3 = 2^{8/4} f_1, \quad f_4 = 2^{10/4} f_1, \quad f_5 = 2^{11/4} f_1, \quad f_6 = 2^{12/4} f_1,$$

(construcción de Pierce, 1966) se tiene una gráfica de consonancia de tal manera que cualquier par de notas de la escala de temperamento igual (equiespaciadas en la circunferencia) suenen consonantes. En efecto, cuando dos notas de esta escala suenan con los anteriores armónicos, lo que sucede es que estos armónicos o bien coinciden o bien están separados lo suficientemente en la banda crítica. Ésta y otras mucha otras construcciones han permitido crear una nueva concepción de la composición musical dotada de un notable peso matemático (*xentonalidad*, *xenomúsica* y muchas otras). Para algunas reflexiones, véase [2] y [6].

Referencias

[1] D.J. Benson, *Music: A Mathematical Offering*, Cambridge University Press, 2006.

[2] W. Hutchinson, L. Knopoff, *The acoustic component of western consonance*, Interface **7** (1978), 1–29.

[3] A.Y. Khinchin, *Contiuned Franctions*, Phoenix Books. University of Chicago Press, 1964.

[4] R. Plomp, W. Levelt, *Tonal consonance and critical bandwith*, J. Acoustic Soc. Amer. **38**, 1965.

[5] T.D. Rossing, R.F. Moore, P.A. Wheeler, *The scienc of sound*, Addison-Wesly, 2002.

[6] W. Sethares, *Tuning, Timbre, Spectrum, Scale*, Springer Verlag, 2004.

[7] W. Sethares, *Relating tuning and timbre*, Experimental Musical Instruments IX, No. 2 (1993).

[8] N.B. Slater, *Gaps and steps for the sequence* Nr mod 1, Proc. Camb. Phil Soc. **63**, 1967, 1115–1123.

Cubismo y constructivismo

Capi Corrales Rodrigáñez

Departamento de Álgebra
Facultad de Ciencias Matemáticas
Universidad Complutense de Madrid
E-28040 Madrid, Spain
capi@mat.ucm.es

Para Juan Tarrés, compañero de viaje durante años en el Seminario de Historia de las Matemáticas y en el Curso de Verano Arte y Matemáticas de la UNED.

ABSTRACT

Cubismo y constructivismo ilustran dos maneras muy distintas de pensar y trabajar el espacio a principios del siglo XX. En este artículo seguimos el rastro de ambas maneras de hacer en las matemáticas de la época.

Cubism and constructivism illustrate two different ways of thinking and working with space at the beginning of the 20th century. In this article we trace them both in the mathematics of the period.

Key words: History of geometry and painting. Cubism. Constructivism.

2010 Mathematics Subject Classification: 01A99.

1. Introducción: Los dos caminos abiertos por Cantor

Cuando en 1988 me incorporé al Departamento de Álgebra de la Facultad de Matemáticas de la UCM, Mariano Martínez, que había sido profesor mío durante el último año de carrera, me sugirió asistir a las reuniones del grupo de trabajo formado por el subconjunto del Seminario de Historia que se leía los textos. Desde que en 1979 Mariano lo fundase (con él mismo y Miguel Ángel Gómez Villegas como únicos miembros), la forma del Seminario había ido variando en función de los intereses de quienes lo formaban en cada momento. Cuando yo me incorporé, el Seminario tenía dos secciones, por así decirlo; la del grupo que leía los textos matemáticos originales (en aquel momento, libros y artículos sobre el tema del infinito) y la del grupo que leía cuentos (estaban, entonces, con Chejov). El primer grupo lo formaban José Luis Caramés, Mariano Martínez, Carlos Fernández Pérez, Juan Tarrés y Miguel Ángel Gómez Villegas, y el segundo los mismos más Feliciana Serrano y Juan Tejada. Tras unas semanas de prueba me quedé en el de los textos matemáticos, al que, cuando le interesaban los deberes que nos ponía Mariano, asistía también Fernando Bombal.

Porque era Mariano quien elegía los temas, hacía fotocopias para todos de libros y artículos y organizaba los horarios de las reuniones semanales en las que nos juntábamos en un aula para reflexionar en grupo sobre lo que íbamos leyendo. Una veces con más entusiasmo y otras con menos, unas veces con más rapidez y otras con menos, durante años leímos, debatimos y disfrutamos. En mi caso, además de matemáticas, escuchando a Luis Caramés aprendí a cazar ideas con paciencia, gracias a Mariano Martínez constaté que es una estupidez contentarse con reproducciones pudiendo disfrutar de los originales, Carlos Fernández Pérez y Miguel Ángel Gómez Villegas me ilustraron en el arte del *bienhacer* –que parte del principio de que todo, hasta amotinarse ante los temas propuestos por Mariano, se puede hacer si se hace bien– y, *last but not least*, de la mano de Juan Tarrés pude poner dentro de un marco matemático preciso algunas de las reflexiones e investigaciones que, sobre el imaginario del espacio en nuestra cultura, entonces me ocupaban. Cuando me incorporé al Seminario, Juan y Mariano me animaron a poner en limpio las notas que a lo largo de más de veinte años había ido tomando sobre el tema y, con Feliciana Serrano, me ayudaron a darles estructura de texto ([4]). En el caso de Tarrés, tanto sus escritos sobre la historia de la topología general y de la teoría de las dimensiones ([27] y [28]), como las observaciones que sobre las matemáticas de esa época le escuché en sus intervenciones en el Seminario, me resultaron esenciales para entender el papel jugado por las matemáticas del siglo XIX en el desarrollo de la idea de espacio que subyace en mucha de la pintura europea de principios del siglo XX.

Algunos años después, ambos fuimos ponentes en el curso de verano sobre Arte y Matemáticas que desde 2001 (Sanlúcar de Barrameda) hasta 2007 (Mérida) Antonio Costa e Ignacio Garijo organizaron para la UNED. Los pintores pintan cuadros y los matemáticos hacemos matemáticas y, por lo general, los pintores no saben hacer matemáticas ni los matemáticos sabemos pintar. Sin embargo, como Tarrés y yo intentamos poner de manifiesto en el curso, hay un terreno común a ambas artes. Desde ese terreno común, en mis ponencias yo ilustraba con cuadros concretos aspectos de la historia y evolución recientes de algunos conceptos matemáticos, como por ejemplo el de espacio. En el coloquio que siguió a mi primera intervención en 2001, Ignacio Garijo me retó a ir en la otra dirección y utilizar las matemáticas para explicar algo sobre pintura. La siguiente vez que nos vimos insistió en el tema –era insistón– y esa vez le contesté, "Dame tiempo y te contaré matemáticamente la diferencia entre los cubistas parisinos y los constructivistas moscovitas. Estoy en ello".

Comencemos por consultar una de las enciclopedias de arte más utilizadas actualmente por la ciudadanía.

> Constructivismo. El referente inicial del movimiento está en las primeras investigaciones sobre soporte escultórico que realiza Tatlin influido por el cubismo de Picasso, que contempla en París en 1913 y 1914. La consecuencia inmediata, a su vuelta a Rusia, es la construcción de una serie de maquetas en madera, metal cartón y vidrio, sin referencia posible al entorno objetivo. Desaparece lo anecdótico en busca de la pureza del arte y adquieren protagonismo las formas geométricas y el espacio frente a la masa. El resultado es un conjunto de fuerzas dinámicas en tensión e interdependientes que se definen como constructivistas. Rodtchenko se une a las exploraciones escultóricas abstractas de Tatlin en 1916, Gavo y Pevsner lo hacen en 1917, mientras Exter y Popova se incorporan con la

pintura. (www.masdearte.com, 9 de abril de 2012)

Crecí en una familia numerosa y mi padre solía llevarnos a museos los fines de semana, una manera barata de entretenernos. Gracias a su astucia, aprendimos a distinguir dos tipos de cuadros abstractos, los que, de manera más o menos obvia, representan cosas de la vida real y los que no lo hacen. Cuando encontrábamos un lienzo del primer tipo, quien identificase primero el objeto codificado en él (así lo describía mi padre, que era ingeniero) ganaba un duro. Con aquel juego comprendimos que no es lo mismo hacer abstracción a partir de la realidad (como se hace en matemáticas) que abstraerse de ella. Puesto que los cuadros cubistas representan objetos de la vida cotidiana y los constructivistas no, parece lógico suponer que cubismo y constructivismo son fruto de maneras distintas de mirar y trabajar y tienen objetivos distintos. Sin embargo, las afirmaciones rotundas (i.e., sin argumento lógico que las sustente) de que el cubismo está en el origen del constructivismo como la que leemos en masdearte.com, siguen siendo lugar común de la literatura popular de divulgación y los manuales educativos. Por eso decidí aprovechar la ocasión, aceptar el reto que Ignacio me lanzaba y buscar en las matemáticas de principios del siglo XX, rastro de las dos distintas maneras de mirar y trabajar que, a mi juicio, ilustran cubismo y constructivismo.

Desafortunadamente, para cuando en 2009 un amigo me puso en las manos la última pieza que necesitaba para completar el *puzzle* ([12]), Ignacio Garijo no estaba ya con nosotros. Estas páginas recogen el relato que le habría contado de estar aún aquí, y que pude empezar a tejer en 2002 gracias a Juan Tarrés, cuyos artículos ya mencionados, en los que encontré las primeras pistas, me sirvieron como bastidor (figurado) sobre el que montar el rompecabezas.

Una de las cosas importantes que aprendí en los años que participé en el Seminario de Historia es que, tanto para para leer matemáticas como para hacer matemáticas, hay que atreverse a pensar de otra manera.

> Por lo que tengo entendido, la primera vez que Gabriel García Márquez abrió La metamorfósis de Kafka, era un adolescente y estaba tumbado en un sofá. Al leer
>
> > Cuando Gregor Samsa despertó una mañana de un sueño inquieto, se encontró en la cama convertido en un monstruoso insecto,...
>
> García Márquez se cayó del sofá, estupefacto ante la revelación de que ¡está permitido escribir así! Con frecuencia me ha ocurrido, y seguro que a todos los matemáticos les pasa lo mismo, que al enterarme de alguna idea maravillosa que alguien ha tenido, me he caído del sofá (en sentido figurativo) como García Márquez, mientras pensaba con asombro, "¡No había caído en la cuenta de que estuviese permitido hacer eso!"(Mazur en [19, págs 65, 69].)

Los artículos de Juan Tarrés [27] y [28] suponen un excelente mapa con el que adentrarse en el territorio recorrido por aquellos exploradores del espacio matemático que en el siglo XIX se atrevieron a pensar y mirar en derredor de otra manera, la lectura de cuyos textos nos da la –emocionante– oportunidad de ver a través de sus ojos. Al llegar a Cantor, Tarrés nos expone sus ideas en torno a las dimensiones y en torno a los conjuntos infinitos. Rastreándolas de la mano de los textos de Tarrés encontré, inesperadamente, un marco plausible para las distintas maneras de hacer de cubistas y constructivistas. Como intentaré ilustrar en las dos secciones siguientes, dentro de ese territorio común a matemáticas y pintura, el cubismo comparte vecindad con las

ideas de Georg Cantor (1845-1918) en torno a la cuestión de las dimensiones y el constructivismo con la cuestión de los conjuntos infinitos.

2. La cuestión de las dimensiones

Antes de adentrarnos en el terreno, desplegamos el mapa, lo estudiamos y elegimos un itinerario a seguir.

> A principios del siglo XIX, cualquier teoría que incluyera consideraciones de tipo espacial estaba condicionada por el propio espacio físico, lo que conllevaba la imposibilidad de generalización más allá del espacio geométrico tridimensional. Constituyó un gran paso adelante, sin el que difícilmente se podría haber llegado a la implantación de los espacios abstractos, el estudio de espacios de dimensión superior a tres, iniciado por Gauss (y proseguido por otros autores como Grassmann y Riemann) a los que se podían generalizar las ideas básicas de la Geometría. Se rompió de esta manera el cerco que representaba el espacio geométrico y se entraba en consideraciones que llevaban implícitos espacios cuyos elementos no podían representarse; éste fue, a nuestro juicio, un paso importante para el establecimiento de los espacios abstractos. [...] Unos años antes, en 1874, el propio Cantor se había planteado la cuestión siguiente: "¿Se puede poner una superficie en correspondencia biunívoca con los puntos de una línea?". Pese a que Cantor consideró la pregunta poco menos que absurda ("...pues es evidente que dos variables independientes no pueden reducirse a una") se propuso dar una demostración de la imposibilidad de dicha correspondencia. Con gran sorpresa por su parte, en octubre de 1877 comunica a R. Dedekind que ha encontrado una biyección entre los puntos de un segmento y los de un cubo de dimensión p. Este otro hecho dio pie a plantearse la cuestión de la definición del concepto de dimensión de una figura, que estaba en conexión con el estudio de los hiperespacios que estudiaban Gauss, Grassmann y Riemann, y que hasta entonces se entendía como el número de coordenadas independientes necesarias para determinar cada uno de sus puntos (Tarrés en [28, págs. 192-193]).

Hay mucha maneras que recorrer el camino que lleva de Carl Friedrich Gauss (1777-1855) a Cantor en esta cuestión. El que se propone a continuación está construido a partir de una selección de las obras propuestas por Tarrés.

> Si no se consideran las superficies como contornos de cuerpos, sino como cuerpos, una de cuyas dimensiones es infinitamente pequeña, y también se las considera flexibles, pero no extensibles, entonces nos vemos llevados a considerar las propiedades absolutas que aún se conservan al deformar las superficies sin romperlas, estirarlas ni plegarlas (Gauss, 1828, en [11]).

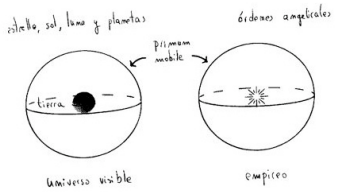
> Atribuimos a un objeto variación continua cuando es posible una transición continua de una determinación del mismo a otra. La totalidad de las determinaciones (o también parte de ellas, entre las que sea posible una transición continua) constituyen entonces una variedad extensa continua, y cada una de ellas se llama punto de esa variedad. [...] El concepto de variedad de múltiples dimensiones subsiste independientemente de nuestras intuiciones espaciales. El espacio, el plano, la línea, son sólo los ejemplos más intuitivos de una variedad de tres, dos o una dimensión. Aún sin tener la menor intuición espacial, podríamos desarrollar toda la geometría. [...] Si bien podríamos deducir analíticamente todas las proposiciones sobre variedades de más de tres dimensiones,

> sería con mucho preferible el basar la teoría de las variedades de más dimensiones directamente sobre la geometría. Quiero desarrollar esto solamente para las variedades de 4 dimensiones. [...] Una variedad de 4 dimensiones es aquí, pues, algo que contiene en sí infinitos espacios. Pero nunca podemos contemplar más que lo que está en un mismo espacio. Cuando diga, en lo sucesivo, que dos construcciones no están en el mismo espacio, quiere ello decir que no puedo contemplar ambas a la vez, no puedo hacerme absolutamente ninguna imagen de su lugar recíproco, sólo puedo extraer conclusiones lógicas a partir de las premisas que hago sobre ellas, y es un requisito esencial para la comprensión de lo que sigue, el atenerse sólo a estas conclusiones lógicas. [...] Queremos ocuparnos de una espacialidad de cuatro dimensiones. Se trata de una espacialidad continua de mayor extensión que todo el espacio infinito. Ciertamente, con nuestra intuición no podemos abarcar más que todo el espacio infinito, pero podemos desplazarnos a través de diversos espacios, uno tras otro. Quiero decir con ello: me imagino primero todo el espacio infinito, después me imagino otra vez todo el espacio infinito, pero pensando que todos los puntos que ahora contemplo son distintos de los puntos que contemplaba antes (Riemann, 1852/53, en [25, págs. 93-95]).

El modelo de variedad de 4 dimensiones propuesto por Bernhard Riemann (1826-1866) –la hiperesfera–, se entiende fácilmente si pensamos en la construcción de mapas. Desde el descubrimiento de las Américas, el mapamundi se dibuja con frecuencia sobre dos círculos, cada uno de ellos representa la mitad de la esfera terrestre y su circunferencia el círculo máximo terrestre común a ambos. Cuando vemos el mapa de los dos hemisferios, para representar la Tierra no tenemos más que (mentalmente) pegarlos por su circunferencia exterior y soplar hasta inflarlos. Ahora imaginemos que tenemos delante de nuevo dos círculos, pero esta vez, sin embargo, cada uno de ellos representa una esfera completa, con la Tierra colocada en el centro de la de la izquierda, que tiene en su interior todo lo que hoy en día podemos ver del Universo a través de telescopios. A continuación, imaginemos una civilización lejana, más allá del alcance de nuestra tecnología, situada en el centro de la esfera de la derecha, cuyo interior contiene todo lo que pueden alcanzar mirando a través de sus lentes. Hay varias posibilidades teóricas: que las esferas se encuentren muy lejos una de otra con mucho universo entre ellas, que tengan partes en común, con galaxias observables para ambas civilizaciones o, según propone Riemann, que no se corten y que, de hecho, juntas constituyan todo el universo, como los dos hemisferios del mapa de la Tierra juntos conforman el globo terráqueo. No tenemos más que imaginar que podemos pegar las esferas una con otra a lo largo del borde. Este borde exterior sería la *esfera ecuatorial*, que divide el universo en dos partes: el viejo, el que conocemos o podremos conocer, y el nuevo, el que nunca podremos comprender.

Incluso hoy en día, siglo y medio más tarde y pese a saber gracias al trabajo de Albert Einstein que es plausible que el universo sea como lo imaginó Riemann, para reproducirnos en la cabeza su espléndida visión sigue siendo imprescindible atreverse a pensar de otra manera. Hay una anécdota de David Hilbert (1862-1943) muy contada en entornos matemáticos. Parece que un día se dio cuenta de que uno de sus alumnos había dejado de asistir a clase, y preguntó por él. Le dijeron que había dejado la carrera para convertirse en poeta. Hilbert comentó: “Una decisión excelente; no tenía imaginación suficiente como para ser matemático”. Pues bien, aunque probablemente a Hilbert le sorprendería saberlo, no fue un matemático, sino un poeta, el

primero en describir el universo como una hiperesfera ([22]). En Paraíso ([1]), Dante Alighieri (1265-1321) describe el universo como formado por dos esferas que comparten superficie, a la que Dante llama Primer Motor. La primera de ellas comprende el universo visible y contiene, a su vez, una serie de cielos o esferas menores transparentes y concéntricas, con la Tierra en su centro. Del otro lado del Primer Motor está el Empíreo, el Paraíso propiamente dicho, que Dante imagina como una segunda esfera con varios órdenes de ángeles girando en esferas concéntricas alrededor de un centro donde un punto de luz ilumina con intensidad casi cegadora.



> La aparición de los hipersepacios provoca la necesidad de establecer una definición rigurosa de la idea de dimensión de un espacio. A principios de los años 1870 se admitía como tal el número de coordenadas independientes para determinar un punto arbitrario del mismo. (Tarrés en [28, pág. 200]).

Leamos algunos extractos de la correspondencia entre Cantor y Richard Dedekind (1831-1916) a este respecto (en [5, pág. 578]).

> Cantor a Dedekind, 5 de enero de 1874. ¿Es posible establecer una correspondencia entre un cuadrado (supongamos un cuadrado en el que incluimos sus lados) y un segmento (supongamos un segmento con sus extremos incluidos) de tal manera que a cada punto de la superficie corresponde un punto del segmento y, recíprocamente, a cada punto del segmento le corresponde un punto de la superficie? En este momento me parece que la respuesta a esta pregunta –por mucho que uno esté tan tentado de responder "no", que la demostración parezca superflua– ofrece grandes dificultades.
>
> Cantor a Dedekind, 29 de junio de 1877. Su última respuesta a nuestro trabajo fue tan inesperada y nueva que, por decirlo de alguna manera, no seré capaz de recuperar la compostura hasta que no haya recibido de usted, querido amigo, una decisión sobre su validez. Mientras no lo haya confirmado sólo puedo decir: *lo veo pero no lo creo* [cursivas en francés en el original]. [...] La distinción entre dominios de dimensiones diferentes deberá ser buscada de forma muy distinta que el característico número de sus coordenadas.
>
> Dedekind a Cantor, 2 de julio de 1877. He comprobado su demostración una vez más, y no encuentro ninguna laguna en ella; estoy convencido de que su interesante teorema es verdad y y le felicito, [...] Pero ahora creo posible, provisionalmente, el siguiente teorema: dada una correspondencia biunívoca entre los puntos de una variedad continua A de dimensión a por un lado, y los puntos de una variedad continua B de dimensión b por otro, entonces la correspondencia en cuestión, si a y b son desiguales, es necesariamente discontinua.

Ni Cantor ni Dedekind pudieron demostrar la última afirmación de Dedekind, que se convirtió en motor direccional de mucha de la investigación matemática de la época.

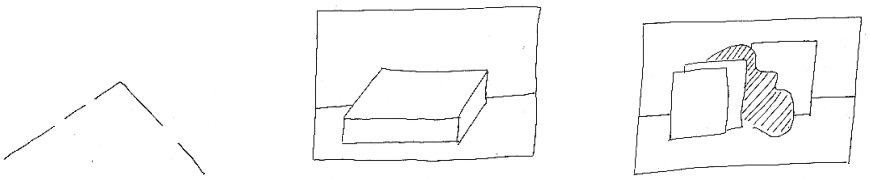
> A este respecto, en 1878, Dedekind estableció la conjetura de que toda aplicación biunívoca entre figuras de dimensiones distintas ha de ser necesariamente discontinua. Este enunciado se conoce como el teorema de la invariancia de la dimensión y no fue demostrado hasta el año 1911, por Brouwer y Lebesgue, independientemente uno de otro. Los diferentes intentos de demostración de este enunciado aportaron nuevas ideas con influencia evidente en la teoría de los espacios abstractos (Tarrés en [28, pág. 193].

La preocupación por la cuestión de las dimensiones fue, de hecho, bastante general en la Europa ilustrada de este período.

> Todo a lo largo del siglo XIX, el hecho de que el espacio cognitivo es tridimensional fue un problema recurrente, aun si ligeramente marginal, dentro de la entonces llamada Teoría del Conocimiento. Es ilustrativo que las artes plásticas comenzasen un programa para desenfatizar la tridimensionalidad (o, de hecho, cualquier dimensionalidad) del espacio, un programa que culminó con los logros de Cézanne (Bochner en [2, pág. 232]).

Los intentos de Cézanne por construir objetos tridimensionales sin echar mano de trucos tales como la perspectiva, el claroscuro o las gradaciones de color, le llevan a enfrentarse con la desagradable deformación, una lucha que, según sus escritos, le hizo sufrir toda su vida. Aunque Cézanne no consiguiese representar sin deformación en las formas objetos tridimensionales sobre la superficie del lienzo (lo que no es de sorprender, puesto que Leonard Euler había demostrado en el siglo dieciocho que es imposible hacerlo [1]), gracias a sus intentos aprendió a liberarse (y liberar de paso a los pintores que le siguieron) de *la tiranía de la tridimensionalidad*.

A fin de "construir" los objetos, Cézanne combina constantemente en sus lienzos lo bidimensional y lo tridimensional y, utilizando líneas entrecortadas, colores sólidos o planos, sigue simultáneamente varias estrategias que podemos identificar en casi todos sus cuadros ([17]).



i) Raramente encontramos líneas continuas dibujadas alrededor de un objeto. Con colores fuertes y líneas negras y gruesas, Cézanne da profundidad al cuadro y obtiene volúmenes, tridimensionalidad. Pero hay muchos lugares en los que las líneas se pierden, se diluyen con el fondo o simplemente están pintadas a trozos. Estas líneas que desaparecen y se disuelven ponen de manifiesto la bidimensionalidad del lienzo.

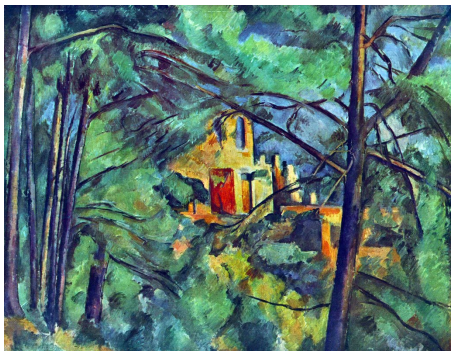
ii) Planos verticales que se mueven hacia el fondo de la escena nos llevan de nuevo a los cuadros planos. Con líneas construye planos, con planos volúmenes.

[1] Leonard Euler, *De raepresentatione superficiei spahericae super plano*, 1778

iii) Además, Cézanne no intenta describir la materia de la que están hechos los objetos. Les da a todos la misma textura plana y, a veces, como en los cielos y montañas de su serie de cuadros sobre Mont Sante Victoire, utiliza incluso el mismo tipo de pinceladas y colores para todo (algo que también encontramos en muchos cuadros impresionistas). Antes de este período, la pintura intentaba adaptarse al tacto y la textura de los distintos objetos, manteniendo lo duro como duro, lo blando como blando, lo intocable como intocable. Esto está muy relacionado con establecer la diferencia entre objeto y fondo, entre el espacio como algo exterior y el objeto como lo que habita en el espacio. Gradualmente en pintura, como en matemáticas, "cuerpos" y "espacio intermedio entre cuerpos" van siendo considerados como equivalentes.

iv) También observamos en los cuadros de Cézanne que los tamaños nunca varían de acuerdo con las reglas perspectivas. Profundidad y tridimensionalidad se obtienen, por un lado, compensando los volúmenes de tal manera que respeta la bidimensionalidad del lienzo y, por otro, variando la distancia entre planos verticales.

Todas estas estrategias se pueden apreciar muy bien en sus series sobre Mont Saint Victoire y Chateau Noir.



La mayor parte de estas características del trabajo de Cézanne las encontramos llevadas al extremo en los cuadros cubistas,

> Cézanne fue mi solo y único maestro. Él fue la madre de todos nosotros (en *Picasso speaks*, Mario Zayas, The Arts, NY 1923, págs. 315-326).

Equipados con las herramientas y estructuras desarrolladas por Cézanne, los cubistas encararon la tarea de*construir* objetos tridimensionales sobre el lienzo del cuadro. Al ser las superficies de la mayor parte de los objetos reales localmente euclídeas –y, como tales, variedades de Riemann–, la solución cubista tiene sentido desde un punto de vista geométrico: construir los volúmenes mediante el encolado de planos.

Veamos el cuadro de Picasso considerado como un primer paso hacia el cubismo, realizado en 1907.

A simple vista se reconoce la influencia de Cézanne, tanto en la construcción de estructuras para representar los objetos como en el juego entre las dos y tres dimensiones. Sin embargo, si miramos con más atención observamos algo más en el trabajo de Picasso en este cuadro. El ojo del pintor se mueve alrededor de la escena y refleja sobre el lienzo varios puntos de vista. Además, en el cuadro aparecen combinados distintos niveles de abstracción, logrando así darnos simultáneamente información sobre distintos aspectos de lo que se representa.

Las frutas, por ejemplo, están representadas de manera más o menos realista, pero aparecen envueltas en unas formas abstractas *à la Cézanne* que sugieren un trozo de tela blanca. Lo mismo ocurre con las figuras: los dedos y algunas cabezas están pintados con mucha precisión, mientras que otras partes de los cuerpos –algunas caras, muslos y hombros, por ejemplo– ni tan siquiera están en armonía con el resto del cuerpo del que forman parte. Distintos niveles de abstracción aparecen tejidos juntos, y de esta manera nuestros ojos reciben mayor cantidad de información. Una información que no se percibe de inmediato: es necesario decodificarla primero, recorriendo los distintos niveles de abstracción que el pintor, a su vez, recorrió. Arthur I. Miller, catedrático de Historia y Filosofía de la Ciencia de London University College, nos da una pista de cómo hacerlo. Miller ha documentado exhaustivamente ([20]) la influencia que en la elaboración de este cuadro tuvo el libro de Henri Poincaré (1854-1912) *La ciencia y la hipótesis* (1902) y, especialmente, la sección titulada "El mundo de cuatro dimensiones"del capítulo IV, "El espacio y la geometría".

> Lo mismo que un mundo no euclidiano, se puede representar un mundo de cuatro dimensiones. Las imágenes de los objetos exteriores vienen a pintarse sobre la retina, que es un cuadro de dos dimensiones; *son perspectivas*. Pero como esos objetos son móviles y como también lo es nuestro ojo, vemos sucesivamente distintas perspectivas de un mismo cuerpo, tomadas desde varios puntos de vista. Comprendemos de este modo cómo la idea de un espacio de tres dimensiones ha podido nacer del espectáculo de esas perspectivas, aunque cada una de ellas sólo tenga dos dimensiones, porque ellas se suceden según ciertas leyes. Y bien, lo mismo que se puede hacer sobre un plano la perspectiva de una figura de tres dimensiones, se puede hacer la de una figura de cuatro dimensiones, sobre un cuadro de tres (o de dos) dimensiones. Esto no es más que un juego para el geómetra. También se pueden tomar muchas perspectivas de una figura desde muchos puntos de vista diferentes. Podemos fácilmente representarnos esas perspectivas, puesto que no tienen más que tres dimensiones (Poincaré, 1902, en [23, pág. 72].

> Cuando los objetos descompuestos en fragmentos aparecieron en mis cuadros hacia 1909, esto para mí fue una manera de acercarme más al objeto,... La fragmentación me ayudaba a establecer el espacio y el movimiento en el espacio (Picasso en *Braque*, Edwin Mullins, Thames and Hudson, Londres 1968, p. 55).

En 1911 Picasso pintó *Hombre con clarinete* (Museo Thyssen-Bornemisza de Madrid), considerado una de las piezas claves del cubismo.
En él, todas las perspectivas que el pintor combina para representar la figura, están tomadas desde delante de ésta; más a la izquierda, más a la derecha, más arriba o más abajo, pero siempre frente a la figura.
Con el tiempo, Picasso llegó a pulir sus herramientas hasta el punto de poder dar la vuelta a toda la figura y hacerlo combinando tan sólo cinco planos con los que describe cinco puntos de vista colocados a izquierda, derecha, delante detrás y sobre la imagen. Veamos dos ejemplos.

En el primero de estos cuadros, *Mujer sentada acodada* (1939, Museo Reina Sofía de Madrid), el plano en que Picasso describe uno de los ojos de la mujer y su mano derecha está situado delante de la figura, el plano que recoge el otro ojo y uno de los orificios nasales está a su izquierda, el segundo orificio nasal y la boca aparecen dibujados sobre un plano a su derecha, la parte azul del sombrero está vista por detrás, desde la espalda de la mujer y la parte roja desde arriba, sobre la coronilla.

Las claves para decodificar el segundo cuadro, *Las meninas* (1957, Museo Picasso de Barcelona), las encontramos en el lienzo de Velázquez. María Agustina Sarmiento, la niña del búcaro, sostiene una bandeja en su mano. Las líneas oscuras de su fondo nos indican que la bandeja está descrita tal y como la ve la propia Ma. Agustina. En la mano aparecen dibujadas las almohadillas del pulgar y de la palma, detalles que en la escena de Velázquez sólo el propio pintor podría percibir. El pelo enmarca perfectamente el rostro de Sarmiento y el contorno de ambos aparece completo, como sólo puede verlos la infanta, a la que Ma. Agustina mira de frente. En el ojo izquierdo hay tres claves esenciales: el trazo horizontal de la izquierda, la acumulación de grises a la derecha y el lugar donde está dibujada la pupila. Estas claves indican que el ojo está visto desde el costado derecho de la joven, esto es, desde el lugar que ocupan los reyes y los espectadores en el cuadro de Velázquez. Finalmente, el perfil –ojo derecho y nariz– aparece en el cuadro de Picasso descrito como lo ve el visitante que aparece por la puerta del fondo en el de Velázquez.

En ambos cuadros el pintor utiliza las estructuras subyacentes que estudió Cézanne para, utilizando las palabras de Poincaré, representar en cinco planos distintos, cinco perspectivas distintas de una figura tridimensional. Al elegir las perspectivas de frente, desde arriba, desde atrás, desde la izquierda y desde la derecha, consigue dar una vuelta completa alrededor de la figura.

3. La cuestión de los conjuntos infinitos

> En general, entiendo por una variedad o conjunto cualquier Multiplicidad [2] que pueda ser pensada como un Uno, i.e., cualquier colección de elementos determinados que puedan ser aunados en un todo por una ley, y con esto creo definir algo similar al $\varepsilon\iota\delta o\zeta$ o $\varepsilon\iota\delta o\omega$ Platónicos (Cantor, carta a Dedekind del 5 de noviembre de 1882).

Antes de adentrarnos en el nuevo territorio, consultemos de nuevo nuestro mapa.

> En el último cuarto del siglo XIX, un hecho trascendental vino a marcar la evolución de todas las ideas que de alguna manera iban conformando lo que tendría que ser la Topología de Conjuntos: los trabajos de Georg Cantor que dieron lugar al nacimiento de la Teoría de Conjuntos de Puntos. Estos trabajos se publicaron en los Matematische Annalen en una serie de seis artículos entre los años 1879 y 1884 y que, en palabras de E. Zermelo, constituyen la quintaesencia del trabajo de su autor. El objetivo principal de estos artículos es el estudio de los conjuntos lineales de puntos, o subconjuntos de la recta numérica, así como el de los conjuntos de puntos de lo que Cantor llamaba el continuo aritmético de dimensión n. En ellos aparecen plasmadas las ideas fundamentales de punto límite, conjunto derivado, conjunto cerrado, etc., destinadas a dar soporte a las teorías axiomáticas de los espacios abstractos, surgidas a comienzos del siglo XX. [...] La aparición de los trabajos de Cantor, junto con la propia dinámica de las Matemáticas de la época, llevó consigo que de manera inmediata surgieran trabajos de diversa índole en los que se consideraban conjuntos de objetos distintos de los puntos de un espacio aritmético, pero a los que se pueden aplicar los conceptos introducidos por Cantor de manera análoga a como éste lo hace en los conjuntos lineales de puntos. Tales trabajos constituyen la transición entre las teorías de Cantor y los espacios abstractos propiamente dichos (Tarrés en [28, págs. 193, 205]

Tras esta introducción, el texto de Tarrés nos invita a un recorrido desde Cantor hasta Felix Hausdorff (1868-1942) a través de los conjuntos de Giulio Ascoli, cuyos puntos son curvas (1883), los de Vito Volterra, cuyos puntos son funciones (1887), los de Jacques Hadamard, cuyos puntos son funciones continuas en el intervalo $[0, 1]$ (1897) y los de Émil Borel, cuyos puntos son líneas y planos (1903). Estos trabajos llevarán, –de la mano de Maurice Fréchet (1906), Fredrik Riesz (1908) y, finalmente, Hermann Weyl, que en 1913 introduce los entornos de un punto para dar una estructura al espacio abstracto–, a las primeras definiciones de espacios abstractos, cuyos puntos son, en palabras de Fréchet, "elementos de naturaleza arbitraria (números, curvas, punto, etc)". Todas estas definiciones, sin embargo, seguían aún muy ligadas a una estructura euclídea del espacio o del plano (en el caso de Weyl). En 1914, Hausdorff,

[2] *Mannigfaltigkeit, Manifold*

atreviéndose a pensar de otra manera, dio el paso definitivo de desligar la noción de espacio del imaginario euclídeo (en [14], pág. 257).

Ascoli, Volterra, Hadamard, Borel, Fréchet, Reisz, Weyl, Hausdorff,... No hay moscovitas en la lista. Sin embargo, los lienzos de los pintores constructivistas ilustran con toda claridad, que en el Moscú de principios del siglo XX había artistas que miraban y trabajaban el espacio de manera análoga a como lo estaban haciendo ellos. ¿De quien aprendieron matemáticas y qué tipo de matemáticas aprendieron los constructivistas?

Los constructivistas surgieron en la sede de la gran utopía educativa rusa, los Talleres Superiores Artísticos y Técnicos del Estado en Moscú (los Vkhutemas, 1920-1932). Investigando en los pocos documentos que han sobrevivido, encontramos que sólo aparece mencionado un matemático entre el profesorado, Pável Florenski (1882-1937), que impartía una asignatura titulada Teoría del espacio. Pude localizar enseguida algunos de sus apuntes para las clases que impartía en los Vkhutemas ([7], [8] y [9]), pero durante mucho tiempo me fue imposible encontrar datos sobre su relación con la comunidad matemática rusa. Pasé años buscando y dando la lata con el tema a todas mis amistades, hasta que durante una visita a Cambridge durante la fiesta de Acción de Gracias de 2009, Barry Mazur me dijo "Acabo de leer un libro en que se menciona a ese Florenski de quien tanto hablas. Igual encuentras las pistas que buscas", y me puso en las manos una copia de [12].

En el libro de Graham y Kantor aprendí que Florenski había sido compañero de estudios en la Facultad de Matemáticas de la Universidad de Moscú de Nikolai Luzin (1883-1950) y Boris Bugaev (1880-1934). Juntos asistían, entre otras, a las clases de Nikolai Vasilievich Bugaev (1837-1903) –padre de Boris–, que inicialmente trabajó en análisis relacionado con la teoría de números y acabó especializándose en las funciones discontinuas.

> La discontinuidad es una manifestación de individualidad independiente y de autonomía. La discontinuidad interviene en cuestiones de causas finales y en problemas éticos y estéticos.(Nikolai Vasilevich Bugaev, ICM Zurich, 1897)

Florenski, Luzin y Bugaev (hijo) mantuvieron su amistad –y una estrecha y abundante relación epistolar– de por vida, Al acabar los estudios, Boris Bugaev se dedicó, con mucho éxito, a la poesía, que escribía con el seudónimo de Andrey Bely, Florenski dejó también la investigación matemática –aunque no la docencia–, se ordenó sacerdote de la Iglesia Ortodoxa Rusa (parece que fue miembro prominente de la secta de los *Adoradores del Nombre* que, a base de repetir una y otra vez el nombre –o la oración– de Jesús, entraban en un trance durante el que afirmaban experimentar a dios). Nikolai Luzin fue el único de los tres que, bajo la dirección de Dmitri Fedorovich Egorov (1869-1931), que había sido también alumno de Nikolai Bugaev, se dedicó a la investigación matemática. Siguiendo los pasos de este último, Egorov y Luzin investigaron fundamentalmente en análisis (funciones, teoría de la medida, etc), utilizando la teoría de los conjuntos transfinitos de Cantor, que conocieron a través de los trabajos de los matemáticos franceses durante sus visitas a París.

La reacción a los conjuntos infinitos de Cantor en Francia no había sido uniforme. Hubo quien desconfiaba de ellos,

> Ainsi, ces nombres de la 2^e et surtout de la 3^e classe ont un peu l'air d'une forme sans matiére ce qui répugne á l'esprit francais (Poincaré, 1883, en carta a Mittag-Leffler, [15, pág. 278]).

hubo quien no les encontraba utilidad,

> L'impression que nous produisent les mémoires de Mr Cantor est désolante; leur lecture nous semble à tous un véritable suplice, et en rendanthommage à on mérite, en reconnaissat quil a ouvert comme un nouveau champ de recherches, personne de nous n'est tenté de le suivre. Il nous est impossible, parmi les résultats qui sont suceptibles de compréhension, d'en voir un seul ayant un *intérèt actuel*; la correspondance entre les points d'une ligne et d'une surface nous laisse absolument indifféránts, et nous pensons que cette remarque, tant qu'on n'en aura point déduit quelque chose, résulte de considérations tellement arbitraires, que l'auteur aurait mieux fait de la garder et d'attendre (Hermite, 1883, en [15, pág. 209]).

y también hubo quienes, como Émil Borel (1871-1956), René-Louis Baire (1874-1932) o Henri Lebesgue (1875-1941), utilizaron sin reparos las herramientas desarrolladas por Cantor para resolver problemas importantes pendientes en las matemáticas del momento.

En 1984, por ejemplo, Borel utilizó en su tesis la teoría de conjuntos para demostrar un resultado clave sobre recubrimientos de un intervalo fijo por sucesiones infinitas de intervalos pequeños (Teorema de Heine-Borel). Esta idea supuso el primer paso del trabajo que le llevaría hasta la futura medida de Borel, concepto desarrollado después por Lebesgue. En 1898 utilizó de nuevo la teoría de conjuntos en otro problema distinto: dar respuesta a la pregunta ¿cómo determinar la longitud de una circunferencia si conocemos la longitud de un segmento? En vez de seguir la estela de Eudoxo y Arquímedes, Borel utilizó conjuntos, dando lugar a una nueva idea, la de *conjuntos de Borel*, a los que se les puede asignar una medida.

Por su parte, Baire, alumno de Borel, tras viajar a Italia en 1898 con una beca para trabajar con Vito Volterra –que utilizaba la teoría de conjuntos en análisis matemático–, defendió en 1989 su tesis con título *Clasificación de casi todas las funciones continuas y discontinuas de una variable real* –considerada por los especialistas una obra maestra y el primer paso hacia la teoría descriptiva de conjuntos–, en la que consiguió clasificar las funciones discontinuas que son límites de funciones continuas. Su trabajo fue descrito por Arnaud Denjoy (1884-1974), amigo de Borel, Baire y Luzin, de la siguiente manera.

> Para adivinar el enunciado preciso se necesitaban verdaderos poderes de observación, pero para demostrarlo se necesitaba utilizar en un contexto nuevo la teoría de los conjuntos transfinitos de Cantor.

Éste y los subsecuentes trabajos de Baire en el tema, fueron el punto de partida de Lebesgue en su tesis de 1902. Con su medida de Lebesgue y su integral (que logró definir para todas las funciones discontinuas acotadas que había introducido Baire), Lebesgue extendió la noción de conjuntos de Borel (los conjuntos medibles-Lebesgue incluyen a los medibles-Borel) con éxito inmediato. Unos años después, y de nuevo utilizando la teoría de conjuntos, Lebesgue demostró en su artículo *Sur les fonctions représentables analytiquement* de 1905, que existe una función en cada clase de la clasificación de Baire (resultado que utilizarán once años después Alexandrov y Hausdorff para demostrar que entre los conjuntos de Borel de la recta real no los hay que contradigan la Hipótesis del Continuo).

La situación cambió drásticamente cuando en 1904 Hilbert recibió una carta de Zermelo que incluía, en el marco de una demostración del Principio de Buena Ordenación que Cantor había enunciado en 1883 (todo conjunto puede ser bien ordenado), un enunciado explícito del Axioma de Elección. Muchos de los matemáticos de la época que llevaban años utilizando de forma implícita el Axioma de Elección, reaccionaron con hostilidad a la propuesta de Zermelo. Como si, al caer en la cuenta de lo que estaban haciendo, les hubiese entrado el vértigo de repente y se hubiesen caído al suelo.

Resulta muy ilustrativo, en este sentido, el intercambio de cartas en 1905 entre Borel, Baire, Lebesgue y Hadamard sobre la Teoría de Conjuntos de Cantor y el Axioma de Elección (AE), recogido por el último en [13]. En 1898, Borel había utilizado el AE en su demostración de que todo conjunto infinito tiene un subconjunto numerable ([21, pág. 9]). Por otro lado, la clasificación de Baire de las funciones reales era esencialmente equivalente a la de los conjuntos de Borel para $\mathbb{R}$, y la existencia de una función que se escapase a la jerarquía de Baire estaba íntimamente ligada a la existencia un conjunto no medible-Borel; para demostrar la existencia de tal conjunto, se necesita el AE ([21, pág. 68]). Finalmente, Lebesgue utilizó el AE en la parte más importante de su tesis, al introducir la –después llamada– medida de Lebesgue. Lebesgue buscaba una función m sobre los subconjuntos acotados de $\mathbb{R}^n$ de forma que para todo conjunto acotado A de $\mathbb{R}^n$, $m(A)$ fuese un número no negativo con tres propiedades: $m(A)$ es positivo para algún conjunto A, conjuntos congruentes[3] tienen igual medida y la medida de la unión numerable de conjuntos disjuntos es la suma de sus medidas respectivas (i.e. m es numerablemente aditiva). Para resolver este problema introdujo los *conjuntos medibles*, que extendían las familias de Borel y Baire y le permitieron definir la integral de Lebesgue. Pues bien, su demostración de que la medida de Lebesgue es numerablemente aditiva requiere, de manera inevitable, utilizar el AE ([21, pág. 69]). Estos usos sin reparo –y otros muchos[4]–, de la elección infinita, no impidieron que, confrontados con su enunciado explícito en la carta de Zermelo, Borel, Baire y Lebesgue se pronunciasen abiertamente en contra de que tal elección fuese considerada lícita en matemáticas. Sorprende especialmente la virulencia con que se manifiesta Lebesgue, considerando que el AE es crucial en su trabajo [5].

> Para mí, progreso en esta cuestión consistiría en delimitar el dominio de lo definible. Y, a pesar de las apariencias, en el análisis último todo debe ser reducido a lo finito (Baire, [13, pág. 264], [21, pág. 313]).

> Hacer una elección puede ser escribir o nombrar el elemento elegido. Hacer una infinidad de elecciones no puede ser escribir o nombrar los elementos elegidos, uno a uno; la vida es demasiado corta. Por lo tanto se ha de decir qué significa hacer las elecciones. En general, entendemos por esto que se da una regla que define los elementos elegidos. Para mí, como para Hadamard, esta regla es igualmente indispensable sea la infinitud numerable o no (Lebesgue,[13, pág. 268], [21, pág. 316])

[3]Dos conjuntos de $\mathbb{R}^n$ son congruentes si podemos ir de uno a otro mediante alguna traslación por un elemento de $\mathbb{R}^n$.

[4]Ver el capítulo *Implicit uses by Future Critics* en [21, págs. 64- 76]

[5]Ver su carta a Borel, [13, págs. 264-269] en el francés original, [21, págs. 314-317] en traducción al inglés.

Entre las dudas suscitadas por el Axioma de Elección (1904), la crisis suscitada por la paradoja de Russell (publicada en 1903) y el antagonismo de Poincaré, Picard, Hermite, etc., la teoría de conjuntos fue poco a poco desterrada de la corriente principal de la investigación matemática en Francia. Sin embargo, antes de que aquello ocurriera, Egorov (que viajó a París en 1903) y Luzin (que lo hizo en 1905 y, de nuevo, en 1913) habían tomado el relevo. Partiendo, entre otros, de los trabajos de Borel, Baire y Lebesgue, montaron un seminario de investigación en la Universidad de Moscú conocido con el nombre de Lusitania, embrión de la Escuela Matemática de Moscú (fundada por Lusin y Egorov en 1921) del que formaron parte, entre otros y además de Lusin y Egorov, Shnirelman, Bari, Urhyson, Sierpinski y Suslin.

Egorov investigó, fundamentalmente, análisis armónico (potenciales, sistemas triplemente ortogonales, teoría de la medida). El teorema de Egorov (1910) afirma que si una sucesión $\{f_n\}$ de funciones medibles converge puntualmente a una función f, las restricciones de las f_n al complementario de un conjunto de medida tan pequeña como se quiera convergen uniformemente a la restricción de f. Luzin, por su parte, llegó a ser uno de los matemáticos más importantes del siglo XX e investigó fundamentalmente en teoría descriptiva de conjuntos y análisis funcional (*point-set topology*). En 1912 resolvió la conjetura de Fatou al construir una serie trigonométrica que diverge en casi todo punto (con coeficientes que convergen monótonamente a cero), en 1918 descubrió y definió los conjuntos analíticos y en 1919 estudió propiedades de contorno de funciones analíticas (comportamiento bajo aplicaciones conformes). Pese a las reservas que en sus cartas de 1905 había expresado, Lebesgue escribió en 1913,

> Exigences mathématiques et exigences philosophiques sont constamment associées, on peut meme dire fondues. M. Luzin examine les questions d'un point de vue philosophique et aboutit ainsi à des résultats mathématiques: originalité sans précédent! (Lebesgue, Prefacio al libro de Luzin [18, págs. ix, xi]).

Durante las conferencias sobre filosofía y matemáticas que en 1932 impartió en la Universidad de Yale, Hermann Wey leyó,

> La matemática es la ciencia de lo infinito, su objetivo la comprensión simbólica de lo infinito con medios humanos, esto es, finitos. El gran logro de los griegos ha sido haber hecho el contraste entre lo finito y lo infinito fructífero para el conocimiento de la realidad. Viniendo del Oriente, la intuición religiosa del infinito, el $\alpha\pi\alpha\iota\rho\sigma\nu$, se asentó en el alma griega. Esta tensión entre lo finito y lo infinito y su conciliación, se convierte en motor direccional de la investigación griega (Hermann Weyl, *The open world: three lectures on the metaphysical implications of science*, Yale University Press, 1932)

Ya sea porque, como sugiere Weyl –e intentan argumentar Graham y Kantor en su libro ya mencionado–, viniendo del Oriente –como el propio Cantor, habría que añadir– la intuición religiosa del infinito se asentó en el alma rusa, ya sea porque, como Gauss, Riemann o Hausdorff, se atrevieron a pensar de otra manera, el caso es que Egorov y Luzin investigaron toda su vida en torno a lo infinito y la discontinuidad.

La amistad inicial entre Luzin y Florenski pronto se había extendido a Egorov, como las cartas entre ambos demuestran ([12]). No sorprende, pues, que leyendo las notas tomadas por Florenski para sus clases en [7] y [9], encontremos que las ideas geométricas que sustentan las matemáticas de Egorov y Luzin sustenten, a su vez, muchas de las ideas que sobre el espacio transmitió Florenski en sus clases

de los Vkhutemas. Durante los años en que estuvo prisionero (desde 1933 hasta su ejecución en 1937) Pável Florenski mantuvo una correspondencia regular y abundante con su familia. En una carta que escribió en 1937 a su hijo Kirill desde el campo de concentración de las Solovski, Florenski elabora a vuela pluma una lista de sus intereses que comienza de la siguiente manera.

> *En Matemáticas:* 1) Los conceptos matemáticos como constitutivos de la filosofía (discontinuidad, funciones, etc.). 2) La teoría de los conjuntos y la teoría de las funciones de variable real. 3) Los imaginarios geométricos. 4) La individualidad de los números (número, forma). 5) El estudio de las curvas *in concreto*. 6) Los métodos de análisis de la forma. *En filosofía e historia de la filosofía...* (Florenski, en [10, pág. 18]).

Veamos, a continuación, algunos párrafos ilustrativos extraídos de sus apuntes para las clases que impartió en los Vkhutemas entre 1921 y 1924.

> La estructura del espacio está caracterizada por su curvatura. Me siento muy culpable por el hecho de molestarles con conceptos matemáticos, pero no veo otro camino para acercarme a los problemas estéticos. Aquello que ha sido elaborado en la matemática contemporánea puede ser transferido completamente al terreno de la estética. Desgraciadamente, no podemos limitarnos a conceptos propios de la estética. Por eso el concepto de curvatura me obliga a importunarles ahora con la matemática (Florenski [10, pág. 291]).

> Hablando en términos geométricos, ¿qué significa, entonces, representar alguna realidad? Significa poner los puntos del espacio representado en correlación con los de algún otro espacio, en este caso el del plano. Pero la realidad es por lo menos tridimensional. Incluso si prescindimos de la cuarta dimensión del tiempo, sin la cual el arte es imposible, el plano es sólo bidimensional. ¿Es posible semejante correspondencia? ¿Es posible reflejar una imagen de cuatro dimensiones, o tres para una mayor sencillez, en una superficie bidimensional? ¿Tendrá ésta suficientes puntos de correspondencia para los puntos de la imagen? O, hablando matemáticamente, ¿puede compararse la potencia de la imagen tridimensional con la de la bidimensional? La respuesta que se impone naturalmente es: "Por supuesto que no". "Por supuesto que no, ya que dentro de una imagen tridimensional hay una multitud infinita de secciones bidimensionales y, por tanto, su potencia es infinitamente mayor que la potencia de cada sección por separado."Sin embargo, la investigación atenta de esta cuestión en la teoría de conjuntos de puntos muestra que la respuesta no es tan sencilla como parece a primera vista; es más, la respuesta tan aparentemente natural que hemos dado no puede darse por correcta. Más concretamente, la potencia de cualquier imagen tridimensional, o incluso multidimensional, es la misma que la potencia de cualquier imagen bidimensional, o incluso unidimensional. Se puede representar una realidad de tres y cuatro dimensiones sobre el plano, y no sólo sobre el plano, sino sobre cualquier segmento de una línea recta o curva. Es incluso posible establecer la imagen a través de una cantidad infinita de correspondencias tanto aritméticas o analíticas como geométricas. Como modelo de lo primero puede servir el método de Georg Cantor, y de las segundas, la curva de Peano y la curva de Hilbert. [...] Con el método de Cantor la imagen se traslada punto por punto, de manera que cualquier punto de la imagen se corresponde *sólo con un* punto de la representación y, al revés, cada punto de esta última refleja sólo un punto de lo que representa. En este sentido, la correspondencia cantoriana

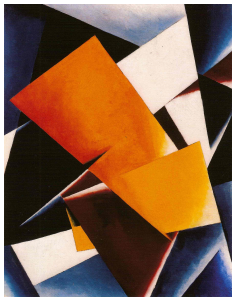
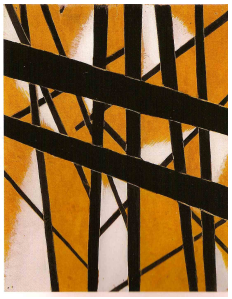
> satisface el concepto más común de la representación. Su otra característica se aleja extraordinariamente, sin embargo, de esta última: como ocurre con el resto de las correspondencias recíprocamente iguales, ésta no guarda las relaciones de vecindad con los puntos, no respeta su orden y sus proporciones, es decir, no puede ser continua. [...] Por otro lado, la correspondencia de Peano, Hilbert, etc., no puede ser recíprocamente igual, como fue demostrado por Lűroth, Jurgens y los demás, de modo que un punto de la línea no siempre se representa con un solo punto del cuadrado y, además, esta correspondencia no es del todo continua. En otras palabras, la representación de un cuadrado sobre una línea, o de un volumen sobre una superficie, traslada *todos* los puntos, pero es incapaz de transmitir la *forma* de lo representado como algo entero, como un objeto internamente determinado en su estructura: *se transmite el contenido del espacio pero no su organización*. Para representar un espacio con *todo* su contenido de puntos es preciso, hablando metafóricamente, *o bien*, pulverizarlo hasta dejarlo convertido en un polvo infinitamente fino y, una vez bien mezclado, *esparcirlo* por la superficie de la representación, de manera que de su organización inicial no quede ni rastro; *o bien* laminarlo en capas, de modo que no quede nada de su forma original, para luego colocar estos estratos *repitiendo* los mismos elementos de la forma y por el otro lado, encajando recíprocamente estos elementos los unos dentro de los otros. [...] No hay manera de colocar la cáscara, o un trozo de la cáscara de un huevo, sobre la superficie de mármol de una mesa si no es destruyendo su forma, reduciéndola a polvo fino; por la misma razón que no se puede *representar*, en sentido estricto, un huevo sobre papel o lienzo. [...] En resumen: *es posible representar un espacio sobre una superficie pero sólo destruyendo la forma de lo representado*. Mientras tanto precisamente la forma y sólo la forma es el objeto del arte plástico. Por consiguiente, queda dictada la sentencia final de la pintura y, en general, de las artes plásticas, pues si éstas pretenden ofrecer un simulacro de la realidad, *el naturalismo es, sencillamente, imposible* ([7, págs. 84-89]).

Si el naturalismo es imposible, ¿cuál ha de ser el objetivo del pintor? ¿qué puede representar en su lienzo?

> La tarea del artista es organizar un cierto absoluto, un cierto todo cerrado en sí mismo, y la base de este absoluto es el espacio.Y de esto se deduce que el espacio de la obra de arte debe, necesariamente, ser cerrado en sí mismo ([10, pág. 286]).

> Finalmente, todo el sentido del arte se reduce a la organización del espacio.[...] Esquemáticamente, se puede decir que distribuyendo el color, la tinta, sobre la tela, se presenta una nueva realidad. Nace un nuevo espacio ([10, pág. 296]).

Desde 1921 hasta 1924, Pável Florenski tuvo a su cargo en los Vkhutemas la asignatura *Teoría del espacio*. En la misma escuela trabajaba la pintora constructivista Lyobov Popova, que impartió desde que éstos se abriesen en 1920 la asignatura básica troncal *La influencia máxima del color*. Popova escribió en 1921 ([24, pág. 166]) el siguiente texto como comentario a su obra.

1. La representación, en cuanto resultado de la producción artística, es un objetivo que ha satisfecho las necesidades prácticas desde el Renacimiento hasta hace muy poco (la pintura de caballete, los iconos, los frescos, las esculturas situadas en lugares públicos, en cortes y palacios, la arquitectura como objeto visual, etcétera). 2. El análisis de los elementos formales del arte, que se ha convertido en el objetivo de la producción en las últimas décadas, ha supuesto una crisis en el arte pictórico. 3. El auténtico arte debería ser la síntesis resultante de este análisis: en Alemania y los países culturalmente afines, se expresa a través de aproximaciones emocionales, psicológicas y metafísicas a los objetivos del arte; en Francia, la síntesis se reduce a adquirir cierta destreza en el manejo de los materiales como consecuencia del estudio analítico. 4. En Rusia, como resultado de las condiciones sociales y políticas que estamos experimentando, el objetivo de la nueva síntesis es la *organización*. La organización es el principio en que se basa toda actividad creativa, incluida la composición artística. 5. La era en la que acaba de adentrarse el hombre contemporáneo se caracteriza por el florecimiento de la industrial, y por este motivo, la organización de los elementos de la producción artística debe establecer una relación con el orden de los componentes materiales de la vida, es decir, con la industria y con lo que se denomina producción. 6. Una producción industrial específica, en la que la creatividad artística desempeñe una función, no tendrá nada que ver con la antigua aproximación estética al objeto, en la medida en que se dejará de prestar atención a la decoración del objeto por medio de técnicas artísticas (artes aplicadas), y la organización se convertirá en el principio directo de la creación de los objetos prácticos, incluso cotidianos 7. Por tanto, el "arte figurativo"–la pintura, la escultura y hasta la arquitectura (ya que hasta ahora en arquitectura la imagen visual ha suplantado a la construcción espacial práctica)– ya no desempeña función alguna, ya no es necesario para la conciencia de nuestra época, y todo lo que el arte puede ofrecer debe considerarse sencillamente como un salto atrás. 8. Por esta razón, las formas figurativas de cualquier tipo, como la pintura de caballete, el dibujo, el grabado, la escultura, etc., sólo serán útiles si (1) representan una fase experimental destinada a la búsqueda de las nuevas técnicas que se precisan, y (2) en la medida en que actúen como proyecciones complementarias y esquemas de construcción.

4. Conclusión

Cuenta Daniel-Henry Khanweiler ([16, pág. 44]), galerista de los cubistas en París, que Picasso le dijo, "En un cuadro de Rafael es imposible medir la distancia que hay entre la punta de la nariz y la boca. Yo quiero pintar cuadros en los que esto sea posible". Claramente, los constructivistas no.

5. Agradecimientos

A Mariano Martínez y Juan Tarrés, por la generosidad con la que, una vez más, me han dejado hacer uso de sus textos y sus palabras sobre las matemáticas del siglo XIX. A Barry Mazur y Horacio Fernández por su ayuda localizando los textos matemáticos de Pável Florensky. A José Ruiz por su ayuda localizando las cartas de Pável Florenski desde la cárcel y los textos matemáticos anteriores a 1904 en que se hizo uso implícito del Axioma de Elección. Y, muy especialmente, José Manuel Gamboa e Ignacio Luengo por sus correcciones, observaciones y comentarios a la primera versión de este texto.

Referencias

[1] Dante Alighieri 1312-1321, *La Divina Comedia, Paraíso*, traducción al castellano de Angel Crespo, Planeta 1990, págs. 395-591.

[2] Solomon Bochner, *El papel de la matemática en el desarrollo de la ciencia* (1966). Traducción al castellano de Mariano Martínez, Alianza Universidad 689, 1991.

[3] Georg Cantor, Richard Dedekind, *Correspondencia epistolar en torno al concepto de dimensión*, en [5].

[4] Capi Corrales, *Contando el espacio*, mobcoop ediciones, Madrid 2000.

[5] John Fauvel, Jeremy Gray, *The History of Mathematics: a reader?*, The Open University, (1987).

[6] José Ferreirós, *Riemanniana Selecta*, Ediciones del CSIC, Madrid 2000.

[7] Pável Florenski, *La perspectiva invertida* (1920). Siruela, 2005.

[8] Pável Florenski, *Lo spazio e il tempo nell'arte* (1924). Adelphi Edizioni, Milano 1995.

[9] Pável Florenski, *Lezioni al Vchutemas anno accademico 1923/24*, en [8],págs. 243-332.

[10] Pável Florenski, *Cartas de la prisión y de los campos*, Ediciones Universidad de Navarra, 2005.

[11] Carl Friedrich Gauss, *Disquisitiones generales circa superficies curvas*, 1828, Werke, vol 4, sec. 13.

[12] Loren Graham, Jean-Michel Kantor, *Naming Infinity. A true story of religious mysticism and mathematical creativity.* Harvard University Press 2009.

[13] Jacques Hadamard, *Cinq lettres sur la théorie des ensembles*, Bulletin de la SMF, tomo 33 (1905), págs. 261-273.

[14] Felix Hausdorff, *Grundzűge der Mengenlehre* (1914), edición en inglés, Chelsea P.C., NYC 1957.

[15] Charles Hermite, *Lettres de Charles Hermite a. Gősta Mittag-Leffler (1874-1883)*, Cahiers du Seminaire d'histoire des mathématiques, 5 (1984), págs. 49-285.

[16] Daniel-Henry Kahnweiler, *El camino hacia el cubismo* (1920), Quaderns Crema, Barcelona 1997.

[17] Erle Loran, *Cézanne's Composition* (1943), University of California Press 1963.

[18] Nicolas Luzin, *Leçons sur les ensembles analytiques et leurs applications*, Gauthier-Villars, Paris, 1930.

[19] Barry Mazur, *Imaginning numbers* (particularly the square root of minus fifteen), Farra, Syraus and Giroux 2003.

[20] Arthut I. Miller, *Einstein, Picasso: Space, Time and the Beauty that Causes Havoc*, Basic Books 2001.

[21] Gregory H. Moore, *Zermelo's Axiom of Choice. Its origins, development and influence*, Springer-Verlag, 1982.

[22] Mark A. Petersen, *Dante and the 3-sphere*, American Journal of Physics 47 (1979), págs. 1031-1035.

[23] Henri Poincaré, *La ciencia y la hipótesis* (1902), Ediciones Austral 1963 (3a. edición).

[24] Lyubov Popova, *Comentarios a los dibujos*, en "Rodchenko y Popova: definiendo el constructivismo", Ediciones MNCA Reina Sofía 2009.

[25] Bernhard Riemann, *Fragmentos sobre variedades y geometría*, 1852/53, en [6], págs. 93-95.

[26] Bernhard Riemann, *Sobre las hipótesis en que se funda la geometría* (Lección de habilitación como profesor, 1854; publicada en 1868), en [6], págs. 2-18.

[27] Juan Tarrés, *Historia de la teoría de la dimensión*, en "Seminario de Historia de la Matemática I", Universidad Complutense, Madrid 1991, págs. 59-96.

[28] Juan Tarrés, *La Topología General desde sus comienzos hasta Hausdorff*, en "Historia de la Matemática en el sigo XIX", Edición de la Real Academia de las Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Madrid 1994, págs. 191-211.

Ultrametric spaces, valued and semivalued groups arising from the Theory of Shape

Eduardo Cuchillo-Ibáñez, Manuel A. Morón,

and Francisco R. Ruiz del Portal

Departamento de Matemática Aplicada
E.T.S.I.Montes
Universidad Politécnica
E-28040 Madrid, Spain
eduardo.cuchillo@upm.es

Departamento de Geometría y Topología
Facultad de Ciencias Matemáticas
Universidad Complutense de Madrid
E-28040 Madrid, Spain
mamoron@mat.ucm.es
francisco_romero@mat.ucm.es

This paper is dedicated to Professor Juan Tarrés on the occasion of his retirement.

ABSTRACT

In this paper we construct many generalized ultrametrics in the sets of shape morphisms between topological spaces. We recognize a topology in these sets which is independent on the shape representation of the spaces. We construct valuations and semivaluations on groups of shape equivalences and on n-th shape groups. We also connect shape theory, for arbitrary topological spaces, with the algebraic theory of generalized ultrametric spaces developed by S. Priess-Crampe and P. Ribenboim among other authors.

Key words: Shape morphisms, shape equivalences, shape groups, ultrametrics, valuations and semivaluations on groups.

2010 Mathematics Subject Classification: 55P55, 54C56, 55Q07, 54H11.

1. Introduction

In [19], [20], [21] and [22] the authors constructed and exploited a non Archimedean metric (or ultrametric) in the set of pointed and unpointed shape morphisms between compact metric spaces. In [6], this construction was extended, in the topological setting, to the arbitrary case.

Independently on this fact, in [12], [13], [23], [24], [25], [26] and [27], it was developed the theory of the so called *"Generalized ultrametric spaces"*, a generalization of the classic definition of ultrametric spaces.

The aim of this paper is, at the same time, to extend our techniques in [19] and [20] and to provide of many topological examples the pure "algebraic" theory developed mainly by S. Priess-Crampe and P. Ribenboim.

The authors have been supported by the DGES.

We also obtain, in a natural way, semivaluations and valuations on the groups of shape equivalences and nth-shape groups.

It has been proved that the pure algebraic study of the groups of equivalences or the nth-shape groups, for arbitrary topological spaces, is not enough to obtain topological information on the spaces, but if we consider the more rich structure of topological groups, that we give on them, then it could be possible to reach better topological information on the spaces, as we point out in [20], [21] and [22]. Since in the case of good spaces as polyhedra, manifolds (more generally ANR's), these topological groups are discrete, the new information given by the conjunction of Algebra and Topology reduces, in this case, to algebraic information on that groups and the history of Algebraic Topology has proved that it is adequate to obtain topological or geometrical information on these special spaces. In summary, we think that "if you want to obtain topological information on general spaces on the line suggested by homotopy theory, you must change homotopy by shape and you should consider the natural structure of topological groups not only the algebraic ones".

Information on shape theory can be found in [4], [8] and [16]. In this case we recommend [16] for definitions and notations used herein.

2. Generalized ultrametric spaces of shape morphisms associated to HPol expansions

Let X, Y be topological spaces. Assume

$$\underline{\mathbf{Y}} = (Y_\mu, q_{\mu,\mu'}, M)$$

to be an inverse system in HPol and let

$$\underline{\mathbf{q}} = \{q_\mu\}_{\mu\in M} : Y \longrightarrow \underline{\mathbf{Y}}$$

be an HPol-expansion of Y (see [16] for the basic definitions). We can suppose that $(M, \leq)$ is a directed set. Denote by $\mathcal{L}(M)$ the set of all lower classes in M ordered by inclusion. Let us recall that $\Delta \subset M$ is called a *lower class* if for every $\delta \in \Delta$ and $\mu \in M$ with $\mu \leq \delta$, then $\mu \in \Delta$. From now on we consider the empty set $\varnothing$ as a lower class. Moreover, given two lower classes $\Delta, \Delta' \in \mathcal{L}(M)$ we say that $\Delta \leq \Delta'$ if and only if $\Delta \supset \Delta'$.

Proposition 2.1. *$(\mathcal{L}(M), \leq)$ is a partially ordered set with a least element (we will denote it by 0). Futhermore $\mathcal{L}(M)^* = \mathcal{L}(M) - \{0\}$ is downward directed.*

Proof. The least element is just the lower class M.

Suppose now that $\Delta, \Delta' \in \mathcal{L}(M)^*$ and define $\Delta'' = \Delta \cup \Delta'$. First of all let us see that Δ'' is a lower class. For a $\alpha'' \in \Delta''$, we imply that $\alpha'' \in \Delta$ or $\alpha'' \in \Delta'$. In any case, if $\alpha \leq \alpha''$ it is $\alpha \in \Delta$ or $\alpha \in \Delta'$, and consequently Δ'' is a lower class. Let us prove now that $\Delta'' \in \mathcal{L}(M)^*$; that is, $\Delta'' \neq M$. On the contrary, assume that $M = \Delta'' = \Delta \cup \Delta'$. Since $\Delta, \Delta' \in \mathcal{L}(M)^*$, it follows that $\Delta \neq \Delta \cap \Delta' \neq \Delta'$. Take $\alpha \in \Delta - \Delta'$, $\alpha' \in \Delta' - \Delta$. Since M is a directed set, there exists an element $\alpha'' \in M$ with $\alpha'' \geq \alpha, \alpha'$. As $\alpha'' \in \Delta$ or $\alpha'' \in \Delta'$, it follows that $\alpha' \in \Delta$ or $\alpha \in \Delta'$ which is a contradiction. So, $\Delta'' \in \mathcal{L}(M)^*$. □

The basic definition of (generalized) ultrametric we are going to use here is:

Definition 2.2. (see [12], page 25). Let X be a set and $(\Gamma, \leq)$ be a partial ordered set with a least element 0. An *ultrametric* on X is a map $d : X \times X \longrightarrow \Gamma$ such that for $x, y \in X$, $\gamma \in \Gamma$, it satisfies:

1) $d(x, y) = 0$ iff $x = y$.

2) $d(x, y) = d(y, x)$.

3) if $d(x, y) \leq \gamma$ and $d(y, z) \leq \gamma$, then $d(x, z) \leq \gamma$.

Now we can prove:

Theorem 2.3. *Let X, Y be topological spaces. Assume that $\underline{\mathbf{Y}} = (Y_\mu, q_{\mu,\mu'}, M)$ is an inverse system in HPol and let $\underline{\mathbf{q}} = \{q_\mu\} : Y \longrightarrow \underline{\mathbf{Y}}$ be an HPol-expansion of Y. Let $Sh(X, Y)$ be the set of all shape morphisms from X to Y. For $\alpha, \beta \in Sh(X, Y)$ the formula*

$$d(\alpha, \beta) = \{\mu \in M \mid q_\mu \circ \alpha = q_\mu \circ \beta \text{ (in the shape category)}\}$$

defines an ultrametric

$$d : Sh(X, Y) \times Sh(X, Y) \longrightarrow (\mathcal{L}(M), \leq).$$

Proof. Consider $\alpha = (\alpha_\mu)_{\mu \in M}$, $\beta = (\beta_\mu)_{\mu \in M}$ as representations of the corresponding shape morphisms (see [16]). If $\mu, \mu' \in M$, $\mu \leq \mu'$, we have the following equalities in homotopy:

$$\alpha_\mu = q_{\mu,\mu'} \circ \alpha_{\mu'} \text{ and } \beta_\mu = q_{\mu,\mu'} \circ \beta_{\mu'} .$$

Moreover $\alpha_\mu = q_\mu \circ \alpha$, $\beta_\mu = q_\mu \circ \beta$, where the compositions are within the shape category. Now, it is very easy to check that $d(\alpha, \beta) \in \mathcal{L}(M)$ and 1), 2) and 3) in Definition 2.2 (using the transitive property of the homotopy relation for the proof of 3)). □

In order to connect this construction with our first paper ([19]) on ultrametrics and shape, we have the following result whose proof is straightforward:

Proposition 2.4. *Let $(\mathcal{Q}, \rho)$ be the Hilbert cube with a fixed metric ρ. Suppose $Y \subset \mathcal{Q}$ is a closed subset and, for each real number $\varepsilon > 0$ take*

$$Y_\varepsilon = B(Y, \varepsilon) = \{q \in \mathcal{Q} \mid \rho(Y, q) < \varepsilon\} .$$

Given $\varepsilon' > \varepsilon > 0$, define $q_{\varepsilon,\varepsilon'} : Y_\varepsilon \longrightarrow Y_{\varepsilon'}$ and $q_\varepsilon : Y \longrightarrow Y_\varepsilon$ as the corresponding inclusions. Assume the reverse usual order in $\mathbb{R}^+$ and denote by $(\mathbb{R}^+)^{-1}$ the corresponding ordered set. Finally consider the inverse system

$$\underline{\mathbf{Y}} = (Y_\varepsilon, q_{\varepsilon,\varepsilon'}, (\mathbb{R}^+)^{-1})$$

and the HPol-expansion

$$\underline{\mathbf{q}} = \{q_\varepsilon\}_{\varepsilon \in \mathbb{R}^+} : Y \longrightarrow \underline{\mathbf{Y}} .$$

Then the generalized ultrametric d constructed in Theorem 2.3 (for this HPol-expansion) is just the complete non-Archimedean metric constructed in [19].

3. The canonical and the intrinsic topologies

Using the same idea as in [12] (page 34) we have:

Proposition 3.1. *Let X, Y be topological spaces. Assume that $\underline{\mathbf{Y}} = (Y_\mu, q_{\mu,\mu'}, M)$ is an inverse system in HPol and that $\underline{\mathbf{q}} : Y \longrightarrow \underline{\mathbf{Y}}$ is an HPol-expansion. For every $\Delta \in \mathcal{L}(M)^*$ and $\alpha \in Sh(X,Y)$ consider*

$$B_\Delta(\alpha) = \{\beta \in Sh(X,Y) \mid d(\alpha,\beta) \leq \Delta\}.$$

Then the family

$$\{B_\Delta(\alpha) \mid \alpha \in Sh(X,Y), \Delta \in \mathcal{L}(M)^*\}$$

is a base for a topology in $Sh(X,Y)$ which is completely regular Hausdorff and zero-dimensional. We call (as in [12]) this topology the canonical topology induced by the ultrametric d.

One of the main trouble to use this topology to obtain information related to shape theory is the fact that it depends, as we will prove in the next proposition, on the particular HPol-expansion used and not on the shape of the space involved:

Proposition 3.2. *Let Y be a topological space and $\underline{\mathbf{Y}} = (Y_\mu, q_{\mu,\mu'}, M)$ an inverse system on HPol. Suppose that $\underline{\mathbf{q}} = \{q_\mu\} : Y \longrightarrow \underline{\mathbf{Y}}$ is an HPol-expansion. Consider now the usual product order in $M \times M$ and define the new inverse system*

$$\underline{\mathbf{Y}}' = (Y_{(\mu,\gamma)}, q_{(\mu,\gamma),(\mu',\gamma')}, M \times M)$$

where $Y_{(\mu,\gamma)} = Y_\mu$, $q_{(\mu,\gamma),(\mu',\gamma')} = q_{\mu,\mu'}$. Then

$$\underline{\mathbf{q}}' = \{q'_{(\mu,\gamma)}\} : Y \longrightarrow \underline{\mathbf{Y}}'$$

is an HPol-expansion, where $q'_{(\mu,\gamma)} = q_\mu$. Furthermore for every topological space X, the canonical topology on $Sh(X,Y)$ induced by the ultrametric d (associated to the HPol-expansion $\underline{\mathbf{q}}'$ as in Theorem 2.3) is just the discrete one.

Proof. Fix a non maximal element $\gamma_0 \in M$ and take

$$D = \{(\mu,\gamma) \in M \times M \mid \gamma = \gamma_0\}.$$

Let $\Delta_D \in \mathcal{L}(M \times M)^*$ be the minimal lower class in $\mathcal{L}(M \times M)$ containing D, that is

$$\Delta_D = \{(\mu,\gamma) \in M \times M \mid \gamma \leq \gamma_0\}.$$

Now, if $\alpha \in Sh(X,Y)$ then $B_{\Delta_D}(\alpha) = \{\alpha\}$. □

Note that Propositions 2.4 and 3.2 in this paper and the fact (proved in [19]) that $Sh(X,Y)$ is, in general, non-discrete for compact metric spaces X, Y allow us to deduce that the canonical topologies depend on the particular HPol-expansion used.

The counterpart of the last proposition will be given in the next one, but we need first some words and definitions to motivate it. In [6] we defined a topology on the sets of shape morphisms which depends only on the shape of the involved spaces. It allowed us to construct many new shape invariants and to obtain some relationships

between shape theory and $\mathbb{N}$-compactness (see [13] for some relations between the canonical topologies and $\mathbb{N}$-compactness). Later, we saw in [12] (page 52, Corollary 9.6) the way to obtain the results in [6] as a by-product of the present paper. Let now $(M, \leq)$ be a direct set and consider $(\mathcal{L}(M), \leq)$ the corresponding ordered set of lower classes in M. For every $\alpha \in M$ denote by $[\alpha]$ the lower class generated by α, that is,

$$[\alpha] = \{\alpha' \in M \mid \alpha \geq \alpha'\}.$$

Define

$$\begin{array}{rccc} \phi: & (M, \leq) & \longrightarrow & (\mathcal{L}(M), \leq) \\ & \mu & \mapsto & [\mu] \end{array}$$

ϕ needs not to be injective (for example, think on $(M, \leq)$ as the Čech system associated to a topological space -see [14]-), but we have that if $\mu \geq \mu'$ then $[\mu] \leq [\mu']$ and $(\phi(M), \leq)$ is a partial ordered set while $(M, \leq)$ maybe not. Note also that $(\phi(M), \leq)$ is downward directed in $\mathcal{L}(M)$ because M is a directed set. Suppose now that $\underline{\mathbf{Y}} = (Y_\mu, q_{\mu\mu'}, M)$ is an inverse system and that $\underline{\mathbf{q}} = \{q_\mu\} : Y \longrightarrow \underline{\mathbf{Y}}$ is an HPol-expansion. Let X be an arbitrary topological space and consider $Sh(X, Y)$ the set of shape morphisms from X to Y. Then the family

$$\left\{B_{[\mu]}(\alpha) \mid \alpha \in Sh(X, Y), \mu \in M\right\}$$

is a base for a topology on $Sh(X, Y)$ (see [12]). We call it the *intrinsic topology*. The main reason is the following result:

Proposition 3.3. *The intrinsic topology on $Sh(X, Y)$ is independent on the fixed HPol-expansion of Y and it coincides with the topology defined and studied in [6].*

From [19], [6] and [13] we can obtain the next result which, in particular, says that, outside from the compact metric case, the intrinsic topology may not be ultrametrizable.

Proposition 3.4. *a) If Y is a compact metric space and X is an arbitrary topological space, the intrinsic topology on $Sh(X, Y)$ is induced by an ultrametric.*

b) If $*$ is a one point space, the intrinsic topology on $Sh(*, \{0,1\}^{\omega_1})$ ($\{0,1\}$ discrete) is not induced by an ultrametric.

Proof. a) It is enough to use the HPol-expansion $\underline{\mathbf{q}}$ described in Proposition 2.4.

b) From [6] it follows that the intrinsic topology on $Sh(*, \{0,1\}^{\omega_1})$ is just, up one identification, the product topology on $\{0,1\}^{\omega_1}$ and it is not ultrametrizable ([13]). □

4. Semivalued and valued groups of shape equivalences

First of all, given a topological space Y, let us denote by $E(Y)$ the group of shape equivalences. Take now an inverse system $\underline{\mathbf{Y}} = (Y_\mu, q_{\mu\mu'}, M)$ and an HPol-expansion $\underline{\mathbf{q}} = \{q_\mu\} : Y \longrightarrow \underline{\mathbf{Y}}$. If d is the ultrametric on $Sh(Y, Y)$ defined in Theorem 2.3, we can state the next

Theorem 4.1. *The map*

$$\begin{array}{rccc} \nu: & E(Y) & \longrightarrow & (\mathcal{L}(M), \leq) \\ & f & \mapsto & \nu(f) = d(f, id_Y) \end{array}$$

is a semivaluation in the sense of [12] (page 37. See also [27]).

Proof. We must prove the following:

a) $\nu(f) = 0$ iff $f = id_Y$.

b) $\nu(f^{-1}) = \nu(f)$ for every $f \in E(Y)$.

c) If $\nu(f) \leq \Delta$, $\nu(g) \leq \Delta$, then $\nu(g \circ f) \leq \Delta$.

a) is obvious because d is an ultrametric. Take now $f, g \in E(Y)$ with $d(f, g) \leq \Delta$. This means that

$$q_\mu \circ f = q_\mu \circ g$$

for every $\mu \in \Delta$. For each $h \in E(Y)$

$$q_\mu(g \circ h) = (q_\mu \circ g) \circ h = (q_\mu \circ f) \circ h = q_\mu(f \circ h)\,,$$

hence

$$d(f \circ h, g \circ h) \leq d(f, g)\,.$$

On the other hand

$$d(f, g) = d((f \circ h) \circ h^{-1}, (g \circ h) \circ h^{-1}) \leq d(f \circ h, g \circ h)\,.$$

This means that d is a right invariant ultrametric on $E(Y)$, that is,

$$d(f \circ h, g \circ h) = d(f, g)$$

for every $f, g, h \in E(Y)$. In particular,

$$\nu(f) = d(f, id_Y) = d(f \circ f^{-1}, id_Y \circ f^{-1}) = d(id_Y, f^{-1}) = \nu(f^{-1})$$

and b) is proved.

Now suppose that $\nu(f) \leq \Delta$ and $\nu(g) \leq \Delta$. Thus,

$$d(id_Y, f^{-1}) = d(f, id_Y) = \nu(f) \leq \Delta$$

and

$$d(g, id_Y) = \nu(g) \leq \Delta\,.$$

Since d is an ultrametric,

$$d(g, f^{-1}) \leq \Delta\,.$$

Consequently,

$$\nu(g \circ f) = d(g \circ f, id_Y) = d(g, f^{-1}) \leq \Delta$$

and the proof is finished. □

With the same notation as in Theorem 4.1:

Corollary 4.2. *(See [28] for related results) For every $\Delta \in \mathcal{L}(M)$, $B_\Delta(id_Y)$ is a subgroup of $E(Y)$.*

For the theory of shape, it could be convenient the study of E(Y) with the intrinsic topology. For simplicity and clearness, we are going to give an outline of such study within the compact metric case. Note that, in this case, ν is a valuation.

Proposition 4.3. *Let Y be a compact metric space. $E(Y)$, with the intrinsic topology, is a completely ultrametrizable (a real metric) separable topological group.*

Proof. Let us recall (see [19] or Theorem 1 in [6]) that the composition function is continuous and that, in this case (compact metric), the intrinsic topology in $Sh(Y,Y)$ is induced by the non Archimedean metric d constructed in [19]. The separability of $E(Y)$ follows from the fact that $(Sh(Y,Y),d)$ is homeomorphic to a closed subspace of the irrationals (see [19] Theorem 1.9).

Now, in order to prove that $(E(Y), d\,|_{E(Y)})$ is a topological group, it is enough to state that the assignment

$$\begin{array}{ccc} E(Y) & \longrightarrow & E(Y) \\ f & \mapsto & f^{-1} \end{array}$$

is continuous. Let $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \longrightarrow f$ in $E(Y)$, that is, $\{d(f_n,f)\}_{n\in\mathbb{N}} \longrightarrow 0$. Since d is a right invariant metric we deduce that

$$\{d(id_Y, f\circ f_n^{-1})\}_{n\in\mathbb{N}} = \{d(f_n\circ f_n^{-1}, f\circ f_n^{-1})\}_{n\in\mathbb{N}} \longrightarrow 0\,.$$

As the composition is continuous we have that

$$\{d(f^{-1}, f_n^{-1})\}_{n\in\mathbb{N}} = \{d(f^{-1}, f^{-1}\circ(f\circ f_n^{-1}))\}_{n\in\mathbb{N}} \longrightarrow 0$$

and therefore $(E(Y), d\,|_{E(Y)})$ is a topological group.

Finally, it is not difficult to prove that the formula

$$d'(f,g) = \max\{d(f,g), d(f^{-1}, g^{-1})\}$$

defines an equivalent complete non Archimedean metric on $E(Y)$. □

As a consequence we obtain

Corollary 4.4. *$E(Y)$ is countable iff $(E(Y),d)$ is uniformly discrete, that is, iff there is an $\varepsilon > 0$ such that if $d(f,g) < \varepsilon$ then $f = g$ $(f,g \in E(Y))$.*

Proof. Suppose that $E(Y)$ is countable. From the Baire theorem we have that $E(Y)$ is discrete (because of homogeneity). Let $\varepsilon > 0$ be such that $B(id_Y,\varepsilon) = \{id_Y\}$. Take $f,g \in E(Y)$ with $d(f,g) < \varepsilon$. From the right invariance of d,

$$d(id_Y, g\circ f^{-1}) = d(f,g) < \varepsilon\,,$$

hence $id_Y = g\circ f^{-1}$, consequently

$$0 = d(id_Y, g\circ f^{-1}) = d(f,g)$$

and $f = g$.

Assume now that $E(Y)$ is uniformly discrete. So, from separability, $E(Y)$ is countable. □

Remark 4.5. a) Note that if Y is an FANR-space (more generally, a calm compactum [5]) then $E(Y)$ is countable (because it is discrete).

b) If Y is an ANR then $E(Y)$ is just the group of homotopy equivalences (not maps but classes) and it is also countable.

From Theorem 3.1 in [19] we have that the natural projection

$$s : \mathcal{C}(X, Y) \longrightarrow Sh(X, Y)$$

is uniformly continuous, where $\mathcal{C}(X, Y)$ is the space of continuous functions from X to Y with the uniform convergence metric. In particular we obtain:

Proposition 4.6. *Let Y be a compact metric space and $H(Y)$ the topological group of autohomeomorphisms (with the uniform convergence topology), then the projection*

$$s : H(Y) \longrightarrow E(Y)$$

is a continuous (uniformly continuous) group homomorphism.

Remark 4.7. Many consequences can be drawn out from Proposition 4.6. In particular, we obtain many clopen subsets of $H(Y)$ depending on the shape classification of the elements of $H(Y)$. In the case of a compact ANR Y, the subgroup $H_0(Y)$ of $H(Y)$ formed by all homeomorphisms which are homotopic to the identity is a clopen normal subgroup of $H(Y)$ and the cardinal of the homotopy classes in $H(Y)$ is just the index of $H_0(Y)$ in $H(Y)$. We hope, in the future, to go further into this type of facts. Other aspects can be studied considering the projection $s : \mathcal{C}(X, Y) \longrightarrow Sh(X, Y)$. In many cases, for example if Y is calm, the limit of homeomorphisms is a shape equivalence and, in some cases, it is a homotopy equivalence. Another fact we reach is that the shape classes are closed in $\mathcal{C}(X, Y)$ while homotopy classes are, in general, not.

In order to show that our construction is not vacuous in meaning we have the following

Proposition 4.8. *For a compact zero-dimensional space Y the projection $s : H(Y) \longrightarrow E(Y)$ is a uniformly continuous homeomorphism (with uniformly continuous inverse).*

We could give a direct demonstration of the above proposition (we left it to the reader) but note that it is also a consequence of the well-known Banach's open mapping theorem for separable and completely metrizable topological groups.

The last proposition provides us of many examples of spaces Y such that $(E(Y), d)$ is noncomplete. The completeness of $(E(Y), d)$ is an important fact, the reason is the next result:

Proposition 4.9. *$(E(Y), d)$ is complete iff the limit of any sequence of shape equivalences in $Sh(X, Y)$ is a shape equivalence.*

The first result along this line (from [19]) is the following:

Proposition 4.10. *Let Y be a calm compact metric space (for example, a space shape dominated by a polyhedron). Then $(E(Y), d)$ is uniformly discrete, so complete.*

As a direct consequence we have:

Corollary 4.11. *Let Y be a calm compact metric space (for example, a solenoid, a maniflod, a polyhedrom...) and $\mathcal{C}(Y, Y)$ be the space of continuous functions with the uniform convergence topology. If the sequence $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{C}(Y, Y)$ converges to f and every f_n generates a shape equivalence (in particular, if each f_n is a homeomorphism) then f generates a shape equivalence.*

Proof. In fact the shape morphisms generated by f_n and f are equals for almost all $n \in \mathbb{N}$. □

Now from Corollary 4.4 we imply:

Proposition 4.12. *If the group $E(Y)$ is finitely (even countably) generated, then $(E(Y), d)$ is complete.*

Another result on completeness is:

Proposition 4.13. *When $E(Y)$ is abelian, $(E(Y), d)$ is complete.*

Proof. Since d is right invariant and $E(Y)$ abelian, then d is in fact invariant (i.e., left and right invariant). From [15] and the topological completeness of $E(Y)$ it follows that d is complete. □

Remark 4.14. a) Note that the above procedure permits us to prove that the center $(Z(Y), d)$ of $(E(Y), d)$ is always complete.

b) We could think that, in general, the center $Z(Y)$ is "small", at least topologically, but in [18] there is an example (in the pointed case) where $Z(Y)$ is not compact.

Let us establish now:

Proposition 4.15. *If $E(Y)$ is locally compact, then $(E(Y), d)$ is complete.*

Proof. Since $E(Y)$ is locally compact, there exists an $\varepsilon > 0$ such that $B(e, \varepsilon)$ is a compact subgroup of $E(Y)$, where e is the neutral element of $E(Y)$. Moreover, for every $g \in E(Y)$ it is $B(g, \varepsilon) = B(e, \varepsilon) \circ g$, thus $\{B(g, \varepsilon) \mid g \in E(Y)\}$ is a clopen partition of $E(Y)$. For a Cauchy sequence $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in $E(Y)$ we can assume the existence of $g \in E(Y)$ such that $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset B(g, \varepsilon)$. Take now $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset B(e, \varepsilon)$ with $f_n = h_n \circ g$. As $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{h_n \circ g\}_{n\in\mathbb{N}}$ and d is right invariant, $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ is a Cauchy sequence. If $h = \lim_{n\to\infty} h_n$, $h \in B(e, \varepsilon)$ and, therefore, $\lim_{n\to\infty} h_n^{-1} = h^{-1}$. In this way,

$$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \longrightarrow h \circ g$$

and

$$\{f_n^{-1}\}_{n\in\mathbb{N}} = \{g^{-1} \circ h_n^{-1}\}_{n\in\mathbb{N}} \longrightarrow g^{-1} \circ h^{-1}\,,$$

so $(E(Y), d)$ is complete. □

Using analogous arguments as in the precedent proof we can obtain

Proposition 4.16. *a) If $(Sh(Y, Y), d)$ (see [19]) is locally compact then $E(Y)$ is locally compact (and so complete).*

b) If $Sh(Y, Y)$ is compact then $E(Y)$ is compact.

Remark 4.17. a) There are many examples showing that $E(Y)$ is compact but $Sh(Y, Y)$ is not (take $Y = S^n$, $n \in \mathbb{N}$).

b) From [7] and Proposition 4.8 we can obtain many examples of zero-dimensional compact metric spaces Y with $(E(Y), d)$ non complete.

c) Problem: Is $(Z(Y), d)$ always locally compact?

5. Semivaluation and valuation on shape groups

The n-th shape groups play the same role in shape theory as the n-th homotopy groups do in homotopy theory and they coincide in the class of ANR's (for example, manifolds, polyhedra, ...).

The intrinsic topology (in the pointed case) allows us, in particular, to give a natural structure of topological group on the n-th shape group. As in the third section, we confine ourselves into the compact metric case. The way to go further is that pointed out in Sections 1 and 2 of this paper (but in the pointed case).

Some of the authors (see [20]) have described a way to construct invariant ultrametrics (in the sense of [28]) on the shape groups. Then, they constructed valued groups in the sense of [27] (or normed groups [10]).

Let us recall the following

Proposition 5.1. *(see [20], Proposition 3) For any pointed compact metric space Y and any $n \in \mathbb{N}$ there exists a norm $\|\cdot\|$ on the shape group $\check{\Pi}_n(Y)$ such that*

i) $\|\cdot\|$ *is canonical, i.e., independent on any concrete presentation of the group.*

ii) $\|\alpha\beta\alpha^{-1}\| = \|\beta\|$ *for each* $\alpha, \beta \in \check{\Pi}_n(Y)$.

iii) $\|\alpha\| = \|\alpha^{-1}\|$ *for every* $\alpha \in \check{\Pi}_n(Y)$.

iv) $\|\cdot\|$ *leads to a left and right invariant complete ultrametric on* $\check{\Pi}_n(Y)$ *given by* $d(\alpha, \beta) = \|\alpha\beta^{-1}\|$.

Remark 5.2. a) As we said before, the norm $\|\cdot\|$ in the last proposition satisfies the properties i), ii), iii) of [10] (page 386) in the Farkas's definition of norms on groups.

b) One of the first authors who considered special kind of norms (non Archimedean) on groups related to topology was Alexander in homology theory ([1] and [2]). See also Markov [17] for some general contructions.

c) The kind of topology that we obtain on the shape groups by means of the norms $\|\cdot\|$ is just that defined in [11] under the name of subgroup topology, redefined (in some sense) in [3] and used in [9] and [14] to get Whitehead type theorems in shape theory.

The unique results we want to point out now for the shape groups with the topology defined by $\|\cdot\|$ are the following consequences of Theorem 3.5 in [11]:

Proposition 5.3. *For a pointed metric compact space (Y, y_0), the normed shape group $(\check{\Pi}_n(Y, y_0), \|\cdot\|)$ is compact iff the normal subgroups $B(e, \varepsilon) = \{\alpha \in \check{\Pi}_n(Y, y_0) : \|\alpha\| < \varepsilon\}$ are of finite index in $\check{\Pi}_n(Y, y_0)$.*

Corollary 5.4. *Let (Y, y_0) be a pointed metric compact space such that*

$$(Y, y_0) = \varprojlim \left\{ (P_n, \{p_0\}_n), \phi_n \right\},$$

where $(P_n, \{p_0\}_n)$ are pointed polyhedra with finite m-homotopy group (for all $n \in \mathbb{N}$). Then, the mth-shape group $\Pi_m(Y, y_0)$ is compact.

Remark 5.5. Note that the analogous result for the groups of (unpointed) shape equivalences is not true. For example, the Cantor discontinuum C is the inverse limit of finite spaces -so with finite groups of shape equivalences- but the topological group of shape equivalences on C is not compact.

References

[1] Alexander, J.W., On the homology groups of abstract spaces, Ann. of Math. 35 (1934), 130–151.

[2] Alexander, J.W. and Cohen, L.W., *A classification of the homology groups of compact spaces*, Ann. of Math. 33 (1932), 538–566.

[3] Atiyah, M. and Segal, G.B., Equivariant K-theory and its completion, J. Diff. Geom. 3 (1969), 1–18.

[4] Borsuk, K., Theory of shape, Monografie Matematyczne 59, Polish Scientific Publishers, Warszawa 1975.

[5] Cerin, Z., Homotopy properties of locally compact spaces at infinity-calmness and smoothness, Pacific J. of Math. 79 (1978), 69–91.

[6] Cuchillo-Ibáñez, E., Morón, M.A., Ruiz del Portal, F.R. and Sanjurjo, J.M.R., A topology for the sets of shape morphisms, Top. Appl. 94 (1999), 51-60.

[7] De Groot, J., Groups represented by homeomorphism groups I, Math. Ann. 138 (1959), 80–102.

[8] Dydak, J. and Segal, J., Shape theory: an introduction, Lectures Notes in Math. 688, Springer-Verlag, Berlin 1978.

[9] Edwards, D.A. and Geoghegan, R., Compacta weak shape equivalent to ANR's, Fund. Math. 90 (1975), 115–124.

[10] Farkas, D.R., The algebra of norms and expanding maps on groups, J. Algebra 133 (1990), 386–403.

[11] Hall, M.Jr., A topology for free groups and related groups, Ann. of Math. 52 (1950), 127–139.

[12] Heckmanns, U., Ultrametric spaces, english version of the Doctoral dissertation, preprint Munchen 1996.

[13] Heckmanns, U., On the topology of ultrametric spaces, P. Simon (ed.): Proc. 8th Prague Topology Symposium (1997), 149-156.

[14] Keesling, J., On the Whitehead theorem in shape theory, Fund. Math. 92 (1976), 247–253.

[15] Klee, V., Invariant metrics in groups, Proc. A.M.S. 3 (1952), 484–487.

[16] Mardesic, S. and Segal, J., Shape Theory, North Holland, Amsterdam 1982.

[17] Markov, A.A., On free topological groups, [Izv. Akad. Nauk. SSSR, Ser. Mat. 9 (1995), 3–64] Translation of the A.M.S.

[18] Maruyama, K., Finite complexes whose self-homotopy equivalence groups realize the infinite cyclic group, Canad. Math. Bull. 37 (1994), 534–536.

[19] Morón, M.A. and Ruiz del Portal, F.R., Shape as a Cantor completion process, Math. Z. 225 (1997), 67–86.

[20] Morón, M.A. and Ruiz del Portal, F.R., Ultrametrics and infinite dimensional Whitehead theorems in shape theory, Manuscripta Math. 89 (1996), 325–333.

[21] Morón, M.A. and Ruiz del Portal, F.R., Spaces of discrete shape and C-refinable maps that induce shape equivalences, J. Math. Soc. Japan 49 (1997), 713–721.

[22] Morón, M.A. and Ruiz del Portal, F.R., On weak shape equivalences, Top. Appl. 92 (1999), 225-236.

[23] Priess-Crampe, S. and Ribenboim, P., Equivalence relations and spherically complete ultrametric spaces, C. R. Acad. Sci. Paris 320, Series I (1995), 1187–1192.

[24] Priess-Crampe, S. and Ribenboim, P., The skeleton, Hahn spaces and immediate extensions of ultrametric spaces, C. R. Acad. Sci. Paris 320, Series I (1995), 1459–1464.

[25] Priess-Crampe, S. and Ribenboim, P., Generalized ultrametric spaces I, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 66 (1996), 55–73.

[26] Priess-Crampe, S. and Ribenboim, P., Generalized ultrametric spaces II, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 67 (1997), 19–31.

[27] Priess-Crampe, S. and Ribenboim, P., Homogeneous ultrametric spaces, J. Algebra 186 (1996), 401–435.

[28] Rangan, G., Non-archimedian metrizability of topological groups, Fund. Math. 68 (1970), 179–182.

Remarks on the Monge–Ampère equation: some free boundary problems in Geometry

Gregorio Díaz and Jesús Ildefonso Díaz

Departamento de Matemática Aplicada
Universidad Complutense de Madrid
E-28040 Madrid, Spain
gdiaz@mat.ucm.es
ildefonso.diaz@mat.ucm.es

. . . of a beautiful friendship
Rick Blaine (Casablanca)

ABSTRACT

This paper deals with several qualitative properties of solutions of some stationary and parabolic equations associated to the Monge–Ampère operator. Mainly, we focus our attention in the occurrence of a free boundary (separating the region where the solution u is locally a hyperplane, and so were the Hessian D^2u is vanishing, from the rest of the domain). Among other things, we take advantage of these proceedings to give a detailed version of some results already announced long time ago when dealing with other fully nonlinear equations (see the 1979 paper by the authors on other parabolic equations [23], Remark 2.25 of the 1985 monograph by the second author [26] and the 1985 paper by the first author [20]). In particular, our results apply to suitable formulations of the Gauss curvature flow and of the worn stones problems intensively studied in the literature.

Key words: Elliptic and parabolic Monge–Ampère equation, Gauss curvatures with flat regions, free boundary problem.

2010 Mathematics Subject Classification: 35J96, 35K96, 35R35, 53C45.

1. Introduction

Since the pioneering works by Gaspard Monge, Comte de Peluse, (1746-1818) and André–Marie Ampère (1775-1836), among others, it is well known that Geometry has been an extremely rich source of interesting problems in partial differential equations (see, e.g. [37] and [5]). Many properties of the most varied geometric structures are studied trough suitable differential equations as it has been explained in many

The research of the authors was partially supported the Research Group MOMAT (Ref. 910480) supported by UCM and by the project MTM2011-26119, (DGISPI, Spain). The research of J.I.D. has received funding from the ITN FIRST of the Seventh Framework Programme of the European Community. (Grant Agreement number 238702).

classical books as, for instance, the famous Goursat treatises [31] dating from the last years of the XIX century.

Here we shall concentrate our attention in several second order partial differential equations involving the Hessian determinant (what we could call as the Monge-Ampère operator) of the scalar unknown function u. Several concrete problems can be mentioned as source of our motivations. For instance, we can mention the series of works by L. Nirenberg and coauthors starting around the middle of the past century (see *e.g.* Nirenberg [38]) on some geometric problems, as isometric embedding whose most familiar one is the classical Minkowski problem, in which the Monge–Ampère equation arises in presence of a nonlinear perturbation term on the own unknown u. Nevertheless, today it is well-known that the Monge–Ampère operator has many applications, not only in Geometry, but also in applied areas: optimal transportation, optimal design of antenna arrays, vision, statistical mechanics, front formation in meteorology, financial mathematics (see *e.g.* the references [4, 10, 29, 44], mainly for optimal transportation). But, in fact, we shall formulate the parabolic and elliptic problems of this paper in connection to a different problem which attracted the attention of many authors since 1974: the shape of worn stones.

Such as it was shown by Fiery ([28]), in 1974, the idealized wearing process for a convex stone, isotropic with respect to wear, can be described by

$$\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} = \mathrm{K}^{\mathrm{p}}\mathbf{n}$$

where the points $\mathbf{P}$ of the N-dimensional convex hyper-surface $\Sigma^{\mathrm{N}}(t)$ embedded in $\mathbb{R}^{\mathrm{N}+1}$ (in the physical case, $\mathrm{N} = 3$) under Gauss curvature flow K with exponent $\mathrm{p} > 0$ moves in the inward direction $\mathbf{n}$ to the surface with velocity equal to the p–power of its Gaussian curvature (see also the important paper [34]). In the special case in which we express locally the surface $\Sigma^{\mathrm{N}}(t)$ as a graph $x_{\mathrm{N}+1} = u(x,t)$, with $x \in \Omega$, a convex open set of $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$, then the function u satisfies the parabolic Monge–Ampére equation

$$u_t = \frac{\left(\det \mathrm{D}^2 u\right)^{\mathrm{p}}}{\left(1 + |\mathrm{D}u|^2\right)^{\frac{(\mathrm{N}+2)\mathrm{p}-1}{2}}}.$$

As a matter of fact, to simplify the exposition, in this paper we shall assume always that this expression is not only local but global. Moreover the exact form of the above denominator will not be relevant (once we assume some suitable conditions). Then, our global formulation will be the following: given a bounded open set Ω of $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$, a continuous function φ on $\partial\Omega$, a locally convex function u_0 on Ω, $\mathrm{p} > 0$, and a continuous function $g \in \mathcal{C}([0,+\infty))$ such that

$$g(s) \geq 1 \text{ for any } s \geq 0, \tag{1}$$

find a convex function satisfying, in some sense to be defined, the problem

$$\begin{cases} u_t = \dfrac{\left(\det \mathrm{D}^2 u\right)^{\mathrm{p}}}{g(|\mathrm{D}u|)} & \text{in } \Omega \times \mathbb{R}_+, \\ u(x,t) = \varphi(x), & (x,t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}_+, \\ u(x,0) = u_0(x). & x \in \Omega. \end{cases} \tag{2}$$

In what follows the power like nonlinearity $f(t) = t^{\mathrm{p}}$ and its inverse function $f^{-1}(t) = t^{\frac{1}{\mathrm{p}}}$ must be understood as the restriction to $\overline{\mathbb{R}}_+$ of the odd functions $f(t) = |t|^{\mathrm{p}-1}t$ and $f^{-1}(t) = |t|^{\frac{1-\mathrm{p}}{\mathrm{p}}}t$, respectively. Also, in order to simplify the exposition we assumed that the boundary datum $\varphi(x)$ is time–independent. The details in which $\varphi(x) = \varphi(x,t)$ and the case in which the above representation of the hypersurface $\Sigma^{\mathrm{N}}(t)$ is merely local will be presented elsewhere.

One of our goals is to prove that the above problem can be solved thanks to the semigroup theory for accretive operators $\mathcal{A}$ by applying the Crandall–Liggett generation theorem (see *e.g.* [15]) over the Banach space $\mathbb{X} = \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ equipped with the supremum norm. Indeed, we shall show (see Section 4) that problem (2) can be regarded as the Cauchy problem

$$\begin{cases} u_t + \mathcal{A}u = 0, \quad t > 0, \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

for a suitable definition of the operator $\mathcal{A}$ which, at least formally, is given by

$$\mathcal{A}u = -\frac{\big(\det \mathrm{D}^2 u\big)^{\mathrm{p}}}{g(|\mathrm{D}u|)},$$

where $u \in \mathcal{C}^2$ is a locally convex function on $\overline{\Omega}$ and $u = \varphi$ on the boundary $\partial\Omega$. We shall give a precise definition of the operator $\mathcal{A}$ and show that it is accretive and satisfies $R(\mathrm{I} + \varepsilon\mathcal{A}) \supset \overline{\mathrm{D}(\mathcal{A})}$ for any $\varepsilon > 0$. The so called *mild solution* u of the above Cauchy problem is found by solving the implicit Euler scheme

$$\frac{u_n - u_{n-1}}{\varepsilon} + \mathcal{A}u_n = 0 \quad \text{for } n \in \mathbb{N},$$

or

$$\det \mathrm{D}^2 u_n = \left(g\big(|\mathrm{D}u_n|\big) \frac{u_n - u_{n-1}}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{\mathrm{p}}} \quad \text{in } \Omega. \tag{3}$$

This is why among the many different formulations of elliptic problems to which we can apply our techniques we pay an special attention to the following stationary problem: with the above assumption on Ω, φ, p and g, find a convex function u satisfying, in some sense to be defined, the problem

$$\begin{cases} \det \mathrm{D}^2 u = g\big(|\mathrm{D}u|\big) \Big[\big(u - h\big)^{\frac{1}{\mathrm{p}}} \Big]_+ & \text{in } \Omega, \\ u = \varphi & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

where h is a given continuous function on $\overline{\Omega}$. Certainly if we want to return to (3) we must replace $g\big(|\mathrm{D}u|\big)$ by $\big(g\big(|\mathrm{D}u|\big)\big)^{\frac{1}{\mathrm{p}}}$. Since the Monge–Ampère operator is only elliptic on the set of symmetric definite positive matrices, a compatibility is required on the structure of the equation. In fact, the operator is degenerate elliptic on the symmetric definite nonnegative matrices (see the comments at the end of this Introduction). As it will be proved in Theorem 2.8 (see also Remark 2.9), the compatibility is based on

$$h \text{ is locally convex on } \overline{\Omega} \text{ and } h \le \varphi \text{ on } \partial\Omega. \tag{4}$$

We emphasize that if $\mathrm{Np} \leq 1$ and $\varphi(x_0) > h(x_0)$ at some $x_0 \in \partial\Omega$ or $\det \mathrm{D}^2 h(x_0) > 0$ at some point $x_0 \in \Omega$ then the problem (5) is elliptic non degenerate in path-connected open sets Ω, as it is deduced from our Corollary 3.11.

The paper is organized as follows. In Section 2 some weak maximum principles are obtained for the boundary value problem (5). The main consequence of the Weak Maximum Principle is the comparison result for which one deduces $h \leq u$ on $\overline{\Omega}$, provided (4), thus, h behaves as a kind of lower "obstacle" for the solution u (see Remark 2.9 below). Therefore, under (4) the problem becomes

$$\begin{cases} \det \mathrm{D}^2 u = g\big(|\mathrm{D}u|\big)\big(u-h\big)^{\frac{1}{\mathrm{p}}} & \text{in } \Omega, \\ u = \varphi & \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \tag{5}$$

where the usual restriction on the non negativity of the right hand side is here supplied by (4). In particular, the inequalities

$$u_0 \leq \ldots \leq u_{n-1} \leq u_n \leq \ldots \leq u \quad \text{on } \overline{\Omega} \tag{6}$$

hold for the scheme (3). We emphasize that since the right hand side of the equation needs not strictly positive in some region of Ω, the ellipticity of the Monge–Ampère operator and the regularity $\mathcal{C}^2$ of solutions cannot be "a priori" guaranteed. The so called "viscosity solutions" or the "generalized solutions" are adequate notions in order to remove the non-degeneracy hypothesis on the operator. In fact, it is shown in [33] for convex domains Ω that both notions coincide. By using the Weak Maximum Principle and well known methods we prove, in Theorem 2.8, the existence of a unique generalized solution of (5). By a simple reasoning we obtain estimates on the gradient $\mathrm{D}u$. Bounds for the second derivatives $\mathrm{D}^2 u$ can be deduced from (22) as we shall prove in [24] (see Remark 2.9).

Since $h \leq u$ holds on $\overline{\Omega}$, the junction $\mathcal{F}$ between the regions where $[u = h]$ and $[h < u]$ is a free boundary (it is not known a priori). This free boundary can be defined also as the boundary of the set of points $x \in \Omega$ for which $\det \mathrm{D}^2 u(x) > 0$. Obviously, since the interior of the regions $[u = h]$ and $[\det \mathrm{D}^2 u = 0]$ coincide, if $h \in \mathcal{C}^2$ we must have that $\mathrm{D}^2 h = 0$. Motivated by the applications, as well as by the structure of the equation, the occurrence and localization of a the free boundary is studied in Section 3 whenever $h(x)$ has flat regions

$$\mathrm{Flat}(h) = \bigcup_{\alpha} \{x \in \Omega : h(x) = \langle \mathbf{p}_\alpha, x\rangle + a_\alpha,\ \mathbf{p}_\alpha \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}},\ a_\alpha \in \mathbb{R}\} \neq \emptyset,$$

where $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denotes the Euclidean inner product in $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$. As it will be proved, the free boundary $\mathcal{F}$ does exist under two different kind of conditions on the data: a suitable behavior of zeroth order term ($\mathrm{Np} > 1$) and a suitable balance between the "size" of the regions of Ω where $h(x)$ is flat and the "size" of the data φ and h. For this last reason, we rewrite the equation making rise a positive parameter λ,

$$\det \mathrm{D}^2 u = \lambda g\big(|\mathrm{D}u|\big)\big(u-h\big)^{\frac{1}{\mathrm{p}}} \quad \text{in } \Omega. \tag{7}$$

We shall show here how the theory on free boundaries (essentially the boundary of the support of the solution u), developed for a class of quasilinear operators in divergence

form, can be extended to the case of the solution of (7) inside of flat regions of h, where $u_h = u - h$ solves

$$\det \mathrm{D}^2 u_h = \lambda g\big(|\mathrm{D}u|\big) u_h^{\frac{1}{\mathrm{p}}}.$$

We send the reader to the exposition made in the monograph [26] for details and examples (among many other references on this topic in the literature we mention here the more recent monograph [39] and the paper [20] for the case of other fully nonlinear operators).

As it was suggested in [26] for the Monge–Ampère operator, the appearance of the free boundary is strongly based on the condition

$$\mathrm{Np} > 1. \tag{8}$$

In a more detailed version of this paper [24] we shall prove that (8) corresponds to the power like choice of the more general condition

$$\int_{0^+} \big(\mathrm{F}(t)\big)^{-\frac{1}{\mathrm{N}+1}} dt < \infty, \tag{9}$$

where $\mathrm{F}(t) = \displaystyle\int_0^t f(s)ds$, relative to when we replace the nonlinear expression $\big(u-h\big)^{\frac{1}{\mathrm{p}}}$ by $f(u-h)$ for a continuous increasing functions f satisfying $f(0) = 0$ (see [24]). Because the strict convexity must be removed, a critical size of the data is required, the parameter λ governs these kind of magnitude (see (33) below). For instance, it is satisfied if λ is large enough. In Theorem 3.3 below we prove the occurrence of the free boundary $\mathcal{F}$ and give some estimates on its localization. We also prove that if $h(x)$ growths moderately (in a suitable way) near the region where it ceases to be flat then the free boundary region associated to the flattens of u (*i.e.* the region where $u_h = u - h$ vanishes) may coincide with the own boundary of the set where h is flat (see Theorem 40). The estimates on the localization of the free boundary are optimal, in the class of nonlinearities $f(s)$ satisfying (9), as it will be proved in [24].

By means of a Strong Maximum Principle for u_h we prove that the condition $\mathrm{Np} > 1$ is a necessary condition for the existence of such free boundary (see Theorem 3.10, Corollary 3.11 and Remark 3.12 below). More precisely, we shall prove that under the condition $\mathrm{Np} \leq 1$, (or more general, if

$$\int_{0^+} \frac{dt}{\mathrm{F}(t)^{\frac{1}{\mathrm{N}+1}}} = \infty$$

as we prove in [24]) the solution cannot have any flat region. This can be regarded as an extension of [45] to the non divergence case (see also [20], [26] and [39]). As it was pointed out, the condition $\mathrm{Np} \leq 1$ implies the ellipticity non degenerate of the problem (5) under very simple assumptions, as $\varphi(x_0) > h(x_0)$ at some $x_0 \in \partial\Omega$ or $\det \mathrm{D}^2 h(x_0) > 0$ at some point $x_0 \in \Omega$ for path-connected open set Ω (see Corollary 3.11).

Section 4 is devoted to the study of the parabolic problem (2). We prove the existence and uniqueness of solution by means of the semigroup theory already mentioned. Among other things we also show that the existence conditions imply that $u_t \geq 0$ in some weak sense, as it follows from (6). As in the stationary case, we study

the free boundary involved to the degeneracy of the equation once we assume that the initial datum u_0 have some flat regions. More precisely, we focus the attention on the evolution of the flat region of the solution. We prove that if $\mathrm{Np} > 1$ then the initial flat region persists at least for small times. Moreover, we study some conditions on u_0 which guarantee that, in fact, the flat region becomes static during a small time. It is the so called "finite waiting time" effect which was already considered in [14] under a different formulation. We also study the associated self–similar solution in order to show that any flat region must disappear after a time large enough. Concerning the asymptotic behavior for large t, if $\mathrm{Np} \geq 1$, it is proved that if a flat "obstacle" does not coincide with u_0 in a set with positive measure the same occurs in any $t > 0$. Thus the solution never is flat in these region (see (68)). In fact, we deduce this "flattened retention" from an asymptotic behavior (see Theorem 4.14). By the contrary, when

$$\mathrm{Np} < 1 \tag{10}$$

the solution becomes globally flat at a finite time by conciding with upper flat "obstacles" h (see Theorem 4.15 below). In [25] we extend this last result to general case in which we replace the nonlinear power function $f(t) = t^{\mathrm{p}}$ by a general continuous increasing function f satisfying $f(0) = 0$ and

$$\int_{0^+} \frac{ds}{f^{-1}\left(s^{\mathrm{N}}\right)} < \infty. \tag{11}$$

We end this introduction by pointing out that our methods can be applied to the borderline cases for (9) and (11). This will be made in the future papers [24, 25] in which the Monge–Ampère operator is replaced by other nonlinear operators of the Hessian of the unknown such as the k^{th} elementary symmetric functions

$$\mathbb{S}_k[\lambda(\mathrm{D}^2 u)] = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq \mathrm{N}} \lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_k}, \quad 1 \leq k \leq \mathrm{N}, \tag{12}$$

where $\lambda(\mathrm{D}^2 u) = \left(\lambda_1, \ldots, \lambda_{\mathrm{N}}\right)$ are the eigenvalues of $\mathrm{D}^2 u$. Note that the case $k = 1$ corresponds to the Laplacian operator while it is a fully nonlinear operator for the other choices of k. The case $k = \mathrm{N}$ corresponds to the Monge–Ampère operator. Some other properties for the k^{th} elementary symmetric function (12) are studied by the authors in [21, 22, 24, 25].

2. On the notion of solutions and the weak maximum principle

Many previous expositions on the nature of the solutions can be found in the literature, see for instance the survey [42]. Here, we shall offer a short presentation of it. Certainly in the class of $\mathcal{C}^2$ convex functions, the Monge–Ampère operator $\mathbb{S}_{\mathrm{N}}[\lambda(\mathrm{D}^2 u)]$ (see (12)) is elliptic because the cofactor matrix of $\mathrm{D}^2 u$ is positive definite. So that, as it is proved by several methods in [11, 12, 24, 30, 32, 36, 40, 41, 42, 43], there exists a $\mathcal{C}^2$ convex solution of the general boundary value problems as

$$\begin{cases} \det \mathrm{D}^2 u = \mathrm{H}(\mathrm{D}u, u, x) & \text{in } \Omega, \\ u = \varphi & \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \tag{13}$$

under suitable assumptions on Ω, $\mathrm{H} > 0$ and φ. A main question arises now both in theory and in applications: what happens if $\mathrm{H} \geq 0$. Certainly, the ellipticity degeneracy occurs and in general the regularity $\mathcal{C}^2$ of solutions cannot be guaranteed. The so called "viscosity solutions" or the "generalized solutions" are suitable notions in order to remove the degeneracy of the operator. In fact, it can be proved that for a convex domain Ω both notions coincide (see [33]). A short description of all that is as follows. By a change of variable we get

$$|\mathrm{D}u(\mathrm{E})| = \int_{\mathrm{E}} \det \mathrm{D}^2 u \, dx = \int_{\mathrm{E}} \mathrm{H}(\mathrm{D}u, u, x) dx \tag{14}$$

for any Borel set $\mathrm{E} \subset \Omega$, where the left hand side makes sense merely when $u \in \mathcal{C}^1$ is convex. By the structure of the problem, u must be convex on Ω and consequently u is at least locally Lipschitz. While for locally Lipschitz functions the right hand side of (14) is well defined, slight but careful modifications are needed to give sense to the left hand side. The progress in this direction is achieved thanks to the notion of subgradients of a convex function u: given $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}}$, we say

$$\mathbf{p} \in \partial u(x) \quad \text{iff} \quad u(y) \geq u(x) + \langle \mathbf{p}, y - x \rangle \quad \text{for all } y \in \Omega. \tag{15}$$

Thus, we can define the Radon measure

$$\mu_u(\mathrm{E}) \doteq |\partial u(\mathrm{E})| = \mathrm{meas}\{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}} : \ \mathbf{p} \in \partial u(x) \text{ for some } x \in \mathrm{E}\}. \tag{16}$$

Since the pioneering works by Aleksandrov [1] several authors have contributed to the study of the above measure (see, for instance, [42]). Then we arrive to

Definition 2.1. A convex function u on Ω is a "generalized solution" of (13) if

$$\mu_u(\mathrm{E}) = \int_{\mathrm{E}} \mathrm{H}(\mathrm{D}u, u, x) dx$$

for any Borel set $\mathrm{E} \subset \Omega$.

The continuity on $\overline{\Omega}$ is compatible with the usual realization of the Dirichlet boundary condition. Obviously, the condition $\mathrm{H} \geq 0$ cannot be removed. Certainly, the definition, as well as (16), can be extended to locally convex functions u on Ω, for which u can be constant on some subset of Ω.

This notion of generalized solution is specific of the equations governed by the Monge–Ampère operator, but other notion of solutions are available for other type of fully nonlinear equations with non divergence form. The most usual is the so called "viscosity solution" introduced by M.G. Crandall and P.L. Lions (see the users guide [16])

Definition 2.2. A convex function u on Ω is a viscosity solution of the inequality

$$\det \mathrm{D}^2 u \geq \mathrm{H}(\mathrm{D}u, u, x) \quad \text{in } \Omega$$

if for every $\mathcal{C}^2$ convex function Φ on Ω for which

$$(u - \Phi)(x_0) \geq (u - \Phi)(x) \quad \text{locally at } x_0 \in \Omega$$

one has

$$\det \mathrm{D}^2\Phi(x_0) \geq \mathrm{H}\big(\mathrm{D}\Phi(x_0), u(x_0), x_0\big).$$

Analogously, one defines the viscosity solution of the reverse inequality

$$\det \mathrm{D}^2 u \leq \mathrm{H}(\mathrm{D}u, u, x) \quad \text{in } \Omega$$

as a convex function u on Ω such that for every $\mathcal{C}^2$ convex function Φ on Ω for which

$$(u-\Phi)(x_0) \leq (u-\Phi)(x) \quad \text{locally at } x_0 \in \Omega$$

one has

$$\det \mathrm{D}^2\Phi(x_0) \leq \mathrm{H}\big(\mathrm{D}\Phi(x_0), u(x_0), (x_0)\big).$$

Finally, when both properties hold we arrive to the notion of viscosity solution of

$$\det \mathrm{D}^2 u = \mathrm{H}(\mathrm{D}u, u, x) \quad \text{in } \Omega.$$

Note that the convexity condition on u and Φ are extra assumptions with respect to the usual notion of viscosity solution (see [16]). This is needed here because the Monge–Ampère operator is only degenerate elliptic on this class of functions. In fact, it can be seen that the convexity is only required for the correct definition of super solutions in viscosity sense. One proves the equivalence

u is a generalized solution of (13) if and only if u is a viscosity solution of (13),

provided that Ω is a convex domain and $\mathrm{H} \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}} \times \mathbb{R} \times \Omega)$ (see [33]).

With this intrinsic way of solve (13) one may study some complementary regularity results. In particular, we may get back the notion of classical solution by means of the following consistence result

Theorem 2.3 ([11]). *Let u be a strictly convex generalized solution of* (13) *in a convex domain $\Omega \subset \mathbb{R}^{\mathrm{N}}$, where $\mathrm{H} \in \mathcal{C}^{0,\alpha}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}} \times \mathbb{R} \times \Omega)$ is positive. Then $u \in \mathcal{C}^{2,\alpha'}(\Omega) \cap \mathcal{C}^{1,1}(\overline{\Omega})$, for some $\alpha' \in]0,1[$, and u solves* (13) *in the classical sense.* □

We continue this section with the study of some comparison and existence results for the equation (7). In order to simplify the exposition, we only consider here the case $\lambda = 1$. All results of this section apply to the case of general increasing functions $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ satisfying $f(0) = 0$

$$\det \mathrm{D}^2 u = g\big(|\mathrm{D}u|\big) f(u-h) \quad \text{in } \Omega.$$

We begin by showing that the nature of the viscosity solution is intrinsic to the Maximum Principle.

Proposition 2.4 (Weak Maximum Principle I). *Let $h_1, h_2 \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$. Let $u_2 \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ be a viscosity solution of*

$$-\det \mathrm{D}^2 u_2 + g\big(|\mathrm{D}u_2|\big) f(u_2 - h_2) \geq 0 \quad \textit{in } \Omega,$$

and let $u_1 \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ be a convex classical solution of

$$-\det \mathrm{D}^2 u_1 + g\big(|\mathrm{D}u_1|\big) f(u_1 - h_1) \leq 0 \quad \textit{in } \Omega.$$

Then one has

$$(u_1 - u_2)(x) \le \sup_{\partial\Omega} \big[u_1 - u_2\big]_+ + \sup_{\Omega} \big[h_1 - h_2\big]_+, \quad x \in \Omega.$$

Proof. By continuity there exists $x_0 \in \overline{\Omega}$ where $[u_1 - u_2]_+$ achieves the maximum value on $\overline{\Omega}$. We only consider the case $x_0 \in \Omega$ and $[u_1 - u_2]_+(x_0) > 0$, because otherwise the result follows. Then from the applications of the definition of viscosity solution for u_2 we can take $\Phi = u_1$ and so we deduce

$$\begin{aligned} 0 &\le -\det \mathrm{D}^2 u_1(x_0) + g\big(|\mathrm{D}u_1(x_0)|\big) f(u_2(x_0) - h_2(x_0)) \\ &\le g\big(|\mathrm{D}u_1(x_0)|\big) f\big(u_2(x_0) - h_2(x_0)\big) - g\big(|\mathrm{D}u_1(x_0)|\big) f\big(u_1(x_0) - h_1(x_0)\big). \end{aligned}$$

Then, since f is increasing

$$(u_1 - u_2)(x_0) \le \big(h_1 - h_2\big)(x_0) \le \sup_{\partial\Omega} \big[u_1 - u_2\big]_+ + \sup_{\Omega} [h_1 - h_2]_+.$$

□

Remark 2.5. We note that the monotonicity on the zeroth order terms is the only assumption required on the structure of the equation and that our argument is strongly based on the notion of viscosity solution. An analogous estimate holds by changing the roles of u_1 and u_2 (but then we do not require the $\mathcal{C}^2$ function u_1 to be convex). Note also that we did not assume any convexity condition on the domain Ω. When Ω is convex these results can be extended to the class of the generalized solutions through the mentioned equivalence between such solution and the viscosity solutions. In [24] we extend Proposition 2.4 to non decreasing functions f. □

A very simple (and important fact) was used in our precedent arguments: if $u_1 \in \mathcal{C}^2$ and $u_2 - u_1 \in \mathcal{C}^2$ are convex functions on a ball $\mathbf{B}$ then

$$\det \mathrm{D}^2 u_2 \ge \det \mathrm{D}^2 u_1 \quad \text{in } \mathbf{B}.$$

This simple inequality can be extended to the case u_1 and $u_2 - u_1$ convex function on a ball $\mathbf{B}$, with $u_1 = u_2$ on $\partial\mathbf{B}$, by the "monotonicity formula"

$$\mu_{u_2}(\mathbf{B}) \le \mu_{u_2}(\mathbf{B}) \tag{17}$$

(see [42]). So that, the Weak Maximum Principle can be extended to the class of generalized solutions

Theorem 2.6 (Weak Maximum Principle II)**.** *Let $h_1, h_2 \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$. Let $u_1, u_2 \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ where u_1 is locally convex in Ω. Suppose*

$$-\det \mathrm{D}^2 u_1 + g\big(|\mathrm{D}u_1|\big) f\big(u_1 - h_1\big) \le -\det \mathrm{D}^2 u_2 + g\big(|\mathrm{D}u_2|\big) f\big(u_2 - h_2\big) \quad \text{in } \Omega \tag{18}$$

in the generalized solution sense. Then

$$(u_1 - u_2)(x) \le \sup_{\partial\Omega} [u_1 - u_2]_+ + \sup_{\Omega} [h_1 - h_2]_+, \quad x \in \Omega. \tag{19}$$

In particular,

$$|u_1 - u_2|(x) \le \sup_{\partial\Omega} |u_1 - u_2| + \sup_{\Omega} |h_1 - h_2|, \quad x \in \Omega, \tag{20}$$

whenever the equality holds in (18).

Proof. As above, we only consider the case where the maximum of $[u_1-u_2]_+$ on $\overline{\Omega}$ is achieved at some $x_0\in\Omega$ with $[u_1-u_2]_+(x_0)>0$. Therefore, $(u_1-u_2)(x)>0$ and convex in a ball $\mathbf{B}_{\mathrm{R}}(x_0)$, R small. Let $\Omega^+=\{u_1>u_2\}\supseteq\mathbf{B}_{\mathrm{R}}(x_0)$. We construct $\widehat{u}_1(x)=u_1(x)+\gamma\big(|x-x_0|^2-\mathrm{M}^2\big)-\delta$, where $\mathrm{M}>0$ is large and $\gamma,\delta>0$ such that $\widehat{u}_1<u_1$ on $\partial\Omega^+$ and the set $\Omega^+_{\gamma,\delta}=\{\widehat{u}_1>u_2\}$ is compactly contained in Ω and contains $\mathbf{B}_\varepsilon(x_0)$ for some ε small. By choosing γ,δ properly, we can assume that the diameter of $\Omega^+_{\gamma,\delta}$ is small so that u_1, and therefore $u_2=(u_2-u_1)+u_1$, are convex in it. Then (17) implies

$$\begin{aligned}0<(\gamma\varepsilon)^{\mathrm{N}}|\mathbf{B}_1(0)|&\le\mu_{u_2}\big(\mathbf{B}_\varepsilon(x_0)\big)-\mu_{u_1}\big(\mathbf{B}_\varepsilon(x_0)\big)\\&\le\int_{\mathbf{B}_\varepsilon(x_0)}\big[g\big(|\mathrm{D}u_2|\big)f\big(u_2-h_2\big)-g\big(|\mathrm{D}u_1|\big)f\big(u_1-h_1\big)\big]dx.\end{aligned}$$

Since $g\big(|\mathrm{D}u_1(x_0)|\big)=g\big(|\mathrm{D}u_2(x_0)|\big)>0$ (see Remark 2.7 below), by letting $\varepsilon\to0$, the Lebesgue differentiation theorem implies

$$0\le g\big(|\mathrm{D}u_2(x_0)|\big)f\big(u_2(x_0)-h_2(x_0)\big)-g\big(|\mathrm{D}u_1(x_0)|\big)f\big(u_1(x_0)-h_1(x_0)\big),$$

whence

$$\big(u_1-u_2\big)(x_0)<\big(h_1-h_2\big)(x_0)\le\sup_{\partial\Omega}\big[u_1-u_2\big]_+\,+\sup_{\Omega}\big[h_1-h_2\big]_+$$

concludes the estimates. □

Remark 2.7. The above proof requires a simple fact, any convex function ψ in a convex open set $\mathcal{O}\subset\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ such that it achieves a local interior maximum at some $z_0\in\mathcal{O}$ verifies $\mathrm{D}\psi(z_0)=\mathbf{0}$. Indeed, for any $\mathbf{p}\in\partial\psi(z_0)$ one has

$$\psi(x)\ge\psi(z_0)+\langle\mathbf{p},x-z_0\rangle\ge\psi(x)+\langle\mathbf{p},x-z_0\rangle\quad\text{with } x \text{ near } z_0,$$

thus

$$\langle\mathbf{p},x-z_0\rangle\ge0.$$

Then if $\tau>0$ is small enough we may choose $x-z_0=-\tau\mathbf{p}\in\mathcal{O}$ and deduce the contradiction

$$\tau|\mathbf{p}|^2\le0.$$

□

A first consequence of the general theory for (13) and the Weak Maximum Principle is the following existence result

Theorem 2.8. *Let $\varphi\in\mathcal{C}(\partial\Omega)$ and assume the compatibility condition* (4)*. Then there exists a unique locally convex function verifying*

$$\begin{cases}\det\mathrm{D}^2u=g\big(|\mathrm{D}u|\big)f(u-h) & \text{in } \Omega,\\ u=\varphi & \text{on } \partial\Omega,\end{cases}$$

in the generalized sense. In fact, one verifies

$$h(x)\le u(x)\le\mathrm{U}_\varphi(x),\quad x\in\overline{\Omega},\tag{21}$$

where U_φ is the harmonic function in Ω with $\mathrm{U}_\varphi=\varphi$ on $\partial\Omega$.

Proof. First we consider the generalized solution of the problem

$$\begin{cases} -\det \mathrm{D}^2 u + g\big(|\mathrm{D}u|\big)\big[f(u-h)\big]_+ = 0 & \text{in } \Omega. \\ u = \varphi & \text{on } \partial\Omega. \end{cases}$$

Since $\mathrm{H}\big(\mathrm{D}u, u, x\big) = g\big(|\mathrm{D}u|\big)\big[f(u-h)\big]_+ \geq 0$ we can apply well known results in the literature. In particular, from [43], it follows the existence and uniqueness of the solution u. The second point is to note that, by construction, the own locally convex function h verifies

$$-\det \mathrm{D}^2 h + g\big(|\mathrm{D}u|\big)\big[f(h-h)\big]_+ \leq 0 \quad \text{in } \Omega.$$

Therefore, by the Weak Maximum Principle and the assumption $h \leq \varphi$ on $\partial\Omega$ we get that

$$h \leq u \quad \text{in } \Omega,$$

whence

$$\big[f(u-h)\big]_+ = f(u-h)$$

concludes the existence. The uniqueness also follows from the Weak Maximum Principle. Finally, since u is locally convex, the arithmetic–geometric mean inequality lead to

$$0 \leq \det \mathrm{D}^2 u \leq \frac{1}{\mathrm{N}} \left(\Delta u\right)^{\mathrm{N}} \quad \text{in } \Omega,$$

whence the estimate

$$h(x) \leq u(x) \leq \mathrm{U}_\varphi(x), \quad x \in \overline{\Omega}$$

is completed by the weak maximum principe for harmonic functions. □

Remark 2.9. i) As it was pointed out in the Introduction, no sign assumption on h is required in Theorem 2.8. The simple structural assumption (4) implies that $h \leq u$ on $\overline{\Omega}$ and therefore the ellipticity, eventually degenerate, of the equation holds. Thus, the ellipticity holds once h behaves as a lower "obstacle" for the solution u. We note that these compatibility conditions are not required a priori in the Weak Maximum Principles because there we are working with functions whose existence is a priori assumed.
ii) Since u is locally convex on $\overline{\Omega}$, we can prove

$$\sup_{\Omega} |\mathrm{D}u| = \sup_{\partial\Omega} |\mathrm{D}u|,$$

(see [24]) then inequality (21) gives a priori bounds on $|\mathrm{D}u|$ on $\overline{\Omega}$, provided $h = \varphi$ on $\partial\Omega$ and $\mathrm{D}h$ is defined on $\partial\Omega$. The second derivative estimate is based on the inequality

$$\sup_{\Omega} |\mathrm{D}^2 u| \leq \mathrm{C}\left(1 + \sup_{\partial\Omega} |\mathrm{D}^2 u|\right) \tag{22}$$

for some constant C independent on u, as it will be proved in [24]. □

In the next section we prove a kind of Strong Maximum Principle which under suitable assumptions will avoid the appearance of the mentioned free boundary.

3. Flat regions in the stationary problem

In this section we focus the attention to a lower "obstacle" function h locally convex on $\overline{\Omega}$ having some region giving rise to the set

$$\mathrm{Flat}(h) = \bigcup_{\alpha} \mathrm{Flat}_\alpha(h)$$

where

$$\mathrm{Flat}_\alpha(h) = \{x \in \overline{\Omega} : h(x) = \langle \mathbf{p}_\alpha, x\rangle + a_\alpha \text{ for some } \mathbf{p}_\alpha \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \text{ and } a_\alpha \in \mathbb{R}\}. \tag{23}$$

Since

$$u(y) - \big(\langle \mathbf{p}_\alpha, y\rangle + a_\alpha\big) \geq u(x) - \big(\langle \mathbf{p}_\alpha, x\rangle + a_\alpha\big) + \langle \mathbf{p} - \mathbf{p}_\alpha, y - x\rangle,$$

thus

$$\mathbf{p} \in \partial u(x) \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{p} - \mathbf{p}_\alpha \in \partial\left(u(x) - \big(\langle \mathbf{p}_\alpha, x\rangle + a_\alpha\big)\right),$$

the equation (7) becomes

$$\det \mathrm{D}^2 u_\alpha = \lambda g\big(|\mathrm{D}u|\big) u_\alpha^{\frac{1}{\mathrm{P}}}, \quad x \in \mathrm{Flat}_\alpha(h), \tag{24}$$

for $u_\alpha = u - \big(\langle \mathbf{p}_\alpha, x\rangle + a_\alpha\big)$. Remember that $u_\alpha \geq 0$ in an open set $\mathcal{O} \subseteq \Omega$, if $u_h \geq 0$ on $\partial\mathcal{O}$. Assumption $g(|\mathbf{p}|) \geq 1$ leads us to study for the auxiliar problem

$$\begin{cases} \det \mathrm{D}^2 \mathrm{U} = \lambda \mathrm{U}^{\frac{1}{\mathrm{P}}} & \text{in } \mathbf{B}_{\mathrm{R}}(0), \\ \mathrm{U} \equiv \mathrm{M} > 0 & \text{on } \partial\mathbf{B}_{\mathrm{R}}(0), \end{cases} \tag{25}$$

for any $\mathrm{M} > 0$. From the uniqueness of solutions, it follows that U is radially symmetric, because by rotating it we would find another solutions. Moreover, by the comparison results U is nonnegative. Therefore, the solution U is governed by a nonnegative radial profile function $\mathrm{U}(x) = \widehat{\mathrm{U}}(|x|)$ for which some straightforward computations leads to

$$\det \mathrm{D}^2 \mathrm{U}(x) = \widehat{\mathrm{U}}''(r) \left(\frac{\widehat{\mathrm{U}}'(r)}{r}\right)^{\mathrm{N}-1} = \frac{r^{1-\mathrm{N}}}{\mathrm{N}} \left[\big(\widehat{\mathrm{U}}'(r)\big)^{\mathrm{N}}\right]'. \tag{26}$$

Remark 3.1. For $\mathrm{N} = 1$, equation (25) becomes

$$\widehat{\mathrm{U}}''(r) = \lambda \widehat{\mathrm{U}}^{\frac{1}{\mathrm{P}}}$$

whose annulation set was studied in [26]. Note that for $\mathrm{N} > 1$ equation (26) does not coincide with the $(\mathrm{N}-1)$–Laplacian considered in [26]. □

We start by considering the initial value problem

$$\begin{cases} \dfrac{r^{1-\mathrm{N}}}{\mathrm{N}} \left[\big(\mathrm{U}'(r)\big)^{\mathrm{N}}\right]' = \lambda \big(\mathrm{U}(r)\big)^{\frac{1}{\mathrm{P}}}, \quad \lambda > 0 \\ \mathrm{U}(0) = \mathrm{U}'(0) = 0. \end{cases} \tag{27}$$

Obviously, $\mathrm{U}(r) \equiv 0$ is always a solution, but we are interested in the existence of nontrivial and non–negative solutions. It will be useful the following result

Lemma 3.2. *Assume* $\mathrm{Np} > 1$. *Consider the function*

$$\mathrm{U}(r) = \lambda^{\frac{\mathrm{p}}{\mathrm{Np}-1}} \mathrm{C} r^{\frac{2\mathrm{Np}}{\mathrm{Np}-1}}, \quad r \geq 0, \tag{28}$$

where C *is a positive constant. Let*

$$\mathrm{C}_{\mathrm{p,N}} = \left(\frac{(2\mathrm{Np})^{\mathrm{N}-1}(\mathrm{Np}+1)}{(\mathrm{Np}-1)^{\mathrm{N}}} \right)^{\frac{\mathrm{p}}{\mathrm{Np}-1}}. \tag{29}$$

Then,

$$-\frac{r^{1-\mathrm{N}}}{\mathrm{N}} \left[\big(\mathrm{U}'(r)\big)^{\mathrm{N}} \right] + \lambda \big(\mathrm{U}(r)\big)^{\frac{1}{\mathrm{p}}} = \mathrm{C}^{\frac{1}{\mathrm{p}}} \left[1 - \left(\frac{\mathrm{C}}{\lambda^{\frac{\mathrm{p}}{\mathrm{Np}-1}} \mathrm{C}_{\mathrm{p,N}}} \right)^{\frac{\mathrm{Np}-1}{\mathrm{p}}} \right] r^{\frac{2\mathrm{N}}{\mathrm{Np}-1}}. \tag{30}$$

Therefore,

(i) *if* $\mathrm{C} < \lambda^{\frac{\mathrm{p}}{\mathrm{Np}-1}} \mathrm{C}_{\mathrm{p,N}}$ *the function* $\mathrm{U}(r)$ *is a supersolution of the equation* (27),

(ii) *if* $\mathrm{C} = \lambda^{\frac{\mathrm{p}}{\mathrm{Np}-1}} \mathrm{C}_{\mathrm{p,N}}$ *the function* $\mathrm{U}(r)$ *is the solution of the equation* (27),

(iii) *if* $\mathrm{C} > \lambda^{\frac{\mathrm{p}}{\mathrm{Np}-1}} \mathrm{C}_{\mathrm{p,N}}$ *the function* $\mathrm{U}(r)$ *is a subsolution of the equation* (27).

Proof. The conclusions are immediate by some straightforward computations on the function $\mathrm{U}(r)$. □

Since $\mathrm{Np} > 1$, the function

$$\mathrm{U}(r) = \lambda^{\frac{\mathrm{p}}{\mathrm{Np}-1}} \mathrm{C}_{\mathrm{p,N}} r^{\frac{2\mathrm{Np}}{\mathrm{Np}-1}}, \quad r \geq 0, \tag{31}$$

enables us to construct functions vanishing in a ball $\mathbf{B}_\tau(0)$

$$v_\tau(x) \doteq \mathrm{U}\big([|x| - \tau]_+\big), \quad x \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}}, \tag{32}$$

which solves

$$-\det \mathrm{D}^2 v_\tau(x) + \lambda \big(v_\tau(x)\big)^{\frac{1}{\mathrm{p}}} = 0, \quad x \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}}.$$

Moreover, given $\mathrm{M} > 0$, it verifies

$$v_\tau(x) = \mathrm{M}, \quad |x| = \mathrm{R},$$

once we take

$$\tau = \mathrm{R} - \mathrm{U}^{-1}(\mathrm{M}) = \left(\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{C}_{\mathrm{p,N}}} \right)^{\frac{\mathrm{Np}-1}{2\mathrm{Np}}} \left[\lambda_*^{-\frac{1}{2\mathrm{N}}} - \lambda^{-\frac{1}{2\mathrm{N}}} \right]$$

with

$$\lambda \geq \lambda_* \doteq \frac{1}{\mathrm{R}^{2\mathrm{N}}} \left(\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{C}_{\mathrm{p,N}}} \right)^{\frac{\mathrm{Np}-1}{\mathrm{p}}}. \tag{33}$$

Now for the solution of (5) we may localize a core of the flat region $\mathrm{Flat}(u)$ inside the flat subregion $\mathrm{Flat}_\alpha(h)$ of the "obstacle".

Theorem 3.3. *Let h be locally convex on $\overline{\Omega}$. Let us assume that there exists $\mathbf{B}_{\mathrm{R}}(x_0) \subset \mathrm{Flat}_\alpha(h)$ with*

$$0 \le u(x) - \big(\langle \mathbf{p}_\alpha, x\rangle + a_\alpha\big) \le \mathrm{M} \le \max_{\overline{\Omega}}(u-h), \quad x \in \partial \mathbf{B}_{\mathrm{R}}(x_0), \tag{34}$$

where u is a generalized solution of (7), for some $\mathrm{M} > 0$. Then, if $\mathrm{Np} > 1$ and

$$\lambda \ge \lambda^* \doteq \frac{1}{\mathrm{R}^{2\mathrm{N}}} \left(\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{C}_{\mathrm{p,N}}}\right)^{\frac{\mathrm{Np}-1}{\mathrm{p}}},$$

one verifies

$$0 \le u(x) - \big(\langle \mathbf{p}_\alpha, x\rangle + a_\alpha\big) \le \lambda^{\frac{\mathrm{p}}{\mathrm{Np}-1}} \mathrm{C}_{\mathrm{p,N}} \big(\big[|x-x_0| - \tau\big]_+\big)^{\frac{2\mathrm{Np}}{\mathrm{Np}-1}}, \quad x \in \mathbf{B}_{\mathrm{R}}(x_0), \tag{35}$$

where

$$\tau = \left(\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{C}_{\mathrm{p,N}}}\right)^{\frac{\mathrm{Np}-1}{2\mathrm{Np}}} \left[\lambda_*^{-\frac{1}{2\mathrm{N}}} - \lambda^{-\frac{1}{2\mathrm{N}}}\right], \tag{36}$$

once we assume that

$$\left(\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{C}_{\mathrm{p,N}}}\right)^{\frac{\mathrm{Np}-1}{2\mathrm{Np}}} \lambda^{-\frac{1}{2\mathrm{N}}} < \mathrm{R} \le \mathrm{dist}(x_0, \partial\Omega). \tag{37}$$

In particular, the function u is flat on $\overline{\mathbf{B}}_\tau(x_0)$. More precisely,

$$u(x) = \langle \mathbf{p}_\alpha, x\rangle + a_\alpha \quad \textit{for any } x \in \overline{\mathbf{B}}_\tau(x_0).$$

Proof. The result is a direct consequence of previous arguments. Indeed, for simplicity we can assume $x_0 = 0$. Since $g(|\mathbf{p}|) \ge 1$, by the comparison results we get that

$$0 \le u_\alpha(x) \le v_\tau(x), \quad x \in \mathbf{B}_{\mathrm{R}}(0)$$

(see (24) and (32)) and so the conclusions hold. □

Remark 3.4. We have proved that under the above assumptions the flat region of u is a non–empty set. Obviously, $\mathrm{Flat}(h) \subset \mathrm{Flat}(u)$ whenever (34) fails, even if $\mathrm{Np} > 1$. We shall examine the optimality of (35) in [24] following different strategies carry out in [26] for other free boundary problems. □

Remark 3.5. We point out that the above result applies to the case in which $\varphi \equiv 1$ and $h \equiv 0$ (the so called "dead core" problem) as well as to cases in which u is flat only near $\partial\Omega$ (take for instance, $h(x) = \langle \mathbf{p}_\alpha, x\rangle + a_\alpha$ in Ω and $\varphi \equiv h$ on $\partial\Omega$). □

Theorem 3.3 gives some estimates on the localization of the points inside $\mathrm{Flat}(h)$ where u becomes flat too. The following result shows that if h decays in a suitable way at the boundary points of $\mathrm{Flat}(h)$ then the solution u becomes also flat in those points of the boundary of $\mathrm{Flat}(h)$. In this result the parameter λ is irrelevant, therefore with no loss of generality we shall assume that $\lambda = 1$.

Theorem 3.6. *Let us assume* $\mathrm{Np} > 1$. *Let* $x_0 \in \partial \mathrm{Flat}_\alpha(h)$ *such that*

$$h(x) - \big(\langle \mathbf{p}_\alpha, x\rangle + a_\alpha\big) \le \mathrm{K}|x - x_0|^{\frac{2\mathrm{Np}}{\mathrm{N}\mathrm{p}-1}}, \quad x \in \mathbf{B}_\mathrm{R}(x_0) \cap \big(\mathbb{R}^\mathrm{N} \setminus \mathrm{Flat}(h)\big), \tag{38}$$

and

$$0 \le \max_{|x-x_0|=\mathrm{R}} \big\{u(x) - \big(\langle \mathbf{p}_\alpha, x\rangle + a_\alpha\big)\big\} \le \mathrm{C}\mathrm{R}^{\frac{2\mathrm{Np}}{\mathrm{N}\mathrm{p}-1}} \tag{39}$$

for some suitable positive constants K *and* R *and* u *is a generalized solution of* (7). *Then*

$$u(x_0) = \langle \mathbf{p}_\alpha, x_0\rangle + a_\alpha. \tag{40}$$

Proof. Define the function

$$\mathrm{V}(x) = u(x) - \big(\langle \mathbf{p}_\alpha, x\rangle + a_\alpha\big),$$

which by construction is nonnegative in $\partial \mathbf{B}_\mathrm{R}(x_0)$ (see (39). In fact, the Weak Maximum Principle implies that V is non negative on $\overline{\mathbf{B}}_\mathrm{R}(x_0)$.Then

$$\begin{aligned} -\det \mathrm{D}^2\mathrm{V}(x) + \big(\mathrm{V}(x)\big)^{\frac{1}{\mathrm{p}}} &= -\det \mathrm{D}^2 u(x) + \big(u(x) - \big(\langle \mathbf{p}_\alpha, x\rangle + a_\alpha\big)\big)^{\frac{1}{\mathrm{p}}} \\ &= -\big(u(x) - h(x)\big)^{\frac{1}{\mathrm{p}}} + \big(u(x) - \big(\langle \mathbf{p}_\alpha, x\rangle + a_\alpha\big)\big)^{\frac{1}{\mathrm{p}}} \\ &\le \mathrm{C}_\mathrm{p}\mathrm{K}^{\frac{1}{\mathrm{p}}} \big(h(x) - \big(\langle \mathbf{p}_\alpha, x\rangle + a_\alpha\big)\big)^{\frac{1}{\mathrm{p}}} \\ &\le \mathrm{C}_\mathrm{p}\mathrm{K}^{\frac{1}{\mathrm{p}}} |x - x_0|^{\frac{2\mathrm{N}}{\mathrm{N}\mathrm{p}-1}}, \quad x \in \mathbf{B}_\mathrm{R}(x_0), \end{aligned}$$

where we have used the classical inequality

$$(a+b)^{\frac{1}{\mathrm{p}}} \le \mathrm{C}_\mathrm{p}\left(a^{\frac{1}{\mathrm{p}}} + b^{\frac{1}{\mathrm{p}}}\right) \quad \text{for some positive constant } \mathrm{C}_\mathrm{p},$$

as well as (38). Moreover, if we take $\mathrm{C} < \mathrm{C}_{\mathrm{N,p}}$ and then K such that

$$\mathrm{C}_\mathrm{p}\mathrm{K}^{\frac{1}{\mathrm{p}}} \le \mathrm{C}^{\frac{1}{\mathrm{p}}}\left[1 - \left(\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{C}_{\mathrm{p,N}}}\right)^{\frac{\mathrm{N}\mathrm{p}-1}{\mathrm{p}}}\right]$$

whence

$$-\det \mathrm{D}^2\mathrm{V}(x) + \big(\mathrm{V}(x)\big)^{\frac{1}{\mathrm{p}}} \le -\det \mathrm{D}^2\mathrm{U}(|x|) + \big(\mathrm{U}(|x|)\big)^{\frac{1}{\mathrm{p}}}, \quad x \in \mathbf{B}_\mathrm{R}(x_0),$$

for $\mathrm{U}(r) = \mathrm{C}|x - x_0|^{\frac{2\mathrm{Np}}{\mathrm{N}\mathrm{p}-1}}$ (see (30)). Finally, by choosing R satisfying (39) one has

$$\mathrm{V}(x) \le \mathrm{U}(|x|), \quad x \in \partial \mathbf{B}_\mathrm{R}(x_0),$$

whence the comparison principle concludes by comparison

$$0 \le \mathrm{V}(x) \le \mathrm{C}|x - x_0|^{\frac{2\mathrm{Np}}{\mathrm{N}\mathrm{p}-1}}, \quad x \in \mathbf{B}_\mathrm{R}(x_0),$$

and so $u(x_0) = \big(\langle \mathbf{p}_\alpha, x_0\rangle + a_\alpha\big)$. □

Remark 3.7. The assumption (39) is satisfied if we know that the ball $\mathbf{B}_{\mathrm{R}}(x_0)$ where (38) holds is assumed large enough. The above result is motivated by [26, Theorem 2.5]. By adapting the reasoning used in previous results of the literature (see [1, 3, 27]) it can be shown that the decay of $h(x) - \big(\langle \mathbf{p}_\alpha, x\rangle + a_\alpha\big)$ near the boundary point x_0 is optimal in the sense that if

$$h(x) - \big(\langle \mathbf{p}_\alpha, x\rangle + a_\alpha\big) > \mathrm{C}|x - x_0|^{\frac{2\mathrm{Np}}{\mathrm{Np}-1}} \quad \text{in a neighbourhood of } x_0$$

then it can be shown that

$$u(x_0) - \big(\langle \mathbf{p}_\alpha, x_0\rangle + a_\alpha\big)\big) > \mathrm{C}|x - x_0|^{\frac{2\mathrm{Np}}{\mathrm{Np}-1}} \quad \text{for } x \text{ near } x_0.$$

This type of results gives very rich information on the non–degeneracy behavior of the solution near the free boundary. This is very useful to the study of the continuous dependence of the free boundary with respect to the data h and φ (see [27]). □

Now we examine the case in which the solution cannot be flat (*i.e.* the free boundary cannot appear) independent on "size" of Ω, obviously it requires he condition

$$\mathrm{Np} \le 1.$$

This will be proved by a version of the Strong Maximum Principle. We shall follow the classical reasoning by E. Hopf (see *e.g.* [30]). Again, since the parameter λ is also irrelevant, in this result, with no loss of generality, we assume here $\lambda = 1$. So, we begin with

Lemma 3.8 (Hopf boundary point lemma)**.** *Assume* $\mathrm{Np} \le 1$. *Let* u *be a nonnegative viscosity solution of*

$$-\det \mathrm{D}^2 u + u^{\frac{1}{\mathrm{P}}} \ge 0 \quad \text{in } \Omega.$$

Let $x_0 \in \partial\Omega$ *be such that* $u(x_0) \doteq \liminf_{\substack{x\to x_0\\ x\in\Omega}} u(x)$ *and*

$$\begin{cases} i) & u \text{ achieves a strict minimum on } \Omega \cup \{x_0\},\\ ii) & \exists\, \mathbf{B}_{\mathrm{R}}(x_0 - \mathrm{R}\mathbf{n}(x_0)) \subset \Omega, \quad (\ \partial\Omega \text{ satisfies an interior sphere condition at } x_0). \end{cases}$$

Then

$$\liminf_{\tau\to 0} \frac{u(x_0 - \tau\mathbf{n})}{\tau} \ge C > 0, \tag{41}$$

where $\mathbf{n}$ *stands for the outer normal unit vector of* $\partial\Omega$ *at* x_0 *and* C *is a positive constant depending only on the geometry of* $\partial\Omega$ *at* x_0.

Proof. Let $y = x_0 - \mathrm{R}\mathbf{n}(x_0)$ and $\mathbf{B}_{\mathrm{R}} \doteq \mathbf{B}_{\mathrm{R}}(y)$. As it was pointed out before, equation (7) leads to the study of the differential equation

$$\frac{r^{1-\mathrm{N}}}{\mathrm{N}} \Big[\big(\Phi'(r)\big)^{\mathrm{N}}\Big]' = \big(\Phi(r)\big)^{\frac{1}{\mathrm{P}}}, \quad r > 0,$$

for radially symmetric solutions. We consider now the classical solution of the two point boundary problem

$$\begin{cases} \dfrac{r^{1-\mathrm{N}}}{\mathrm{N}} \Big[\big(\Phi'(r)\big)^{\mathrm{N}}\Big]' = \big(\Phi(r)\big)^{\frac{1}{\mathrm{P}}}, \quad 0 < r < \dfrac{\mathrm{R}}{2},\\ \Phi(0) = 0, \quad \Phi\left(\dfrac{\mathrm{R}}{2}\right) = \Phi_1 > 0. \end{cases} \tag{42}$$

The existence of solution follows from standard arguments and the uniqueness of solution can be proved as in Theorem 2.6, whence

$$\Phi'(0) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \Phi'(r) > 0 \qquad \Rightarrow \quad \Phi''(r) > 0.$$

Then

$$0 \leq \Phi(r) \leq \Phi_1, \quad 0 < r < \frac{\mathrm{R}}{2}.$$

We note that the singularity at $r = 0$ must be removed by the condition

$$\lim_{r\to 0} \frac{r^{1-\mathrm{N}}}{\mathrm{N}} \left[\big(\Phi'(r)\big)^{\mathrm{N}}\right]' = 0. \tag{43}$$

Let r_0 be the largest r for which $\Phi(r) = 0$. We want to prove that $r_0 = 0$ by proving that $r_0 > 0$ leads to a contradiction. In order to do that we multiply (42) by $r^{\mathrm{N}-1}\Phi'(r)$ and get

$$\left[\big(\Phi'(r)\big)^{\mathrm{N}+1}\right]' = (\mathrm{N}+1)\big(\Phi(r)\big)^{\frac{1}{\mathrm{p}}}\Phi'(r)r^{\mathrm{N}-1}, \quad 0 < r < \frac{\mathrm{R}}{2}.$$

Next, since $\Phi'(r_0) = 0 = \Phi(r_0)$, an integration between r_0 and r leads to

$$\begin{aligned}\big(\Phi'(r)\big)^{\mathrm{N}+1} &= \frac{\mathrm{p}(\mathrm{N}+1)}{\mathrm{p}+1}\big(\Phi(r)\big)^{\frac{\mathrm{p}+1}{\mathrm{p}}}r^{\mathrm{N}-1} - \frac{\mathrm{p}(\mathrm{N}+1)(\mathrm{N}-1)}{\mathrm{p}+1}\int_{r_0}^{r}\big(\Phi(s)\big)^{\frac{\mathrm{p}+1}{\mathrm{p}}}r^{\mathrm{N}-2}ds \\ &\leq \frac{\mathrm{p}(\mathrm{N}+1)}{\mathrm{p}+1}\big(\Phi(r)\big)^{\frac{\mathrm{p}+1}{\mathrm{p}}}r^{\mathrm{N}-1}, \quad r_0 < r < \frac{\mathrm{R}}{2}.\end{aligned}$$

Because $\mathrm{Np} \leq 1$, a new integration between r_0 and $\dfrac{\mathrm{R}}{2}$ yields the conjectured contradiction because

$$\infty = \int_0^{\Phi_1} \frac{ds}{s^{\frac{\mathrm{p}+1}{\mathrm{p}(\mathrm{N}+1)}}} = \int_{r_0}^{\frac{\mathrm{R}}{2}} \frac{\Phi'(r)}{\big(\Phi(r)\big)^{\frac{\mathrm{p}+1}{\mathrm{p}(\mathrm{N}+1)}}}dr \leq (\mathrm{N}+1)\left(\frac{\mathrm{p}(\mathrm{N}+1)}{\mathrm{p}+1}\right)^{\frac{1}{\mathrm{N}+1}}\int_{r_0}^{\frac{\mathrm{R}}{2}} r^{\mathrm{N}-1}dr < \infty.$$

So that, we have proved $\Phi'(0) > 0$ and also

$$0 < \Phi(r) < \Phi_1, \ \Phi'(r) > 0, \quad 0 < r < \frac{\mathrm{R}}{2},$$

as well as $\Phi''(0) = 0$ (see (43)). Hence, straightforward computations on the $\mathcal{C}^2$ convex function $w(x) = \Phi(\mathrm{R} - |x - y|)$, defined in the annulus $\mathcal{O} \doteq \mathbf{B}_{\mathrm{R}} \setminus \overline{\mathbf{B}}_{\frac{\mathrm{R}}{2}}$, prove

$$\begin{cases} \det \mathrm{D}^2 w(x) = f(v(x)\big), & x \in \mathcal{O}, \\ w(x) = \Phi_1, & x \in \partial\mathbf{B}_{\frac{\mathrm{R}}{2}}, \\ w(x) = 0, & x \in \partial\mathbf{B}_{\mathrm{R}}. \end{cases}$$

Moreover, by construction

$$u(x) > 0, \quad x \in \partial\mathbf{B}_{\frac{\mathrm{R}}{2}} \quad \Rightarrow \quad u(x) \geq w(x), \quad x \in \partial\mathbf{B}_{\mathrm{R}},$$

for Φ_1 small enough. Then the Weak Maximum Principle of Proposition 2.4 implies

$$(u - w)(x) \geq 0, \quad x \in \overline{\mathcal{O}}.$$

that leads to

$$\frac{u(x_0-\tau\mathbf{n})}{\tau}\geq\frac{\Phi(\mathrm{R}-\mathrm{R}(1-\tau))}{\tau},\qquad(\tau\ll 1)$$

whence

$$\liminf_{\tau\to 0}\frac{u(x_0-\tau\mathbf{n})}{\tau}\geq\Phi'(0)>0.$$

□

Remark 3.9. In fact, above result implies

$$\liminf_{\substack{x\to x_0\\ x\in\Omega}}\frac{u(x)}{|x-x_0|}\geq\Phi'(0)>0.$$

□

Our main result proving the absence of the free boundary is the following

Theorem 3.10 (Hopf's Strong Maximum Principle)**.** *Assume* $\mathrm{Np}\leq 1$. *Let* u *be a nonnegative viscosity solution of*

$$-\det \mathrm{D}^2u+u^{\frac{1}{\mathrm{p}}}\geq 0\quad \textit{in } \Omega.$$

Then u *cannot vanish at some* $x_0\in\Omega$ *unless* u *is constant in a neighborhood of* x_0.

Proof. Assume that u is non–constant and achieves the minimum value $u(x_0)=0$ on some ball $\mathbf{B}\subset\Omega$. Then we consider the semi-concave approximation of u, *i.e.*

$$u^\varepsilon(x)\doteq\inf_{y\in\Omega}\left\{u(y)+\frac{|x-y|^2}{2\varepsilon^2}\right\},\quad x\in\mathbf{B}_\varepsilon\qquad(\varepsilon>0),\tag{44}$$

where $\mathbf{B}_\varepsilon\doteq\{x\in\mathbf{B}:\ \mathrm{dist}(x,\partial\mathbf{B})>\varepsilon\sqrt{1+4\sup_{\mathbf{B}}|u|}\}$. For ε small enough we can assume $x_0\in\mathbf{B}_\varepsilon$. Then u^ε achieves the minimum value in $\mathbf{B}_\varepsilon$, and $u(x_0)=u^\varepsilon(x_0)=0$. Moreover, u^ε satisfies

$$-\det \mathrm{D}^2u_\varepsilon+u_\varepsilon^{\frac{1}{\mathrm{p}}}\geq 0\quad\text{on }\mathbf{B}_\varepsilon\tag{45}$$

(see, for instance [43, Proposition 2.3] or [6, 16] for general fully nonlinear equations). By classic arguments, if we denote

$$\mathbf{B}_\varepsilon^+\doteq\{x\in\mathbf{B}_\varepsilon:\ u^\varepsilon(x)>0\},$$

there exists the largest ball $\mathbf{B}_{\mathrm{R}}(y)\subset\mathbf{B}_\varepsilon^+$ (see [30]). Certainly there exists some $z_0\in\partial\mathbf{B}_{\mathrm{R}}(y)\cap\mathbf{B}_\varepsilon$ for which $u^\varepsilon(z_0)=0$ is a local minimum. Then, Lemma 3.8 implies

$$\mathrm{D}u^\varepsilon(z_0)\neq\mathbf{0}$$

contrary to

$$\mathrm{D}u^\varepsilon(z_0)=\mathbf{0},\tag{46}$$

as we shall prove in Lemma 3.13 below. Therefore, u^ε is constant on $\mathbf{B}\subset\Omega$, *i.e.*

$$u^\varepsilon(y)=u^\varepsilon(x_0)=u(x_0),\quad y\in\mathbf{B}.$$

Finally, for every $y \in \mathbf{B}$ we denote by $\widehat{y}$ the point of Ω such that

$$u^\varepsilon(y) = u(\widehat{y}) + \frac{1}{2\varepsilon^2}|y - \widehat{y}|^2$$

whence

$$u(x_0) = u^\varepsilon(x_0) = u^\varepsilon(y) = u(y) + \frac{1}{2\varepsilon^2}|y-\widehat{y}|^2 \geq u(x_0) + \frac{1}{2\varepsilon^2}|y-\widehat{y}|^2 \geq u(x_0) \quad \Rightarrow \quad \widehat{y} = y.$$

So that, one concludes

$$u(y) = u^\varepsilon(y) = u^\varepsilon(x_0) = u(x_0), \quad y \in \mathbf{B}.$$

□

Corollary 3.11. *Assume* $\mathrm{Np} \leq 1$. *Let* u *be a generalized solution* u *of* (7). *Then if* $u(x_0) > h(x_0)$ *or* $\det \mathrm{D}^2 h(x_0) > 0$ *at some point* x_0 *of a ball* $\overline{\mathbf{B}} \subseteq \overline{\Omega}$ *then* $u > h$ *on* $\overline{\mathbf{B}}$, *consequently the equation* (7) *is elliptic in* $\overline{\mathbf{B}}$. *In particular, if* $\varphi(x_0) > h(x_0)$ *at some* $x_0 \in \partial\Omega$ *or* $\det \mathrm{D}^2 h(x_0) > 0$ *at some point* $x_0 \in \Omega$ *the problem* (5) *is elliptic non degenerate in path-connected open sets* Ω, *provided the compatibility condition* (4) *holds.*

Proof. From Theorem 3.10, both cases imply $u > h$ on $\overline{\mathbf{B}}$. Finally, a continuity argument concludes the proof. □

Remark 3.12. Straightforward computations enable us to extend Lemma 3.8, Theorem 3.10 and Corollary 3.11 to the general case $g(|\mathbf{p}|) \geq 1$, since we know that $u \in \mathrm{W}^{1,\infty}(\Omega)$ (see the comments of Remark 2.9). □

We end this section by proving the property (46) used in the proof of Theorem 3.10

Lemma 3.13. *Let* ψ *be a function achieving a local minimum at some* $z_0 \in \mathcal{O}$. *Assume that there exists a function* $\widehat{\psi}$ *defined in* $\mathcal{O}$ *such that* $\widehat{\psi}(z_0) = 0$, $\Psi = \psi + \widehat{\psi}$ *is concave on* $\mathcal{O}$ *and*

$$\widehat{\psi}(x) \geq -\mathrm{K}|x - z_0|^2, \quad x \in \mathcal{O}, \text{ with } |x - z_0| \text{ small,}$$

for some constant $\mathrm{K} > 0$. *Then the function* ψ *is differentiable at* z_0 *and* $\mathrm{D}\psi(z_0) = \mathbf{0}$.

Proof. By simplicity we can take $z_0 = 0 \in \mathcal{O}$. By applying the convex separation theorem there exists $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ such that

$$\Psi(x) \leq \Psi(0) + \langle \mathbf{p}, x\rangle = \psi(0) + \langle \mathbf{p}, x\rangle, \quad x \in \mathcal{O}, \text{ with } |x| \text{ small.}$$

Then we have

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \Psi(x) - \widehat{\psi}(x) \leq \psi(0) + \langle \mathbf{p}, x\rangle + \mathrm{K}|x|^2 \\ &\leq \psi(x) + \langle \mathbf{p}, x\rangle + \mathrm{K}|x|^2, \quad x \in \mathcal{O}, \quad \text{with } |x| \text{ small} \end{aligned} \tag{47}$$

whence

$$-\langle \mathbf{p}, x\rangle \leq \mathrm{K}|x|^2, \quad x \in \mathcal{O}, \text{ with } |x| \text{ small.}$$

For $\tau > 0$ small enough we can choose $x = -\tau \mathbf{p} \in \mathcal{O}$ and $\tau \mathrm{K} < 1$, for which

$$\tau |\mathbf{p}|^2 \leq \mathrm{K} \tau^2 |\mathbf{p}|^2.$$

Therefore $\mathbf{p} = 0$. Finally, (47) leads to

$$0 \leq \psi(x) - \psi(0) \leq \mathrm{K}|x|^2, \quad x \in \mathcal{O}, \quad \text{with } |x| \text{ small},$$

and the result follows. □

Remark 3.14. The result is immediate if ψ is concave, in this case we can choose $\widehat{\psi} \equiv 0$. The convex version follows by changing ψ and $\widehat{\psi}$ by $-\psi$ and $-\widehat{\psi}$, respectively (see Remark 2.7 above). □

Note that since the function u^ε defined in (44) is semi concave, the property (46) holds

4. The evolution problem. Study of the associated free boundary and the global flatness in finite time

We start by considering the existence of solution of (2) by means of the accretivity of the operator. The definition of the operator uses odd increasing functions $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$, such that $f(0) = 0$. Then, we say $u \in \mathrm{D}(\mathcal{A})$ if $u \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ is a locally convex function on $\overline{\Omega}$ prescribing $\varphi \in \mathcal{C}(\partial\Omega)$ on $\partial\Omega$ and there exists a nonpositive continuous function v in Ω such that u is a generalized solution of

$$\begin{cases} \dfrac{f^{-1}\big(-\det \mathrm{D}^2 u\big)}{g\big(|\mathrm{D}u|\big)} = v & \text{in } \Omega, \\ u = \varphi & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

or equivalently

$$\begin{cases} \det \mathrm{D}^2 u = f\big(\big(-g\big(|\mathrm{D}u|\big)v\big) & \text{in } \Omega, \\ u = \varphi & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

for a more precise sense. Then we denote by $\mathcal{A}u$ the set of all such $v \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$.

Theorem 4.1. *The operator $\mathcal{A}$ is T-accretive on the Banach space $\mathbb{X} = \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ equipped with the supreme norm. In particular,*

$$\begin{aligned} \big\|\big[u_1 - u_2\big]_+\big\| &\leq \sup_{\Omega} \big\|\big[u_1 - u_2 + \varepsilon\big(\mathcal{A}u_1 - \mathcal{A}u_2\big)\big]_+\big\|, \\ \big\|u_1 - u_2\big\| &\leq \sup_{\Omega} \big\|u_1 - u_2 + \varepsilon\big(\mathcal{A}u_1 - \mathcal{A}u_2\big)\big\|, \end{aligned} \tag{48}$$

for $\varepsilon > 0$, $u_i \in \mathrm{D}(\mathcal{A})$.

Proof. It is a mere application of Theorem 2.6. □

Remark 4.2. We recall that the accretiveness of the operator implies that the resolvent $\mathcal{J}_\varepsilon = (\mathrm{I} + \varepsilon\mathcal{A})^{-1}$ is a contraction on $\mathbb{X}$. □

Certainly, one has

$$\mathrm{D}(\mathcal{A}) \subset \widehat{\mathbb{X}}_\varphi \doteq \{w \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}) : \ w \text{ locally convex on } \overline{\Omega} \text{ and } w = \varphi \text{ on } \partial\Omega\}.$$

In fact, we have

Corollary 4.3. *The operator $\mathcal{A}$ satisfies $\overline{\mathrm{D}(\mathcal{A})} = \widehat{\mathbb{X}}_\varphi$ as well as the range condition*

$$R(\mathrm{I} + \varepsilon\mathcal{A}) \supset \overline{\mathrm{D}(\mathcal{A})}, \quad \varepsilon > 0.$$

Proof. By well-known results (see, *e.g.* expression (2.1) of [42]), any w locally convex function can be approximated uniformly by a sequence of smooth locally convex functions $w_n \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ such that $w_n = \varphi$ on $\partial\Omega$. Then we can assume that $\det \mathrm{D}^2 w_n \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$, and so $w_n \in \mathrm{D}(\mathcal{A})$ (note that we merely have that $\det \mathrm{D}^2 w_n \rightharpoonup \det \mathrm{D}^2 w$ weakly in the sense of measures). Therefore

$$\overline{\mathrm{D}(\mathcal{A})} = \widehat{\mathbb{X}}_\varphi.$$

On the other hand, for each $h \in \overline{\mathrm{D}(\mathcal{A})}$ and $\varepsilon > 0$ by means of a simple adaptation of the proof of Theorem 2.8 one proves that there exists a unique solution of

$$\begin{cases} \det \mathrm{D}^2 u = f\left(g\big(|\mathrm{D}u|\big)\dfrac{u-h}{\varepsilon}\right) & \text{in } \Omega, \\ u = \varphi & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

thus

$$\big(\mathrm{I} + \varepsilon\mathcal{A}\big)u = h.$$

□

Crandall–Liggett generation theorem (see [15]) and Corollary 4.3 enables us to show that $\mathcal{A}$ generates a nonlinear semigroup of contractions $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ on $\mathbb{X}$ and

$$S(t)u_0 = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \varepsilon n \to t}} (\mathrm{I} + \varepsilon\mathcal{A})^{-1} u_0 \quad \text{for any } u_0 \in \overline{\mathrm{D}(\mathcal{A})} = \widehat{\mathbb{X}}_\varphi, \tag{49}$$

uniformly for t in bounded subsets of $]0,\infty[$. Furthermore, the mapping $t \mapsto S(t)u_0$ is continuous from $[0,\infty[$ into $\mathbb{X}$. In general the semigroup generated by such accretive operators $\mathcal{A}$ can be regarded as the so called "mild solution" of the Cauchy problem

$$\begin{cases} u_t + \mathcal{A}u = 0, \quad t > 0, \\ u(0) = u_0, \end{cases} \tag{50}$$

(see [15]). A different characterization is possible.

Proposition 4.4. *Assume $u_0 \in \overline{\mathrm{D}(\mathcal{A})} \subset \mathbb{X}$. Then*

$$u(x,t) = S(t)u_0(x), \quad x \in \Omega, \ 0 < t < \mathrm{T} < \infty, \tag{51}$$

satisfies (2) *in the viscosity sense.*

Proof. Assume $\Phi \in \mathcal{C}^2(\Omega\times]0,\mathrm{T}[)$ such that $\Phi(\cdot,t)$ is convex on Ω, for all $t \in [0,\mathrm{T}]$ and $u-\Phi$ attains a strict local maximum at $(x_0,t_0) \in \Omega\times]0,\mathrm{T}[)$. For each $\varepsilon > 0$, consider the step function $u_\varepsilon(t) \in \mathrm{D}(\mathcal{A})$ solving

$$\begin{cases} \det \mathrm{D}_x^2 u_\varepsilon(t+\varepsilon) = f\left(g\big(|\mathrm{D}_x u_\varepsilon(t+\varepsilon)|\big)\dfrac{u_\varepsilon(t+\varepsilon)-u_\varepsilon(t)}{\varepsilon}\right) & \text{in } \Omega, \quad t>0, \\ u_\varepsilon(t) = u_0 \quad \text{if } 0 \le t \le \varepsilon. \end{cases}$$

We may assume $t_0 \neq k\varepsilon$ by appropriate choice of ε. Since $u_\varepsilon(t) \to S(t)u_0$ uniformly on $[0,\mathrm{T}]$ in $\mathbb{X}$ as $\varepsilon \to 0$, $u_\varepsilon(x,t+\varepsilon) - \Phi(x,t)$ has a local maximum at some point $(x_\varepsilon,t_\varepsilon)$, such that $(x_\varepsilon,t_\varepsilon) \in \Omega\times]0,\mathrm{T}[$, $x_\varepsilon \to x_0$, $t_\varepsilon \to t_0$, as $\varepsilon \to 0$. Hence,

$$\det \mathrm{D}_x^2 u_\varepsilon(t_\varepsilon+\varepsilon) - \det \mathrm{D}_x^2 \Phi \le 0 \quad \text{at } x_\varepsilon,$$

according to the definition of $\mathcal{A}$ (note $u_\varepsilon(\cdot+\varepsilon) \in \mathrm{D}(\mathcal{A})$). Moreover, if ε is small enough, we have

$$\frac{u_\varepsilon(x_\varepsilon,t_\varepsilon+\varepsilon)-u_\varepsilon(x_\varepsilon,t_\varepsilon)}{\varepsilon} \ge \frac{\Phi(x_\varepsilon,t_\varepsilon)-\Phi(x_\varepsilon,t_\varepsilon-\varepsilon)}{\varepsilon},$$

whence

$$\det \mathrm{D}^2\Phi(x_\varepsilon,t_\varepsilon) \ge f\left(g\big(|\mathrm{D}_x\Phi(x_\varepsilon,t_\varepsilon-\varepsilon)|\big)\frac{\Phi(x_\varepsilon,t_\varepsilon-\varepsilon)-\Phi(x_\varepsilon,t_\varepsilon)}{\varepsilon}\right).$$

If we let $\varepsilon \to 0$, then, since $(x_\varepsilon,t_\varepsilon) \to (x_0,t_0)$, we obtain

$$-\det \mathrm{D}_x^2\Phi(x_0,t_0) + f\big(g\big(|\mathrm{D}_x\Phi(x_0,t_0)|\big)\Phi_t(x_0,t_0)\big) \le 0.$$

The opposite inequality has an analogous proof should $u-\Phi$ attain a local minimum at (x_0,t_0). □

Remark 4.5. Since $u(t) \in \overline{\mathrm{D}(\mathcal{A})}$ the property

$$0 \le \det \mathrm{D}_x^2 u(t),$$

holds in the generalized sense *a.e.* $t>0$. Note that a priori we merely know that $S(t)\big(\overline{\mathrm{D}(\mathcal{A})}\big) \subset \overline{\mathrm{D}(\mathcal{A})}$ and so the time derivative u_t must be understood in a large sense. Nevertheless, it is possible to apply different regularity results according f see, for instance, [19] and its references. In any case, at least u_t is a nonnegative measure and $u(\cdot,t)$ is a locally convex function. □

As it was pointed out in the introduction our study on the free boundary uses the power like nonlinearity, $f(t) = t^{\mathrm{p}}$ and its inverse function $f^{-1}(t) = t^{\frac{1}{\mathrm{p}}}$ which must be understood as the restriction to $\overline{\mathbb{R}}_+$ of the odd functions $f(t) = |t|^{\mathrm{p}-1}t$ and $f^{-1}(t) = |t|^{\frac{1-\mathrm{p}}{\mathrm{p}}}t$, respectively. So that, from the viscosity notion point of view we may rewrite (50) in the usual form

$$\begin{cases} u_t = \dfrac{\big(\det \mathrm{D}^2 u\big)^{\mathrm{p}}}{g(|\mathrm{D}u|)} & \text{in } \Omega\times\mathbb{R}_+, \\ u(x,t) = \varphi(x), & (x,t) \in \partial\Omega\times\mathbb{R}_+, \\ u(x,0) = u_0(x). & x \in \Omega. \end{cases}$$

(see (2) above).

Our results on the free boundary begin by studying how a possible region of flatness of the initial datum u_0 shrinks when t increases. We start by considering the interior points of $\mathrm{Flat}(u_0)$. As in Section 3, for $u_0 \in \overline{\Omega}$ we denote

$$\mathrm{Flat}(u_0) = \bigcup_\alpha \mathrm{Flat}_\alpha(u_0)$$

where

$$\mathrm{Flat}_\alpha(u_0) = \{x \in \overline{\Omega} : u_0(x) = \langle \mathbf{p}_\alpha, x\rangle + a_\alpha \ \text{ for some } \mathbf{p}_\alpha \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \text{ and } a_\alpha \in \mathbb{R}\}.$$

Theorem 4.6. *Let* $\mathrm{Np} > 1$ *and*

$$\mathbf{B}_{\mathrm{R}}(x_0) \subset \mathrm{Flat}_\alpha(u_0) \tag{52}$$

for some $\mathrm{R} > 0$. *Then there exists* $t^* = t^*(u_0) > 0$ *such that*

$$u(x_0, t) = \langle \mathbf{p}_\alpha, x_0\rangle + a_\alpha, \quad 0 \le t < t^*,$$

where u *is the viscosity solution of* (2).

Proof. We need a suitable local separable supersolution $\overline{\mathrm{U}}(x,t) = \mathrm{U}(|x|)\eta(t)$. The time function $\eta(t)$ is given by

$$\eta'(t) = \delta\big(\eta(t)\big)^{\mathrm{Np}}, \quad t > 0, \quad \text{for some } \delta > 0, \tag{53}$$

whose solution is

$$\eta(t) = \left[\frac{1}{\big(\eta(0)\big)^{\mathrm{Np}-1}} - \frac{\delta}{\mathrm{Np}-1}t\right]^{-\frac{1}{\mathrm{Np}-1}}. \tag{54}$$

Note that $\eta(t)$ blows up at

$$t^*\big(\delta, \eta(0)\big) \doteq \frac{\mathrm{Np}-1}{\delta}\frac{1}{\big(\eta(0)\big)^{\mathrm{Np}-1}}.$$

The spatial dependence is given by the function

$$\mathrm{U}(r) = \delta^{\frac{\mathrm{p}}{\mathrm{Np}-1}}\mathrm{C}_{\mathrm{p,N}} r^{\frac{2\mathrm{Np}}{\mathrm{Np}-1}}, \quad r \ge 0,$$

(see (31)). In [25] it is proved the regularity

$$\mathrm{D}u \in \mathrm{L}^\infty\big(0, \infty : \mathrm{L}^\infty(\Omega)\big).$$

Then the convexity of the solution enables us to choose $\eta(0)$, δ and R such that

$$\max_{\mathbf{B}_{\mathrm{R}}(x_0)\times\overline{\mathbb{R}}_+} u \le \eta(0)\delta^{\frac{\mathrm{p}}{\mathrm{Np}-1}}\mathrm{C}_{\mathrm{p,N}}\mathrm{R}^{\frac{2\mathrm{Np}}{\mathrm{Np}-1}}. \tag{55}$$

So that, we consider now the function

$$\mathrm{V}(x,t) = u(x,t) - \big(\langle \mathbf{p}_\alpha, x\rangle + a_\alpha\big)$$

for which

$$\mathrm{V}(x,0)=0,\quad x\in\mathbf{B}_{\mathrm{R}}(x_0),$$

(see (52)) and

$$\mathrm{V}(x,t)\le\overline{\mathrm{U}}(x,t),\quad (x,t)\in\partial\mathbf{B}_{\mathrm{R}}(x_0)\times[0,t^*\big(\delta,\eta(0)\big[$$

hold (see (55)). On the other hand, we have that

$$\frac{1}{\delta}\ge g\big(|\mathrm{D}_x\mathrm{V}(x,t)|\big)\ge 1,\quad (x,t)\in\mathbf{B}_{\mathrm{R}}(x_0)\times\big[0,t^*\big(\delta,\eta(0)\big)\big[$$

for a suitable choice of δ. Therefore, one has

$$-\frac{\big(\det\mathrm{D}_x^2\mathrm{V}\big)^{\mathrm{p}}}{g\big(|\mathrm{D}_x\mathrm{V}|\big)}\le-\delta\big(\det\mathrm{D}_x^2\mathrm{V}\big)^{\mathrm{p}}\quad\text{in }\mathbf{B}_{\mathrm{R}}(x_0)\times\big[0,t^*\big(\delta,\eta(0)\big)\big[,$$

and

$$\mathrm{V}_t-\frac{\big(\det\mathrm{D}_x^2\mathrm{V}\big)^{\mathrm{p}}}{g\big(|\mathrm{D}_x\mathrm{V}(x,t)|\big)}=0\le\overline{\mathrm{U}}_t-\frac{\big(\det\mathrm{D}_x^2\overline{\mathrm{U}}\big)^{\mathrm{p}}}{g\big(|\mathrm{D}_x\overline{\mathrm{U}}(x,t)|\big)}\quad\text{in }\mathbf{B}_{\mathrm{R}}(x_0)\times\big[0,t^*\big(\delta,\eta(0)\big)\big[.$$

Thus, by the comparison principle

$$0\le\mathrm{V}(x,t)\le\overline{\mathrm{U}}(x,t),\quad (x,t)\in\mathbf{B}_{\mathrm{R}}(x_0)\times\big[0,t^*\big(\delta,\eta(0)\big)\big[,$$

which concludes the proof. □

Remark 4.7. It is easy to see that the above argument gives a simple estimate on the shrinking of the free boundary

$$\mathcal{F}_\alpha(t)=\partial\{(x,t):\ u(x,t)=\langle\mathbf{p}_\alpha,x\rangle+a_\alpha\}\tag{56}$$

from the rest. Essentially,

$$\limsup_{t\to0}\operatorname{dist}\big(\mathcal{F}_\alpha(t),\mathcal{F}_\alpha(0)\big)t^{-\frac{1}{\mathrm{Np}-1}}\le\mathrm{C},$$

for some positive constant C. □

The next result shows that if $u_0(x)-\big(\langle\mathbf{p}_\alpha,x\rangle+a_\alpha\big)$ arrives to some points of the boundary of its support flat enough, let us say (38), then there exists a "finite waiting time" for those points.

Theorem 4.8. *Let* $\mathrm{Np}>1$ *and let* $x_0\in\Omega$ *be such that*

$$u_0(x)-\big(\langle\mathbf{p}_\alpha,x\rangle+a_\alpha\big)\le\mathrm{K}|x-x_0|^{\frac{2\mathrm{Np}}{\mathrm{Np}-1}},\quad x\in\mathbf{B}_{\mathrm{R}}(x_0),\tag{57}$$

for suitable positive constants K *and* R. *Then, there exists* $\widetilde{t}=\widetilde{t}(x_0)$ *such that*

$$u(x_0,t)=\langle\mathbf{p}_\alpha,x_0\rangle+a_\alpha\quad\textit{if } 0\le t<\widetilde{t},$$

where u *is the viscosity solution of* (2).

Proof. As in the above proof we use a local separable supersolution $\overline{\mathrm{U}}(x,t) = \mathrm{U}(|x|)\eta(t)$, where $\eta(t)$ was given in (53) and

$$\mathrm{U}(r) = \mathrm{C} r^{\frac{2\mathrm{Np}}{\mathrm{Np}-1}}, \quad r \geq 0,$$

for $\mathrm{C} > 0$. Then

$$-\frac{r^{1-\mathrm{N}}}{\mathrm{N}}\left[\big(\mathrm{U}'(r)\big)^{\mathrm{N}}\right] + \delta\big(\mathrm{U}(r)\big)^{\frac{1}{\mathrm{p}}} = \mathrm{C}^{\frac{1}{\mathrm{p}}}\left[1 - \left(\frac{\mathrm{C}}{\delta^{\frac{\mathrm{p}}{\mathrm{Np}-1}}\mathrm{C}_{\mathrm{p,N}}}\right)^{\frac{\mathrm{Np}-1}{\mathrm{p}}}\right] r^{\frac{2\mathrm{N}}{\mathrm{Np}-1}} > 0$$

for $\mathrm{C} \in \left]0, \delta^{\frac{\mathrm{p}}{\mathrm{Np}-1}}\mathrm{C}_{\mathrm{p,N}}\right[$ (see (30)). Then the reasonings are similar to those of the proof of Theorem 4.6 because now (57) provides the inequality

$$\mathrm{V}(x,0) \leq \overline{\mathrm{U}}(x,0)$$

before derived from (52). □

Remark 4.9. A similar waiting time result was obtained by Choop, Evans and Ishii [14] for the special case $\mathrm{p} = 1$ and $\mathrm{N} = 2$ under a global formulation on the assumption on the initial datum. Essentially, their assumption is $u_0 \in \mathcal{C}^4(\Omega)$. Note that for this special case $\mathrm{p} = 1$ and $\mathrm{N} = 2$ the condition (57) becomes

$$u_0(x) - \big(\langle \mathbf{p}_\alpha, x\rangle + a_\alpha\big) \leq \mathrm{K}|x - x_0|^4, \quad x \in \mathbf{B}_{\mathrm{R}}(x_0). \tag{58}$$

In particular, any C^4 partially flat function satisfies (58) at all points of the boundary of $\mathcal{F}_\alpha(0)$ (see (56)). So, our result can be regarded as a local and generalized version of the result of [14]. □

We continue our study on the evolution of the free boundary by showing that, in the case of a bounded domain Ω, in most of the cases $\mathcal{F}_\alpha(t)$ is shrinking.

Theorem 4.10. *Let* $\mathrm{Np} > 1$ *and assume* x_0 *such that*

$$u_0(x_0) = \langle \mathbf{p}_\alpha, x_0\rangle + a_\alpha.$$

Then there exists $\widehat{t} > 0$ *such that*

$$u(x_0,t) > \langle \mathbf{p}_\alpha, x_0\rangle + a_\alpha, \quad t > \widehat{t}, \tag{59}$$

where u *is the viscosity solution of* (2).

As a matter of fact, it is enough to show that

$$u(x_0,\widehat{t}) > \langle \mathbf{p}_\alpha, x_0\rangle + a_\alpha, \tag{60}$$

because since $u_t \geq 0$ we get (59) for any $t > \widehat{t}$. In order to prove Theorem 4.10 we shall use other suitable supersolution based on the self–similar solution of the Cauchy problem associated to the case $g(s) \equiv \delta$, for suitable $\delta \geq 1$. We start by pointing out that by arguing by adimensionalization we get:

Lemma 4.11. *Let $u(x,t)$ be a viscosity solution of*

$$u_t = \big(\det \mathrm{D}_x^2 u\big)^p \quad \text{in } \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \times \mathbb{R}_+. \tag{61}$$

Then the change of scale $x' = \mathrm{L}x,\ t' = \mathrm{T}t$ allows to define

$$u'(x',t') = \mathrm{L}^{\frac{2\mathrm{Np}}{\mathrm{Np}-1}} \mathrm{T}^{-\frac{1}{\mathrm{Np}-1}} u(x,t)$$

which is also a viscosity solution of (61). □

A more deep conclusion on the self–similar solution of (61) is the following

Theorem 4.12. *Assume* $\mathrm{Np} > 1$. *Then, there exists a family of convex compactly supported similarity solutions of* (61) *given by*

$$u(r,t;\sigma,\beta) \doteq t^{-\sigma}\Lambda(\eta), \quad \eta \doteq \frac{r}{t^\beta} \quad \text{for suitable } \sigma,\ \beta > 0.$$

The proof of Theorem 4.12 requires the analysis of the correspondent phase–plane system

$$\begin{cases} \dfrac{dq}{d\eta} = -\left[\dfrac{\mathrm{N}^{\mathrm{p}}\beta}{\eta}\big[\dfrac{\sigma}{\beta}\Lambda(\eta) + \eta q^{\frac{1}{\mathrm{N}}}\big]\right]^{\frac{1}{\mathrm{p}}}, \\ \dfrac{d\Lambda}{d\eta} = q^{\frac{1}{\mathrm{N}}}, \end{cases}$$

where $q = (\Lambda')^{\mathrm{N}}\big(\operatorname{sign}\Lambda'\big)$. By simplicity, we do not present here the details but send the reader to [25]. In any case, we can indicate that the proof is a non–difficult variation of some results in the literature (see, for instance, Bernis, Hulshof and Vázquez [7] and Igbida [35]). See also Daskalopoulus and Lee [18] for the case of the "focusing problem" associated to (61).

Proof of Theorem 4.10. As in the proof of Theorem 4.6 we can assume that the solution u has bounded gradient

$$\mathrm{D}u \in \mathrm{L}^\infty\big(\Omega\times]0,\widehat{t}[\big)$$

for any given $\widehat{t}$. So that $\mathrm{V}(x,t) = u(x,t) - \big(\langle \mathbf{p}_\alpha, x\rangle + a_\alpha\big)$ verifies

$$\mathrm{V}_t(x,t) - \delta\big(\det \mathrm{D}_x^2 \mathrm{V}(x,t)\big)^{\mathrm{p}} \geq 0,$$

for a suitable $\delta > 0$, that we suppose here $\delta = 1$ to simplify the notation, otherwise the needed modifications are simple. Let $x_0 \in \Omega$ such that

$$u_0(x_0) = \langle \mathbf{p}_\alpha, x_0\rangle + a_\alpha.$$

Then we consider σ and β for which

$$u\big(|x-x_0|,t;\sigma,\beta\big) \leq \mathrm{V}(x,t) \quad \text{for any } t \geq 0 \text{ and } x \in \mathbf{B}_{\mathrm{R}}(x_0)$$

for some $\mathrm{R} > 0$ (see Theorem 4.12). Since

$$u\big(r_0,t;\sigma,\beta\big) > 0$$

for any $r_0 > 0$ once that t is large enough, we conclude the result. □

Remark 4.13. Other properties of the solution of (50) can be obtained from the family of self-similar solution given in Theorem 4.12 (see [25] for details). □

Our last goal is the study of the asymptotic behavior of u as $t \to \infty$ from a peculiar point of view. We start by proving that if $\mathrm{Np} \geq 1$ then the stabilization to a stationary solution requires infinite time. From now on, any locally convex function on $\overline{\Omega}$ such that $\det \mathrm{D}^2 h = 0$, *a.e.* in Ω will be called *flat convex function*. By simplicity we assume $g\big(|\mathbf{p}|\big) \equiv 1$.

Theorem 4.14. *Assume that* $\mathrm{Np} \geq 1$. *Let* $\overline{h}$ *a flat convex function on* $\overline{\Omega}$ *such that* $\varphi \leq \overline{h}$ *on* $\partial\Omega$. *Then for each* $u_0 \in \overline{\mathrm{D}(\mathcal{A})}$ *such that* $u_0 \leq \overline{h}$ *on* $\overline{\Omega}$ *and* $u_0 < \overline{h}$ *in some set* $\Omega' \subset \Omega$ *with positive measure, there exists a positive constant* $\mathrm{C}_{\Omega'}$ *such that*

$$\begin{cases} \liminf\limits_{t\to\infty} \big(\overline{h}(x) - u(x,t)\big) t^{\frac{1}{\mathrm{Np}-1}} \geq \mathrm{C}_{\Omega'} & \text{if } \mathrm{Np} > 1, \\ \liminf\limits_{t\to\infty} \big(\overline{h}(x) - u(x,t)\big) e^{t} \geq \mathrm{C}_{\Omega'} & \text{if } \mathrm{Np} = 1, \end{cases} \quad x \in \Omega', \tag{62}$$

where u *is the viscosity solution of* (2). *Analogously, let* $\underline{h}$ *be a flat convex function on* $\overline{\Omega}$ *such that* $\varphi \geq \underline{h}$ *on* $\partial\Omega$ *verifying* $u_0 \geq \underline{h}$ *on* $\overline{\Omega}$ *and* $u_0 > \overline{h}$ *in some set* $\Omega' \subset \Omega$ *with positive measure, there exists a positive constant* $\mathrm{C}_{\Omega'}$ *such that*

$$\begin{cases} \liminf\limits_{t\to\infty} \big(u(x,t) - \underline{h}(x)\big) t^{\frac{1}{\mathrm{Np}-1}} \geq \mathrm{C}_{\Omega'} & \text{if } \mathrm{Np} > 1, \\ \liminf\limits_{t\to\infty} \big(u(x,t) - \underline{h}(x)\big) e^{t} \geq \mathrm{C}_{\Omega'} & \text{if } \mathrm{Np} = 1, \end{cases} \quad x \in \Omega'. \tag{63}$$

Proof. If h be a flat such that $\varphi \leq \overline{h}$ on $\partial\Omega$. Then, one has

$$\overline{h}_t = \big(\det \mathrm{D}_x^2 \overline{h}\big)^{\mathrm{p}}$$

whence $\underline{u}(x,t) = u(x,t) - \overline{h}(x)$ verifies

$$\begin{cases} (\underline{u})_t = \big(\det \mathrm{D}_x^2 \underline{u}\big)^{\mathrm{p}} & \text{in } \Omega \times \mathbb{R}_+, \\ \underline{u} \leq 0,\ \underline{u} \not\equiv 0 & \text{on } \big(\partial\Omega \times \mathbb{R}_+\big) \cup \big(\overline{\Omega} \times \{0\}\big), \end{cases} \tag{64}$$

in the viscosity sense and

$$\underline{u}(x,t) \leq 0, \quad (x,t) \in \overline{\Omega} \times \overline{\mathbb{R}}_+.$$

Here the key idea is to consider the auxiliar problem

$$\begin{cases} \phi'(t) + \dfrac{2}{\mathrm{m}} \big(k\phi(t)\big)^{\mathrm{Np}} = 0, \quad t \geq 0, \\ \phi(0) = 1, \quad \phi(\infty) = 0, \end{cases} \tag{65}$$

whose solution is

$$\phi(t) = \begin{cases} \left[1 + \dfrac{2}{\mathrm{m}} \dfrac{k^{\mathrm{Np}}}{\mathrm{Np}-1} t\right]^{-\frac{1}{\mathrm{Np}-1}}, & \text{if } \mathrm{Np} > 1, \\ e^{-\frac{2k}{\mathrm{m}} t}, & \text{if } \mathrm{Np} = 1, \end{cases}$$

where k is a positive constant to be choosen and m is a positive constant such that $\overline{h} - u_0 \geq \mathrm{m}$ in some $\mathbf{B}_{2\mathrm{R}} \subset \Omega$. Let $\psi(x_1) \in \mathcal{C}^2$ a non positive function such that

$$\left\{\begin{array}{rll} \psi(x_1) = 0, & & x \notin \overline{\mathbf{B}}_{2\mathrm{R}}, \\ -\mathrm{m} < \psi(x_1) < -\dfrac{\mathrm{m}}{2} & \text{and} \quad \psi''(x_1) \geq 0, & x \in \mathbf{B}_{\mathrm{R}}, \\ -\dfrac{\mathrm{m}}{2} < \psi(x_1) < 0 & \text{and} \quad \psi''(x_1) \leq 0, & x \in \mathbf{B}_{2\mathrm{R}} \setminus \overline{\mathbf{B}}_{\mathrm{R}}. \end{array}\right.$$

Then the function

$$W(x,t) = \phi(t)\psi(x_1), \quad (x,t) \in \overline{\Omega} \times \overline{\mathbb{R}}_+,$$

verifies

$$\left\{\begin{array}{ll} W(x,t) < 0, & (x,t) \in \mathbf{B}_{2\mathrm{R}} \times \overline{\mathbb{R}}_+, \\ W(x,t) = 0, & (x,t) \in \partial\Omega \times \overline{\mathbb{R}}_+, \\ W(x,0) = \phi(0)\psi(x_1) \geq -\mathrm{m} > \big(u_0 - h\big)(x), & x \in \mathbf{B}_{2\mathrm{R}}, \\ W(x,0) = \phi(0)\psi(x_1) = 0 \geq \big(u_0 - h\big)(x), & x \in \overline{\Omega} \setminus \overline{\mathbf{B}}_{2\mathrm{R}}. \end{array}\right.$$

because $\phi(0) = 1$. Moreover, from (65) we get

$$W_t(x,t) + \big(-\det \mathrm{D}_x^2 W(x,t)\big)^{\mathrm{p}} \doteq r(x,t)$$

where

$$r(x,t) \geq \left\{\begin{array}{ll} \big(k\phi(t)\big)^{\mathrm{Np}} + \Big(-\big(\phi(t)\big)^{\mathrm{Np}}\Big)\big(\psi''(x_1)\big)^{\mathrm{p}} \geq 0, & x \in \mathbf{B}_{\mathrm{R}}, \\ \phi'(t)\psi(x_1) + \big(\phi(t)\big)^{\mathrm{Np}}\big(-\psi''(x_1)\big)^{\mathrm{p}} \geq 0, & x \in \Omega \setminus \overline{\mathbf{B}}_{\mathrm{R}}, \end{array}\right.$$

for $t > 0$, provided k is large. Then, from (64), comparison results lead to

$$u(x,t) - \overline{h}(x) \leq W(x,t) \leq 0, \quad (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+.$$

In particular,

$$\overline{h}(x) - u(x,t) \geq \frac{\mathrm{m}}{2}\phi(t) > 0, \quad (x,t) \in \mathbf{B}_{2\mathrm{R}} \times \mathbb{R}_+. \tag{66}$$

We may repeat the reasoning with a flat function $\underline{h}$ such that $\varphi \geq \underline{h}$ on $\partial\Omega$. So, the function $\overline{u}(x,t) = u(x,t) - \underline{h}(x)$ verifies

$$\left\{\begin{array}{ll} (\overline{u})_t = \big(\det \mathrm{D}_x^2 \overline{u}\big)^{\mathrm{p}} & \text{in } \Omega \times \mathbb{R}_+, \\ \overline{u} \geq 0, \ \overline{u} \not\equiv 0 & \text{on } \big(\partial\Omega \times \mathbb{R}_+\big) \cup \big(\overline{\Omega} \times \{0\}\big), \end{array}\right.$$

in the viscosity sense and

$$\overline{u}(x,t) \geq 0, \quad (x,t) \in \overline{\Omega} \times \overline{\mathbb{R}}_+.$$

Now, we consider a non negative function $\psi(x_1) \in \mathcal{C}^2$ such that

$$\left\{\begin{array}{rll} \psi(x_1) = 0, & & x \notin \overline{\mathbf{B}}_{2\mathrm{R}}, \\ \dfrac{\mathrm{m}}{2} < \psi(x_1) < \mathrm{m} & \text{and} \quad \psi''(x_1) \leq 0, & x \in \mathbf{B}_{\mathrm{R}}, \\ 0 < \psi(x_1) < \dfrac{\mathrm{m}}{2} & \text{and} \quad \psi''(x_1) \geq 0, & x \in \mathbf{B}_{2\mathrm{R}} \setminus \overline{\mathbf{B}}_{\mathrm{R}}, \end{array}\right.$$

where m is a positive constant such that $u_0 - \underline{h} \geq \mathrm{m}$ in some $\mathbf{B}_{2\mathrm{R}} \subset \Omega$. Arguing as above one proves that the function

$$w(x,t) = \phi(t)\psi(x_1), \quad (x,t) \in \overline{\Omega} \times \overline{\mathbb{R}}_+,$$

verifies

$$\begin{cases} w_t(x,t) + \big(-\det \mathrm{D}_x^2 w(x,t)\big)^{\mathrm{p}} \leq 0 & \text{in } \Omega \times \mathbb{R}_+, \\ w \leq \overline{u} & \text{on } \big(\partial\Omega \times \mathbb{R}_+\big) \cup \big(\overline{\Omega} \times \{0\}\big), \end{cases}$$

provided k is large. Then, we obtain

$$u(x,t) - \underline{h}(x) \geq w(x,t) \geq 0, \quad (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+.$$

In particular,

$$u(x,t) - \underline{h}(x) \geq \frac{\mathrm{m}}{2}\phi(t) > 0, \quad (x,t) \in \mathbf{B}_{2\mathrm{R}} \times \mathbb{R}_+. \tag{67}$$

□

Note that, in particular, Theorem 4.14 implies a kind of non flattened global retention property:

$$\begin{cases} u_0(x) < \overline{h}(x),\ x \in \Omega' \subset \Omega & \Rightarrow \quad u(x,t) < \overline{h}(x),\ x \in \Omega' \text{ for all } t \geq 0, \\ \underline{h}(x) < u_0(x),\ x \in \Omega' \subset \Omega & \Rightarrow \quad \underline{h}(x) < u(x,t),\ x \in \Omega' \text{ for all } t \geq 0, \end{cases} \tag{68}$$

holds. Clearly, the second retention property also follows from $u_t \geq 0$.

Our final result in this paper shows that when $\mathrm{Np} < 1$ the asymptotic behavior is very fast. It is the property of "finite global flattened time" which we prove by means of some ideas used by first time in [23]. Again, for simplicity we assume $g\big(|\mathbf{p}|\big) \equiv 1$.

Theorem 4.15. *Let $h(x) = \langle \mathbf{p}, x\rangle + a$ on $\overline{\Omega}$ and suppose $\varphi = h$ in the definition of the operator $\mathcal{A}$. Assume* $\mathrm{Np} < 1$. *Then for each $u_0 \in \overline{\mathrm{D}(\mathcal{A})}$ such that $u_0 \leq h$ on $\overline{\Omega}$ there exists a time* T_0, *depending on $h - u_0$, such that*

$$u(x,t) = \langle \mathbf{p}, x\rangle + a, \quad x \in \overline{\Omega}, \quad t \geq \mathrm{T}_0.$$

where u is the viscosity solution of (2).

Proof. Let us denote $u_h(x,t) = u(x,t) - h(x)$. As in the proof of Theorem 4.14 one verifies (64), thus

$$\begin{cases} (u_h)_t = \big(\det \mathrm{D}_x^2 u_h\big)^{\mathrm{p}} & \text{in } \Omega \times \mathbb{R}_+, \\ u_h \leq 0,\ u_h \not\equiv 0 & \text{on } \big(\partial\Omega \times \mathbb{R}_+\big) \cup \big(\overline{\Omega} \times \{0\}\big), \end{cases}$$

in the viscosity sense, whence

$$u_h(x,t) \leq 0, \quad (x,t) \in \overline{\Omega} \times \overline{\mathbb{R}}_+.$$

In fact, if $u_0 = h$ one derives the coincidence

$$u_h(x,t) = 0 \quad \text{for any } (x,t) \in \overline{\Omega} \times \overline{\mathbb{R}}_+.$$

So that, suppose

$$u_0 \le h,\ u_0 \not\equiv h.$$

It is clear that the "finite flattened time property" is strongly based on the initial value problem

$$\begin{cases} \mathrm{m}\Theta'(t) = \big(2\Theta(t)\big)^{\mathrm{Np}}, & t \ge 0, \\ \Theta(0) = 0 \end{cases}$$

whose solution is

$$\Theta(t) = \left(\frac{2^{\mathrm{Np}}(1-\mathrm{Np})}{\mathrm{m}}\right)^{\frac{1}{1-\mathrm{Np}}} t^{\frac{1}{1-\mathrm{Np}}},$$

provided $\mathrm{Np} < 1$ and m is a positive constant. Then, for each $\mathrm{T}_0 > 0$ the profile function

$$\mathcal{T}(t) = \begin{cases} \Theta\big(\mathrm{T}_0 - t\big) & \text{if } 0 < t \le \mathrm{T}_0, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

satisfies

$$\mathcal{T}'(t)\mathrm{m} + \big(2\mathcal{T}(t)\big)^{\mathrm{Np}} = 0, \quad t > 0. \tag{69}$$

On the other hand, for $\mathrm{R} > 0$ large, we consider the function

$$\zeta(x) = 2^{\mathrm{N}-1}\big(x_1^2 - \mathrm{R}^2\big) \le 0, \quad x \in \overline{\Omega}$$

which verifies

$$\begin{cases} -m < \zeta(x) < -\mathrm{M} < 0, & x \in \overline{\Omega}, \quad -\mathrm{m} \doteq \min\limits_{x\in\overline{\Omega}} \zeta, \ -\mathrm{M} \doteq \max\limits_{x\in\overline{\Omega}} \zeta \\ \det \mathrm{D}^2\zeta(x) \equiv 2^{\mathrm{N}}, & x \in \overline{\Omega}. \end{cases}$$

It enables us to define

$$V(x,t) = \mathcal{T}(t)\zeta(x), \quad (x,t) \in \overline{\Omega} \times \overline{\mathbb{R}}_+,$$

for which $v(x,t) \le 0,\ (x,t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}_+$ and $V(x,0) \le -\Theta\big(\mathrm{T}_0\big)\mathrm{M},\ x \in \overline{\Omega}$, whence

$$v(x,0) \le \big(u_0 - h\big)(x), \quad x \in \overline{\Omega},$$

provided $\mathrm{T}_0 = \Theta^{-1}\big(\|h - u_0\|_\infty \mathrm{M}^{-1}\big)$. Moreover, for each $(x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+$ one has

$$v_t(x,t) + \big(-\det \mathrm{D}_x^2 v(x,t)\big)^{\mathrm{p}} \le -\mathcal{T}'(t)\mathrm{m} + f_{\mathrm{p}}^{-1}\left(-2\big(\mathcal{T}(t)\big)^{\mathrm{N}}\right) = 0$$

(see (69)). Thus

$$v_t(x,t) - \big(\det \mathrm{D}_x^2 v(x,t)\big)^{\mathrm{p}} \le 0, \quad (x,t) \in \Omega \times [0,\mathrm{T}].$$

This function V can be considered as an eventual test function for the viscosity solution u_h (see (64)), then, arguing as in the proof of Theorem 2.4, we deduce

$$v(x,t) \le u_h(x,t) \le 0, \quad (x,t) \in \overline{\Omega} \times [0,\mathrm{T}[,$$

whence the finite global flattened time property holds. □

Remark 4.16. In fact, the condition $\mathrm{Np} < 1$ is also necessary for the property of "finite global flattened time" as we have shown in Theorem 4.14. The general case $g\big(|\mathbf{p}|\big) \geq 1$ is studied in [25]. □

Remark 4.17. The study of the problems (2) and (5) can be complemented with some other qualitative studies such other symmetrization properties (the "comparison of the rearrangements"). That was carried out in [9] in the case of some related stationary problems. The consideration of the parabolic problem is the main goal of the paper [8]. □

Acknowledgement The authors thank to the editors for their kind suggestions about the presentation of this contribution.

References

[1] Aleksandrov, A.D.: Almost everywhere existence of the second differential of a convex function and some properties of convex surfaces connected to it, *Uzen. Zap. Leningrad. Gos. Univ.*, **37** (1939), 3–35. (Russian)

[2] Álvarez, L.: On the behavior of the free boundary of some nonhomogeneous elliptic problems, *Appl. Anal.*, **36** (1990), 131–144.

[3] Álvarez, L., Díaz, J.I.: On the retention of the interfaces in some elliptic and parabolic nonlinear problems, *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, **25**(1) (2009), 1–17.

[4] Ambrosio, L.: Lecture Notes on Optimal Transport Problems, *Mathematical Aspects of Evolving Interfaces*, Springer Verlag, Berlin, Lecture Notes in Mathematics (1812), (2003), 1–52.

[5] Ampère, A.M.: Mémoire contenant l'application de la théorie, *J. l'École Polytechnique*, 1820.

[6] Barles, G., Busca, J.: Existence and comparison results for fully nonlinear degenerate elliptic equations without zeroth-order term, *Comm. in P.D.E.*, **26** (11&12) (2001), 2323–2337.

[7] Bernis, F., Hulshof, J., Vázquez, J.L.: A very singular solution for the dual porous media equation and the asymptotic behaviour of general soliutions, *J. reine und angew. Math.*, **435** (1993), 1–31.

[8] Brandolini, B., Díaz, J.I.: *work in progress.*

[9] Brandolini, B., Trombetti, C.: Comparison results for Hessian equations via symmetrization, *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, **9**(3) (2007), 561–575.

[10] Budd, C., Galaktionov, V.: On self-similar blow-up in evolution equations of Monge-Ampère type, *IMA J. Appl. Math.*, (2011), doi: 10.1093/imamat/hxr053.

[11] Caffarelli, L.: Some regularity properties of solutions of the Monqe-Ampère equation, *Comm. Pure Appl. Math.* **44** (1991), 965–969.

[12] Caffarelli, L., Nirenberg, L., Spruck, J.: Nonlinear second-order elliptic equations. V. The Dirichlet problem for Weingarten hypersurfaces. *Comm. Pure Appl. Math.*, **42** (1988), 47-70.

[13] Caffarelli, L., Salsa, S.: A Geometric Approach to Free Boundary Problemas, *American Mathematical Society*, 2005.

[14] Chopp, D., Evans, L.C., Ishii, H.: Waiting time effects for Gauss curvature flows, *Indiana Univ. Math. J.*, **48** (1999), 311–334.

[15] Crandall, M.G., Liggett, T.M.: Generation of semigroups of nonlinear transformations on general Banach spaces, *Amer. J. Math.*, **93** (1971), 265-298.

[16] Crandall, M.G., Ishii, H., Lions, P.-L.: Users guide to viscosity solutions of second order partial differential equations. *Bull. Amer. Math. Soc.*, **27** (1992), 1-67.

[17] Daskalopoulos, P., Hamilton, R.: The free boundary in the Gauss curvature flow with flat slides. *J. reine angew. Math.*, **510** (1999), 187–227.

[18] Daskalopoulos, P., Lee, K.: Free-boundary regularity on the focusing problem for the Gauss Curvature Flow with flat sides*Math. Z.*, **237** (2001), 847–874.

[19] Daskalopoulos, P., Savin, O.: $\mathcal{C}^{1,\alpha}$ regularity of solutions to parabolic Monge–Ampère equations, *to appear*.

[20] Díaz, G.: Some properties of second order of degenerate second order P.D.E. in non-divergence form, *Appl. Anal.*, **20** (1985), 309-336.

[21] Díaz, G.: The influence of the geometry in the large solution of Hessian equations perturbated with a superlinear zeroth order term, *work in progress*.

[22] Díaz, G.: The Liouville Theorem on Hessian equations perturbated with a superlinear zeroth order term, *work in progress*.

[23] Díaz, G., Díaz, J.I.: Finite extinction time for a class of non–linear parabolic equations, *Comm. in Partial Equations*, **4**(11) (1979), 1213–1231

[24] Díaz, G., Díaz. J.I.: On some free boundary problems arising in fully nonlinear equation involving hessian functions. I The stationary equation, *work in progress*.

[25] Díaz, G., Díaz. J.I.: On some free boundary problems arising in fully nonlinear equation involving Hessian functions. II The evolution equation, *work in progress*.

[26] Díaz, J.I.: *Nonlinear Partial Differential Equations and Free Boundaries, Vol. 1 Elliptic Equations*, Res. Notes Math, **106**. Pitman, 1985.

[27] Díaz, J.I., Mingazzini, T., Ramos, A. M.: On an optimal control problem involving the location of a free boundary, *Proceedings of the XII Congreso de Ecuaciones Diferenciales y Aplicaciones /Congreso de Matemática Aplicada (Palma de Mallorca), Spain, Septembre*, (2011), 5-9.

[28] Fiery, W.J.: Shapes of worn stones, *Mathematika*, **21** (1974), 1–11.

[29] Gangbo, W., Mccann, R.J.: The geometry of optimal transportation, *Acta Math.*, **177** (1996), 113–161.

[30] Gilbarg, D., Trudinger, N.S.: *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order* Springer–Verlag, Berlin,(1983).

[31] Goursat, E.: Leçons sur l'Integration des Équations aux Derivées Partielles du Second Order à Deux Variables Indepéndantes, Herman, Paris, 1896.

[32] Guan, P., Trudinger, N.S., Wang, X.: On the Dirichlet problem for degenerate Monge–Ampère equations, *Acta Math.*, **182** (1999), 87-104.

[33] Gutiérrez, C.E.: *The Monge–Ampère equation*, Birkhauser, Boston, MA, 2001.

[34] Hamilton, R.: Worn stones with at sides; in a tribute to Ilya Bakelman, *Discourses Math. Appl.*, **3** (1993), 69–78.

[35] Igvida, N.: Solutions auto–similaires pour une equation de Barenblatt, *Rev. Mat. Apl.*, **17**, (1991), 21–30.

[36] Lions, P.L.: Sur les equations de Monge-Ampère I, II, Manuscripta Math., **41** (1983), 1–44; *Arch. Rational Mech. Anal.*, **89** (1985), 93–122.

[37] Monge, G.: Sur le calcul intégral des équations aux differences partielles, *Mémoires de l'Académie des Sciences*, (1784).

[38] Nirenberg, L.: Monge–Ampère equations and some associated problems in Geometry, in *Proccedings of the International Congress of Mathematics*, Vancouver 1974.

[39] Pucci, P., Serrin J.: *The Maximum Principle*, Birkhäuser, Basel, 2007.

[40] Talenti, G.: Some estimates of solutions to Monge–Ampère type equations in dimension two, *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci.* (4) **VIII**(2) (1981), 183–230.

[41] Trudinger, N.S.: The Dirichlet problem for the prescribed curvature equations. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, **111** (1990), 153-179.

[42] Trudinger, N,S., Wang, X.-J.: The Monge-Ampère equation and its geometric applications, in *Handbook of Geometric Analysis*, Vol. I, International Press (2008), 467–524.

[43] Urbas, J.I.E.: On the existence of nonclassical solutions for two classes of fully nonlinear elliptic equations. *Indiana Univ. Math. J.*, **39** (1990) 355–382.

[44] Villani, C.: *Optimal transport: Old and New*, Springer Verlag (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften), 2008.

[45] Vázquez, J.L.: A strong Maximum Principle for some quasilinear elliptic equations, *Appl Math Optim.*, **12** (1984), 191–202.

Fórmulas trigonométricas para poliedros esféricos e hiperbólicos

Raquel Díaz

Departamento de Geometría y Topología
Facultad de Ciencias Matemáticas
Universidad Complutense de Madrid
E-28040 Madrid, Spain
radiaz@mat.ucm.es

Dedicado a Joan Tarrés en su 65 cumpleaños.

ABSTRACT

La matriz de Gram de un poliedro esférico o hiperbólico lo determina de forma única y contiene toda la información sobre los ángulos diédricos. En esta nota presentamos las fórmulas de los demás elementos del poliedro (longitudes de lados, alturas, ángulos planos) en función de su matriz de Gram. También hacemos lo mismo a partir de la matriz de longitudes.

The Gram matrix of a spherical or hyperbolic polyhedron uniquely determines it and contains all the information about the dihedral angles. In this note we present formulae for the edge lenghts, heights and planar angles of the polyhedron in term of its Gram matrix. We also do the same in terms of the length matrix.

Key words: Poliedros esféricos, poliedros hiperbólicos, matriz de Gram.

2010 Mathematics Subject Classification: Clasificación Primaria 51M10, Clasificación secundaria 51M20, 52B10.

1. Introducción

Un resultado básico de la trigonometría esférica e hiperbólica es que los triángulos están determinados unívocamente (salvo isometría) por sus ángulos. Para el resto de polígonos el resultado es falso: el espacio de polígonos de n lados tiene, salvo isometría, dimensión $2n-3$, luego n ángulos no son suficientes datos para determinar el polígono, salvo si $n = 3$.

Si pasamos a dimensión tres, ocurre que la dimensión del espacio de poliedros de un tipo combinatorio dado, salvo isometría, coincide con el número de aristas del poliedro. Luego ahora sí es natural preguntarse si los ángulos diédricos determinan el poliedro. La respuesta es afirmativa si el poliedro es simple o trivalente, es decir,

Parcialmente financiada por el Proyecto CCG10-UCM/ESP-5425.

en cada vértice inciden exactamente tres caras (es consecuencia de unos celebrados lemas de Cauchy, [1]), pero no se conoce en el caso general.

La matriz de Gram de un poliedro recoge toda la información de los ángulos entre las prolongaciones de cada dos caras del poliedro, en particular los ángulos diédricos, y determina unívocamente el poliedro (ver Sección 2). Si se lograra determinar la matriz de Gram a partir de los ángulos diédricos, se tendría una respuesta afirmativa al problema anterior. En esta nota vamos a determinar, en función de la matriz de Gram, los demás elementos del poliedro (longitudes de lados, alturas, ángulos planos).

Por otra parte, la matriz de longitudes de un poliedro recoge todas las distancias entre cada dos vértices del poliedro, en particular, las longitudes de las aristas. Daremos también fórmulas para los demás elementos del poliedro en términos de la matriz de longitudes.

Estas fórmulas generalizan las fórmulas clásicas para triángulos y tetraedros esféricos e hiperbólicos.

2. Preliminares

Nuestro interés original son los poliedros hiperbólicos. Sin embargo, la figura verticilar en cada vértice de un poliedro hiperbólico es un polígono esférico. De modo que estudiaremos polígonos y poliedros esféricos e hiperbólicos.

La geometría esférica y la hiperbólica se pueden estudiar conjuntamente. En efecto, $\mathbb{S}^d$ y $\mathbb{H}^d$ son subconjuntos de $\mathbb{R}^{d+1}$ dotados de una cierta forma bilineal simétrica f. La diferencia esencial entre ambas geometrías es la signatura de esta forma bilineal. Los poliedros en ambas geometrías se pueden ver como intersección del correspondiente $\mathbb{S}^d$ o $\mathbb{H}^d$ con un cono poliedral de $\mathbb{R}^{d+1}$. Recordamos a continuación brevemente estas nociones.

La metodología será trabajar en $(\mathbb{R}^{d+1}, f)$ e interpretar al final los resultados en las geometrías esférica e hiperbólica.

2.1. Espacio geométrico. Geometrías esférica e hiperbólica

Llamamos *espacio geométrico* de dimensión d a $(\mathbb{R}^{d+1}, f)$, donde f es una forma bilineal simétrica no degenerada. Utilizamos la misma notación para la forma cuadrática asociada y a veces usaremos el término "producto escalar" para referirnos a f, aunque ésta no sea definida positiva.

Un vector $e \in \mathbb{R}^{d+1}$ determina el semiespacio $\hat{H}_e^- = \{x \in \mathbb{R}^{d+1} \mid f(x,e) \leq 0\}$. Es claro que $\hat{H}_e^- = \hat{H}_{\lambda e}^-$, para todo $\lambda > 0$.

Para definir la geometría esférica, se toma la forma bilineal simétrica definida positiva $f(x) = x_1^2 + \cdots + x_d^2 + x_{d+1}^2$, y el conjunto $\mathbb{S}^d = f^{-1}(1)$.

Para definir la geometría hiperbólica se toma f con signatura $(d,1)$, $f(x) = x_1^2 + \cdots + x_d^2 - x_{d+1}^2$. El *espacio hiperbólico* es el conjunto $\mathbb{H}^d = \{x \in \mathbb{R}^{d+1} \mid f(x) = -1, x_{d+1} > 0\}$. La *esfera de De Sitter* es el conjunto $S^{d-1,1} = f^{-1}(1)$, y adquiere una métrica semi-Riemanniana inducida por f.

Utilizaremos X^d para referirnos indistintamente a $\mathbb{S}^d$ o $\mathbb{H}^d$. Una *isometría* de X^d es una aplicación ortogonal de $\mathbb{R}^{d+1}$ para la forma cuadrática f que deja invariante X^d.

Los hiperplanos en X^d son intersecciones no vacías de hiperplanos de $\mathbb{R}^{d+1}$ con X^d. Dado un vector e con $f(e) = 1$, denotamos por H_e^- al semiespacio $H_e^- = \hat{H}_e^- \cap X^d$ (observemos que para que la intersección $\hat{H}_e \cap \mathbb{H}^d$ sea distinta del vacío se necesita que $f(e)$ sea positivo).

Las distancias y los ángulos se miden utilizando el producto escalar f. Así, para la geometría esférica tenemos:

1. Si $p, q \in \mathbb{S}^d$, entonces $f(p, q) = \cos d_{\mathbb{S}^d}(p, q)$.
2. Si H_{e_1}, H_{e_2} son dos hiperplanos en $\mathbb{S}^d$, entonces $f(e_1, e_2) = -\cos(H_{e_1}^- \cap H_{e_2}^-)$.
3. Si $p, e \in \mathbb{S}^d$, entonces $f(p, e) = -\operatorname{sen} d_{\mathbb{S}^d}(p, H_e)$.

Para la geometría hiperbólica tenemos:

1. Si $p, q \in \mathbb{H}^d$, entonces $f(p, q) = -\cosh d_{\mathbb{H}^d}(p, q)$.
2. Dos hiperplanos H_{e_1}, H_{e_2} hiperbólicos pueden cortarse o no, y tenemos las siguientes fórmulas:
   a) $f(e_1, e_2) = -\cos(H_{e_1}^- \cap H_{e_2}^-)$, si los hiperplanos H_{e_1}, H_{e_2} se cortan;
   b) $f(e_1, e_2) = -\cosh d_{\mathbb{H}^d}(H_{e_1}, H_{e_2})$, si los hiperplanos H_{e_1}, H_{e_2} no se cortan y ninguno de los semiespacios $H_{e_i}^-$ contiene al otro.
3. Dados un punto $p \in \mathbb{H}^d$ y un hiperplano H_e con $p \in \mathbb{H}_e^-$, entonces $f(p, e) = -\operatorname{sinh} d_{\mathbb{H}^d}(p, H_e)$.

A lo largo del texto utilizaremos "d" indistintamente para la distancia esférica o la hiperbólica.

2.2. Politopos. Matriz de Gram.

Una forma usual de definir un politopo es como la intersección finita de semiespacios. Así, llamamos *cono poliedral* $\hat{P}$ a un conjunto de la forma $\hat{P} = \cap_i \hat{H}_{e_i}^- \subset \mathbb{R}^{d+1}$. Asumiremos siempre que el cono poliedral tiene interior no vacío y que es no degenerado, es decir, los vectores e_i que lo definen generan $\mathbb{R}^{d+1}$.

Dado un cono poliedral $\hat{P}$, siempre hay un hiperplano afín A tal que $\hat{P} \cap A$ es un politopo compacto P de dimensión d. El tipo combinatorio del cono poliedral $\hat{P}$ es, por definición, el tipo combinatorio de P. Así, un vértice de $\hat{P}$ será el rayo vectorial $[v]$ generado por un vértice v de P. En esta nota sólo trabajaremos con polígonos y poliedros, es decir, politopos de dimensión $d = 2$ ó 3, respectivamente.

Consideramos ahora en $\mathbb{R}^{d+1}$ la forma cuadrática f. Si f es definida positiva, la intersección $P = \hat{P} \cap \mathbb{S}^d$ es un *politopo esférico* . Si f tiene signatura $(d, 1)$, para que la intersección $P = \hat{P} \cap \mathbb{S}^d$ sea considerada un politopo hiperbólico pedimos que todas las caras de $\hat{P}$, salvo quizás los vértices, corten a $\mathbb{H}^d$. La condición $f(e_i) > 0$ asegura que las caras de $\hat{P}$ de dimensión máxima cortan a H^d. Un vértice $[v]$ de $\hat{P}$ corta a $\mathbb{H}^d$ si $f(v) < 0$, y en este caso se llama *vértice finito de* $\mathcal{P}$. Un vértice se llama *infinito o ultrainfinito* , si $f(v)$ es cero o positivo, respectivamente. Un politopo hiperbólico es compacto si y sólo si todos sus vértices son finitos.

Sea $\hat{P} = \cap_i \hat{H}^-_{e_i}$ un cono poliedral con los vectores e_i normalizados, es decir, $f(e_i) = 1$, para todo i. La *matriz de Gram* de $\hat{P}$ es $G = (f(e_i, e_j))_{i,j}$, que es una matriz simétrica y con 1's en la diagonal.

La matriz de Gram de un politopo P es la misma que la del cono poliedral $\hat{P}$. Nótese que la matriz de Gram contiene toda la información sobre los ángulos diédricos del poliedro. Las entradas que no son ángulos diédricos miden el ángulo en el que se cortan las prolongaciones de las caras correspondientes, o bien la distancia entre dichas prolongaciones, si éstas no se cortan (esto puede pasar en el caso hiperbólico).

Notación. Si G es una matriz simétrica, denotamos por $G\binom{i_1 \dots i_k}{j_1 \dots j_k}$ el determinante de la submatriz de G formada por las filas $i_1, \dots, i_k$ y las columnas $j_1, \dots, j_k$. Si $j_1 = i_1, \dots, j_k = i_k$, abreviaremos la notación anterior por $G_{i_1 \dots i_k}$.

Lema 2.1. *La matriz de Gram de un cono poliedral lo determina unívocamente, salvo isomorfismo ortogonal para f. Como consecuencia, la matriz de Gram de un politopo esférico o hiperbólico lo determina unívocamente, salvo isometría.*

Demostración.

Para la primera afirmación, basta ver que la matriz de Gram $G = (g_{ij})$ determina los vectores e_i salvo isomorfismo ortogonal. Como $\hat{P}$ es no degenerado, G tiene rango $d+1$ y signatura igual a la signatura de f. Como G es simétrica, existe una matriz no singular A tal que $A^t J A = G$, donde J es la matriz diagonal con signatura igual a la de G. Sea B la matriz que se obtiene con las $d+1$ primeras filas de A, por lo que se tiene también que $B^t J B = G$. Los vectores e_i son las columnas de B. Sea ahora otro cono poliedral $\hat{P}' = \cap_i \hat{H}^-_{e'_i}$ cuya matriz de Gram es también igual a G. Supongamos que los vectores $e_1, \dots, e_{d+1}$ son linealmente independientes. Entonces la submatriz de G formada por las $d+1$ primeras filas y columnas es no singular, y, como consecuencia, los vectores $e'_1, \dots, e'_{d+1}$ también son independientes y hay un isomorfismo ortogonal ϕ que transforma e_i en e'_i, $i = 1, \dots, d+1$. Para ver que $\phi(e_j) = e'_j$ para $j > d+1$, observemos que las coordenadas de e_j respecto de la base $\{e_1, \dots, e_{d+1}\}$ son $(g_{j1}, \dots, g_{jm}) G^{-1}_{1 \dots d+1}$, y que éstas son también las coordenadas de e'_j respecto de la base $\{e'_1, \dots, e'_{d+1}\}$, de donde se tiene el resultado.

En el caso esférico, el isomorfismo ϕ sea una isometría esférica. En el caso hiperbólico, para que ϕ sea isometría hiperbólica, debe preservar $\mathbb{H}^d$. Pero esto es claro porque los dos conos poliedrales $\hat{P}, \hat{P}'$ son hiperbólicos. □

2.3. Matriz de longitudes y matriz de alturas.

Otra forma alternativa de dar un cono poliedral es como envoltura convexa de sus vértices, $\hat{P} = \text{conv}\{v_1, \dots, v_m\}$, es decir, un vector v está en $\hat{P}$ si es combinación lineal de los v_i con coeficientes no negativos. Denotamos por K a la matriz de productos escalares de los vértices, es decir, $K = (f(v_i, v_j))_{i,j}$. Observemos aquí que los elementos de la diagonal son iguales a 1 en el caso esférico, y a -1, en el caso hiperbólico. Debido a la interpretación geométrica de f, es claro que K contiene toda la información sobre las longitudes de las aristas de P, y por eso llamamos a K *matriz de longitudes* de P. Igual que la matriz de Gram, la matriz de longitudes determina el politopo salvo isometría. Finalmente, si $P = \cap_{i=1}^n H^-_{e_i}$ es un politopo con vértices $v_1, \dots, v_m$, podemos considerar la matriz $H = (f(e_i, v_j))_{i,j}$, de tamaño $n \times r$, y que

llamamos *matriz de alturas* de P porque contiene toda la información de las distancias de vértices a caras.

2.4. Cono poliedral dual.

Sea $\hat{P} = \cap_{i=1}^{n} \hat{H}_{e_i}^{-} \subset (\mathbb{R}^{d+1}, f)$ un cono poliedral y supongamos que $[v_i], \ldots, [v_m]$ son todos los vértices de $\hat{P}$. Llamamos *cono poliedral dual* (o *polar*) de $\hat{P}$ al cono poliedral $\hat{P}^* = \cap_{i=1}^{m} \hat{H}_{v_i}^{-}$. Si $\hat{P}$ es no degenerado y con interior no vacío entonces $\hat{P}^*$ también es no degenerado y con interior no vacío. Además $(\hat{P}^*)^* = \hat{P}$. Se tiene por tanto que $G(\hat{P}^*) = K(\hat{P})$ y $K(\hat{P}^*) = G(\hat{P})$. Obsérvese que el dual de un politopo esférico es de nuevo un politopo esférico. Sin embargo, el dual de un politopo hiperbólico compacto es un politopo en la esfera de De Sitter (ver [7] para más detalles).

3. Deducción de fórmulas a partir de la matriz de Gram.

En esta sección consideramos un cono poliedral $\hat{P} = \cap_i \hat{H}_{e_i}^{-}$ dado por sus caras, o equivalentemente por su matriz de Gram, y hallamos su matriz de longitudes. La clave para ello es encontrar los vértices de $\hat{P}$. No es difícil hallar los vértices salvo signo, sin embargo es más sutil averiguar correctamente los signos; para esto utilizamos los operadores de Hodge, junto con la orientabilidad del borde del politopo. Resumimos a continuación las propiedades que utilizaremos.

3.1. Operador de Hodge

La forma cuadrática f en $\mathbb{R}^{d+1}$ determina formas cuadráticas $\bigwedge^k f$ en los productos exteriores $\bigwedge^k \mathbb{R}^{d+1}$ de $\mathbb{R}^{d+1}$, definidas como

$$\bigwedge^k f(u_1 \wedge \cdots \wedge u_k, v_1 \wedge \cdots \wedge v_k) = \det\left(f(u_i, v_j)\right)_{i,j=1,\ldots,k}$$

Para simplificar la notación, en adelante utilizaremos $\langle , \rangle$ para todas las formas cuadráticas anteriores (incluida f).

Dada una orientación en $\mathbb{R}^{d+1}$, el operador de Hodge proporciona isomorfismos $*\colon \bigwedge^k f \to \bigwedge^{d+1-k} f$. Para $k = d+1$, se tiene que $*(u_1 \wedge \cdots \wedge u_{d+1})$ es el determinante de la matriz de coordenadas de los u_i respecto de una base ortonormal positivamente orientada. Para $k = d$, se tienen las siguientes propiedades, que determinan $*$ (ver por ejemplo [5]):

Lema 3.1. *Sean $u_1, \ldots, u_d, v_1, \ldots, v_d, v \in \mathbb{R}^{d+1}$. Entonces:*

(a) $\langle *(u_1 \wedge \cdots \wedge u_d), v\rangle = *(u_1 \wedge \cdots \wedge u_d \wedge v)$

(b) $\langle u_1 \wedge \cdots \wedge u_d, v_1 \wedge \cdots \wedge v_d\rangle = (\det f) * (u_1 \wedge \cdots \wedge u_d \wedge *(v_1 \wedge \cdots \wedge v_d))$

(c) $\langle u_1 \wedge \cdots \wedge u_d, v_1 \wedge \cdots \wedge v_d\rangle = (\det f)\langle *(u_1 \wedge \cdots \wedge u_d), *(v_1 \wedge \cdots \wedge v_d)\rangle$

donde $\det f$ *es igual a* 1 *en el caso esférico y a* -1 *en el hiperbólico.*

En particular, del lema obtenemos que $*(u_1 \wedge \cdots \wedge u_d)$ es ortogonal a $u_1, \ldots, u_d$ y tiene la misma norma que $u_1 \wedge \cdots \wedge u_d$.

Aplicaremos las fórmulas anteriores a los vectores e_i que determinan un cono poliedral $\hat{P} = \cap \hat{H}^i_{e_i}$. Sea $G = (\langle e_i, e_j \rangle)_{i,j}$ la matriz de Gram de este cono poliedral. Entonces:

(i) $\langle e_{i_1} \wedge \ldots e_{i_k}, e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_k} \rangle = G\binom{i_1 \ldots i_k}{j_1 \ldots j_k}$, por la definición.

(ii) Sea E la matriz de coordenadas de $e_{i_1}, \ldots, e_{i_{d+1}}$ respecto de una base ortonormal positivamente orientada, y sea J la expresión matricial de f en esta base ortonormal. Por definición, $*(e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_{d+1}}) = \det E$. Por otra parte, se tiene que $\det(E^t J E) = G_{i_1 \ldots i_{d+1}}$. Se tiene por tanto que $*(e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_{d+1}})^2 = (\det f) G_{i_1 \ldots i_{d+1}}$.

3.2. Ciclos orientados de caras. Vértices

El borde de un polígono P es topológicamente una circunferencia, que es orientable. Se define *ciclo orientado* incidente en un vértice V de P a los dos lados incidentes en V dados en un cierto orden. Un ciclo orientado determina una orientación en el borde del polígono ∂P, y decimos que dos ciclos orientados tienen la misma orientación si determinan la misma orientación en ∂P. Si denotamos por $C_1, \ldots, C_n$ las caras de un polígono orientadas cíclicamente, es inmediato que para cada i, k los ciclos C_i, C_{i+1} y C_k, C_{k+1} tienen la misma orientación.

Igualmente, el borde de un poliedro es topológicamente una esfera, que es una superficie orientable, y una orientación queda determinada por una terna ordenada de caras incidentes en un vértice. Llamamos *ciclo orientado* incidente en un vértice V a una terna ordenada de caras incidentes en V tal que las dos primeras sean adyacentes. Diremos que dos ciclos orientados tienen la misma orientación si determinan la misma orientación en el borde del poliedro.

El siguiente resultado permite calcular los vértices de un cono poliedral $\hat{P} = \cap_i \hat{H}^-_{e_i}$ a partir de los vectores e_i cuando conocemos su tipo combinatorio (ver [2] o [3]). El resultado es válido para cualquier dimensión d, una vez definido convenientemente ciclo orientado.

Proposición 3.2. *Sea $\hat{P} = \cap_i \hat{H}^-_{e_i} \subset \mathbb{R}^{d+1}$ con $d = 2$ o 3, un cono poliedral del tipo combinatorio de un politopo $\mathcal{P}$. Para cada vértice $\mathcal{V}_i$ de $\mathcal{P}$ consideramos un ciclo orientado de caras $\mathcal{C}_{i_1}, \ldots, \mathcal{C}_{i_d}$, de tal manera que todos estos ciclos tengan la misma orientación. Consideramos los vectores $W_i = *(e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_d})$. Entonces se tiene que los vértices de $\hat{P}$ son o bien todos los rayos vectoriales $[W_i]$, o bien todos los rayos vectoriales $[-W_i]$.*

Usando el Lema 3.1, es claro los vértices de $\hat{P}$ son los rayos generados por $\pm W_i$. El trabajo de la proposición anterior consiste en ver que, elegidos los ciclos orientados de la manera indicada, tenemos signo "+"para todos los vértices, o bien tenemos signo "−"para todos los vértices.

Salvo que estemos en el caso hiperbólico y el vértice $[\pm W_i]$ sea infinito, podemos normalizar. Así, hacemos la siguiente notación.

Notación. Si la norma de $W_i = *(e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_d})$ es distinta de cero, denotamos $v_{i_1 \ldots i_d} = \frac{W_i}{\|W_i\|} = \frac{*(e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_d})}{\|*(e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_d})\|}$, donde $\|u\|$ la norma de u, es decir, $\|u\| = \sqrt{|f(u,u)|}$.

3.3. Fórmulas trigonométricas: longitudes de aristas y diagonales.

Para calcular las distancias entre dos vértices cualesquiera del politopo, sólo hay ahora que coger los vértices $v_{i_1\dots i_d}$ correspondientes, hacer su producto escalar e interpretarlo. Así obtenemos la matriz de longitudes.

Teorema 3.3. Matriz de longitudes. *Sea $\hat{P} = \cap_i \hat{H}^-_{e_i} \subset (\mathbb{R}^{d+1}, f)$ un cono poliedral del tipo combinatorio de un politopo $\mathcal{P}$. En el caso hiperbólico, supongamos que ningún vértice de $\hat{P}$ es infinito. Para cada vértice $\mathcal{V}_i$ de $\mathcal{P}$, $i \in \{1,\dots,m\}$, consideramos un ciclo $\mathcal{C}_{i_1},\dots,\mathcal{C}_{i_d}$ orientado, de tal manera que todos estos ciclos tengan la misma orientación. Entonces la matriz de longitudes de $\hat{P}$ es*

$$\begin{aligned} K(\hat{P}) &= (\det f)\left(\langle \frac{e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_d}}{\|e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_d}\|}, \frac{e_{j_1}\wedge\cdots\wedge e_{j_d}}{\|e_{j_1}\wedge\cdots\wedge e_{j_d}\|}\rangle\right)_{i,j\in\{1,\dots,m\}} \\ &= (\det f)\left(\frac{G\binom{i_1\dots i_d}{j_1\dots j_d}}{\sqrt{|G_{i_1\dots i_d}|}\sqrt{|G_{j_1\dots j_d}|}}\right)_{i,j\in\{1,\dots,m\}} \end{aligned}$$

Demostración.

Usando la notación de la sección anterior y como consecuencia de la Proposición 3.2, los vértices finitos o ultrainfinitos del politopo geométrico $P = \hat{P}\cap X^d$ son $\epsilon v_{i_1\dots i_d}$, donde $\epsilon = \pm 1$.

Sean $\epsilon v_{i_1\dots i_d}$, $\epsilon v_{j_1\dots j_d}$ dos vértices de P. Se tiene que

$$\begin{aligned} \langle \epsilon v_{i_1\dots i_d}, \epsilon v_{j_1\dots j_d}\rangle &= \langle \frac{*(e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_d})}{\|*(e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_d})\|}, \frac{*(e_{j_1}\wedge\cdots\wedge e_{j_d})}{\|*(e_{j_1}\wedge\cdots\wedge e_{j_d})\|}\rangle \\ &=_{(i)} \frac{(\det f)\langle e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_d}, e_{j_1}\wedge\cdots\wedge e_{j_d}\rangle}{\|e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_d}\|\|e_{j_1}\wedge\cdots\wedge e_{j_d}\|} \\ &=_{(ii)} \frac{(\det f) G\binom{i_1\dots i_d}{j_1\dots j_d}}{\sqrt{|G_{i_1\dots i_d}|}\sqrt{|G_{j_1\dots j_d}|}}, \end{aligned}$$

donde en (i) hemos aplicado el Lema 3.1(b) y (ii) se sigue de la definición de $\wedge^d f$ y de las notaciones para la matriz de Gram. □

Observemos que en el caso esférico $G_{i_1\dots i_d}$ es positivo, por ser el determinante de la expresión matricial de una forma bilineal simétrica definida positiva. En el caso hiperbólico, $G_{i_1\dots i_d}$ es positivo si el vértice $\epsilon v_{i_1\dots i_d}$ es finito y negativo si $\epsilon v_{i_1\dots i_d}$ es ultrainfinito, pues en el primer caso es el determinante de la matriz de Gram de un $(d-1)$-politopo esférico (la figura verticilar del vértice $\epsilon v_{i_1\dots i_d}$), y en el segundo caso es el determinante de la matriz de Gram de un $(d-1)$-politopo hiperbólico (la intersección de P con el hiperplano ortogonal a $\epsilon v_{i_1\dots i_d}$).

Para calcular las longitudes de las aristas y de las diagonales del polígono o poliedro, basta ahora interpretar el anterior producto escalar según las fórmulas de la Sección 2.1. Así tenemos:

Corolario 3.4. *Sea $P = \cap_{i=1}^n H^-_{e_i} \subset X^2$ un polígono con caras $C_1,\dots,C_n$ numeradas cíclicamente, y sea G su matriz de Gram. Se consideran dos vértices (finitos) $V_i =$*

$C_i \cap C_{i+1}, V_j = C_j \cap C_{j+1}$. *Entonces:*

$$\begin{aligned} \cos\big(\mathrm{d}(V_i,V_j)\big) &= \frac{G\binom{i\,i+1}{j\,j+1}}{\sqrt{G_{i\,i+1}}\sqrt{G_{j\,j+1}}}, \quad \text{si } P \text{ es esférico;} \\ -\cosh\big(\mathrm{d}(V_i,V_j)\big) &= \frac{-G\binom{i\,i+1}{j\,j+1}}{\sqrt{G_{i\,i+1}}\sqrt{G_{j\,j+1}}}, \quad \text{si } P \text{ es hiperbólico.} \end{aligned}$$

Si los vértices son consecutivos, es decir $j = i-1$ *se tienen las fórmulas para la longitud* l_i *del lado* C_i*:*

(i) Si P *es esférico, entonces*

$$\cos l_i = \frac{\cos\alpha_{i\,i-1}\cos\alpha_{i\,i+1} + \cos\alpha_{i-1\,i+1}}{\operatorname{sen}\alpha_{i\,i-1}\operatorname{sen}\alpha_{i\,i+1}},$$

donde α_{ij} *es el ángulo* $H^-_{e_i} \cap H^-_{e_j}$

(ii) Si P *es hiperbólico, entonces*

$$\cosh l_i = \frac{\cos\alpha_{i\,i-1}\cos\alpha_{i\,i+1} + \cos\alpha_{i-1\,i+1}}{\operatorname{sen}\alpha_{i\,i-1}\operatorname{sen}\alpha_{i\,i+1}}.$$

Observación. Si P es un triángulo, se obtienen las fórmulas clásicas de los lados en función de los ángulos, ver por ejemplo [6]. Si partimos de un triángulo con uno, dos o los tres vértices ultrainfinitos e interpretamos convenientemente las entradas de la matriz de Gram y los productos $\langle \epsilon v_{i_1\ldots i_d}, \epsilon v_{j_1\ldots j_d}\rangle$ según las fórmulas de la Sección 2.1, obtendríamos las fórmulas para el cuadrilátero de Sacheri, el pentágono con cuatro ángulos rectos y el hexágono con todos los ángulos rectos.

Para polígonos con más de tres lados, la fórmula es exactamente la misma que para triángulos, aunque el ángulo $\alpha_{i-1\,i+1}$ no sea un ángulo del polígono.

Corolario 3.5. *Sea* $P \in X^3$ *un poliedro y sea* G *su matriz de Gram. Sean* V_i, V_j *dos vértices (finitos) de* P *y sean* $C_{i_1}, C_{i_2}, C_{i_3}$ *y* $C_{j_1}, C_{j_2}, C_{j_3}$ *ciclos orientados con la misma orientación. Entonces la distancia entre estos vértices viene dada por*

$$\begin{aligned} \cos\big(\mathrm{d}(V_i,V_j)\big) &= \frac{G\binom{i_1 i_2 i_3}{j_1 j_2 j_3}}{\sqrt{G_{i_1 i_2 i_3}}\sqrt{G_{j_1 j_2 j_3}}}, \quad \text{si } P \text{ es esférico;} \\ -\cosh\big(\mathrm{d}(V_i,V_j)\big) &= \frac{-G\binom{i_1 i_2 i_3}{j_1 j_2 j_3}}{\sqrt{G_{i_1 i_2 i_3}}\sqrt{G_{j_1 j_2 j_3}}}, \quad \text{si } P \text{ es hiperbólico.} \end{aligned}$$

3.4. Alturas.

Con las mismas notaciones que antes, consideremos ahora un vértice $\epsilon v_{i_1\ldots i_d}$ de P y un vector e_j y calculemos su producto escalar, utilizando las propiedades del operador de Hodge:

$$\langle \epsilon v_{i_1\ldots i_d}, e_j\rangle = \frac{\epsilon\langle *(e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_d}), e_j\rangle}{\| *(e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_d})\|} = \frac{\epsilon * (e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_d}\wedge e_j)}{\sqrt{|G_{i_1\ldots i_d}|}};$$

por tanto,

$$\langle \epsilon v_{i_1\dots i_d}, e_j\rangle^2 = \frac{(\det f)G_{i_1\dots i_d i_j}}{|G_{i_1\dots i_d}|}.$$

Basta ahora interpretar el primer término de la igualdad anterior según la Sección 2.1 para obtener las fórmulas para las alturas de un polígono o poliedro (lo enunciamos sólo para poliedros).

Teorema 3.6. *Sea $P \in X^3$ un poliedro y sea G su matriz de Gram. Sea V_{ijk} un vértice (finito), intersección de las caras C_i, C_j, C_k, y sea C_l una cara que no contiene ese vértice. Entonces la distancia entre ellos viene dada por*

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}^2\big(\mathrm{d}(V_{ijk}, C_l)\big) &= \frac{G_{ijkl}}{G_{ijk}}, \quad \text{si } P \text{ es esférico;} \\ \operatorname{senh}^2\big(\mathrm{d}(V_{ijk}, C_l)\big) &= \frac{-G_{ijkl}}{G_{ijk}}, \quad \text{si } P \text{ es hiperbólico.} \end{aligned}$$

3.5. Ángulos planos

La información sobre los ángulos planos queda recogida en la matriz de Gram de las caras.

Teorema 3.7. Matriz de Gram de las caras. *Sea $\hat{P} = \cap_i \hat{H}^-_{e_i} \subset (\mathbb{R}^4, f)$ un cono poliedral del tipo combinatorio de un poliedro $\mathcal{P}$ y sea $\mathcal{C}_i$ una cara de $\mathcal{P}$. Sean $\mathcal{C}_{j_1}, \dots, \mathcal{C}_{j_r}$ todas las caras adyacentes a $\mathcal{C}_i$. Entonces la matriz de Gram de la cara $\hat{C}_i$ de $\hat{P}$ es*

$$G(\hat{C}_i) = \left(\langle \frac{e_i \wedge e_{j_k}}{\|e_i \wedge e_{j_k}\|}, \frac{e_i \wedge e_{j_l}}{\|e_i \wedge e_{j_l}\|} \rangle \right)_{k,l\in\{1,\dots r\}} = \left(\frac{G\binom{i\, j_k}{i\, j_l}}{\sqrt{|G_{ij_k}|}\sqrt{|G_{ij_l}|}} \right)_{k,l\in\{1,\dots r\}}.$$

Observemos que los determinantes G_{ij} que aparecen en la expresión anterior son siempre positivos porque los planos $\hat{H}_i, \hat{H}_j$ se cortan.

Demostración.

Las caras de $\mathcal{C}_i$ son $\mathcal{C}_i \cap \mathcal{C}_{j_1}, \dots, \mathcal{C}_i \cap \mathcal{C}_{j_r}$. Para simplificar la notación, llamamos $\hat{H}_k$ a $\hat{H}_{e_k}$. El hiperplano que contiene la cara $\hat{C}_i$ es $\hat{H}_i$. Sean $e'_{j_1}, \dots, e'_{j_1} \in \hat{H}_i$ los vectores ortogonales exteriores a $\hat{H}_i \cap \hat{H}^-_{j_1}, \dots, \hat{H}_i \cap \hat{H}^-_{j_r}$ y con norma 1, luego la matriz de Gram de $\hat{C}_i$ es la matriz de productos escalares de estos vectores.

Puesto que los vectores e'_{j_k} son ortogonales a e_i, se tiene que

$$\langle e'_{j_k}, e'_{j_l}\rangle = \langle e_i \wedge e'_{j_k}, e_i \wedge e'_{j_l}\rangle.$$

Sea $\hat{H}'_{j_k} \subset \mathbb{R}^4$ el hiperplano ortogonal a $\hat{H}_i$ que contiene a $\hat{H}_i \cap \hat{H}_{j_k}$, y sea $(H'_{j_k})^-$ el semiespacio que contiene $\hat{H}_i \cap \hat{H}^-_{j_k}$. Es decir, el vector e'_{j_k} es ortogonal exterior a $(H'_{j_k})^-$. Como H'_{j_k} está en el haz de hiperplanos generado por $\hat{H}_i$ y $\hat{H}_{j_k}$, se tiene que e'_{j_k} es combinación lineal de e_i y e_{j_k}, y por tanto los vectores $e_i \wedge e'_{j_k}$ y $e_i \wedge e_{j_k}$

son proporcionales. Además, el signo de la constante de proporcionalidad es positivo, porque ambos $(H'_{j_k})^-$ *y* $H^-_{j_k}$ *contienen* $\hat{H}_i \cap \hat{H}^-_{j_k}$*. Se sigue entonces que*

$$\langle e_i \wedge e'_{j_k}, e_i \wedge e'_{j_l} \rangle = \langle \frac{e_i \wedge e_{j_k}}{\|e_i \wedge e_{j_k}\|}, \frac{e_i \wedge e_{j_l}}{\|e_i \wedge e_{j_l}\|} \rangle,$$

de donde se obtiene la primera igualdad del resultado, y la segunda igualdad es sólo la definición del producto $\wedge^2 f$*.* □

Matriz de longitudes de las caras. La matriz de longitudes $K(\hat{C}_i)$ de la cara $\hat{C}_i$ no es más que la submatriz de $K(\hat{P})$ correspondiente a los índices de los vértices de $\hat{C}_i$. Por otra parte, $K(\hat{C}_i)$ se podría obtener también a partir de $G(\hat{C}_i)$, según el Teorema 3.3. Comprobamos a continuación que ambos métodos dan el mismo resultado.

Sean $\hat{V}_k, \hat{V}_l$ dos vértices de $\hat{C}_i$, determinados por las caras $\hat{C}_{j_k}, \hat{C}_{j_{k+1}}$ y $\hat{C}_{j_l}, \hat{C}_{j_{l+1}}$, respectivamente. Si los índices $j_k, j_{k+1}, j_l, j_{l+1}$ están ordenados cíclicamente (según el borde de la cara $\hat{C}_i$), se tiene que los ciclos orientados $\hat{C}_i, \hat{C}_{j_k}, \hat{C}_{j_{k+1}}$ y $\hat{C}_i, \hat{C}_{j_l}, \hat{C}_{j_{l+1}}$ tienen la misma orientación. Por tanto, la entrada (k,l) de la matriz $K(\hat{C}_i)$ es igual a

$$(\det f) \frac{G\binom{i\, j_k\, j_{k+1}}{i\, j_l\, j_{l+1}}}{\sqrt{|G_{ij_kj_{k+1}}|}\sqrt{|G_{ij_lj_{l+1}}|}}. \tag{1}$$

Por otra parte, del Teorema 3.3 aplicado a $G(\hat{C}_i)$, se tiene que la entrada (k,l) de la matriz $K(\hat{C}_i)$ es igual a

$$\det(f|_{\hat{H}_i}) \frac{G(\hat{C}_i)\binom{j_k\, j_{k+1}}{j_l\, j_{l+1}}}{\sqrt{|G(\hat{C}_i)_{j_kj_{k+1}}|}\sqrt{|G(\hat{C}_i)_{j_lj_{l+1}}|}}. \tag{2}$$

Tenemos que comprobar que las dos expresiones anteriores son iguales. Observemos que $\det(f|_{\hat{H}_i}) = \det f$, puesto que, en el caso hiperbólico, $\hat{H}_i$ corta al espacio hiperbólico. Para simplificar las expresiones, denotemos $\lambda_{j_k} = 1/\sqrt{|G_{ij_k}|}$. Aplicando ahora el Teorema 3.7, se tiene que los determinantes involucrados en (2) son:

$$G(\hat{C}_i)\tbinom{j_k\, j_{k+1}}{j_l\, j_{l+1}} = \lambda_{j_k}\lambda_{j_{k+1}}\lambda_{j_l}\lambda_{j_{l+1}} \begin{vmatrix} G\binom{ij_k}{ij_l} & G\binom{i\, j_k}{ij_{l+1}} \\ G\binom{ij_{k+1}}{i\, j_l} & G\binom{ij_{k+1}}{ij_{l+1}} \end{vmatrix} \tag{3}$$

$$G(\hat{C}_i)_{j_kj_{k+1}} = \lambda^2_{j_k}\lambda^2_{j_{k+1}} \begin{vmatrix} G\binom{ij_k}{ij_k} & G\binom{i\, j_k}{ij_{k+1}} \\ G\binom{ij_{k+1}}{i\, j_k} & G\binom{ij_{k+1}}{ij_{k+1}} \end{vmatrix} \tag{4}$$

$$G(\hat{C}_i)_{j_lj_{l+1}} = \lambda^2_{j_l}\lambda^2_{j_{l+1}} \begin{vmatrix} G\binom{ij_l}{ij_l} & G\binom{i\, j_l}{ij_{l+1}} \\ G\binom{ij_{l+1}}{i\, j_l} & G\binom{ij_{l+1}}{ij_{l+1}} \end{vmatrix}. \tag{5}$$

Ahora, la igualdad de las expresiones (1) y (2) se deduce directamente de la siguiente identidad de Sylvester (ver [4] para la expresión general de las identidades de Sylvester):

Lema 3.8. *Sea* $A = (a_{ij})$ *un matriz cuadrada de orden 3, y sea* B *la matriz que se obtiene orlando la entrada* a_{11} *con una fila y una columna del resto de filas y columnas de* A*. Entonces* $\det B = \det A$*.*

Para nuestro caso, aplicamos el lema anterior a la matriz $G\left[\begin{smallmatrix} i & j_k & j_{k+1} \\ i & j_l & j_{l+1} \end{smallmatrix}\right]$ (submatriz de G formada por las filas i, j_k, j_{k+1} y las columnas i, j_l, j_{l+1}). Se obtiene que $G\binom{i\ j_k\ j_{k+1}}{i\ j_l\ j_{l+1}}$ es igual al determinante que aparece en el segundo miembro de la expresión (3). Igualmente, aplicando el lema a la matriz $G\left[\begin{smallmatrix} i & j_k & j_{k+1} \\ i & j_k & j_{k+1} \end{smallmatrix}\right]$, tenemos que $G_{ij_kj_{k+1}}$ es igual al determinante que aparece en el segundo miembro de (4), y si lo aplicamos a la matriz $G\left[\begin{smallmatrix} i & j_l & j_{l+1} \\ i & j_l & j_{l+1} \end{smallmatrix}\right]$, obtenemos que $G_{ij_lj_{l+1}}$ es igual al determinante que aparece en el segundo miembro de (5). Por tanto se tiene finalmente que las expresiones (1) y (2) son iguales.

Corolario 3.9. Ángulos planos. *Sea $P \subset X^3$ un poliedro esférico o hiperbólico. Sea α el ángulo plano de la cara C_i limitado por las caras C_i y C_k. Entonces*

$$-\cos\alpha = \frac{G\binom{i\ j}{i\ k}}{\sqrt{|G_{ij}|}\sqrt{|G_{ik}|}} = \frac{G\binom{i\ j}{i\ k}}{\sqrt{G_{ij}}\sqrt{G_{ik}}}.$$

4. Caras en función de vértices

En el otro sentido, consideramos ahora un cono poliedral como envoltura convexa de sus vértices, $\hat{P} = \operatorname{conv}\{v_1, \ldots, v_m\}$.

Para deducir las fórmulas trigonométricas a partir de la matriz de longitudes, realizamos un proceso totalmente análogo al de la sección anterior. En primer lugar definimos ciclo de vértices.

Para un polígono P, un *ciclo orientado de vértices* incidentes en un lado de P son los dos vértices de ese lado dados en un cierto orden.

Si P es un poliedro, llamamos *ciclo orientado (de vértices)* incidente en una cara C de P a tres vértices ordenados contenidos en esta cara tal que los dos primeros sean adyacentes. Es claro que un ciclo orientado de vértices induce una orientación del polígono o poliedro. Decimos que dos ciclos orientados tienen la misma orientación si inducen la misma orientación en el polígono o poliedro. Se tiene una proposición totalmente análoga a la Proposición 3.2, cambiando "vértices" por "caras" y viceversa.

Proposición 4.1. *Sea $\hat{P} = \operatorname{conv}\{v_1, \ldots, v_m\} \subset \mathbb{R}^{d+1}$ con $d = 2$ ó 3, un cono poliedral del tipo combinatorio de un politopo $\mathcal{P}$. Para cada cara $\mathcal{C}_i$ de $\mathcal{P}$ consideramos un ciclo orientado de vértices $\mathcal{V}_{i_1}, \ldots, \mathcal{V}_{i_d}$, de tal manera que todos estos ciclos tengan la misma orientación. Consideramos los vectores $E_i = *(v_{i_1} \wedge \cdots \wedge v_{i_d})$. Entonces se tiene que las caras de $\hat{P}$ son o bien todos los semiespacios $\hat{H}^-_{E_i}$, o bien todos los semiespacios $\hat{H}^-_{(-E_i)}$.*

Notación. Denotamos $e_{i_1 \ldots i_d} = \frac{E_i}{\|E_i\|} = \frac{*(v_{i_1} \wedge \cdots \wedge v_{i_d})}{\|*(v_{i_1} \wedge \cdots \wedge v_{i_d})\|}$. Nótese que el denominador es siempre no nulo, incluso en el caso hiperbólico, si todos los vértices son finitos o infinitos (de hecho, tanto en el caso esférico como hiperbólico, $f(E_i) > 0$).

La proposición anterior se puede probar de forma idéntica a la demostración de la Proposición 3.2 (véase [2]). Alternativamente, se puede aplicar la Proposición 3.2 al cono poliedral dual.

Ahora, la matriz de Gram y las fórmulas trigonométricas para ángulos diédricos, alturas y ángulos planos se obtienen exactamente igual que en las Secciones 3.3, 3.4 y 3.5. Las enunciamos todas a continuación.

Matriz de Gram. Sea $\hat{P} = \operatorname{conv}\{v_1, \ldots, v_m\}$ un cono poliedral del tipo combinatorio de un politopo $\mathcal{P}$ y K su matriz de longitudes. Para cada cara $\mathcal{C}_i$ de $\mathcal{P}$, $i \in \{1, \ldots, n\}$, consideramos un ciclo $\mathcal{V}_{i_1}, \ldots, \mathcal{V}_{i_d}$ orientado, de tal manera que todos estos ciclos tengan la misma orientación. Entonces la matriz de longitudes de $\hat{P}$ es

$$\begin{aligned} G(\hat{P}) &= (\det f)\left(\langle \frac{v_{i_1} \wedge \cdots \wedge v_{i_d}}{\|v_{i_1} \wedge \cdots \wedge v_{i_d}\|}, \frac{v_{j_1} \wedge \cdots \wedge v_{j_d}}{\|v_{j_1} \wedge \cdots \wedge v_{j_d}\|} \rangle\right)_{i,j \in \{1,\ldots,n\}} \\ &= (\det f)\left(\frac{K\binom{i_1 \ldots i_d}{j_1 \ldots j_d}}{\sqrt{|K_{i_1 \ldots i_d}|}\sqrt{|K_{j_1 \ldots j_d}|}}\right)_{i,j \in \{1,\ldots,n\}} \end{aligned}$$

Ángulos de polígonos. Sea $P \subset X^2$ un polígono con vértices $V_1, \ldots, V_m$ numerados cíclicamente, y denotemos por α_i el ángulo en el vértice V_i. Entonces:

(i) Si P es esférico, se tiene

$$-\cos \alpha_i = \frac{\cos l_{i\,i-1} \cos l_{i\,i+1} - \cos l_{i-1\,i+1}}{\operatorname{sen} l_{i\,i-1} \operatorname{sen} l_{i\,i+1}},$$

donde l_{ij} es la longitud del lado de vértices V_i, V_j.

(ii) Si P es hiperbólico, entonces

$$\cos \alpha_i = \frac{\cosh l_{i\,i-1} \cosh l_{i\,i+1} - \cosh l_{i-1\,i+1}}{\operatorname{senh} l_{i\,i-1} \operatorname{senh} l_{i\,i+1}}.$$

Obsérvese que se recuperan las fórmulas clásicas para los triángulos.

Ángulos diédricos de poliedros. Si P es un poliedro y C_i, C_j dos caras adyacentes, denotemos por α_{ij} el ángulo diédrico entre ellas. Sean $V_{i_1}, V_{i_2}, V_{i_3}$ y $V_{j_1}, V_{j_2}, V_{j_3}$ ciclos orientados con la misma orientación incidentes en V_i, V_j respectivamente. Entonces:

(i) Si P es esférico, se tiene

$$-\cos \alpha_{ij} = \frac{K\binom{i_1 i_2 i_3}{j_1 j_2 j_3}}{\sqrt{K_{i_1 i_2 i_3}}\sqrt{K_{j_1 j_2 j_3}}}$$

(ii) Si P es hiperbólico,

$$-\cos \alpha_{ij} = \frac{-K\binom{i_1 i_2 i_3}{j_1 j_2 j_3}}{\sqrt{K_{i_1 i_2 i_3}}\sqrt{K_{j_1 j_2 j_3}}}.$$

Alturas. Sea V_l un vértice del poliedro $P \in X^3$ y sea C_{ijk} una cara que contiene los vértices V_i, V_j, V_k y no contiene V_l. Entonces la distancia entre ellos viene dada por

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}^2\big(\mathrm{d}(C_{ijk}, V_l)\big) &= \frac{K_{ijkl}}{K_{ijk}}, \quad \text{si } P \text{ es esférico;} \\ \operatorname{senh}^2\big(\mathrm{d}(C_{ijk}, V_l)\big) &= \frac{K_{ijkl}}{K_{ijk}}, \quad \text{si } P \text{ es hiperbólico.} \end{aligned}$$

Ángulos planos. La matriz de longitudes de una cara es simplemente una submatriz de la matriz de longitudes del poliedro. A partir de la matriz de longitudes de la cara se calcula la matriz de Gram de esa cara.

Referencias

[1] A.L. Cauchy, *Sur les polygones et polyèdres*, J. Ec: Polytechnique 16, 87-99, 1813.

[2] R. Díaz, *Matrices de gram y espacios de ángulos diédricos de poliedros*, tesis doctoral Univ. Complutense de Madrid, 1996.

[3] R. Díaz, *A Characterization of Gram Matrices of Polytopes* Discrete Comput. Geom. 21:581-601, 1999.

[4] F.R. Gantmacher, *The theory of matrices* Vol. I. Chelsea Publishing Company, New york, 1959.

[5] B. Iversen, *Hyperbolic Geometry*, Cambridge University Press, 1992.

[6] J.G. Ratcliffe, *Foundations of Hyperbolic Manifolds*, Springer-Verlag New York Inc., 1994.

[7] I. Rivin, C.D. Hodgson, *a Characterization of compact convex polyhedra in hyperbolic 3-space*, Invent. Math. 111, 77-111, 1993.

Singular 2-webs. An introduction

Fernando ETAYO

Dpto. Matemáticas, Estadística y Computación
Facultad de Ciencias, Universidad de Cantabria
Avda. de los Castros s/n
E-39005 Santander, Spain
etayof@unican.es

Dedicado a Joan Tarrés, con total amistad y respeto por su magisterio y entrega.

ABSTRACT

A 2-web in the plane is given by two transverse 1-foliations. In this paper we introduce the study of singular 2-webs, given by any two foliations. In general, two foliations are tangent along a curve, which will be called the polar curve of the 2-web.

Key words: Singular 2-web, Foliations, Pfaffian forms, Paracomplex structure.

2010 Mathematics Subject Classification: 53C12, 53A60, 53C15.

1. Introduction

A 2-web in the real plane is given by two transverse 1-dimensional foliations, i.e., two families of curves such that in any point the curves passing through it have different tangent lines. These 2-webs are always locally diffeomorphic to that of vertical and horizontal lines, and then they have no local invariants. The case of 3-webs is completely different because of the curvature of the Blaschke-Chern connection, which measures how far the web is to be hexagonal [2, 6].

One could think that 2-webs have no interest. Nevertheless, we want to go into an unknown landscape, which has not been explored yet, as far as the author knows. Let us consider two different 1-dimensional foliations in the plane. What can you say about the set of points in which both foliations are tangent? If this set is not empty, we shall say that both foliations define a *singular 2-web* and the set will be called the *polar curve* of the singular 2-web. We use this terminology following a similar idea [3] developed in the context of a holomorphic foliation in $\mathbb{C}^2$, where the polar curve is defined from the foliation and a direction in the plane, i.e., it is defined from 2-web defined by the holomorphic foliation and the foliation of lines parallel to the direction.

Polar curves should not be confused with polar foliations. A polar foliation [1] is a singular foliation in a complete Riemannian manifold such that for each regular point p, there is an immersed submanifold Σ_p, called section, that passes through p and that meets all the leaves and always perpendicularly.

The goal of the paper is to show some motivating examples and to state the first strategies to obtain information about the polar curve. We shall show that if the foliations are algebraic in some sense, the polar curve is an algebraic curve whose degree depends on those of the foliations.

2. The simplest example

Let us consider the punctured plane $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ and the foliations given by

- $\mathcal{F}_1$ is the set of circles with center $(0,0)$.
- $\mathcal{F}_2$ is the set of vertical lines.

Obviously, this is a singular 2-web having the horizontal axis as polar curve. We can prove it by using different techniques: analyzing the associated distributions, the paracomplex structure and the Pfaffian forms. As it is well known 1-dimensional distributions are always integrable, and then we can work interchangeably with distributions and foliations. We shall show carefully these three techniques, because we should choose the best one in order to ahead more complex situations.

- Associated distributions: The tangent vector of the foliation $\mathcal{F}_1$ at the point (x,y) is $X = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$. The tangent vector to $\mathcal{F}_2$ is $Y = \frac{\partial}{\partial y}$. These vectors are colinear in the polar curve $\{y=0\} - \{(0,0)\}$.
- The paracomplex structure [5] is the $(1,1)$-tensor field F such that their eigenspaces are the distributions tangent to the foliations. A straightforward calculation shows that

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2x}{y} & -1 \end{pmatrix}$$

  One can esaily check that $F^2 = id; F(X) = X; F(Y) = -Y$. The paracomplex structure F is well defined in all the punctured plane unless the polar curve $\{y=0\} - \{(0,0)\}$. Then the polar curve appears as the set of points where the structure cannot be defined.
- The Pfaffian forms defining $\mathcal{F}_1$ and $\mathcal{F}_2$ are $\omega = x\,dx + y\,dy$ and $\eta = dx$. The points where these 1-forms are dependent are those where $0 = \omega \wedge \eta = (x\,dx + y\,dy) \wedge dx = -ydx \wedge dy$, which are those of the polar curve.

The best option is to work with Pfaffian forms, because one has only to check a product of 1-forms.

3. The main properties

The first statement is easy.

Theorem 3.1. *Let $\omega = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ and $\eta = R(x,y)dx + S(x,y)dy$ be two 1-forms in a region of the real plane. Then, the polar curve of the singular 2-web defined by ω and η is the curve $\{PS - QR = 0\}$. Besides, if the coefficient functions P, Q, R, S are polynomial of degrees p, q, r, s then the polar curve is an algebraic curve of degree less or equal to* $\max(p+s, q+r)$.

Proof. Observe that $\omega \wedge \eta = (PS - QR)dx \wedge dy$, thus showing that both 1-forms are dependent on the curve $\{PS - QR = 0\}$ □

In the example of the above section, the curve is an algebraic curve of degree one, i.e., a line. Observe that circles of the first foliation are algebraic curves of degree two, while the coefficients of the corresponding Pfaffian form are linear functions, of degree one. Is there a relationship between the degree of the curves of the foliation and that of the coefficients of its Pfaffian form? Moreover, if the curves are algebraic, is it sure that the coefficients of the Pfaffian form are algebraic?

Let us consider the following foliation:

- $\mathcal{F}_3$ is the vertical axis and the set of circles C_a, with center in the horizontal axis passing through the points $(a, 0)$ and $(1/a, 0)$.

Points $(a,0), (1/a,0), (1,0), (-1,0)$ define a harmonic quadruple of points, i.e., their cross ratio is -1. The center of C_a is the point $\frac{a^2+1}{2a}$ and the radius is $\frac{a^2-1}{2a}$ thus obtaining the equation

$$C_a = \left\{ \left(x - \frac{a^2+1}{2a} \right)^2 + y^2 \;=\; \left(\frac{a^2-1}{2a} \right)^2 \right\} = \left\{ x^2 - \frac{a^2+1}{a}\, x + y^2 + 1 = 0 \right\}$$

Let us denote by $f(x,y) = 0$ the equation of the curve C_a. The tangent line in $p = (x,y) \in C_a$ is $f_x(x - p_1) + f_y(y - p_2) = 0$, whose direction is generated by the vector $(-f_y(p), f_x(p))$, and the corresponding dual form will be $f_x(p)dx + f_y(p)dy$. In our case,

$$\omega = \left(2x - \frac{a^2+1}{a} \right) dx + \, 2y\, dy$$

Then, from the equation of C_a, we can deduce that

$$\frac{a^2+1}{a} = \frac{x^2+y^2+1}{x}$$

thus showing

$$\omega = \frac{x^2 - y^2 - 1}{x}\, dx \;+\; 2y\, dy\,; \text{ if } x \neq 0$$

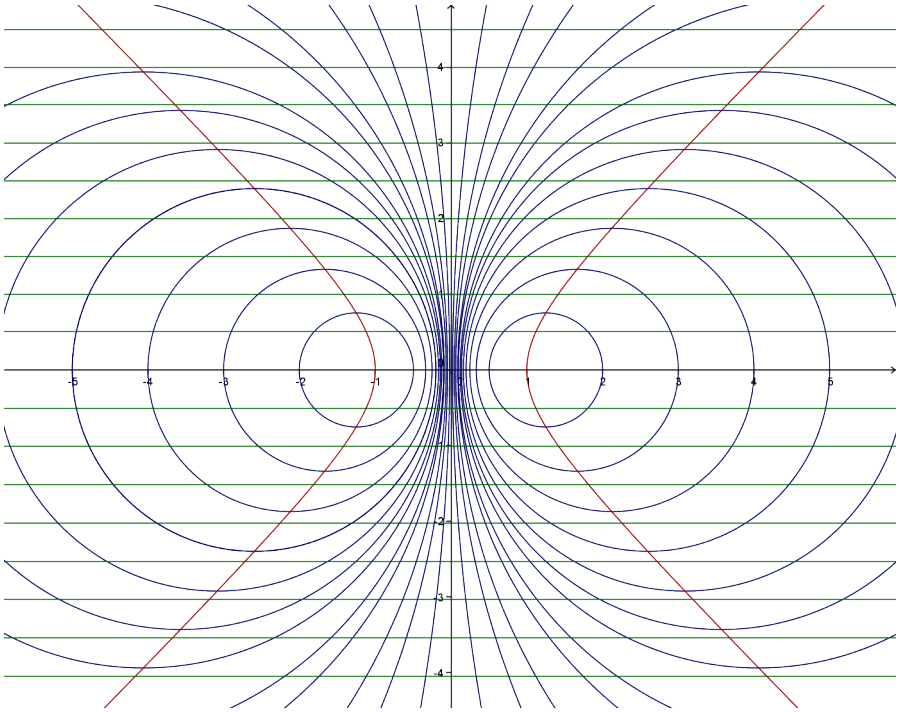
Observe that the coefficients of the Pfaffian form are rational functions, instead of algebraic. Of course, we can replace the Pffaf form by another one obtained multiplying by the function $\mu(x,y) = x$, and then we would have coefficients of degree two. This is the same that one does for solving total differential equations multiplying by an integrant factor. Then, we can take

$$\omega = (x^2 - y^2 - 1)\, dx \, + \, 2xy\, dy$$

Let us consider the singular 2-web given by the foliations:

- $\mathcal{F}_3$ is the vertical axis and the set of circles C_a, with center in the horizontal axis passing through the points $(a, 0)$ and $(1/a, 0)$.
- $\mathcal{F}_4$ is the set horizontal lines, whose Pfaffian form is dy.

Then, the polar curve is the hyperbola $\{x^2-y^2-1 = 0\}$, which is a non-connected curve.



If we consider the same first foliation and that of vertical lines

- $\mathcal{F}_3$ is the vertical axis and the set of circles C_a, with center in the horizontal axis passing through the points $(a, 0)$ and $(1/a, 0)$.
- $\mathcal{F}_2$ is the set vertical lines, whose Pfaffian form is dx.

then the polar curve is the reducible curve $\{xy = 0\}$ given by both axis. This example shows that the polar curve can be a reducible one and that can be tangent to both foliations, instead of transverse.

4. Normal 2-web

Let $\mathcal{F}$ be a foliation in the plane $\mathbb{R}^2$. Then the normal foliation $\mathcal{F}^\perp$ is defined as the foliation defined by the normal distribution to the foliation $\mathcal{F}$. One can easily check that the Pfaffian form of $\mathcal{F}^\perp$ is $\omega^\perp = -Q(x,y)dx + P(x,y)dy$ if that of $\mathcal{F}$ is $\omega = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$.

Given a singular 2-web with foliations $(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$, then the normal 2-web is said to be that of foliations $(\mathcal{F}_1^\perp, \mathcal{F}_2^\perp)$. A point p is in the polar curve of $(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$ iff $T_p\mathcal{F}_1 = T_p\mathcal{F}_2$, or, equivalently, $T_p\mathcal{F}_1^\perp = T_p\mathcal{F}_2^\perp$, i.e., iff p is in the polar curve of the normal web $(\mathcal{F}_1^\perp, \mathcal{F}_2^\perp)$. Then, we have proved the following:

Proposition 4.1. *A singular 2-web and its normal web have the same polar curve.*

Let us consider the example of section 2. In this case we have:

- $\mathcal{F}_1$ is the set of circles with center $(0,0)$. Then $\mathcal{F}_1^\perp$ is the set of radial semi-lines.
- $\mathcal{F}_2$ is the set vertical lines. Then $\mathcal{F}_2^\perp$ is the set of horizontal lines.

The polar curve of the normal web is the horizontal axis.

Observe that $\mathcal{F}_1$ and $\mathcal{F}_1^\perp$ have Pfaffian forms with coefficients of the same degree (of degree 1), although the integral curves have different degrees.

Finally, remember that a 1-dimensional foliation in $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ is always a totally real foliation, i.e, the complex structure J moves the tangent distribution into the normal one.

5. Singular 2-webs in $\mathbb{R}^4$ and singular holomorphic 2-webs in $\mathbb{C}^2$

The case of foliations in the real plane $\mathbb{R}^2$ is very special because of the following considerations:

(i) 1-dimensional distributions are always integrable, because of the uniqueness and existence theorem of Ordinary Differential Equations (ODE's).

(ii) In particular, the normal distribution of a foliation is always integrable.

(iii) 1-dimensional foliations are always totally real when they are considered in $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$.

If we want to study singular 2-webs in a $2n$-dimensional manifold the situation is quite different, because the above properties are not true for n-dimensional foliations. Besides, the polar manifold is more complex. For instance, let us consider two 2-dimensional foliations $(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$ in $\mathbb{R}^4$. Then, $\dim(T_p\mathcal{F}_1 \cap T_p\mathcal{F}_2)$ is 0,1,2.

A special case which should be considered is that of having two holomorphic foliations. Assume that $(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$ is a holomorphic singular 2-web (i.e., both foliations are holomorphic). Then, for every point p, one has $T_p\mathcal{F}_1 \cap T_p\mathcal{F}_2$ is a J-invariant space, J being the complex structure of $\mathbb{R}^4 = \mathbb{C}^2$, and then it has real dimension equal to 0 or 2.

Remembering the quoted properties of real foliations in $\mathbb{R}^2$, we have the following ones referring to holomorphic foliations in $\mathbb{C}^2$:

(i) Respect to the involutiveness of a complex distribution one should consider Complex ODE's. This is explained in [10].

(ii) Given a holomorphic foliation in a subset of $\mathbb{C}^2$ one can define the orthogonal distribution. One can easily check that the the orthogonal distribution to the given foliation is J-invariant. Nevertheless, in general one needs more assumptions to guarantee that it is integrable. For instance, Vaisman [12], proved in 1976 that it is integrable iff the given foliation defines a Kähler-Reinhart structure on $\mathbb{C}^2$.

(iii) A holomorphic distribution is J-invariant, not totally real.

Even in the case of a holomorphic foliation in the complex projective plane $P_2(\mathbb{C})$ one cannot assure that its leaves are algebraic curves. In fact, Jouanolou [7] gave in 1979 an explicit example. Moreover, he showed that the set of algebraic Pfaffian equations without algebraic solutions is dense. This is interesting, because in the case of having a holomorphic 2-web given by algebraic Pffafian forms, integral curves could be non-algebraic although the polar curve must be algebraic.

One also can study other kinds of foliations, having totally real or slant leaves, for instance. As far as the author knows, the unique paper about slant foliations is that of Lotta [8]. In [4] we proved that every surface is quasi-slant, which can be useful in the study of 2-dimensional foliations in $\mathbb{R}^4$. With respect to totally real foliations there are a lot of papers in the case of CR-structures, but the author only knows some papers of Shu, e.g., [11], and of Peng and Li, e.g., [9], studying totally real foliations in even-dimensional manifolds.

As a final remark, we point out that all the foliations considered in the paper are regular. There are lot of works about singularities in foliations. Considering singular 2-webs defined by singular foliations escapes our purpose. The main goal of the present paper was to introduce a topic which we consider interesting enough, showing detailed examples.

References

[1] Alexandrino, M. M.: On polar foliations and fundamental group. *Results in Mathematics*, **60**, Issue 1 (2011), 213–223

[2] Blaschke, W.: *Geometrie der Gewebe*. Springer, 1938.

[3] Corral, N.: Infinitesimal adjunction and polar curves. *Bull. Braz. Math. Soc.* (N.S.) **40** (2009), no. 2, 181-224.

[4] Etayo, F.: On quasi-slant submanifolds of an almost Hermitian manifold. *Publ. Math. Debrecen* **53** (1998), no. 1-2, 217–223.

[5] Etayo, F. ; Santamaría, R; Trías, U. R.: *The geometry of a bi-Lagrangian manifold.* Differential Geom. Appl. **24** (2006), 33–59.

[6] Grifone, J.; Salem, E.: *Web theory and related topics.* World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. (2001)

[7] Jouanolou, J. P.: *Équations de Pfaffian algébriques.* Lecture Notes in Mathematics, 708. Springer, Berlin, 1979.

[8] Lotta, A.: Foliations of the Sasakian space $\mathbb{R}^{2n+1}$ by minimal slant submanifolds. *Acta Math. Hungar.* **84** (1999), no. 1-2, 135-148.

[9] Peng, H. C.; Li, Z. B.: A pinching theorem for totally real foliations with parallel mean curvature on a complex projective space. *J. Math. (Wuhan)* **30** (2010), no. 2, 289-295.

[10] Rebelo, J. C. ; Reis, H.: Local Theory of Holomorphic Foliations and Vector Fields. arXiv: 1101.4309v1 [math.DS] 22 Jan 2011.

[11] Shu, S.: Totally real harmonic foliations on a complex projective space. *Gongcheng Shuxue Xuebao* **14** (1997), no. 4, 19-24.

[12] Vaisman, I.: On the Analytic Distributions and Foliations of a Kähler Manifold. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **58**, No. 1 (1976), 221–228.

On the minimum genus problem on bordered Klein surfaces

José Javier ETAYO and Ernesto MARTÍNEZ

Departamento de Álgebra
Facultad de Ciencias Matemáticas
Universidad Complutense de Madrid
E-28040 Madrid, Spain
jetayo@mat.ucm.es

Departamento de Matemáticas Fundamentales
Facultad de Ciencias, UNED
E-28040 Madrid, Spain
emartinez@mat.uned.es

Dedicado al Prof. Juan Tarrés Freixenet con motivo de su jubilación académica.

ABSTRACT

The minimum genus problem consists in determining the minimum algebraic genus of a surface on which a given group G acts. For cyclic groups G this problem on bordered Klein surfaces was solved in 1989. The next step is to fix the number of boundary components of the surface and to obtain the minimum algebraic genus, and so the minimum topological genus. It was achieved for cyclic groups of prime and prime-power order in the nineties.

In this work the corresponding results for cyclic groups of order $N = pq$, where p and q are different odd primes, is obtained. There appear different results depending on the orientability of the surface.

Finally we obtain general results when the number of boundary components is small, which are valid for any odd N.

Key words: Klein surfaces, algebraic genus, automorphisms of surfaces.

2010 Mathematics Subject Classification: 30F50.

1. Introduction

A bordered Klein surface of algebraic genus $\mathfrak{p} \geq 2$ has at most $12(\mathfrak{p}-1)$ automorphisms ([6], [7]). This upper bound is a particular case of the problem of finding the minimum algebraic genus of a surface whose group of automorphisms is a given finite group G. For cyclic groups this value was obtained in [3]. Earlier, Harvey had obtained the latter result for Riemann surfaces [5].

A further step is to minimize the topological genus when the number of connected components of the boundary is fixed, say k. The interest in this problem comes from the field of real algebraic geometry. In fact, under the equivalence between compact bordered Klein surfaces and real algebraic curves, the boundary components

The first author is partially supported by MTM2011-22435 and UCM910444, and the second one by MTM 2011-23092.

of the surfaces correspond to the ovals of the curve. Therefore, in terms of real algebraic geometry, the above problem consists of computing the minimum genus of the projective, smooth, irreducible, real algebraic curves with k connected components admitting G as a group of birational automorphisms. If G is a cyclic group of order N, this problem was solved in [2] for N prime and in [4] for N a prime-power. For this and other related questions see [1] where in particular (page 166) the pending question of solving the problem for an arbitrary N is recalled.

In this work we solve this question for $N = pq$, a product of two different odd primes. The analysis of this case makes it clear that it is quite impossible to obtain an explicit general solution for arbitrary N. On the other hand, we obtain information enough to have it solved for "small" values of k.

We shall use the notation of [2] which we now describe. Let $\mathcal{K}$ be the class of compact bordered Klein surfaces. Given $S \in \mathcal{K}$ we call g its topological genus, k the number of connected components of its boundary, and take $\alpha = 2$ if S is orientable, and $\alpha = 1$ if S is non-orientable. Then the algebraic genus of S is $\mathfrak{p} = \alpha g + k - 1$. So for a given k, minimizing g is equivalent to minimizing $\mathfrak{p}$. Now fix $N \geq 2$, $k \geq 1$. We denote by $\mathcal{K}_+^+(N,k)$ (resp. $\mathcal{K}_+^-(N,k)$) the set of orientable surfaces $S \in \mathcal{K}$ with $\mathfrak{p} \geq 2$, having k connected boundary components, which admit an orientation-preserving (resp. orientation-reversing) automorphism of order N. In the same way $\mathcal{K}_-(N,k)$ is the set of non-orientable surfaces $S \in \mathcal{K}$ with $\mathfrak{p} \geq 2$ and k boundary components which admit an automorphism of order N. Then define

$$p_+^+(N,k) = \min\{\mathfrak{p} \mid \text{there exists } S \in \mathcal{K}_+^+(N,k) \text{ with algebraic genus } \mathfrak{p}\}$$
$$p_+^-(N,k) = \min\{\mathfrak{p} \mid \text{there exists } S \in \mathcal{K}_+^-(N,k) \text{ with algebraic genus } \mathfrak{p}\}$$
$$p_-(N,k) = \min\{\mathfrak{p} \mid \text{there exists } S \in \mathcal{K}_-(N,k) \text{ with algebraic genus } \mathfrak{p}\}$$

In our case, N is odd, and so $\mathcal{K}_+^-(N,k)$ is void, and we shall obtain $p_+^+(N,k)$ and $p_-(N,k)$. Of course, these results determine the corresponding values of the topological genus, namely

$$\begin{aligned} g_+^+(N,k) &= \frac{1}{2}(p_+^+(N,k) + 1 - k) \\ g_-(N,k) &= p_-(N,k) + 1 - k \end{aligned}$$

From now on we fix an odd number $N = pq$ where $p < q$ are odd primes, and $k \geq 1$. We shall devote Section 2 to compute $p_+^+(N,k)$, and Section 3 to compute $p_-(N,k)$. In the final Section 4, we use those results for small values of k with arbitrary odd N.

2. The computation of $p_+^+(N,k)$

Chapter 3 in [2] is essentially devoted to determine necessary and sufficient conditions for the existence of a surface $S \in \mathcal{K}_+^+(N,k)$ (and also in $\mathcal{K}_+^-(N,k)$ and $\mathcal{K}_-(N,k)$) with topological genus g.

More precisely, from Theorems 3.1.2 and 3.2.3 of [2], the existence of $S \in \mathcal{K}_+^+(N,k)$ with topological genus g is equivalent to the existence of non-negative integers g', $m_1, \ldots, m_r$, $t_1, \ldots, t_{k'}$, with $m_i \geq 2$, m_i and t_j divisors of N, such that

(1) $\mu = 2g' + k' - 2 + \sum_{i=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{m_i}\right) > 0$.

(2) $k = \sum_{j=1}^{k'} \frac{N}{t_j}$.

(3) If $g' = 0$, then $\mathrm{lcm}(m_1, \ldots, m_r, t_1, \ldots, t_{k'}) = N$.

(4) The set $X = \{m_1, \ldots, m_r, t_1, \ldots, t_{k'}\}$ has the *elimination property*, that is to say, the lcm does not change if we delete one of the numbers in X.

If the conditions (1)-(4) are satisfied, then $N\mu = 2(g-1) + k = \mathfrak{p} - 1$. Hence in order to minimize g and so $\mathfrak{p}$, we shall minimize μ constrained to conditions (1)-(4).

In our strategy to minimize μ, observe that the conditions (3) and (4) are satisfied, for any choice of k', of the t_j and of the other m_i, if there exist two values $m_1 = m_2 = N$. Also, the addition of a term m_i adds less than a unity to μ, and since $1 - 1/m_i \geq 2/3$, it is better having any two than any three values m_i. On the other hand, from condition (2), k must be obtained as a sum of divisors of N. Dividing a number by a non-trivial divisor of N one has the euclidean division $x = ay + b$; for any other non-negative integers a', b', such that $x = a'y + b'$, we have $a + b \leq a' + b' - 2$. So in any case the best is to take the euclidean division, k' as small as possible, and add as much (at most two) m_i as necessary. Hence in all what follows any division will be the euclidean division. Finally observe that g' is only useful in order to assure that $\mu > 0$. For each unity in g' the value of μ increases in 2. Since the same goal can be obtained by adding one or two $m_i = N$, which increase μ in $1 - 1/N$ each, the minimum is always attained for $g' = 0$. Hence throughout this section we take $g' = 0$ without indicating it explicitly.

We distinguish four cases according to the relationship between k and $N = pq$, namely i) $k < q$; ii) $q \leq k < N$; iii) $k = aN$; and iv) $k > N$, k not a multiple of N.

2.1. $k < q$

(2.1.1) $k = 1$. By (2) $k' = 1$, $t_1 = N$. Then (3) is satisfied and in order to satisfy (4), either $m_1 = N$ or $r \geq 2$. Hence for having $\mu > 0$ (condition (1)), the minimum value is obtained for $k' = 1$, $t_1 = N$, $r = 2$, $m_1 = p$, $m_2 = q$. Then $\mu = 1 - 1/p - 1/q$, and so $p_+^+(N, 1) = 1 + N(1 - 1/p - 1/q) = N - p - q + 1$.

(2.1.2) $k = 2$. By (2) $k' = 2$, $t_1 = t_2 = N$. So (3) and (4) are already satisfied. Hence the minimum μ is attained for $k' = 2$, $t_1 = t_2 = N$, $r = 1$, $m_1 = p$. So $\mu = 1 - 1/p$, and $p_+^+(N, 2) = 1 + N(1 - 1/p) = N - q + 1$.

(2.1.3) $2 < k < p$. By (2) $k' = k$, $t_1 = t_2 = \cdots = t_k = N$, and (3) and (4) are satisfied. The minimum μ is given by $k' = k$, $t_1 = t_2 = \cdots = t_k = N$, $r = 0$. Then $\mu = k - 2$, and $p_+^+(N, k) = N(k-2) + 1$.

(2.1.4) $k = p$. Then $k' = 1$, $t_1 = q$, $r = 2$, $m_1 = p$, $m_2 = N$. So $\mu = 1 - 1/p - 1/N$, and $p_+^+(N, k) = 1 + N(1 - 1/p - 1/N) = N - q$.

(2.1.5) $p < k$. We divide k by p, $k = ap + b$. The minimum value for μ depends on b being 0, 1 or greater than 1.

$k = ap$. In this case $k' = a$, $t_1 = \cdots = t_a = q$, $r = 2$, $m_1 = p$, $m_2 = p$. Observe that $a \geq 2$. Then $\mu = a - 2/p$, and so $p_+^+(N, k) = 1 + N(a - 2/p) = Na - 2q + 1$.

$k = ap + 1$. Now $k' = a + 1$, $t_1 = \cdots = t_a = q$, $t_{a+1} = N$, $r = 1$, $m_1 = p$. Then $\mu = a - 1/p$, and so $p_+^+(N, k) = 1 + N(a - 1/p) = Na - q + 1$.

$k = ap + b$, $b > 1$. We have $k' = a + b$, $t_1 = \cdots = t_a = q$, $t_{a+1} = \cdots = t_{a+b} = N$, $r = 0$. Then $\mu = a + b - 2$ and so $p_+^+(N, k) = 1 + N(a + b - 2)$.

Hence we have proved the following

Proposition 2.1. *Let $N = pq$, $p < q$ odd primes, and $1 \leq k < q$. Then*

$$p_+^+(N,k) = \begin{array}{ll} N-p-q+1 & k=1 \\ N-q+1 & k=2 \\ N(k-2)+1 & 2<k<p \\ N-q & k=p \\ Na-2q+1 & p<k,\ k=ap \\ Na-q+1 & p<k,\ k=ap+1 \\ N(a+b-2)+1 & p<k,\ k=ap+b,\ b>1 \end{array}$$

2.2. $q \leq k < N$

This case is the most involved since it depends on the relationship between p and q.

In order to obtain k as a sum of divisors of N, there are two types of expressions, and if $k \geq p + q$, there is even a third one.

First, consider the euclidean divisions of k by q and by p.

(I) $k = a_1 p + b_1$, $a_1 \geq 1$.
(II) $k = a_2 q + b_2$, $a_2 \geq 1$.

According to the analysis in (2.1.4) the minimum value of μ for each of them is as follows:

$$\begin{array}{lll} \text{(I)} & \text{if } b_1 = 0,\ a_1 = 1, & \mu_1 = 1 - \frac{1}{p} - \frac{1}{N} \\ & \text{if } b_1 = 0,\ a_1 > 1, & \mu_1 = a_1 - \frac{2}{p} \\ & \text{if } b_1 = 1, & \mu_1 = a_1 - \frac{1}{p} \\ & \text{if } b_1 > 1, & \mu_1 = a_1 + b_1 - 2 \\ \text{(II)} & \text{if } b_2 = 0,\ a_2 = 1, & \mu_2 = 1 - \frac{1}{q} - \frac{1}{N} \\ & \text{if } b_2 = 0,\ a_2 > 1, & \mu_2 = a_2 - \frac{2}{q} \\ & \text{if } b_2 = 1, & \mu_2 = a_2 - \frac{1}{q} \\ & \text{if } b_2 > 1, & \mu_2 = a_2 + b_2 - 2 \end{array}$$

Consider now the third type of expression, which only occurs if $k \geq q + p$. Namely $k = a_3 q + b_3 p + c_3$, where $a_3, b_3 \geq 1$.

For such an expression, a_3 runs from 1 to $\left[\frac{k}{q}\right]$, the integer part of $\frac{k}{q}$. For each of the a_3 in that range, call $r = k - a_3 q$. Then $b_3 p + c_3$ is the euclidean division of r by p.

We are going to determine the minimal value of μ for this expression.

If $c_3 \geq 1$, then $k' = a_3 + b_3 + c_3$, $t_1 = \cdots = t_{a_3} = p$, $t_{a_3+1} = \cdots = t_{a_3+b_3} = q$, $t_{a_3+b_3+1} = \cdots = t_{a_3+b_3+c_3} = N$. Hence $r = 0$, $\mu = a_3 + b_3 + c_3 - 2$.

If $c_3 = 0$, the values depend on a_3 and b_3 be greater than or equal to 1:

(a) If $a_3 = b_3 = 1$, $k' = 2$, $t_1 = p$, $t_2 = q$. Then $r = 1$, $m_1 = N$, $\mu = 1 - 1/N$.

(b) If $a_3 = 1$, $b_3 > 1$, $k' = b_3 + 1$, $t_1 = p$, $t_2 = \cdots = t_{b_3+1} = q$, $r = 1$ again, $m_1 = p$, $\mu = b_3 - 1/p$.

(c) If $a_3 > 1$, $b_3 = 1$, conversely $k' = a_3 + 1$, $t_1 = \cdots = t_{a_3} = p$, $t_{a_3+1} = q$, $r = 1$, $m_1 = q$, $\mu = a_3 - 1/q$.

(d) Finally if both $a_3, b_3 > 1$, then $k' = a_3 + b_3$, $r = 0$, and so $\mu = a_3 + b_3 - 2$.

Call then μ_3 the minimal of the corresponding μ for each of the a_3 running from 1 to $\left[\frac{k}{q}\right]$ and giving $b_3 \geq 1$. We have the following

Proposition 2.2. *Let $N = pq$, $p < q$, odd primes, and $q \leq k < N$. Then*

$$p_+^+(N,k) = 1 + N(\min(\mu_1, \mu_2, \mu_3)),$$

for μ_1, μ_2 and μ_3 described above.

Before to deal with the two remaining cases we are going to see several numerical examples.

Example 2.3. Consider $N = 15 = 3 \cdot 5$, and $5 \leq k < 15$ as in Proposition 2.2. Then for each k we calculate the values of μ_1, μ_2 and μ_3 and then $p_+^+(15,k)$ as follows, where we write in boldface the minimum value of μ_i for each k.

k	$a_1 \cdot 3 + b_1$	$a_2 \cdot 5 + b_2$	$a_3 \cdot 5 + b_3 \cdot 3 + c_3$	μ_1	μ_2	μ_3	$p_+^+(15,k)$
5	$1 \cdot 3 + 2$	$1 \cdot 5 + 0$	–	1	$\mathbf{\frac{11}{15}}$		12
6	$2 \cdot 3 + 0$	$1 \cdot 5 + 1$	–	$\frac{4}{3}$	$\mathbf{\frac{4}{5}}$		13
7	$2 \cdot 3 + 1$	$1 \cdot 5 + 2$	–	$\frac{5}{3}$	**1**		16
8	$2 \cdot 3 + 2$	$1 \cdot 5 + 3$	$1 \cdot 5 + 1 \cdot 3 + 0$	2	2	$\mathbf{\frac{14}{15}}$	15
9	$3 \cdot 3 + 0$	$1 \cdot 5 + 4$	$1 \cdot 5 + 1 \cdot 3 + 1$	$\frac{7}{3}$	3	**1**	16
10	$3 \cdot 3 + 1$	$2 \cdot 5 + 0$	$1 \cdot 5 + 1 \cdot 3 + 2$	$\frac{8}{3}$	$\mathbf{\frac{8}{5}}$	2	25
11	$3 \cdot 3 + 2$	$2 \cdot 5 + 1$	$1 \cdot 5 + 2 \cdot 3 + 0$	3	$\frac{9}{5}$	$\mathbf{\frac{5}{3}}$	26
12	$4 \cdot 3 + 0$	$2 \cdot 5 + 2$	$1 \cdot 5 + 2 \cdot 3 + 1$	$\frac{10}{3}$	**2**	**2**	31
13	$4 \cdot 3 + 1$	$2 \cdot 5 + 3$	$1 \cdot 5 + 2 \cdot 3 + 2$	$\frac{11}{3}$	3		
			$2 \cdot 5 + 1 \cdot 3 + 0$			$\mathbf{\frac{9}{5}}$	28
14	$4 \cdot 3 + 2$	$2 \cdot 5 + 4$	$1 \cdot 5 + 3 \cdot 3 + 0$	4	4		
			$2 \cdot 5 + 1 \cdot 3 + 1$			**2**	31

The minimum value can also be obtained by μ_1 as it is shown in the following

Example 2.4. Let $N = 35 = 5 \cdot 7$, $k = 10$. Then

$10 = 2 \cdot 5 + 0 \quad \mu_1 = 2 - \frac{2}{5} = \frac{8}{5}$
$10 = 1 \cdot 7 + 3 \quad \mu_2 = 2$

Even when $k \geq p+q$, and so μ_1, μ_2 and μ_3 intervene:

Example 2.5. Let $N = 55 = 5 \cdot 11$, $k = 20$. Then

$$\begin{array}{ll} 20 = 4 \cdot 5 + 0 & \mu_1 = 4 - \frac{2}{5} = \frac{18}{5} \\ 20 = 1 \cdot 11 + 9 & \mu_2 = 8 \\ 20 = 1 \cdot 11 + 1 \cdot 5 + 4 & \mu_3 = 4 \end{array}$$

Finally, μ_3 can be obtained by an expression $a_3 q + b_3 p + c_3$, where a_3 is not $\left[\frac{k}{q}\right]$:

Example 2.6. Let $N = 143 = 11 \cdot 13$, $k = 99$. Then

$$\begin{array}{ll} 99 = 7 \cdot 13 + 8 & \mu_1 = 13 \\ 99 = 9 \cdot 11 + 0 & \mu_2 = 9 - \frac{2}{11} = \frac{97}{11} \\ 99 = 6 \cdot 13 + 1 \cdot 11 + 10 & \mu = 15 \\ 99 = 5 \cdot 13 + 3 \cdot 11 + 1 & \mu = 7 \\ 99 = 4 \cdot 13 + 4 \cdot 11 + 3 & \mu = 9 \\ 99 = 3 \cdot 13 + 5 \cdot 11 + 5 & \mu = 11 \\ 99 = 2 \cdot 13 + 6 \cdot 11 + 7 & \mu = 13 \\ 99 = 1 \cdot 13 + 7 \cdot 11 + 9 & \mu = 15 \end{array}$$

Hence $\mu_3 = 7$ coming from $99 = 5 \cdot 13 + 3 \cdot 11 + 1$.

We now return to study the two remaining cases.

2.3. $k = aN$

This is the easiest case. It is clear that the minimum value of μ is attained for $k' = a$, $t_1 = \cdots = t_a = 1$, $r = 2$, $m_1 = m_2 = N$. Then $\mu = a - \frac{2}{N}$, and so $p_+^+(N, aN) = 1 + N\left(a - \frac{2}{N}\right) = aN - 1 = k - 1$.

Proposition 2.7. *Let $N = pq$, $p < q$ odd primes. Then $p_+^+(N, aN) = aN - 1$.*

2.4. $k > N$, k *not a multiple of* N

It is also clear that in this case the value of $p_+^+(N,k)$ depends on $\left[\frac{k}{N}\right]$ and $k - \left[\frac{k}{N}\right]$. Let us divide k by N and write $k = aN + N'$. Since $N' < N$, we had already obtained the minimum μ corresponding to $k = N'$. Let us call it μ_0 corresponding to certain $k'_0, t_1, \ldots, t_{k'_0}, r_0, m_1, \ldots, m_{r_0}$. Then in order to get the minimum μ for N it suffices to take $k' = k'_0 + a$, $t_1, \ldots, t_{k'_0}$, and $t_{k'_0+1} = \cdots = t_{k'_0+a} = 1$, $r_0, m_1, \ldots, m_{r_0}$. So the minimum μ for $k = N$ is $\mu_0 + a$, and hence

$$p_+^+(N,k) = 1 + N(\mu_0 + a) = 1 + N\mu_0 + Na.$$

Since $p_+^+(N, N') = 1 + N\mu_0$, we have $p_+^+(N,k) = p_+^+(N, N') + Na$.

Proposition 2.8. *Let $N = pq$, $p < q$ odd primes and $k > N$, k not a multiple of N. Take the euclidean division $k = aN + N'$. Then $p_+^+(N,k) = p_+^+(N, N') + Na$.*

3. The computation of $p_-(N,k)$

From Theorem 3.1.3 in [2], the existence of a surface $S \in \mathcal{K}_-(N,k)$ with topological genus g is equivalent to the existence of non-negative integers $g', m_1, \dots, m_r, t_1, \dots t_{k'}$, with $g' \geq 1$, $m_i \geq 2$ and t_j divisors of N, such that

(1) $\mu = g' + k' - 2 + \sum_{i=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{m_i}\right) > 0$

(2) $k = \sum_{j=1}^{k'} \frac{N}{t_j}$.

(3) If $g' = 1$, then $\operatorname{lcm}(m_1, \dots, m_r, t_1, \dots, t_{k'}) = N$

If the conditions (1)-(3) are satisfied, $N\mu = g - 2 + k = \mathfrak{p} - 1$. Observe that in this case the condition on the elimination property does not appear, and this fact along with $g' \geq 1$, shall make the analysis simpler than in the previous Section. The strategy for minimizing μ is as in Section 2, k' will be determined by k, always $g' = 1$, and since $g' + k' \geq 2$, we have $r = 0$ unless $r = 1$, if necessary, in order to get the condition (3) or $\mu > 0$.

We distinguish according to the values of p and q as in Section 2.

3.1. $k < q$

(3.1.1) $k = 1$. Then $k' = 1$, $t_1 = N$. In order to have $\mu > 0$ we need $r = 1$, and we take $m_1 = p$. So $\mu = 1 - 1/p$, and $p_-(N,1) = 1 + N(1 - 1/p) = N - q + 1$.

(3.1.2) $1 < k < p$. Then $k' = k$, $t_1 = \cdots = t_k = N$, and so $r = 0$. Hence $\mu = k - 1$, and $p_-(N,k) = 1 + N(k-1)$.

(3.1.3) $p \leq k$. We divide $k = ap + b$, and the minimum μ depends on b being 0 or not.

$k = ap$. Then $k' = a$, $t_1 = \cdots = t_a = q$, and by condition (3) $r = 1$, $m_1 = p$. Hence $\mu = a - 1/p$, and so $p_-(N,k) = 1 + N(a - 1/p) = Na - q + 1$.

$k = ap + b$, $b > 0$. Then $k' = a + b$, $t_1 = \cdots = t_a = q$, $t_{a+1} = \cdots = t_{a+b} = N$, $r = 0$. So $\mu = a + b - 1$, and $p_-(N,k) = 1 + N(a + b - 1)$.

We have proved the following

Proposition 3.1. *Let $N = pq$, $p < q$ odd primes, and $1 \leq k < q$. Then*

$$p_-(N,k) = \begin{cases} N - q + 1 & k = 1 \\ N(k-1) + 1 & 1 < k < p \\ Na - q + 1 & p \leq k,\ k = ap \\ N(a + b - 1) + 1 & p \leq k,\ k = ap + b,\ b > 0. \end{cases}$$

3.2. $q \leq k < N$

Now we have the divisions of k by p and by q.

(I) $k = a_1 p + b_1$, $a_1 \geq 1$.

(II) $k = a_2 q + b_2$, $a_2 \geq 1$.

For each of them, by (3.1.3) the minimum value of μ is given by

$$\begin{array}{lll} \text{(I)} & \text{if } b_1 = 0, & \mu_1 = a_1 - \frac{1}{p} \\ & \text{if } b_1 > 0, & \mu_1 = a_1 + b_1 - 1 \\ \text{(II)} & \text{if } b_2 = 0, & \mu_2 = a_2 - \frac{1}{q} \\ & \text{if } b_2 > 0, & \mu_2 = a_2 + b_2 - 1. \end{array}$$

Besides, if $k \geq q + p$, we can write $k = a_3 q + b_3 p + c_3$, $a_3, b_3 \geq 1$, where a_3 runs from 1 to $\left[\frac{k}{q}\right]$, and $b_3 p + c_3$ is the euclidean division of $k - a_3 q$ by p. The minimum value of μ for this expression is obtained by $k' = a_3 + b_3 + c_3$, $t_1 = \cdots = t_{a_3} = p$, $t_{a_3+1} = \cdots = t_{a_3+b_3} = q$, $t_{a_3+b_3+1} = \cdots = t_{a_3+b_3+c_3} = N$. Since $a_3, b_3 \geq 1$, $k' \geq 2$, and so $r = 0$, $\mu = a_3 + b_3 + c_3 - 1$. We call μ_3 the minimum value of $a_3 + b_3 + c_3 - 1$ when a_3 runs from 1 to $\left[\frac{k}{q}\right]$ with $b_3 \geq 1$ and so we have

Proposition 3.2. *Let $N = pq$, $p < q$ odd primes, and $q \leq k < N$. Then*

$$p_-(N, k) = 1 + N(\min(\mu_1, \mu_2, \mu_3)),$$

for μ_1, μ_2 and μ_3 described above.

3.3. $k = aN$

In this case $k' = a$, $t_1 = \cdots = t_a = 1$, $r = 1$, $m_1 = N$. Then $\mu = a - 1/N$ and so $p_-(N, k) = 1 + N(a - 1/N) = Na = k$.

We have

Proposition 3.3. *Let $N = pq$, $p < q$ odd primes. Then*

$$p_-(N, aN) = aN$$

3.4. $k > N$, k *not a multiple of* N

Take $k = aN + N'$. Let μ_0 be the minimum μ corresponding to $k = N'$, obtained by means of certain k'_0, $t_1, \ldots, t_{k'_0}$, r_0, $m_1, \ldots m_{r_0}$. Then we take $k' = k'_0 + a$, $t_1, \ldots, t_{k'_0}$, $t_{k'_0+1} = \cdots = t_{k'_0+a} = 1$, r_0, $m_1, \ldots, m_{r_0}$, and we have $\mu = \mu_0 + a$. Hence $p_-(N, k) = 1 + N(\mu_0 + a) = 1 + N\mu_0 + Na = p_-(N, N') + Na$.

Proposition 3.4. *Let $N = pq$, $p < q$ odd primes, $k > N$ not a multiple of N, and take the euclidean division $k = aN + N'$. Then*

$$p_-(N, k) = p_-(N, N') + Na$$

4. Final remarks

The study in Sections 2 and 3, specially the case $k \geq p + q$, makes it clear that given an arbitrary odd N, there is no hope of having an explicit formula for $p^+_+(N, k)$ or $p_-(N, k)$. Of course, for a given pair (N, k) these values can be obtained because all numbers appearing in the respective set of conditions (1)-(4) ((1)-(3), respectively) are bounded above. This fact was already noted in Example 3.1.10 of [2].

However, if k is "small" in terms of N, we can deduce the values of $p_+^+(N,k)$ and $p_-(N,k)$ from the results in Sections 2 and 3 as follows. Let $N = p_1^{\alpha_1}\dots p_t^{\alpha_t}$, $p_1 < \dots < p_t$ odd primes, $t > 1$, $\alpha_i \geq 1$. We will deal with $k < p_2$, $k < p_1^2$ if $\alpha_1 \geq 2$. Then we have

Proposition 4.1. *Let $N = p_1^{\alpha_1}\dots p_t^{\alpha_t}$, $p_1 < \dots < p_t$ odd primes, $t > 1$, $\alpha_i \geq 1$, $k < p_2$, $k < p_1^2$ if $\alpha_1 \geq 2$. Then*

$$p_+^+(N,k) = \begin{array}{ll} N - p_1 - N/p_1 + 1 & k = 1,\ \alpha_1 = 1 \\ N - N/p_1 & k = 1,\ \alpha_1 > 1 \\ N - N/p_1 + 1 & k = 2 \\ N(k-2) + 1 & 2 < k < p_1 \\ N - N/p_1^{\alpha_1} & k = p_1 \\ Na - 2N/p_1^{\alpha_1} + 1 & p_1 < k,\ k = ap_1 \\ Na - N/p_1^{\alpha_1} + 1 & p_1 < k,\ k = ap_1 + 1 \\ N(a+b-2) + 1 & p_1 < k,\ k = ap_1 + b,\ b > 1 \end{array}$$

Proof. It suffices to follow the same argument as in subsection 2.1, substituting the value $N/p = q$ by N/p_1.

The unique question to be noted comes from the elimination property. When $k = 1$, then $k' = 1$, $t_1 = N$, and necessarily $r = 2$ in such a way that $\{N, m_1, m_2\}$ has the elimination property and $1/m_1 + 1/m_2$ is as big as possible. If $\alpha_1 = 1$, it is clear that $m_1 = p_1$, $m_2 = N/p_1$, satisfy these conditions. On the other hand, if $\alpha_1 > 1$, the maximum is obtained from $m_1 = p_1$, $m_2 = N$. Then μ is respectively $1 - 1/p_1 - 1/(N/p_1)$ and $1 - 1/p_1 - 1/N$. From here we obtain the value of $p_+^+(N,1) = 1 + N\mu$.

In the same way, when $k = p_1$, the values of m_i are $m_1 = p_1^{\alpha_1}$, $m_2 = N$; for $k = ap_1$ $(a \geq 2)$, $m_1 = m_2 = p_1^{\alpha_1}$; and finally for $k = ap_1 + 1$, we have $m_1 = p_1^{\alpha_1}$. □

The computation of $p_-(N,k)$ does not require to keep in mind the elimination property, and so Proposition 3.1 applies directly by changing $N/p = q$ by N/p_1. Only for $k = ap_1$, since $t_1 = \dots = t_a = N/p_1$, we need $m_1 = p_1^{\alpha_1}$, and so $\mu = a - 1/p_1^{\alpha_1}$, and $p_-(N,K) = 1 + N(a - 1/p_1^{\alpha_1})$. Thus we have

Proposition 4.2. *Let $N = p_1^{\alpha_1}\dots p_t^{\alpha_t}$, $p_1 < \dots < p_t$ odd primes, $t > 1$, $\alpha_i \geq 1$, $k < p_2$, $k < p_1^2$ if $\alpha_1 \geq 2$. Then*

$$p_-(N,k) = \begin{array}{ll} N - N/p_1 + 1 & k = 1 \\ N(k-1) + 1 & 1 < k < p_1 \\ Na - N/p_1^{\alpha_1} + 1 & p_1 \leq k,\ k = ap_1 \\ N(a+b-1) + 1 & p_1 \leq k,\ k = ap_1 + b,\ b > 0. \end{array}$$

Finally, we obtain the corresponding result for low values of k. Since for any odd N with the above expression, $p_2 \geq 5$, $p_1^2 \geq 9$, the former results hold for $k \leq 4$. Hence we have

Proposition 4.3. *Let $N = p_1^{\alpha_1}\dots p_t^{\alpha_t}$, $p_1 < \dots < p_t$ odd primes, $t > 1$, $\alpha_i \geq 1$. For $k = 1, 2, 3, 4$ the values of $p_+^+(N,k)$ and $p_-(N,k)$ are given in the following table:*

k	$p_+^+(N,k)$		$p_-(N,k)$	
1	$N-p_1-N/p_1+1$	$\alpha_1=1$	$N-N/p_1+1$	
	$N-N/p_1$	$\alpha_1>1$		
2	$N-N/p_1+1$		$N+1$	
3	$N+1$	$p_1>3$	$2N+1$	$p_1>3$
	$N-N/3^{\alpha_1}$	$p_1=3$	$N-N/3^{\alpha_1}+1$	$p_1=3$
4	$2N+1$	$p_1>3$	$3N+1$	$p_1>3$
	$N-N/3^{\alpha_1}+1$	$p_1=3$	$N+1$	$p_1=3$

Proof. The result is obtained directly by substituting the value of k in Propositions 4.1 and 4.2. □

Recall that for the remaining odd numbers N, namely prime or prime-power N, the corresponding results were obtained in [2] and [4]. So that, the computation is complete for all odd numbers N.

In a forthcoming paper we complete the computation of $p_+^+(N,k)$, $p_+^-(N,k)$ and $p_-(N,k)$ when $N=2q$, for q an odd prime, what will clarify the global case N even.

The authors thank J. M. Gamboa for carefully reading an earlier version of the manuscript.

References

[1] E. Bujalance, F. J. Cirre, J. J. Etayo, G. Gromadzki, E. Martínez, A survey on the minimum genus and maximum order problems for bordered Klein surfaces. London Math. Soc. Lect. Note Series **387** (2011) 161-182.

[2] E. Bujalance, J. J. Etayo, J. M. Gamboa, G. Gromadzki, *Automorphism Groups of Compact Bordered Klein Surfaces. A Combinatorial Approach*. Lect. Not. in Math. **1439** Springer-Verlag, Berlin, 1990.

[3] E. Bujalance, J. J. Etayo, J. M. Gamboa, G. Martens, Minimal genus of Klein surfaces admitting an automorphism of a given order. Archiv der Math. **52** (1989) 191-202.

[4] E. Bujalance, J. M. Gamboa, C. Maclachlan, Minimum topological genus of compact bordered Klein surfaces admitting a prime-power automorphism. Glasgow Math. J. **37** (1995) 221-232.

[5] W. J. Harvey, Cyclic groups of automorphisms of a compact Riemann surface. Quart. J. Math. Oxford (2) **17** (1966) 86-97.

[6] C. L. May, Automorphisms of compact Klein surfaces with boundary. Pacific J. Math. **59** (1975) 199-210.

[7] C. L. May, Cyclic automorphism groups of compact bordered Klein surfaces. Houston J. Math. **3** (1977) 395-405.

Sobre las propiedades de la frontera de las imágenes polinómicas y regulares de $\mathbb{R}^n$

José F. Fernando, J.M. Gamboa

y Carlos Ueno

Departamento de Álgebra
Facultad de Ciencias Matemáticas
Universidad Complutense de Madrid
E-28040 Madrid, Spain
josefer@mat.ucm.es
jmgamboa@mat.ucm.es

Departamento de Matemáticas
IES La Vega de San José
Paseo de San José, s/n
Las Palmas de Gran Canaria
35015 Las Palmas, Spain
carlos.ueno@terra.es

Dedicado al Prof. Juan Tarrés Freixenet con motivo de su jubilación académica.

ABSTRACT

We present several obstructions for a subset $\mathcal{S}$ of $\mathbb{R}^m$ to be the image of an euclidean space $\mathbb{R}^n$ via a polynomial or a regular map $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, in terms of the "geometry" of its exterior boundary $\delta\mathcal{S} := \mathrm{Cl}_{\mathbb{R}^m}(\mathcal{S}) \setminus \mathcal{S}$.

Key words: Aplicación polinómica, aplicación regular, imagen polinómica, imagen regular, frontera exterior, semilínea paramétrica, semilínea regular, aplicación propia.

2010 Mathematics Subject Classification: Primary: 14P10; secondary: 14Q99.

1. Introducción

A principios de los años 90 del siglo pasado, el segundo autor propuso en el congreso Reelle Algebraische Geometrie celebrado en Oberwolfach [G] el problema de determinar qué subconjuntos de un espacio euclídeo $\mathbb{R}^m$ son imagen de otro espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$ por una aplicación polinómica o regular.

Recordemos que una aplicación $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es *regular* si existen polinomios $f_0, f_1, \ldots, f_m \in \mathbb{R}[\mathtt{x}] := \mathbb{R}[\mathtt{x}_1, \ldots, \mathtt{x}_n]$ tales que $f_0(x) \neq 0$ para cada $x \in \mathbb{R}^n$ y

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,\ x \mapsto \frac{1}{f_0(x)}(f_1(x), \ldots, f_m(x)).$$

Si podemos elegir $f_0 := 1$ diremos que f es *polinómica.* Evidentemente $\mathcal{S} := f(\mathbb{R}^n)$ es conexo, y el Teorema de Tarski-Seidenberg, [S, T], nos asegura que $\mathcal{S}$ es un conjunto semialgebraico. Recordemos que un subconjunto $\mathcal{S}$ de $\mathbb{R}^m$ es *semialgebraico* si

Los dos primeros autores están subvencionados por los proyectos de investigación GR MTM2011-22435 y GAAR Grupos UCM 910444. El tercer autor es colaborador externo del proyecto de investigación GR MTM2011-22435.

es expresable como combinación finita de operaciones booleanas (unión, intersección y complementario) aplicadas a conjuntos de la forma $\{x \in \mathbb{R}^m : g(x) > 0\}$, donde $g \in \mathbb{R}[\mathtt{x}_1, \ldots, \mathtt{x}_m]$. Tienen especial interés los conjuntos semialgebraicos *básicos,* que son aquéllos que se pueden escribir como

$$\{x \in \mathbb{R}^m : g_1(x) * 0, \ldots, g_r(x) * 0\},$$

donde cada $g_i \in \mathbb{R}[\mathtt{x}_1, \ldots, \mathtt{x}_m]$ y $*$ representa uno cualquiera de los símbolos $>$ o $\geq$.

Es natural preguntarse acerca de la utilidad de que un subconjunto $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^m$ sea imagen de una aplicación polinómica o regular $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Señalemos algunos ejemplos.

(1) Para abordar problemas de optimización sobre $\mathcal{S}$, pues los puntos de $\mathcal{S}$ en los que g alcanza sus valores máximos y mínimos, absolutos o relativos, son las imágenes por f de los puntos en los que alcanza dichos valores la composición $g \circ f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$.

(2) Para caracterizar las funciones polinómicas o regulares $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ cuya restricción $g|_{\mathcal{S}} \geq 0$, ya que esta condición equivale a que $g \circ f \geq 0$ lo que, por la solución de E. Artin al Problema 17 de Hilbert, equivale a que exista un polinomio $h \in \mathbb{R}[\mathtt{x}]$ no nulo tal que el producto $h^2 \cdot (g \circ f)$ sea suma de cuadrados de polinomios.

(3) Para construir trayectorias en $\mathcal{S}$ de cierta naturaleza, porque para trazar una curva $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathcal{S}$ es suficiente trazar otra curva $\beta : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^n$, que por composición proporciona la curva $\alpha := f \circ \beta : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathcal{S}$.

Para abreviar la exposición introducimos ahora las nociones de *dimensión local y global* de un conjunto semialgebraico, y algo de terminología. Todo subconjunto semialgebraico $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^m$ se escribe, [BCR, 2.3.6], como unión finita de conjuntos semialgebraicos $\mathcal{S}_i$ cada uno de ellos homeomorfo a un cubo abierto $(0,1)^{d_i}$. Se define la *dimensión* de $\mathcal{S}$ como el máximo de los enteros d_i, y se denota $\dim(\mathcal{S})$. Es muy sencillo probar que si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es una aplicación polinómica, entonces $\dim(f(\mathbb{R}^n)) \leq n$; véase, por ejemplo, [BCR, 2.8.8].

Además, fijado un punto p en $\mathcal{S}$ existe, por [BCR, 2.8.10], un subconjunto abierto y semialgebraico $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$ que contiene a p tal que $\dim(\mathcal{U} \cap \mathcal{S}) = \dim(\mathcal{V} \cap \mathcal{S})$ para cada entorno semialgebraico $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ de p en $\mathbb{R}^m$. Se denota $\dim_p(\mathcal{S}) := \dim(\mathcal{U} \cap \mathcal{S})$, y se llama *dimensión local* de $\mathcal{S}$ en p. Como es de esperar, la dimensión de $\mathcal{S}$ coincide con el máximo de las dimensiones locales $\dim_p(\mathcal{S})$ cuando $p \in \mathcal{S}$, y además $\dim(\mathcal{S}) \leq m$. De lo anterior se desprende, véase por ejemplo [BCR, 2.8.12], que para cada entero $0 \leq k \leq \dim(\mathcal{S})$ el conjunto

$$\mathcal{S}_{(k)} := \{p \in \mathcal{S} : \ \dim_p(\mathcal{S}) = k\}$$

es un conjunto semialgebraico. Se dice que $\mathcal{S}$ *tiene dimensión pura* si $\mathcal{S}_{(k)}$ es vacío para cada entero $0 \leq k < \dim(\mathcal{S})$. Para cada conjunto semialgebraico $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^m$ denotaremos

$$\begin{aligned} \mathrm{p}(\mathcal{S}) :&= \text{ínf}\{n \geq 1 : \exists\ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \ \text{ polinómica tal que } \ f(\mathbb{R}^n) = \mathcal{S}\}, \\ \mathrm{r}(\mathcal{S}) :&= \text{ínf}\{n \geq 1 : \exists\ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \ \text{ regular tal que } \ f(\mathbb{R}^n) = \mathcal{S}\}. \end{aligned}$$

Obviamente, la condición $\mathrm{p}(\mathcal{S}) := +\infty$ caracteriza la no representabilidad de $\mathcal{S}$ como imagen polinómica de ningún espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$, y la igualdad $\mathrm{r}(\mathcal{S}) := +\infty$ tiene el significado análogo para aplicaciones regulares.

Es evidente que $\dim(\mathcal{S}) \leq \mathrm{r}(\mathcal{S}) \leq \mathrm{p}(\mathcal{S})$, y ambas desigualdades pueden ser estrictas. Por ejemplo, se demuestra en [F] que si $\mathcal{S} \subsetneq \mathbb{R}$ es un intervalo abierto no acotado, entonces $1 = \dim(\mathcal{S}) < \mathrm{r}(\mathcal{S}) = \mathrm{p}(\mathcal{S}) = 2$, y que si $\mathcal{S} \subsetneq \mathbb{R}$ es un intervalo de la forma $\mathcal{S} := (a, b]$ con $a < b$, entonces $1 = \mathrm{r}(\mathcal{S}) < \mathrm{p}(\mathcal{S}) = +\infty$.

Las curvas semialgebraicas $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^m$ tales que $\mathrm{p}(\mathcal{S}) = 1$ desempeñan un papel muy relevante y se denominan *semilíneas paramétricas,* mientras que llamaremos *semilíneas regulares* a aquéllas con $\mathrm{r}(\mathcal{S}) = 1$. Las primeras son subconjuntos no acotados, ya que las funciones polinómicas no constantes en una variable son no acotadas; por ello los conjuntos $\mathcal{S}$ con más de un punto y $\mathrm{p}(\mathcal{S}) < +\infty$ no son acotados. Por ejemplo, $\mathrm{p}(\mathbb{S}^1) = +\infty$, donde $\mathbb{S}^1$ es la circunferencia y, sin embargo, $\dim(\mathbb{S}^1) = \mathrm{r}(\mathbb{S}^1) = 1$, ya que $\mathbb{S}^1$ es la imagen de la aplicación regular

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto \frac{1}{(t^2+1)^2}\big((t^2-1)^2 - 4t^2, 4t(t^2-1)\big) \tag{1}$$

que resulta de componer la inversa de la proyección estereográfica $\mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ desde $(1, 0)$ con la aplicación

$$g : \mathbb{C} \equiv \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C} \equiv \mathbb{R}^2,\ z = x + \sqrt{-1}y \equiv (x, y) \mapsto z^2 \equiv (x^2 - y^2,\ 2xy).$$

Por otro lado, se prueba en [FG2, 6.3] que $\dim(\mathcal{S}) = 2 = \mathrm{r}(\mathcal{S}) < \mathrm{p}(\mathcal{S}) = 3$ para el conjunto semialgebraico

$$\mathcal{S} := \{x > 0,\ y > 0,\ x - y + 4 > 0\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Puede dar una idea de lo alejados que todavía nos encontramos de obtener una solución satisfactoria al problema de determinar los valores de $\mathrm{p}(\mathcal{S})$ y $\mathrm{r}(\mathcal{S})$ para un conjunto semialgebraico cualquiera $\mathcal{S}$ que, hasta donde nosotros sabemos, la siguiente cuestión permanece abierta:

Cuestión 1.1. *¿Existe algún conjunto $\mathcal{S}$ tal que* $\dim(\mathcal{S}) < \mathrm{r}(\mathcal{S}) < \mathrm{p}(\mathcal{S}) < +\infty$?

El primer resultado relevante relativo a la representación de conjuntos semialgebraicos como imágenes polinómicas de espacios euclídeos se obtuvo en [FG1], donde se demostró que dadas formas lineales independientes $\ell_1, \ldots, \ell_r$ sobre $\mathbb{R}^n$ se tiene la igualdad $\mathrm{p}(\mathcal{S}) = n$, donde

$$\mathcal{S} := \{x \in \mathbb{R}^n : \ell_1(x) > 0, \ldots, \ell_r(x) > 0\}.$$

El anterior es el germen de otros resultados acerca de la representabilidad como imagen polinómica o regular de espacios euclídeos de conjuntos semialgebraicos cuya frontera es lineal a pedazos, los primeros de los cuales se obtuvieron en [U2].

Para exponerlos llamamos *capa* a todo subconjunto de $\mathbb{R}^n$ afínmente equivalente al producto $[0, 1] \times \mathbb{R}^{n-1}$. Demostramos en [FGU2] que se cumplen las igualdades

$$\mathrm{r}(\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{K}) = \mathrm{r}(\mathbb{R}^n \setminus \operatorname{Int}\mathcal{K}) = n$$

para cada poliedro convexo n-dimensional $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$ que no es ni un hiperplano ni una capa. En el aserto anterior $\operatorname{Int}\mathcal{K}$ denota el interior del poliedro $\mathcal{K}$ como variedad topológica con borde. Obsérvese que las imágenes regulares de $\mathbb{R}^n$ son conjuntos

conexos, por lo que el anterior es el mejor resultado posible en esta dirección, ya que el complementario $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{K}$ de un poliedro convexo $\mathcal{K}$ y el complementario $\mathbb{R}^n \setminus \operatorname{Int}\mathcal{K}$ de su interior son disconexos si y sólo si $\mathcal{K}$ es un hiperplano o una capa.

En los casos en que o bien $n = 2$ o bien $n = 3$, o bien n es arbitrario pero $\mathcal{K}$ es acotado, probamos un resultado más fuerte:

$$\mathrm{p}(\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{K}) = \mathrm{p}(\mathbb{R}^n \setminus \operatorname{Int}\mathcal{K}) = n.$$

Además, localizamos la obstrucción para que la técnica general desarrollada arroje las igualdades anteriores en el caso en que $n \geq 4$ y $\mathcal{K}$ no es acotado.

Con respecto a los casos extremales también se demuestra que si $\mathcal{T} \subset \mathbb{R}^{n-1}$ es un subconjunto semialgebraico básico, el conjunto $\mathcal{S} := \mathbb{R}^n \setminus (\mathcal{T} \times \{0\})$ cumple que

$$\dim(\mathcal{S}) = \mathrm{r}(\mathcal{S}) = \mathrm{p}(\mathcal{S}) = n.$$

Merece la pena señalar que tan sólo para conjuntos semialgebraicos unidimensionales $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^m$ se conoce una caracterización geométrica completa, véase [F], de aquéllos cuyos invariantes $\mathrm{p}(\mathcal{S})$ o $\mathrm{r}(\mathcal{S})$ son finitos. Se prueba que entonces $\mathrm{p}(\mathcal{S}) \leq \mathrm{r}(\mathcal{S}) \leq 2$. En tal caso, $\mathrm{p}(\mathcal{S}) = 1$ si y sólo si $\mathcal{S}$ es cerrado en $\mathbb{R}^m$, mientras que $\mathrm{r}(\mathcal{S}) = 1$ si y sólo si o bien $\mathcal{S}$ es cerrado en el espacio proyectivo $\mathbb{RP}^m$, o bien $\mathrm{Cl}_{\mathbb{RP}^m}(\mathcal{S}) \setminus \mathcal{S} = \{p\}$ y el menor gérmen analítico que contiene al gérmen $\mathcal{S}_p$ es irreducible.

A lo largo de este artículo denotaremos por $\mathrm{Cl}_X(Y)$ a la clausura, en el espacio topológico X, del subconjunto Y, por lo que en el enunciado anterior, y puesto que $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^m \subset \mathbb{RP}^m$, el símbolo $\mathrm{Cl}_{\mathbb{RP}^m}(\mathcal{S})$ denota el menor subconjunto cerrado de $\mathbb{RP}^m$ que contiene a $\mathcal{S}$.

En relación con los poliedros, hemos demostrado en [FGU1] que si $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$ es un poliedro convexo, acotado o no, entonces $\dim(\mathcal{K}) = \mathrm{r}(\mathcal{K}) = \mathrm{r}(\operatorname{Int}\mathcal{K})$. Por contra, ya hemos señalado que las imágenes polinómicas no constantes de $\mathbb{R}^n$ son conjuntos no acotados, luego $\mathrm{p}(\mathcal{K}) = \mathrm{p}(\operatorname{Int}\mathcal{K}) = +\infty$ si el poliedro $\mathcal{K}$ es acotado y no se reduce a un punto.

Hasta aquí hemos expuesto algunas respuestas afirmativas a la pregunta de si cierto conjunto semialgebraico y conexo es imagen polinómica o regular de un espacio euclídeo. Otro aspecto no menos interesante del problema es obtener condiciones geométricas necesarias para que un subconjunto semialgebraico $\mathcal{S}$ cumpla que $\mathrm{r}(\mathcal{S})$ o incluso $\mathrm{p}(\mathcal{S})$ sean finitos, y este artículo se dedica a ello. Para exponer los resultados y algunos de sus antecedentes necesitamos introducir más notaciones.

Recordamos que una aplicación continua $f : X \to Y$ entre espacios topológicos X e Y es *propia* si la preimagen $f^{-1}(K)$ de cada subconjunto compacto $K \subset Y$ es un subconjunto compacto de X. Se comprueba inmediatamente que si f es propia y $Z \subset Y$, entonces la restricción $f|_{f^{-1}(Z)} : f^{-1}(Z) \to Z$ es también propia.

La intersección $\mathcal{S}_\infty := \mathrm{Cl}_{\mathbb{RP}^m}(\mathcal{S}) \cap \mathsf{H}_\infty(\mathbb{R})$, donde $\mathsf{H}_\infty(\mathbb{R})$ es el hiperplano de infinito de $\mathbb{RP}^m$, se llama *conjunto de puntos de infinito* del conjunto $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^m \subset \mathbb{RP}^m$. En [FU] se demuestra que si $\mathrm{p}(\mathcal{S}) < +\infty$ y $\mathcal{S}$ no se reduce a un punto, entonces $\mathcal{S}_\infty$ es un conjunto conexo y no vacío. En particular, como el conjunto de puntos de infinito del conjunto semialgebraico 2-dimensional

$$\mathcal{S} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \geq 0, \ y \geq 0, \ xy < 1\}$$

es $\mathcal{S}_\infty = \{p, q\}$, donde $p := (0 : 1 : 0)$ y $q := (0 : 0 : 1)$, que no es conexo, se deduce que $\mathrm{p}(\mathcal{S}) = +\infty$. Sin embargo $\mathrm{r}(\mathcal{S}) = 2$, ya que $\mathcal{S}$ es la imagen de la aplicación regular

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y) \mapsto \Big(\frac{x^2}{1+y^2},\ \frac{y^2}{1+x^2}\Big).$$

Por otro lado, para cada subconjunto semialgebraico abierto $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$, la función $g : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ se dice *de Nash* si es analítica y su grafo es un subconjunto semialgebraico de $\mathbb{R}^{m+1}$. Si $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^m$ es un subconjunto semialgebraico no necesariamente abierto en $\mathbb{R}^m$, se dice que una función $g : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ es *de Nash* si existen un subconjunto semialgebraico abierto $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^m$ que contiene a $\mathcal{S}$ y una función de Nash $G : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ tales que $G|_{\mathcal{S}} = g$. El conjunto $\mathcal{N}(\mathcal{S})$ de funciones de Nash en $\mathcal{S}$ es una $\mathbb{R}$-álgebra, con las operaciones definidas punto a punto.

En [FG3] se introduce la noción de *conjunto semialgebraico irreducible* como aquél que cumple que $\mathcal{N}(\mathcal{S})$ es un dominio de integridad. En la Proposición 3.6 demostraremos el siguiente resultado: si $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^n$ no se reduce a un punto y $\mathrm{p}(\mathcal{S}) < +\infty$, entonces $\mathcal{S}$ es irreducible, de dimensión pura y su imagen por cualquier función polinómica $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ es, o bien un punto, o bien un conjunto no acotado.

Antes de enunciar los dos resultados a cuya prueba dedicamos este artículo recordemos que si $\mathbb{K}$ denota $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, un subconjunto Z de $\mathbb{K}^m$ se dice *algebraico* si existen polinomios $h_1, \ldots, h_r \in \mathbb{K}[\mathtt{x}_1, \ldots, \mathtt{x}_m]$ tales que

$$Z := \{x \in \mathbb{K}^m :\ h_1(x) = 0, \ldots, h_r(x) = 0\}.$$

Para cada subconjunto $\mathcal{S} \subset \mathbb{K}^n$ denotamos $\mathrm{Cl}^{\mathrm{zar}}_{\mathbb{K}^m}(\mathcal{S}) \subset \mathbb{K}^m$ al menor subconjunto algebraico de $\mathbb{K}^n$ que contiene a $\mathcal{S}$, al que se llama *clausura de Zariski* de $\mathcal{S}$. Al sustituir $\mathbb{K}^m$ por el espacio proyectivo $\mathbb{KP}^m$ y polinomio por polinomio homogéneo surge el concepto de *subconjunto algebraico proyectivo* de $\mathbb{KP}^m$, y denotamos $\mathrm{Cl}^{\mathrm{zar}}_{\mathbb{KP}^m}(\mathcal{S}) \subset \mathbb{KP}^m$ al menor subconjunto algebraico proyectivo de $\mathbb{KP}^m$ que contiene a $\mathcal{S}$.

Denotaremos $\dim_{\mathbb{C}}(Z)$ la dimensión del subconjunto algebraico complejo Z, afín o proyectivo, y reservamos $\dim(\mathcal{S})$ para la dimensión del conjunto semialgebraico $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^m$.

Los dos resultados principales de este trabajo hacen referencia a la *frontera exterior* de un subconjunto $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^m$, es decir, al conjunto $\delta\mathcal{S} := \mathrm{Cl}_{\mathbb{R}^m}(\mathcal{S}) \backslash \mathcal{S}$, y son los siguientes.

Teorema 1.2. *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una aplicación polinómica, y denotemos $\mathcal{S} := f(\mathbb{R}^n)$ y $d := \dim(\mathcal{S})$. Entonces,*

(i) *Para todo subconjunto finito $\mathcal{F} \subset \mathcal{S}$ existe una semilínea paramétrica $\mathcal{L}$ tal que $\mathcal{F} \subset \mathcal{L} \subset \mathcal{S}$.*

(ii) *Para todo $p \in \delta\mathcal{S}$ existe una semilínea paramétrica $\mathcal{L}$ tal que $p \in \mathcal{L} \subset \mathrm{Cl}_{\mathbb{R}^m}(\mathcal{S})$.*

(iii) *Si $d = n$ existe un subconjunto semialgebraico $\mathcal{U}$, abierto y denso en $(\delta\mathcal{S})_{(n-1)}$, tal que para todo punto $p \in \mathcal{U}$ existe una semilínea paramétrica $\mathcal{L}$ que pasa por p y que cumple $\mathcal{L} \subset \mathrm{Cl}^{\mathrm{zar}}_{\mathbb{RP}^m}((\delta\mathcal{S})_{(n-1)}) \cap \mathrm{Cl}_{\mathbb{R}^m}(\mathcal{S})$*

Teorema 1.3. *Sean $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una aplicación regular, $\mathcal{S} := f(\mathbb{R}^n)$ y $d := \dim(\mathcal{S})$. Entonces,*

(i) *Dado un conjunto finito* $\mathcal{F} \subset \mathcal{S}$ *existe una semilínea regular* $\mathcal{L}$ *tal que* $\mathcal{F} \subset \mathcal{L} \subset \mathcal{S}$.

(ii) *Para cada punto* $p \in \delta\mathcal{S}$ *existe una semilínea regular* $\mathcal{L}$ *tal que* $p \in \mathcal{L} \subset \mathrm{Cl}_{\mathbb{R}^m}(\mathcal{S})$.

(iii) *Si* $d = n$ *existe un subconjunto semialgebraico* $\mathcal{U}$*, abierto y denso en* $(\delta\mathcal{S})_{(n-1)}$*, tal que para todo* $p \in \mathcal{U}$ *existe una semilínea regular* $\mathcal{L}$ *que contiene a* p *tal que* $\mathcal{L} \subset \mathrm{Cl}^{\mathrm{zar}}_{\mathbb{RP}^m}((\delta\mathcal{S})_{(n-1)}) \cap \mathrm{Cl}_{\mathbb{R}^m}(\mathcal{S})$.

En la siguiente sección recordaremos algunos resultados relativos a la resolución del lugar de indeterminación de la extensión proyectiva racional de una aplicación polinómica, que constituyen la técnica fundamental empleada en las secciones tercera y cuarta para demostrar los dos teoremas anteriores.

2. Resolución de indeterminaciones

2.1. Objetos proyectivos invariantes.

Los resultados clásicos del caso complejo sobre resolución del lugar de indeterminación de la extensión proyectiva racional de una aplicación polinómica $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ son también válidos en el caso real si se tiene cuidado en elegir los datos involucrados en cada etapa invariantes con respecto a la conjugación compleja. Explicamos esto con más detalle. Denotamos $\overline{z}$ el conjugado de cada número complejo $z \in \mathbb{C}$ y

$$\sigma := \sigma_n : \mathbb{CP}^n \to \mathbb{CP}^n,\ z := (z_0 : \cdots : z_n) \mapsto \overline{z} := (\overline{z}_0 : \cdots : \overline{z}_n).$$

Decimos que un conjunto $M \subset \mathbb{CP}^n$ es *invariante* si $\sigma(M) = M$. Del Criterio Jacobiano, véase [BCR, 3.3.6] y [ZS], se deduce que si $Z \subset \mathbb{CP}^n$ es un conjunto algebraico proyectivo irreducible invariante no singular y $\dim_{\mathbb{C}}(Z) := d$, entonces $Z \cap \mathbb{RP}^n$ es un conjunto algebraico proyectivo no singular y $\dim(Z \cap \mathbb{RP}^n) = d$. Decimos que una aplicación racional $h : \mathbb{CP}^n \dashrightarrow \mathbb{CP}^m$ es *invariante* si $h \circ \sigma_n = \sigma_m \circ h$ o, más brevemente, si $h \circ \sigma = \sigma \circ h$. En particular, si las componentes de h son polinomios homogéneos con coeficientes reales, entonces h es invariante y la restricción $h|_{\mathbb{RP}^n} : \mathbb{RP}^n \dashrightarrow \mathbb{RP}^m$ es una aplicación racional real.

2.2. Resolución del lugar de indeterminación.

Sea $f := (f_1, \ldots, f_m) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^m$ donde cada $f_i \in \mathbb{R}[\mathtt{x}_1, \mathtt{x}_2]$ es un polinomio en dos variables. Sea $d := \max\{\deg(f_i) : 1 \leq i \leq m\}$, denotemos $\mathbb{K} := \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, indistintamente y empleamos la notación habitual

$$F_{\mathbb{K}} : \mathbb{KP}^2 \dashrightarrow \mathbb{KP}^m,\ x := (x_0 : x_1 : x_2) \to (x_0^d : F_1(x) : \cdots : F_m(x)),$$

donde cada

$$F_i(\mathtt{x}_0, \mathtt{x}_1, \mathtt{x}_2) := \mathtt{x}_0^d f_i(\mathtt{x}_1/\mathtt{x}_0, \mathtt{x}_2/\mathtt{x}_0) \in \mathbb{R}[\mathtt{x}] := \mathbb{R}[\mathtt{x}_0, \mathtt{x}_1, \mathtt{x}_2],$$

para la extensión proyectiva racional $F_{\mathbb{K}}$ de f. Se emplea la flecha discontinua $\dashrightarrow$ en lugar de $\to$ porque el dominio de $F_{\mathbb{K}}$ no es necesariamente el espacio proyectivo $\mathbb{KP}^n$ ya que, en principio, $F_{\mathbb{K}}$ puede no estar definida en los puntos $x \in \mathbb{KP}^n$ en

los que se anulan todas las funciones coordenadas de $F_{\mathbb{K}}$. Denotamos $Y_{\mathbb{K}}$ el lugar de indeterminación de $F_{\mathbb{K}}$, que evidentemente está contenido en la recta de infinito $\ell_\infty(\mathbb{K}) := \{x_0 = 0\} \subset \mathbb{KP}^2$. Nótese que si $x := (1 : x_1, x_2) \equiv (x_1, x_2)$, entonces

$$F_{\mathbb{K}}(1 : x_1 : x_2) = (1 : f_1(x_1, x_2) : f_2(x_1, x_2) \equiv f(x_1, x_2).$$

Empleando [Sh1, III.1.4] se demuestran los siguientes hechos bien conocidos, (véase por ejemplo [FU, 2.b]):

(i) El conjunto $Y_{\mathbb{C}}$ es finito, está contenido en $\ell_\infty(\mathbb{C})$ e $Y_{\mathbb{R}} = Y_{\mathbb{C}} \cap \mathbb{RP}^2$.

(ii) Existen un entero $k \geq 2$, una superficie algebraica proyectiva invariante no singular $Z \subset \mathbb{CP}^k$ y una aplicación racional invariante $\pi_{\mathbb{C}} : Z \to \mathbb{CP}^2$, que cumplen las siguientes dos condiciones:

(ii.1) $Y_{\mathbb{C}} := \{p \in \mathbb{CP}^2 : \ \#\pi_{\mathbb{C}}^{-1}(p) > 1\}$.

(ii.2) La restricción $\pi_{\mathbb{C}}|_{Z \setminus \pi_{\mathbb{C}}^{-1}(Y_{\mathbb{C}})} : Z \setminus \pi_{\mathbb{C}}^{-1}(Y_{\mathbb{C}}) \to \mathbb{CP}^2 \setminus Y_{\mathbb{C}}$ es un isomorfismo birregular.

(iii) Existe una aplicación regular proyectiva e invariante $\widehat{F}_{\mathbb{C}} : Z \to \mathbb{CP}^m$ tal que

$$\widehat{F}_{\mathbb{C}}|_{Z \setminus \pi_{\mathbb{C}}^{-1}(Y_{\mathbb{C}})} = F_{\mathbb{C}} \circ \pi_{\mathbb{C}}|_{Z \setminus \pi_{\mathbb{C}}^{-1}(Y_{\mathbb{C}})}.$$

Se dice que la terna invariante $(Z, \pi_{\mathbb{C}}, \widehat{F}_{\mathbb{C}})$ es una *resolución invariante de* $F_{\mathbb{C}}$.

Además, para cada punto $y \in Y_{\mathbb{C}}$ las componentes irreducibles del conjunto algebraico $\pi_{\mathbb{C}}^{-1}(y)$ son curvas algebraicas proyectivas irreducibles y no singulares $K_{i,y}$ birregularmente equivalentes a $\mathbb{CP}^1$ vía a una aplicación regular $\Phi_{i,y} : \mathbb{CP}^1 \to K_{i,y}$, que es invariante si $K_{i,y}$ es invariante, tales que

(iv.1) Si $y \in Y_{\mathbb{C}} \setminus Y_{\mathbb{R}}$, entonces $\sigma(K_{i,y}) = K_{i,\sigma(y)}$ y $K_{i,y} \cap \mathbb{RP}^k = \varnothing$.

(iv.2) Si $y \in Y_{\mathbb{R}}$, entonces, o bien $K_{i,y} \cap \mathbb{RP}^k = \varnothing$ y existe $j \neq i$ tal que $\sigma(K_{i,y}) = K_{j,y}$, o bien $\sigma(K_{i,y}) = K_{i,y}$ y la restricción $\phi_{i,y} := \Phi_{i,y}|_{\mathbb{RP}^1} : \mathbb{RP}^1 \to C_{i,y} := K_{i,y} \cap \mathbb{RP}^k$ es un isomorfismo birregular entre la recta proyectiva real $\mathbb{RP}^1$ y la curva algebraica proyectiva irreducible y no singular $C_{i,y}$.

La invarianza de los objetos anteriores tiene como consecuencia un comportamiento satisfactorio de la resolución en el caso real. Enunciamos con precisión lo que esto significa.

2.3. Resolución del lugar de indeterminación real.

Mantenemos las notaciones anteriores y consideramos la superficie algebraica proyectiva real no singular $X := Z \cap \mathbb{RP}^k$ y la aplicación racional $\pi_{\mathbb{R}} := \pi_{\mathbb{C}}|_X : X \to \mathbb{RP}^2$, cuya restricción

$$\pi_{\mathbb{R}}|_{X \setminus \pi_{\mathbb{R}}^{-1}(Y_{\mathbb{R}})} : X \setminus \pi_{\mathbb{R}}^{-1}(Y_{\mathbb{R}}) \to \mathbb{RP}^2 \setminus Y_{\mathbb{R}}$$

es un isomorfismo birregular. Denotamos $\widehat{F}_{\mathbb{R}} := \widehat{F}_{\mathbb{C}}|_X : X \to \mathbb{RP}^m$, que es una aplicación regular y cumple la igualdad

$$\widehat{F}_{\mathbb{R}}|_{X \setminus \pi_{\mathbb{R}}^{-1}(Y_{\mathbb{R}})} = F_{\mathbb{R}} \circ \pi_{\mathbb{R}}|_{X \setminus \pi_{\mathbb{R}}^{-1}(Y_{\mathbb{R}})}.$$

Como $X \setminus \pi_{\mathbb{R}}^{-1}(\ell_\infty(\mathbb{R})) \subset X \setminus \pi_{\mathbb{R}}^{-1}(Y_{\mathbb{R}})$ y $\mathbb{RP}^2 \setminus \ell_\infty(\mathbb{R}) \equiv \mathbb{R}^2$, se tiene

$$\widehat{F}_{\mathbb{R}}(x) = (F_{\mathbb{R}} \circ \pi_{\mathbb{R}})(x) = f(\pi_{\mathbb{R}}(x)) \in \mathbb{R}^m \equiv \mathbb{RP}^m \setminus \mathsf{H}_\infty(\mathbb{R})$$

para todo $x \in X \setminus \pi_{\mathbb{R}}^{-1}(\ell_\infty(\mathbb{R}))$, de donde $\widehat{F}_{\mathbb{R}}^{-1}(\mathsf{H}_\infty(\mathbb{R})) \subset \pi_{\mathbb{R}}^{-1}(\ell_\infty(\mathbb{R}))$. En virtud de [Sh2, VI.2.2.d], la *transformada estricta* K_∞ de $\ell_\infty(\mathbb{C})$ respecto de $\pi_{\mathbb{C}}$, definida por

$$\mathsf{K}_\infty := \mathrm{Cl}_Z(\pi_{\mathbb{C}}^{-1}(\ell_\infty(\mathbb{C}) \setminus Y_{\mathbb{C}})),$$

es una curva algebraica compleja no singular y $\pi_{\mathbb{C}}|_{\mathsf{K}_\infty} : \mathsf{K}_\infty \to \ell_\infty(\mathbb{C}) \equiv \mathbb{CP}^1$ es un isomorfismo birregular invariante. En consecuencia, K_∞ es una curva algebraica compleja racional invariante y no singular. Por tanto $\mathsf{C}_\infty := \mathsf{K}_\infty \cap \mathbb{RP}^k$ es una curva algebraica real racional no singular, que además es la transformada estricta de $\ell_\infty(\mathbb{R})$ respecto de $\pi_{\mathbb{R}}$, es decir,

$$\mathsf{C}_\infty := \mathrm{Cl}_X(\pi_{\mathbb{R}}^{-1}(\ell_\infty(\mathbb{R}) \setminus Y_{\mathbb{R}}).$$

3. Demostración del Teorema 1.2.

Comenzamos demostrando el siguiente Lema auxiliar, cuya prueba se apoya esencialmente en la demostración de [FU, Thm. 3.3]. Diremos que $\{x_k\}_k \subset \mathbb{R}^n$ es una sucesión *totalmente no acotada* si todas sus subsucesiones son no acotadas.

Lema 3.1. *Sean $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^m$ una aplicación polinómica, $F_{\mathbb{C}} : \mathbb{CP}^2 \dashrightarrow \mathbb{CP}^m$ su extensión racional proyectiva y $(Z, \pi_{\mathbb{C}}, \widehat{F}_{\mathbb{C}})$, donde $Z \subset \mathbb{CP}^k$, una resolución invariante de $F_{\mathbb{C}}$. Denotamos*

$$\mathcal{S} := f(\mathbb{R}^2), \quad X := Z \cap \mathbb{RP}^k, \quad \widehat{F}_{\mathbb{R}} := \widehat{F}_{\mathbb{C}}|_X \quad y \quad \pi_{\mathbb{R}} := \pi_{\mathbb{C}}|_X.$$

Sean C_∞ la transformada estricta respecto de $\pi_{\mathbb{R}}$ de la recta de infinito $\ell_\infty(\mathbb{R}) \subset \mathbb{RP}^2$ e $Y_{\mathbb{R}}$ el lugar de indeterminación de la restricción $F_{\mathbb{R}} := F_{\mathbb{C}}|_{\mathbb{RP}^2}$. Entonces,

$$\pi_{\mathbb{R}}^{-1}(\ell_\infty(\mathbb{R})) = \mathsf{C}_\infty \cup \bigcup_{y \in Y_{\mathbb{R}}} \pi_{\mathbb{R}}^{-1}(y), \tag{2}$$

y para cada punto $y \in Y_{\mathbb{R}}$ se tiene $\pi_{\mathbb{R}}^{-1}(y) = \mathsf{C}_{1,y} \cup \cdots \cup \mathsf{C}_{s_y,y}$, donde:

(i) *Cada $\mathsf{C}_{i,y}$ es una curva algebraica racional real no singular.*

(ii) *La intersección $\mathsf{C}_\infty \cap \mathsf{C}_{1,y}$ es un único punto $\{b_{1,y}\}$.*

(iii) *La fibra $\pi_{\mathbb{R}}^{-1}(y)$ es conexa y, de hecho, $\mathsf{C}_{i,y} \cap \bigcup_{j=1}^{i-1} \mathsf{C}_{j,y}$ es un único punto $\{b_{i,y}\}$ para todo $2 \le i \le s_y$.*

(iv) *Si $\widehat{F}_{\mathbb{R}}(\mathsf{C}_{i,y}) \not\subset \mathsf{H}_\infty(\mathbb{R})$ y $\widehat{F}_{\mathbb{R}}|_{\mathsf{C}_{i,y}}$ no es constante, entonces $b_{i,y} \in \widehat{F}_{\mathbb{R}}^{-1}(\mathsf{H}_\infty(\mathbb{R}))$. Más aún, si $\phi_{i,y} : \mathbb{RP}^1 \to \mathsf{C}_{i,y}$ es una aplicación birregular tal que $\phi_{i,y}^{-1}(b_{i,y})$ es el punto de infinito de $\mathbb{RP}^1$, entonces $h_{i,y} := \widehat{F}_{\mathbb{R}} \circ \phi_{i,y}|_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ es una aplicación polinómica cuya imagen está contenida en $\mathrm{Cl}_{\mathbb{R}^m}(\mathcal{S})$.*

(v) *Si $\widehat{F}_{\mathbb{R}}(\mathsf{C}_{i,y}) \not\subset \mathsf{H}_\infty(\mathbb{R})$ y $\widehat{F}_{\mathbb{R}}|_{\mathsf{C}_{i,y}}$ es constante, entonces $b_{i,y} \notin \widehat{F}_{\mathbb{R}}^{-1}(\mathsf{H}_\infty(\mathbb{R}))$ y existe $j \neq i$ para el que $\widehat{F}_{\mathbb{R}}|_{\mathsf{C}_{j,y}}$ es no constante y $\widehat{F}_{\mathbb{R}}(\mathsf{C}_{i,y}) \subset \widehat{F}_{\mathbb{R}}(\mathsf{C}_{j,y})$.*

(vi) *Sean* $Y^*_{\mathbb{R}} := \{y \in Y_{\mathbb{R}} :\ \widehat{F}_{\mathbb{R}}(\pi^{-1}_{\mathbb{R}}(y)) \not\subset \mathsf{H}_\infty(\mathbb{R})\}$ *y para cada* $y \in Y^*_{\mathbb{R}}$ *denotemos*

$$\mathcal{F}_y := \{1 \le i \le s_y :\ \widehat{F}_{\mathbb{R}}(\mathsf{C}_{i,y}) \not\subset \mathsf{H}_\infty(\mathbb{R}),\ \widehat{F}_{\mathbb{R}}|_{\mathsf{C}_{i,y}} \text{ es no constante}\}.$$

Se cumple que:

$$\delta\mathcal{S} \subset \mathcal{D} := \bigcup_{y \in Y^*_{\mathbb{R}}} \bigcup_{i \in \mathcal{F}_y} h_{i,y}(\mathbb{R}) \subset \mathrm{Cl}_{\mathbb{R}^m}(\mathcal{S}),$$

(vii) *La restricción* $f|_{\mathbb{R}^2 \setminus f^{-1}(\mathcal{D})} : \mathbb{R}^2 \setminus f^{-1}(\mathcal{D}) \to \mathbb{R}^m \setminus \mathcal{D}$ *es una aplicación propia y para cada* $z \in \mathcal{D}$ *existe una sucesión* $\{x_k\}_k \subset \mathbb{R}^2$ *totalmente no acotada, tal que la sucesión* $\{f(x_k)\}_k$ *converge a* z.

Demostración. La igualdad (2) se sigue de la inclusión $Y_{\mathbb{R}} \subset \ell_\infty(\mathbb{R})$, y para cada $y \in Y_{\mathbb{R}}$ se satisfacen los apartados (i)-(iii), por [FU, 3.3.7 y 3.3.9].

A continuación demostramos (iv). Fijemos un punto $y \in Y^*_{\mathbb{R}}$, y sea $\mathsf{C}_i := \mathsf{C}_{i,y}$ una componente irreducible de $\pi^{-1}_{\mathbb{R}}(y)$ tal que $\widehat{F}_{\mathbb{R}}(\mathsf{C}_i) \not\subset \mathsf{H}_\infty(\mathbb{R})$.

Sean K_i la componente irreducible invariante de $\pi^{-1}_{\mathbb{C}}(y)$ que cumple $\mathsf{K}_i \cap \mathbb{RP}^k = \mathsf{C}_i$, y $\Phi_i : \mathbb{CP}^1 \to \mathsf{K}_i$ una aplicación birregular e invariante. Entonces, la restricción $\phi_i := \Phi_i|_{\mathbb{RP}^1} : \mathbb{RP}^1 \to \mathsf{C}_i$ es también birregular y la composición

$$H_i := \widehat{F}_{\mathbb{C}} \circ \Phi = (H_{i0} : H_{i1} : \cdots : H_{im}) : \mathbb{CP}^1 \to \mathbb{CP}^m$$

es una aplicación regular invariante. Todos los polinomios $H_{ij} \in \mathbb{R}[\mathtt{t}_0, \mathtt{t}_1]$ son homogéneos del mismo grado d, y podemos suponer que $\gcd(H_{i0}, \ldots, H_{im}) = 1$. Como $\widehat{F}_{\mathbb{R}}|_{\mathsf{C}_i}$, y por tanto $\widehat{F}_{\mathbb{C}}|_{\mathsf{K}_i}$, no es constante, el grado d es ≥ 1; en consecuencia $\mathsf{K}_i \cap \widehat{F}^{-1}_{\mathbb{C}}(\mathsf{H}_\infty(\mathbb{C})) = \Phi(\{H_{i0} = 0\}) \neq \varnothing$.

Puesto que K_i y $\widehat{F}^{-1}_{\mathbb{C}}(\mathsf{H}_\infty(\mathbb{C}))$ son, en virtud de [FU, 3.3.6] invariantes y conexos, y están contenidos en el conjunto $A := \pi^{-1}_{\mathbb{C}}(\ell_\infty(\mathbb{C}) \cup Y_{\mathbb{C}})$, la intersección $\mathsf{K}_i \cap \widehat{F}^{-1}_{\mathbb{C}}(\mathsf{H}_\infty(\mathbb{C}))$ es invariante y no vacía, y de hecho contiene, en virtud de [FU, 3.3.8] un único punto $p_i \in \widehat{F}^{-1}_{\mathbb{R}}(\mathsf{H}_\infty(\mathbb{R}))$. Así, tras un cambio de coordenadas afin e invariante, podemos suponer que $H_{i0} := \mathtt{t}_0^d$ y que $h_i := H_i|_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ es una aplicación polinómica no constante. Se sigue de la demostración de [FU, 3.3.12] que

$$\mathrm{Im}(h_i) \subset \widehat{F}_{\mathbb{R}}(X) \setminus \widehat{F}_{\mathbb{R}}(\widehat{F}^{-1}_{\mathbb{R}}(\mathsf{H}_\infty(\mathbb{R}))) = \mathrm{Cl}_{\mathbb{R}^m}(\mathcal{S}). \tag{3}$$

Comprobamos que $b_i \equiv b_{i,y} = p_i \in \widehat{F}^{-1}_{\mathbb{R}}(\mathsf{H}_\infty(\mathbb{R}))$. Si $i = 1$ el resultado es claro; por tanto, suponemos $i \ge 2$. Sean K_j las componentes irreducibles de $\pi^{-1}_{\mathbb{C}}(y)$ que satisfacen $\mathsf{K}_j \cap \mathbb{RP}^k = \mathsf{C}_j$ para cada $1 \le j \le r-1$. Por [FU, 3.3.10] y las propiedades (i)-(iii) ya demostradas, la curva algebraica proyectiva compleja

$$T_i := \mathsf{K}_\infty \cup (\pi^{-1}_{\mathbb{C}}(y) \cap \widehat{F}^{-1}_{\mathbb{C}}(\mathsf{H}_\infty(\mathbb{C}))) \cup \bigcup_{j=1}^{i-1} \mathsf{K}_j \subset \pi^{-1}_{\mathbb{C}}(\ell_\infty(\mathbb{C})) \subset A$$

es conexa. En consecuencia, como también $\mathsf{K}_i \subset A$ es conexa, la intersección $\mathsf{K}_i \cap T_i$ es, por (iii), no vacía y contiene al punto $\{b_i\}$. Pero $\mathsf{K}_i \cap T_i$ es, por [FU, 3.3.8], un único punto, luego $\mathsf{K}_i \cap T_i = \{b_i\}$. Se tiene entonces

$$\{p_i\} = \mathsf{K}_i \cap \widehat{F}^{-1}_{\mathbb{C}}(\mathsf{H}_\infty(\mathbb{C})) = \mathsf{K}_i \cap \pi^{-1}_{\mathbb{C}}(y) \cap \widehat{F}^{-1}_{\mathbb{C}}(\mathsf{H}_\infty(\mathbb{C})) \subset \mathsf{K}_i \cap T_i = \{b_i\},$$

es decir, $b_i = p_i$.

Ahora comprobamos (v). Como $\widehat{F}_{\mathbb{R}}|_{\mathsf{C}_{i,y}}$ es constante y $\widehat{F}_{\mathbb{R}}(\mathsf{C}_{i,y}) \not\subset \mathsf{H}_\infty(\mathbb{R})$, la intersección $\mathsf{C}_{i,y} \cap \widehat{F}_{\mathbb{R}}^{-1}(H_\infty(\mathbb{R})) = \varnothing$. Además, por (iii) sabemos que existe un índice $1 \leq j < i$ tal que la intersección $\mathsf{C}_{j,y} \cap \mathsf{C}_{i,y} = \{b_{i,y}\}$. Como $b_{i,y} \notin \widehat{F}_{\mathbb{R}}^{-1}(H_\infty(\mathbb{R}))$ se tiene $\widehat{F}_{\mathbb{R}}(\mathsf{C}_{j,y}) \not\subset \mathsf{H}_\infty(\mathbb{R})$. Si $\widehat{F}_{\mathbb{R}}|_{\mathsf{C}_{j,y}}$ no es constante hemos terminado, puesto que $\widehat{F}_{\mathbb{R}}|_{\mathsf{C}_{i,y}} \equiv \widehat{F}_{\mathbb{R}}(b_{i,y})$. En otro caso repetimos el procedimiento con $\mathsf{C}_{j,y}$ hasta que llegamos al índice que nos interesa. Este proceso debe terminar puesto que $\mathsf{C}_{1,y} \cap \mathsf{C}_\infty \neq \varnothing$ y $\widehat{F}_{\mathbb{R}}(\mathsf{C}_\infty) \subset \mathsf{H}_\infty(\mathbb{R})$.

Pasamos a probar (vi). Sea $\mathcal{G}_y := \{1 \leq i \leq s_y : \widehat{F}_{\mathbb{R}}(\mathsf{C}_{i,y}) \not\subset \mathsf{H}_\infty(\mathbb{R})\}$ para cada $y \in Y_{\mathbb{R}}^*$. Como consecuencia de los siguientes hechos:

- $\widehat{F}_{\mathbb{R}}(\widehat{F}_{\mathbb{R}}^{-1}(\mathbb{R}^m)) = \mathrm{Cl}_{\mathbb{R}^m}(\mathcal{S})$ y $\mathcal{S}_\infty = \widehat{F}_{\mathbb{R}}(\widehat{F}_{\mathbb{R}}^{-1}(\mathsf{H}_\infty(\mathbb{R})))$, véase [FU, 3.3.12],
- $\mathsf{C}_\infty \subset \widehat{F}_{\mathbb{R}}^{-1}(\mathsf{H}_\infty(\mathbb{R}))$, y por tanto $\widehat{F}_{\mathbb{R}}(\mathsf{C}_\infty) \subset \widehat{F}_{\mathbb{R}}(\widehat{F}_{\mathbb{R}}^{-1}(\mathsf{H}_\infty(\mathbb{R})))$,
- $\mathcal{S} = \widehat{F}_{\mathbb{R}}(\pi_{\mathbb{R}}^{-1}(\mathbb{R}^2))$,
- $\widehat{F}_{\mathbb{R}}(\pi_{\mathbb{R}}^{-1}(\ell_\infty(\mathbb{R}))) = \widehat{F}_{\mathbb{R}}(\mathsf{C}_\infty) \cup \bigcup_{y \in Y_{\mathbb{R}}} \widehat{F}_{\mathbb{R}}(\pi_{\mathbb{R}}^{-1}(y)))$,

por la igualdad (2) en el enunciado, y de los apartados anteriores, tenemos que

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{S} = \mathrm{Cl}_{\mathbb{R}^m}(\mathcal{S}) \setminus \mathcal{S} &= \widehat{F}_{\mathbb{R}}(X) \setminus (\widehat{F}_{\mathbb{R}}(\widehat{F}_{\mathbb{R}}^{-1}(\mathsf{H}_\infty(\mathbb{R}))) \cup \widehat{F}_{\mathbb{R}}(\pi_{\mathbb{R}}^{-1}(\mathbb{R}^2)))\\ &\subset \widehat{F}_{\mathbb{R}}(\pi_{\mathbb{R}}^{-1}(\ell_\infty(\mathbb{R}))) \setminus \widehat{F}_{\mathbb{R}}(\widehat{F}_{\mathbb{R}}^{-1}(\mathsf{H}_\infty(\mathbb{R}))) \subset \bigcup_{y \in Y_{\mathbb{R}}^*} \bigcup_{i \in \mathcal{G}_y} \widehat{F}_{\mathbb{R}}(\mathsf{C}_{i,y} \setminus \{b_{i,y}\})\\ &= \mathcal{D} = \bigcup_{y \in Y_{\mathbb{R}}^*} \bigcup_{i \in \mathcal{F}_y} h_{i,y}(\mathbb{R}) \subset \mathrm{Cl}_{\mathbb{R}^m}(\mathcal{S}),\end{aligned}$$

y por tanto (vi) queda demostrado.

Finalmente comprobamos (vii). En primer lugar, como $\widehat{F}_{\mathbb{R}} : X \to \mathbb{RP}^m$ es una aplicación propia también lo es su restricción

$$\widehat{F}_{\mathbb{R}}|_{X \setminus \widehat{F}_{\mathbb{R}}^{-1}(\mathsf{H}_\infty(\mathbb{R}) \cup \mathcal{D})} : X \setminus \widehat{F}_{\mathbb{R}}^{-1}(\mathsf{H}_\infty(\mathbb{R}) \cup \mathcal{D}) \to \mathbb{R}^m \setminus \mathcal{D}.$$

Así, como la aplicación $\rho := \pi_{\mathbb{R}}|_{\pi_{\mathbb{R}}^{-1}(\mathbb{R}^2)} : \pi_{\mathbb{R}}^{-1}(\mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}^2$ satisface $\widehat{F}_{\mathbb{R}}|_{\pi_{\mathbb{R}}^{-1}(\mathbb{R}^2)} = f \circ \rho$, para demostrar que la aplicación $f|_{\mathbb{R}^2 \setminus f^{-1}(\mathcal{D})} : \mathbb{R}^2 \setminus f^{-1}(\mathcal{D}) \to \mathbb{R}^m \setminus \mathcal{D}$ es propia es suficiente ver que $X \setminus \widehat{F}_{\mathbb{R}}^{-1}(\mathsf{H}_\infty(\mathbb{R}) \cup \mathcal{D}) = \rho^{-1}(\mathbb{R}^2 \setminus f^{-1}(\mathcal{D}))$. En efecto, de [FU, 3.3.11] y la definición del conjunto $\mathcal{D}$, se deduce que

$$\pi_{\mathbb{R}}^{-1}(\ell_\infty(\mathbb{R})) = \widehat{F}_{\mathbb{R}}^{-1}(\mathsf{H}_\infty(\mathbb{R})) \cup (\widehat{F}_{\mathbb{R}}^{-1}(\mathcal{D}) \cap \pi_{\mathbb{R}}^{-1}(\ell_\infty(\mathbb{R})).$$

De esta igualdad resulta

$$\begin{aligned}\widehat{F}_{\mathbb{R}}^{-1}(\mathsf{H}_\infty(\mathbb{R}) \cup \mathcal{D}) &= \widehat{F}_{\mathbb{R}}^{-1}(\mathsf{H}_\infty(\mathbb{R})) \cup (\widehat{F}_{\mathbb{R}}^{-1}(\mathcal{D}) \cap \pi_{\mathbb{R}}^{-1}(\ell_\infty(\mathbb{R})) \cup (\widehat{F}_{\mathbb{R}}^{-1}(\mathcal{D}) \cap \pi_{\mathbb{R}}^{-1}(\mathbb{R}^2))\\ &= \pi_{\mathbb{R}}^{-1}(\ell_\infty(\mathbb{R})) \cup (\widehat{F}_{\mathbb{R}}^{-1}(\mathcal{D}) \cap \pi_{\mathbb{R}}^{-1}(\mathbb{R}^2)) = \pi_{\mathbb{R}}^{-1}(\ell_\infty(\mathbb{R})) \cup \rho^{-1}(f^{-1}(\mathcal{D})),\end{aligned}$$

y de aquí

$$\begin{aligned}X \setminus \widehat{F}_{\mathbb{R}}^{-1}(\mathsf{H}_\infty(\mathbb{R}) \cup \mathcal{D}) &= X \setminus (\pi_{\mathbb{R}}^{-1}(\ell_\infty(\mathbb{R})) \cup \rho^{-1}(f^{-1}(\mathcal{D})))\\ &= \pi_{\mathbb{R}}^{-1}(\mathbb{R}^2) \setminus \rho^{-1}(f^{-1}(\mathcal{D})) = \rho^{-1}(\mathbb{R}^2 \setminus f^{-1}(\mathcal{D})).\end{aligned}$$

Ahora bien, para cada punto $z \in \mathcal{D}$ existen un punto $y \in Y^*_{\mathbb{R}}$, un índice $i \in \mathcal{F}_y$ y un punto $u \in \mathsf{C}_{i,y} \setminus \{b_{i,y}\} \subset \pi_{\mathbb{R}}^{-1}(\ell_\infty(\mathbb{R}))$ tales que $\widehat{F}_{\mathbb{R}}(u) = z$. Al ser $\pi_{\mathbb{R}}^{-1}(\mathbb{R}^2)$ denso en X, existe una sucesión $\{u_k\}_k \subset \pi_{\mathbb{R}}^{-1}(\mathbb{R}^2)$ que converge a $u \in \pi_{\mathbb{R}}^{-1}(\ell_\infty(\mathbb{R}))$. En consecuencia, si denotamos $x_k = \pi_{\mathbb{R}}(u_k)$, la sucesión $\{x_k\}_k$ es totalmente no acotada en $\mathbb{R}^2$, mientras que $f(x_k) = f(\pi_{\mathbb{R}}(u_k)) = \widehat{F}_{\mathbb{R}}(u_k)$, luego la sucesión $\{f(x_k)\}_k$ converge al punto z. □

El Lema anterior 3.1 proporciona una nueva demostración del siguiente resultado, (véase [FG2, 3.8]).

Corolario 3.2. *Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^m$ una aplicación polinómica cuya imagen $\mathcal{S}$ tiene dimensión 2. Entonces existe una familia finita de semilíneas paramétricas $\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_r$ tales que $\delta\mathcal{S} \subset \bigcup_{i=1}^r \mathcal{L}_i \subset \mathrm{Cl}_{\mathbb{R}^m}(\mathcal{S})$.*

Observaciones 3.3. (i) Dada una aplicación polinómica $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ la clausura de Zariski $Z := \mathrm{Cl}^{\mathrm{zar}}_{\mathbb{R}^m}(\mathcal{S}) \subset \mathbb{R}^m$ de $\mathcal{S} := f(\mathbb{R}^n)$ es un conjunto algebraico irreducible. En particular, la clausura de Zariski de una semilínea paramétrica es un conjunto algebraico irreducible de dimensión 1.

En efecto, sea $\mathbb{R}[\mathtt{y}] := \mathbb{R}[\mathtt{y}_1, \ldots, \mathtt{y}_m]$ y probemos que $\mathcal{J}(Z) := \{g \in \mathbb{R}[\mathtt{y}] : \ g|_Z \equiv 0\}$ es un ideal primo. Sean $g, h \in \mathbb{R}[\mathtt{y}]$ tales que $gh \in \mathcal{J}(Z)$. Entonces $gh|_{\mathcal{S}} = 0$, luego los polinomios $G := g \circ f$ y $H := h \circ f \in \mathbb{R}[\mathtt{x}] := \mathbb{R}[\mathtt{x}_1, \ldots, \mathtt{x}_n]$ cumplen que su producto GH es idénticamente nulo. Como el anillo de polinomios $\mathbb{R}[\mathtt{x}]$ es un dominio podemos suponer que $G = 0$, luego $g|_Z = 0$, es decir, $g \in \mathcal{J}(Z)$.

(ii) Con las notaciones del Corolario 3.2, supongamos que existe una semilínea paramétrica $\mathcal{L}_i$ tal que $\dim(\mathcal{L}_i \cap \delta\mathcal{S}) = 1$. Entonces, $\mathcal{L}_i \subset \mathrm{Cl}^{\mathrm{zar}}_{\mathbb{R}^m}(\delta\mathcal{S})$.

En efecto, en virtud del apartado anterior la clausura de Zariski $\mathrm{Cl}^{\mathrm{zar}}_{\mathbb{R}^m}(\mathcal{L}_i)$ es un conjunto algebraico irreducible unidimensional, y contiene a $\mathcal{L}_i \cap \delta\mathcal{S}$, luego también contiene a $\mathrm{Cl}^{\mathrm{zar}}_{\mathbb{R}^m}(\mathcal{L}_i \cap \delta\mathcal{S})$, que por hipótesis tiene dimensión 1. En consecuencia,

$$\mathcal{L}_i \subset \mathrm{Cl}^{\mathrm{zar}}_{\mathbb{R}^m}(\mathcal{L}_i) = \mathrm{Cl}^{\mathrm{zar}}_{\mathbb{R}^m}(\mathcal{L}_i \cap \delta\mathcal{S}) \subset \mathrm{Cl}^{\mathrm{zar}}_{\mathbb{R}^m}(\delta\mathcal{S}).$$

(iii) Se deduce directamente del Corolario 3.2 que si $p \in \delta\mathcal{S}$ es un punto aislado, entonces existe una semilínea paramétrica $\mathcal{L} \subset \mathrm{Cl}_{\mathbb{R}^m}(\mathcal{S})$ que contiene a p.

Antes de probar el Teorema 1.2 recordamos el siguiente Lema de Selección de curvas racionales, demostrado en [FU, 2.5], cuyo enunciado sigue la línea introducida en el clásico Lema de Selección de curvas debido a Milnor, [M, §3. 3.1].

Lema 3.4 (Lema de Selección de curvas racionales)**.** *Sean $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una aplicación regular con imagen $\mathcal{S} := f(\mathbb{R}^n)$. Sean $\mathcal{T} \subset \mathcal{S}$ un subconjunto semialgebraico denso de $\mathcal{S}$ y $p \in \mathrm{Cl}_{\mathbb{RP}^m}(\mathcal{S}) \setminus \mathcal{S}$. Entonces existen enteros $r \geq 1$, $k_1, \ldots, k_n$ con $k_1 := \min\{k_1, \ldots, k_n\} < 0$, y polinomios $\mathtt{p}_2, \ldots, \mathtt{p}_n \in \mathbb{R}[\mathtt{t}]$ con $\mathtt{p}_i(0) \neq 0$ para cada $2 \leq i \leq n$, tales que, tras reordenar las variables en caso necesario, para cada $\beta \in (\mathtt{t}^r)\mathbb{R}[\mathtt{t}]^n$ se cumplen las siguientes dos condiciones:*

(i) $p = \lim_{t \to 0^+}(f \circ (\alpha + \beta))(t)$, *donde* $\alpha(\mathtt{t}) := (\pm\mathtt{t}^{k_1}, \mathtt{t}^{k_2}\mathtt{p}_2(\mathtt{t}), \ldots, \mathtt{t}^{k_n}\mathtt{p}_n(\mathtt{t}))$,

(ii) $(f \circ (\alpha + \beta))((0, \varepsilon)) \subset \mathcal{T}$ *para todo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño.*

Ya estamos en condiciones de demostrar el Teorema 1.2.

Demostración del Teorema 1.2. Comenzamos probando (i). Sea $\mathcal{F} := \{q_1, \ldots, q_r\} \subset \mathcal{S}$ un conjunto finito y sea $\mathcal{G} := \{p_1, \ldots, p_r\} \subset \mathbb{R}^n$ tal que $f(p_i) = q_i$ para cada índice $1 \leq i \leq r$. Comprobemos primero que existe una involución polinómica $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ que transforma cada p_i en un punto de la forma $(a_i, \mathbf{0}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$.

En efecto, tras un cambio afín de coordenadas podemos suponer que las primeras coordenadas de los puntos p_i son distintas dos a dos, esto es, si $p_i := (a_{1i}, \ldots, a_{ni})$ entonces $a_{1i} \neq a_{1j}$ si $i \neq j$. Por tanto, existen polinomios $\gamma_j \in \mathbb{R}[\mathtt{t}]$ con $\gamma_j(a_{1i}) = a_{ji}$ para cada $2 \leq j \leq n$, luego la aplicación

$$h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,\ (x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_1, \gamma_2(x_1) - x_2, \ldots, \gamma_n(x_1) - x_n)$$

es una involución polinómica de $\mathbb{R}^n$ que satisface $h(a_i, \mathbf{0}) = p_i$ para todo $1 \leq i \leq r$. Sea $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n,\ t \to (t, 0, \ldots, 0)$ y la semilínea paramétrica $\mathcal{L} := \mathrm{Im}(f \circ h \circ \alpha)$, que satisface $\mathcal{F} \subset \mathcal{L} \subset \mathcal{S}$.

Para demostrar (ii), fijemos un punto $p \in \delta\mathcal{S}$. Por el Lema 3.4, existen, tras un cambio afín de coordenadas,

- enteros k_i con $k_1 = \mín\{k_1, \ldots, k_n\} < 0$, y
- polinomios $\mathtt{p}_i \in \mathbb{R}[\mathtt{t}]$ con $\mathtt{p}_i(0) \neq 0$ para $2 \leq i \leq n$,

tales que $p = \lím_{t \to 0^+}(f \circ \alpha)(t)$, donde $\alpha(\mathtt{t}) = (\mathtt{t}^{k_1}, \mathtt{t}^{k_2}\mathtt{p}_2(\mathtt{t}), \ldots, \mathtt{t}^{k_n}\mathtt{p}_n(\mathtt{t}))$. Escribimos

$$h_i(\mathtt{x}, \mathtt{y}) := \begin{cases} \mathtt{y}^{|k_i|}\mathtt{p}_i(\mathtt{x}) & \text{si } k_i < 0, \\ \mathtt{x}^{k_i}\mathtt{p}_i(\mathtt{x}) & \text{si } k_i \geq 0, \end{cases}$$

para $1 \leq i \leq n$. Consideramos las aplicaciones polinómicas

$$h := (h_1, \ldots, h_n) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^n \quad \text{y} \quad g := (g_1, \ldots, g_m) = f \circ h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^m.$$

Como $\mathcal{S}_0 := g(\mathbb{R}^2) \subset f(\mathbb{R}^n) = \mathcal{S}$, el punto $p \notin \mathcal{S}_0$. Por otra parte, si $\beta(\mathtt{t}) := (\mathtt{t}, 1/\mathtt{t})$ se tiene $p = \lím_{t \to 0^+}(g \circ \beta)(t)$, luego $p \in \mathrm{Cl}_{\mathbb{R}^m}(\mathcal{S}_0) \setminus \mathcal{S}_0 = \delta\mathcal{S}_0$. Así, por el Corolario 3.2, existe una semilínea paramétrica $\mathcal{L} \subset \mathrm{Cl}_{\mathbb{R}^m}(\mathcal{S}_0) \subset \mathrm{Cl}_{\mathbb{R}^m}(\mathcal{S})$ que contiene a p.

Finalmente probamos (iii). Suponemos que $(\delta\mathcal{S})_{(n-1)} \neq \varnothing$, porque en caso contrario no hay nada que probar. Sean X el grafo de f y $\mathcal{D} := \pi_2(\mathrm{Cl}_{\mathbb{RP}^n \times \mathbb{RP}^m}(X) \setminus X) \cap \mathbb{R}^m$, donde $\pi_2 : \mathbb{RP}^n \times \mathbb{RP}^m \to \mathbb{RP}^m,\ (x, y) \to y$ es la proyección sobre el segundo factor. Como la restricción

$$\rho := \pi_2|_{\mathrm{Cl}_{\mathbb{RP}^n \times \mathbb{RP}^m}(X)} : \mathrm{Cl}_{\mathbb{RP}^n \times \mathbb{RP}^m}(X) \to \mathbb{RP}^m$$

es propia y $\rho^{-1}(\mathsf{H}_\infty(\mathbb{R})) \subset \mathrm{Cl}_{\mathbb{RP}^n \times \mathbb{RP}^m}(X) \setminus X$, también es propia la restricción

$$f|_{\mathbb{R}^n \setminus f^{-1}(\mathcal{D})} : \mathbb{R}^n \setminus f^{-1}(\mathcal{D}) \to \mathbb{R}^m \setminus \mathcal{D}.$$

Además, para cada $y \in \mathcal{D}$ existe una sucesión totalmente no acotada $\{x_k\}_k \subset \mathbb{R}^n$ tal que $\{f(x_k)\}_k$ converge a y. En virtud de [BCR, 2.8.13] la dimensión del conjunto semialgebraico $\mathcal{D}$ es $\leq n - 1$, por lo que la dimensión de $\mathcal{R} := \mathrm{Cl}_{\mathbb{R}^m}(\mathcal{D}) \cap \mathcal{S} \setminus (\mathcal{D} \cap \mathcal{S})$ es $\leq n - 2$. En particular, el conjunto

$$\begin{aligned} \mathcal{T} := \delta\mathcal{S} \setminus \mathrm{Cl}_{\mathbb{R}^m}(\mathcal{R}) &= \mathrm{Cl}_{\mathbb{R}^m}(\mathcal{S}) \setminus (\mathcal{S} \cup \mathrm{Cl}_{\mathbb{R}^m}(\mathcal{R})) \\ &= \mathrm{Cl}_{\mathbb{R}^m}(\mathcal{S}) \setminus (\mathrm{Cl}_{\mathbb{R}^m}(\mathcal{D} \cap \mathcal{S}) \cup \mathcal{S}) = \delta\mathcal{S} \setminus \mathrm{Cl}_{\mathbb{R}^m}(\mathcal{D} \cap \mathcal{S}) \end{aligned} \tag{4}$$

tiene dimensión $n-1$ y $\delta\mathcal{S}\setminus\mathcal{T}\subset \mathrm{Cl}_{\mathbb{R}^m}(\mathcal{R})$ tiene dimensión $\leq n-2$. Por tanto

$$\mathcal{U} := ((\delta\mathcal{S})_{(n-1)}\cap\mathcal{T})\setminus \mathrm{Cl}^{\mathrm{zar}}(\delta\mathcal{S}\setminus(\delta\mathcal{S})_{(n-1)}) \\ = (\delta\mathcal{S})_{(n-1)}\setminus(\mathrm{Cl}_{\mathbb{R}^m}(\mathcal{D}\cap\mathcal{S})\cup \mathrm{Cl}^{\mathrm{zar}}(\delta\mathcal{S}\setminus(\delta\mathcal{S})_{(n-1)}))$$

es un subconjunto semialgebraico abierto y denso de $(\delta\mathcal{S})_{(n-1)}$.

Tomamos $p\in\mathcal{U}$; por el Lema 3.4 existen, tras un cambio afín de coordenadas,

- enteros r, k_i con $k_1 = \mín\{k_1,\ldots,k_n\} < 0$, y
- polinomios $\mathtt{p}_i\in\mathbb{R}[\mathtt{t}]$ con $\mathtt{p}_i(0)\neq 0$ para $2\leq i\leq n$

tales que $p = \lím_{t\to 0^+}(f\circ\alpha)(t)$, donde $\alpha(\mathtt{t}) := (\mathtt{t}^{k_1}+\mathtt{t}^r, \mathtt{t}^{k_2}\mathtt{p}_2(\mathtt{t}),\ldots,\mathtt{t}^{k_n}\mathtt{p}_n(\mathtt{t}))$.

Tras la sustitución $\mathtt{t}\to\mathtt{t}^2$ podemos suponer que k_1 y r son pares. Escribimos $h_1(\mathtt{x},\mathtt{y}) := \mathtt{y}^{|k_1|}+\mathtt{x}^r$ y para cada $2\leq i\leq n$

$$h_i(\mathtt{x},\mathtt{y}) := \begin{cases} \mathtt{y}^{|k_i|}\mathtt{p}_i(\mathtt{x}) & \text{si } k_i<0,\\ \mathtt{x}^{k_i}\mathtt{p}_i(\mathtt{x}) & \text{si } k_i\geq 0.\end{cases}$$

Observamos que la aplicación $h:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^n$ es propia, puesto que si $\{z_k\}_k$ es una sucesión no acotada en $\mathbb{R}^2$, entonces $\{h_1(z_k)\}_k$ es una sucesión no acotada en $\mathbb{R}$, luego $\{h(z_k)\}_k$ es una sucesión no acotada en $\mathbb{R}^n$. Es más, $p = \lím_{t\to 0^+} h(t,1/t)$ en $\mathbb{RP}^n$. Ahora escribimos $g := f\circ h$ cuya restricción $g|_{\mathbb{R}^2\setminus g^{-1}(\mathcal{D})}:\mathbb{R}^2\setminus g^{-1}(\mathcal{D})\to\mathbb{R}^m\setminus\mathcal{D}$ es propia, porque tanto la restricción $f|_{\mathbb{R}^n\setminus f^{-1}(\mathcal{D})}:\mathbb{R}^n\setminus f^{-1}(\mathcal{D})\to\mathbb{R}^m\setminus\mathcal{D}$ como h lo son. Denotemos $\mathcal{S}_0 := g(\mathbb{R}^2)\subset\mathcal{S}$.

Por el Lema 3.1 (vi-vii) sabemos que existe un número finito de semilíneas paramétricas $\mathcal{L}_1,\ldots,\mathcal{L}_r$ tales que

$$\delta\mathcal{S}_0\subset\mathcal{D}_0 := \bigcup_{i=1}^{r}\mathcal{L}_i\subset \mathrm{Cl}_{\mathbb{R}^m}(\mathcal{S}_0)\subset \mathrm{Cl}_{\mathbb{R}^m}(\mathcal{S}) = \mathcal{S}\cup\delta\mathcal{S},$$

la restricción $g:\mathbb{R}^2\setminus g^{-1}(\mathcal{D}_0)\to\mathbb{R}^m\setminus\mathcal{D}_0$ es propia y para cada $z\in\mathcal{D}_0$ existe una sucesión totalmente no acotada $\{x_k\}_k\subset\mathbb{R}^2$ tal que $\{g(x_k)\}_k$ converge a z. Al ser h propia, $\mathcal{D}_0\subset\mathcal{D}$, y por tanto, $\mathcal{D}_0\cap\mathcal{S}\subset\mathcal{D}\cap\mathcal{S}$. Más aún, puesto que $p\in\delta\mathcal{S}_0$ se deduce que existe un índice $1\leq i\leq r$ con $p\in\mathcal{L} := \mathcal{L}_i$. Observamos también que

$$\mathcal{L}\subset(\mathcal{S}\cap\mathcal{D}_0)\cup(\delta\mathcal{S}\setminus(\delta\mathcal{S})_{(n-1)})\cup(\mathcal{L}\cap(\delta\mathcal{S})_{(n-1)}).$$

En consecuencia, si $\dim(\mathcal{L}\cap(\delta\mathcal{S})_{(n-1)})=0$ se tiene

$$p\in\mathcal{L}\subset \mathrm{Cl}_{\mathbb{R}^m}(\mathcal{D}_0\cap\mathcal{S})\cup \mathrm{Cl}_{\mathbb{R}^m}(\delta\mathcal{S}\setminus(\delta\mathcal{S})_{(n-1)})\subset \mathrm{Cl}_{\mathbb{R}^m}(\mathcal{S}\cap\mathcal{D})\cup \mathrm{Cl}^{\mathrm{zar}}(\delta\mathcal{S}\setminus(\delta\mathcal{S})_{(n-1)}),$$

lo que contradice que $p\in\mathcal{U}$. Por tanto, $\dim(\mathcal{L}\cap(\delta\mathcal{S})_{(n-1)})=1$ y $\mathcal{L}\subset \mathrm{Cl}^{\mathrm{zar}}((\delta\mathcal{S})_{(n-1)})$, como queríamos ver. □

Definición y Observación 3.5. (i) Decimos que un subconjunto semialgebraico $\mathcal{S}\subset\mathbb{R}^m$ es *conexo por semilíneas paramétricas* si para cada par de puntos $x,y\in\mathcal{S}$ existe una semilínea paramétrica contenida en $\mathcal{S}$ que pasa por x e y. Más aún, si para cada subconjunto finito $\mathcal{F}\subset\mathcal{S}$ existe una semilínea paramétrica $\mathcal{L}$ tal que $\mathcal{F}\subset\mathcal{L}\subset\mathcal{S}$ decimos que $\mathcal{S}$ es *completamente conexo por semilíneas paramétricas.*

(ii) El Teorema 1.2 (i) afirma que las imágenes polinómicas de espacios euclídeos son subconjuntos completamente conexos por semilíneas paramétricas. En particular son conexos por semilíneas paramétricas, por lo que el siguiente resultado proporciona obstrucciones a que un conjunto semialgebraico sea imagen polinómica de un espacio euclídeo.

Proposición 3.6. *Un conjunto semialgebraico $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^m$ conexo por semilíneas paramétricas es irreducible, de dimensión pura, y la imagen $h(\mathcal{S})$ de $\mathcal{S}$ por toda función polinómica $h : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ es no acotada o se reduce a un punto.*

Demostración. En efecto, supongamos primero que $\mathcal{S}$ es reducible y sean $\mathcal{S}_1, \ldots, \mathcal{S}_r$ las componentes irreducibles de $\mathcal{S}$, véase [FG3, 4.1]. Para $i = 1, 2$ sea $x_i \in \mathcal{S}_i \setminus \bigcup_{j \neq i} \mathcal{S}_j$ y sea $\mathcal{L}$ una semilínea paramétrica tal que $x_1, x_2 \in \mathcal{L} \subset \mathcal{S}$. Sea $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ una aplicación polinómica tal que $\alpha(\mathbb{R}) := \mathcal{L}$. Por [FG3, 2.4, 4.3] existe una función de Nash $f \in \mathcal{N}(\mathcal{S})$ tal que $\mathcal{S}_1 := \{x \in \mathcal{S} : f(x) = 0\}$. Sea $\mathcal{C} := \alpha^{-1}\big(\bigcup_{i=2}^{r} \mathcal{S}_i\big) \subset \mathbb{R}$, que es un subconjunto cerrado de $\mathbb{R}$ que no interseca a $\alpha^{-1}(x_1)$. Entonces $f \circ \alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función Nash que se anula idénticamente sobre el subconjunto abierto no vacío $\mathbb{R} \setminus \mathcal{C}$ de $\mathbb{R}$. Por el Principio de Identidad, $f \circ \alpha$ es idénticamente nula, luego $\mathcal{L} \subset \mathcal{S}_1$, que es una contradicción.

Supongamos que $\mathcal{S}$ no tiene dimensión pura y sean $d := \dim \mathcal{S}$ y $\mathcal{T} := \bigcup_{0 \leq k < d} \mathcal{S}_{(k)}$. El conjunto semialgebraico $\mathcal{S}_{(d)}$ es cerrado en $\mathcal{S}$ y la clausura de Zariski $\mathrm{Cl}^{\mathrm{zar}}(\mathcal{T})$ tiene dimensión $\leq d - 1$. Sea $g \in \mathbb{R}[\mathtt{x}_1, \ldots, \mathtt{x}_m]$ tal que $\mathrm{Cl}^{\mathrm{zar}}(\mathcal{T}) = \{x \in \mathbb{R}^m : g(x) = 0\}$ y elijamos puntos $x_1 \in \mathcal{S} \setminus \mathrm{Cl}^{\mathrm{zar}}(\mathcal{T})$ y $x_2 \in \mathcal{T}$. Sea $\mathcal{L}$ una semilínea paramétrica tal que $x_1, x_2 \in \mathcal{L} \subset \mathcal{S}$ y sea $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ una aplicación polinómica tal que $\beta(\mathbb{R}) := \mathcal{L}$. Consideramos el subconjunto cerrado $\mathcal{C}' := \beta^{-1}(\mathcal{L} \cap \mathcal{S}_{(d)})$ de $\mathbb{R}$, que no interseca al conjunto $\beta^{-1}(x_2)$. Consecuentemente, $g \circ \beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función polinómica que se anula idénticamente sobre el subconjunto abierto no vacío $\mathbb{R} \setminus \mathcal{C}'$ de $\mathbb{R}$. Por el Principio de Identidad, $g \circ \beta$ es idénticamente nula, luego $\mathcal{L} \subset \mathrm{Cl}^{\mathrm{zar}}(\mathcal{T})$, que es una contradicción.

Finalmente, supongamos que existe una aplicación polinómica $h : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ tal que $h(\mathcal{S})$ es acotado y no se reduce a un punto. Sean $q_1, q_2 \in h(\mathcal{S})$ con $q_1 \neq q_2$ y sean $p_1, p_2 \in \mathcal{S}$ tales que $h(p_i) = q_i$ para $i = 1, 2$. Sean $\mathcal{L}$ una semilínea paramétrica tal que $p_1, p_2 \in \mathcal{L} \subset \mathcal{S}$ y $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ una aplicación polinómica tal que $\gamma(\mathbb{R}) = \mathcal{L}$. Observamos que $h \circ \gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una aplicación polinómica con imagen acotada, luego $h \circ \gamma$ es constante, y esto es falso porque $q_1, q_2 \in (h \circ \gamma)(\mathbb{R})$. □

Del enunciado anterior surgen algunas cuestiones cuya respuesta desconocemos.

Cuestiones 3.7. (i) Sea $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^m$ un conjunto semialgebraico 2-dimensional completamente conexo por semilíneas paramétricas, cuyo conjunto $\mathcal{S}_\infty$ de puntos de infinito es conexo y tal que existe un número finito de semilíneas paramétricas contenidas en $\mathrm{Cl}_{\mathbb{R}^m}(\mathcal{S})$ que recubren su frontera exterior $\delta\mathcal{S}$. ¿Se cumple que $\mathrm{p}(\mathcal{S}) = 2$?

(ii) Sea $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^m$ un conjunto semialgebraico n-dimensional completamente conexo por semilíneas paramétricas cuyo conjunto de puntos de infinito $\mathcal{S}_\infty$ es conexo y existe un subconjunto semialgebraico $\mathcal{U}$, abierto y denso en $(\delta\mathcal{S})_{(n-1)}$, tal que para cada $p \in \mathcal{U}$ existe una semilínea paramétrica que pasa por p y está contenida en $\mathrm{Cl}^{\mathrm{zar}}((\delta\mathcal{S})_{(n-1)}) \cap \mathrm{Cl}_{\mathbb{R}^m}(\mathcal{S})$. ¿Se cumple que $\mathrm{p}(\mathcal{S}) = n$?

Observaciones 3.8. (i) Existen conjuntos semialgebraicos $\mathcal{S}$ completamente conexos por semilíneas paramétricas cuyo conjunto de puntos de infinito $\mathcal{S}_\infty$ no es conexo, y viceversa. En efecto, si $\mathcal{S}_1 := \{0 \leq x \leq 1\} \cup \{0 \leq y \leq x\} \subset \mathbb{R}^2$ se tiene

$$\mathcal{S}_{1,\infty} = \{(0:0:1)\} \cup \{(0:1:t),\ 0 \leq t \leq 1\},$$

que no es conexo. Sin embargo, mediante interpolación y el Teorema de Aproximación de Stone-Weierstrass, se puede comprobar que $\mathcal{S}_1$ es completamente conexo por semilíneas paramétricas. Por otra parte, el conjunto de puntos de infinito de la banda $\mathcal{S}_2 := \mathbb{R} \times [0,1]$ se reduce a un único punto, y por tanto es conexo, pero $\mathcal{S}_2$ no es completamente conexo por semilíneas paramétricas porque su proyección sobre la segunda coordenada es acotada y distinta de un punto.

(ii) El conjunto semialgebraico $\mathcal{S} := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > 1\} \subset \mathbb{R}^2$ es completamente conexo por semilíneas paramétricas y su conjunto de puntos del infinito es conexo; sin embargo su frontera exterior no puede ser recubierta con un conjunto finito de semilíneas paramétricas. Por tanto, $\mathcal{S}$ no es imagen polinómica de $\mathbb{R}^2$, aunque sí lo es de $\mathbb{R}^3$ (véase [FG2, 4.2]).

(iii) Los resultados obtenidos en esta sección acerca de la frontera exterior de una imagen polinómica de $\mathbb{R}^n$ descansan sobre la resolución del lugar de indeterminación de aplicaciones racionales complejas que son extensión de aplicaciones polinómicas definidas sobre $\mathbb{R}^2$. Tal vez se puedan obtener condiciones más restrictivas sobre la geometría de la frontera exterior de una imagen polinómica de $\mathbb{R}^n$ para $n \geq 3$ empleando aplicaciones más generales.

4. Demostración del Teorema 1.3.

Nuestro último objetivo en este trabajo es demostrar el Teorema 1.3, en cuya prueba emplearemos técnicas y estrategias semejantes a las utilizadas anteriormente en la del Teorema 1.2. Antes necesitamos algunos resultados auxiliares acerca de los subconjuntos de $\mathbb{R}^m$ que son imagen de $\mathbb{R}$ y de $\mathbb{R}^2$ por una aplicación regular. Recordemos que, para $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ las curvas algebraicas proyectivas birracionalmente isomorfas a la recta proyectiva $\mathbb{KP}^1$ se llaman *racionales.*

Lema 4.1. *Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo que no es abierto en $\mathbb{R}$. Entonces, existe una función regular $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(\mathbb{R}) = I$.*

Demostración. Basta probar que los intervalos $[0, +\infty)$, $[0,1]$ y $[0,1)$ son imágenes de funciones regulares $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Se comprueba inmediatamente que las funciones

$$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ t \mapsto t^2, \quad f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ t \mapsto \frac{(1+t)^2}{1+t^2} \quad \text{y} \quad f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ t \mapsto \frac{1}{1+t^2},$$

cumplen las igualdades $f_1(\mathbb{R}) = [0, +\infty)$, $f_2(\mathbb{R}) = [0,1]$ y $f_3(\mathbb{R}) = [0,1)$. □

Proposición 4.2. *Sea $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^m$ un conjunto semialgebraico de dimensión pura 1 tal que $\mathrm{Cl}^{\mathrm{zar}}_{\mathbb{RP}^m}(\mathcal{S})$ es una curva racional. Entonces $\mathcal{S}$ es unión de un número finito de semilíneas regulares.*

Demostración. Sea $\phi : \mathbb{RP}^1 \to \mathrm{Cl}^{\mathrm{zar}}_{\mathbb{RP}^m}(\mathcal{S})$ la normalización real de $\mathrm{Cl}^{\mathrm{zar}}_{\mathbb{RP}^m}(\mathcal{S})$. Si se cumple que $\mathcal{S} = \mathrm{Cl}^{\mathrm{zar}}_{\mathbb{RP}^m}(\mathcal{S}_{(1)})$, entonces podemos suponer que $\mathcal{S} = \mathbb{S}^1$, luego por la igualdad (1) en la Introducción, $\mathcal{S}$ es imagen de $\mathbb{R}$ por una aplicación regular, y hemos concluido. Por otra parte, si $\mathcal{S} \neq \mathrm{Cl}^{\mathrm{zar}}_{\mathbb{RP}^m}(\mathcal{S}_{(1)})$ denotamos p_∞ el punto de infinito de $\mathbb{RP}^1$ y podemos suponer que $\phi(p_\infty) \in \mathrm{Cl}^{\mathrm{zar}}_{\mathbb{RP}^m}(\mathcal{S}_{(1)}) \setminus \mathcal{S}$. En consecuencia, $\phi^{-1}(\mathcal{S})$ es un conjunto semialgebraico de $\mathbb{R} = \mathbb{RP}^1 \setminus \{p_\infty\}$, esto es, $\phi^{-1}(\mathcal{S})$ es una unión finita $\bigcup_{i=1}^s \{p_i\} \cup \bigcup_{j=1}^s I_j$ de puntos p_i e intervalos I_j. Esto implica, al ser $\mathcal{S}$ de dimensión pura, que $\mathcal{S} = \bigcup_{j=1}^s \phi(I_j)$.

Dado un índice $1 \leq j \leq s$, si el intervalo I_j no es abierto se deduce del Lema 4.1 que $\phi(I_j)$ es una semilínea regular, mientras que si $I_j := (a_j, b)$ es un intervalo abierto, donde $-\infty \leq a_j < b_j \leq +\infty$, escribimos $I_j = (a_j, c] \cup [c, b_j)$ y, por el Lema 4.1, $\phi_j(I_j)$ es unión de dos semilíneas regulares, lo que termina la demostración. □

Lema 4.3. *Sea $f : \mathbb{R} \dashrightarrow \mathbb{R}^m$ una aplicación racional no constante cuya imagen denotamos $\mathcal{S}$. Entonces:*

(i) *Existe una aplicación regular invariante $F : \mathbb{CP}^1 \to \mathbb{CP}^m$ tal que $F|_{\mathbb{R}} = f$ y $F(\mathbb{CP}^1) = \mathrm{Cl}^{\mathrm{zar}}_{\mathbb{CP}^m}(\mathcal{S})$.*

(ii) *El conjunto $\mathrm{Cl}^{\mathrm{zar}}_{\mathbb{CP}^m}(\mathcal{S})$ es una curva algebraica racional compleja y existen una aplicación sobreyectiva, regular, birracional e invariante $\pi : \mathbb{CP}^1 \to \mathrm{Cl}^{\mathrm{zar}}_{\mathbb{CP}^m}(\mathcal{S})$ y una aplicación regular, sobreyectiva e invariante $\widetilde{F} : \mathbb{CP}^1 \to \mathbb{CP}^1$ tales que*

$$F = \pi \circ \widetilde{F} \quad y \quad \pi(\mathbb{RP}^1) = \mathrm{Cl}^{\mathrm{zar}}_{\mathbb{CP}^m}(\mathcal{S}_{(1)}).$$

Demostración. (i) Quitando denominadores y homogeneizando adecuadamente, f se extiende a una aplicación racional invariante

$$F := (F_0 : F_1 : \cdots : F_m) : \mathbb{CP}^1 \dashrightarrow \mathbb{CP}^m,$$

donde cada polinomio $F_i \in \mathbb{R}[\mathtt{x}_0, \mathtt{x}_1]$ es homogéneo y $\deg(F_i) = \deg(F_j)$ para cada par de índices $0 \leq i < j \leq m$. Esta extensión es de hecho regular, por [M, 7.1], y por el principio de identidad, es única. Además, $F(\mathbb{CP}^1)$, que está contenido en $\mathrm{Cl}^{\mathrm{zar}}_{\mathbb{CP}^m}(\mathcal{S})$, contiene, por [Mu, 2.31], un subconjunto no vacío abierto en la topología de Zariski de $\mathrm{Cl}^{\mathrm{zar}}_{\mathbb{CP}^m}(\mathcal{S})$; por tanto, como F es propia y $\mathrm{Cl}^{\mathrm{zar}}_{\mathbb{CP}^m}(\mathcal{S})$ es irreducible concluimos, en virtud de [Mu, 2.33], que $F(\mathbb{CP}^1) = \mathrm{Cl}^{\mathrm{zar}}_{\mathbb{CP}^m}(\mathcal{S})$.

(ii) Sea $C \subset \mathbb{CP}^k$ la normalización de $\mathrm{Cl}^{\mathrm{zar}}_{\mathbb{CP}^m}(\mathcal{S})$ que es, por [Sh1, 5.3], una curva proyectiva irreducible no singular birracionalmente equivalente a $\mathrm{Cl}^{\mathrm{zar}}_{\mathbb{CP}^m}(\mathcal{S})$, vía una aplicación regular sobreyectiva $\pi : C \to \mathrm{Cl}^{\mathrm{zar}}_{\mathbb{CP}^m}(\mathcal{S})$. Como $\mathrm{Cl}^{\mathrm{zar}}_{\mathbb{CP}^m}(\mathcal{S})$ es invariante podemos suponer que también C y π lo son. La composición $\pi^{-1} \circ F : \mathbb{CP}^1 \dashrightarrow C$ es una aplicación racional invariante que, de nuevo por [M, 7.1], se extiende a una aplicación regular sobreyectiva invariante $\widetilde{F} : \mathbb{CP}^1 \to C$ que cumple la igualdad $F = \pi \circ \widetilde{F}$. Esto implica que C es una curva algebraica proyectiva no singular racional, es decir, de género aritmético $g_a(C) = 0$, pues, por [Mu, 7.6, 7.20], $0 = g_a(\mathbb{CP}^1) \geq g_a(C) \geq 0$. En consecuencia podemos suponer que $C = \mathbb{CP}^1$. Para concluir es suficiente observar que, por la unicidad de la normalización, el par $(\mathbb{RP}^1, \pi|_{\mathbb{RP}^1})$ es la normalización de $\mathrm{Cl}^{\mathrm{zar}}_{\mathbb{RP}^m}(\mathcal{S})$ y $\pi(\mathbb{RP}^1) = \mathrm{Cl}^{\mathrm{zar}}_{\mathbb{RP}^m}(\mathcal{S}_{(1)})$. □

Proposición 4.4. *Dada una aplicación regular $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^m$ cuya imagen $\mathcal{S} := f(\mathbb{R}^2)$ es un conjunto acotado, existe una familia finita de curvas racionales $\{\mathcal{M}_i\}_{i=1}^r$ que cumplen las siguientes condiciones:*

(i) $\delta\mathcal{S} \subset \mathcal{D} := \bigcup_{i=1}^r \mathcal{M}_{i,(1)} \subset \mathrm{Cl}_{\mathbb{R}^m}(\mathcal{S})$.

(ii) *La restricción $f|_{\mathbb{R}^2 \setminus f^{-1}(\mathcal{D})} : \mathbb{R}^2 \setminus f^{-1}(\mathcal{D}) \to \mathbb{R}^m \setminus \mathcal{D}$ es una aplicación propia y para cada $z \in \mathcal{D}$ existe una sucesión totalmente no acotada $\{x_k\}_k \subset \mathbb{R}^2$ tal que $\{f(x_k)\}_k$ converge a z.*

Demostración. Como f es regular existen polinomios $f_0, f_1, \ldots, f_m \in \mathbb{R}[\mathtt{x}_1, \mathtt{x}_2]$ tales que f_0 no se anula en ningún punto de $\mathbb{R}^2$ y

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^m,\ x \mapsto \frac{1}{f_0(x)}(f_1(x), \ldots, f_m(x)).$$

Sea $d := \mathrm{máx}_{i=0,\ldots,m}\{\deg(f_i)\}$ y consideremos la aplicación racional

$$F_{\mathbb{R}} = (F_0 : F_1 : \cdots : F_m) : \mathbb{RP}^2 \dashrightarrow \mathbb{RP}^m, \text{ donde } F_i(\mathtt{x}_0 : \mathtt{x}_1 : \mathtt{x}_2) = \mathtt{x}_0^d f_i\Big(\frac{\mathtt{x}_1}{\mathtt{x}_0}, \frac{\mathtt{x}_2}{\mathtt{x}_0}\Big).$$

La demostración se desarrolla en varios pasos.

(4.5.1) La aplicación $F_{\mathbb{R}}$ se extiende de manera natural a una aplicación racional invariante $F_{\mathbb{C}} : \mathbb{CP}^2 \dashrightarrow \mathbb{CP}^m$, y podemos suponer que $\gcd(F_0, F_1, \ldots, F_m) = 1$, por lo que el conjunto de puntos de indeterminación de $F_{\mathbb{K}}$ es

$$Y_{\mathbb{K}} := \{x \in \mathbb{KP}^2 :\ F_i(x) = 0,\ \text{para todo } 0 \le i \le m\}.$$

Como f es regular, $Y_{\mathbb{R}} \subset \ell_\infty(\mathbb{R})$.

(4.5.2) Recordemos las notaciones y propiedades vistas en 2.2 y 2.3. Sean $(Z, \pi_{\mathbb{C}}, \widehat{F}_{\mathbb{C}})$ una resolución invariante de $F_{\mathbb{C}}$, la superficie proyectiva real no singular $X := Z \cap \mathbb{RP}^k$ y la aplicación racional invariante $\pi_{\mathbb{R}} := \pi_{\mathbb{C}}|_X : X \to \mathbb{RP}^2$ cuya restricción

$$\pi_{\mathbb{R}}|_{X \setminus \pi_{\mathbb{R}}^{-1}(Y_{\mathbb{R}})} : X \setminus \pi_{\mathbb{R}}^{-1}(Y_{\mathbb{R}}) \to \mathbb{RP}^2 \setminus Y_{\mathbb{R}}$$

es un isomorfismo birregular, y $\widehat{F}_{\mathbb{R}} := \widehat{F}_{\mathbb{C}}|_X : X \to \mathbb{RP}^m$, que es una aplicación regular real que cumple la igualdad $\widehat{F}_{\mathbb{R}}|_{X \setminus \pi_{\mathbb{R}}^{-1}(Y_{\mathbb{R}})} = F_{\mathbb{R}} \circ \pi_{\mathbb{R}}|_{X \setminus \pi_{\mathbb{R}}^{-1}(Y_{\mathbb{R}})}$.

(4.5.3) Además, la transformada estricta $\mathsf{C}_\infty := \mathrm{Cl}_X(\pi_{\mathbb{R}}^{-1}(\ell_\infty(\mathbb{R}) \setminus Y_{\mathbb{R}})$ es una curva algebraica proyectiva racional real no singular y cada fibra $\pi_{\mathbb{R}}^{-1}(y)$ con $y \in Y_{\mathbb{R}}$ es una unión finita de curvas algebraicas racionales proyectivas reales no singulares $\mathsf{C}_{i,y}$, donde $i = 1, \ldots, r_y$. En consecuencia, $\pi_{\mathbb{R}}^{-1}(\ell_\infty(\mathbb{R})) = \mathsf{C}_\infty \cup \bigcup_{y \in Y_{\mathbb{R}}} \bigcup_{i=1}^{r_y} \mathsf{C}_{i,y}$.

(4.5.4) Observamos que $\widehat{F}_{\mathbb{R}}(X) = \mathrm{Cl}_{\mathbb{RP}^m}(\mathcal{S})$, ya que la aplicación $\widehat{F}_{\mathbb{R}}$ es propia y el conjunto $\mathcal{S}$ es acotado; además $\mathcal{S} = f(\mathbb{R}^2) = F_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2) = \widehat{F}_{\mathbb{R}}(\pi_{\mathbb{R}}^{-1}(\mathbb{R}^2))$. Por tanto,

$$\delta\mathcal{S} \subset \mathcal{D} := \widehat{F}_{\mathbb{R}}(\pi_{\mathbb{R}}^{-1}(\ell_\infty(\mathbb{R}))) = \widehat{F}_{\mathbb{R}}(\mathsf{C}_\infty) \cup \bigcup_{y \in Y_{\mathbb{R}}} \bigcup_{i=1}^{r_y} \widehat{F}_{\mathbb{R}}(\mathsf{C}_{i,y}) \subset \mathrm{Cl}_{\mathbb{R}^m}(\mathcal{S}),$$

lo que, por el Lema 4.3 (ii), demuestra la afirmación (i).

Ahora probamos (ii). Como la aplicación $\widehat{F}_{\mathbb{R}} : X \to \mathbb{RP}^m$ es propia, también lo es $\widehat{F}_{\mathbb{R}}|_{X\setminus\widehat{F}_{\mathbb{R}}^{-1}(\mathcal{D})} : X\setminus\widehat{F}_{\mathbb{R}}^{-1}(\mathcal{D}) \to \mathbb{R}^m\setminus\mathcal{D}$. Así, como $\rho := \pi_{\mathbb{R}}|_{\pi_{\mathbb{R}}^{-1}(\mathbb{R}^2)} : \pi_{\mathbb{R}}^{-1}(\mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}^2$ es un isomorfismo birregular que satisface la igualdad $\widehat{F}_{\mathbb{R}}|_{\pi_{\mathbb{R}}^{-1}(\mathbb{R}^2)} = f\circ\rho$, para demostrar que la restricción $f|_{\mathbb{R}^2\setminus f^{-1}(\mathcal{D})} : \mathbb{R}^2 \setminus f^{-1}(\mathcal{D}) \to \mathbb{R}^m \setminus \mathcal{D}$ es propia es suficiente comprobar que $X \setminus \widehat{F}_{\mathbb{R}}^{-1}(\mathcal{D}) = \rho^{-1}(\mathbb{R}^2 \setminus f^{-1}(\mathcal{D})))$. Ahora bien, como $\widehat{F}_{\mathbb{R}}|_{\pi_{\mathbb{R}}^{-1}(\mathbb{R}^2)} = f \circ \rho$, tenemos

$$\widehat{F}_{\mathbb{R}}^{-1}(\mathcal{D}) = \pi_{\mathbb{R}}^{-1}(\ell_\infty(\mathbb{R})) \cup \rho^{-1}(f^{-1}(\mathcal{D})),$$

y por tanto, se cumple que

$$\begin{aligned} X \setminus \widehat{F}_{\mathbb{R}}^{-1}(\mathcal{D}) &= X \setminus (\pi_{\mathbb{R}}^{-1}(\ell_\infty(\mathbb{R})) \cup \rho^{-1}(f^{-1}(\mathcal{D})) \\ &= \pi_{\mathbb{R}}^{-1}(\mathbb{R}^2) \setminus \rho^{-1}(f^{-1}(\mathcal{D})) = \rho^{-1}(\mathbb{R}^2 \setminus f^{-1}(\mathcal{D})). \end{aligned}$$

Más aún, si $z \in \mathcal{D}$ existe $u \in \pi_{\mathbb{R}}^{-1}(\ell_\infty(\mathbb{R}))$ tal que $\widehat{F}_{\mathbb{R}}(u) = z$. Al ser $\pi_{\mathbb{R}}^{-1}(\mathbb{R}^2)$ denso en X, existe una sucesión $\{u_k\}_k \subset \pi_{\mathbb{R}}^{-1}(\mathbb{R}^2)$ que converge a u. Si $x_k := \pi_{\mathbb{R}}(u_k)$ la sucesión $\{x_k\}_k$ es totalmente no acotada, mientras que $f(x_k) = f(\pi_{\mathbb{R}}(u_k)) = \widehat{F}_{\mathbb{R}}(u_k)$, de modo que $\{f(x_k)\}_k$ converge a z, como queríamos ver. □

Corolario 4.5. *Sea $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^m$ un conjunto semialgebraico 2-dimensional que es imagen de una aplicación regular $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^m$. Entonces, existen un conjunto finito $\mathcal{D}$ y una familia finita de semilíneas regulares $\{\mathcal{M}_i\}_{i=1}^r$ tales que*

$$\delta\mathcal{S} \subset \mathcal{D} \cup \bigcup_{i=1}^{r} \mathcal{M}_i \subset \mathrm{Cl}_{\mathbb{R}^m}(\mathcal{S}) \cap \mathrm{Cl}^{\mathrm{zar}}(\delta\mathcal{S}).$$

Demostración. Si $\mathcal{S}$ es acotado el resultado se deduce del Corolario 4.2 y la Proposición 4.4; véase también la Observación 3.3 (2). Por tanto es suficiente probar que podemos reducir la prueba al caso acotado. Para ello consideramos la inversión respecto de la esfera de $\mathbb{R}^{m+1}$ de centro el origen y radio 1, que es la aplicación regular

$$h : \mathbb{R}^{m+1} \setminus \{\mathbf{0}\} \to \mathbb{R}^{m+1} \setminus \{\mathbf{0}\},\ x \mapsto x/\|x\|^2,$$

e identificamos $\mathbb{R}^m$ con el hiperplano $\mathcal{H} := \{x_{m+1} = 2\} \subset \mathbb{R}^{m+1}$. Así, si $\mathcal{S}$ no es acotado tampoco lo es su identificado, al que seguimos denotando $\mathcal{S} \subset \mathcal{H} \subset \mathbb{R}^{m+1}$. Por tanto sí es acotada su imagen $\mathcal{T} := h(\mathcal{S}) \subset \{x \in \mathbb{R}^{m+1} : \|x\| < 1\}$, porque $\mathcal{S} \subset \{x \in \mathbb{R}^{m+1} : \|x\| > 1\}$. Como h es una involución racional, preserva el género de las curvas y, en particular su racionalidad. Además $\delta\mathcal{T} = h(\delta\mathcal{S}) \cup \{\mathbf{0}\}$, luego es suficiente demostrar el resultado para $\mathcal{T}$, como pretendíamos probar. □

Ahora, la demostración del Teorema 1.3, cuyos detalles omitimos, es análoga a la del Teorema 1.2, teniendo en cuenta que, mediante una inversión, podemos suponer que el conjunto semialgebraico involucrado $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^m$ es acotado, y usando a continuación el Corolario 4.2, la Proposición 4.4 y el Corolario 4.5 en lugar del Lema 3.1 y el Corolario 3.2.

Terminamos esta sección justificando el interés del Teorema 1.3. Evidentemente, es posible formular cuestiones similares a las propuestas en 3.7 en el contexto de las imágenes regulares, tratando de averiguar si las afirmaciones recíprocas a las establecidas en el Teorema 1.3 y el Corolario 4.5 son ciertas.

Observaciones 4.6. (i) Un conjunto semialgebraico completamente conexo por semilíneas regulares es irreducible y de dimensión pura. La demostración es análoga a la de la Proposición 3.6.

(ii) Cada subconjunto semialgebraico no vacío $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^n$ abierto y conexo satisface las condiciones (i) y (ii) del Teorema 1.3. En efecto, para probar la condición (i) es suficiente observar que $\mathcal{S}$ es conexo por caminos y aproximar, mediante el Teorema de Aproximación de Stone-Weierstrass, un camino continuo que pasa por los puntos de un conjunto finito $\mathcal{F}$ dado mediante un camino polinómico, y utilizar además que, en virtud del Lema 4.1, para cada $\varepsilon > 0$ el intervalo cerrado $[0, \varepsilon]$ es imagen regular de $\mathbb{R}$. Por otro lado, la condición (ii) del Teorema 1.3 se deduce del Lema 3.4.

(iii) La situación es radicalmente diferente para conjuntos semialgebraicos arbitrarios. En lo que sigue, diremos que un subconjunto semialgebraico $\mathcal{T} \subset \mathbb{R}^m$ es *genéricamente unireglado* si existe un subconjunto semialgebraico abierto y denso $\mathcal{U}$ en $\mathcal{T}$ tal que para cada punto $p \in \mathcal{U}$ existe una semilínea regular que pasa por p y está contenida en $\mathcal{U}$.

Se demuestra en [C, V] que si $m \geq 4$ y $d \geq 2m-2$ la hipersuperficie algebraica compleja genérica Z de $\mathbb{CP}^m$ de grado d no contiene curvas algebraicas proyectivas racionales, y lo mismo sucede si $m = 2, 3$ y $d \geq 2m-1$. Por tanto, si $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^m$ es un conjunto semialgebraico cuya clausura de Zariski X en $\mathbb{RP}^m$ es una hipersuperficie genérica de $\mathbb{RP}^m$ con grado suficientemente alto, su clausura de Zariski Z en $\mathbb{CP}^m$ no contiene curvas algebraicas proyectivas racionales, luego $\mathcal{S}$ no es completamente conexo por semilíneas regulares. Es más, el conjunto $(\delta\mathcal{S})_{(n-1)}$ no es genéricamente unireglado y no es cierto que para cada punto $p \in \delta\mathcal{S}$ existe una semilínea regular que pasa por p y está contenida en $\mathrm{Cl}_{\mathbb{R}^m}(\mathcal{S})$. Esto prueba, en virtud del Teorema 1.3 (iii), que $\mathrm{p}(\mathcal{S}) = +\infty$.

(iv) De modo análogo, si $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^m$ es un conjunto semialgebraico abierto tal que la clausura de Zariski X de $\delta\mathcal{S}$ en $\mathbb{RP}^m$ es una hipersuperficie genérica de $\mathbb{RP}^m$ cuyo grado es suficientemente alto, su clausura de Zariski en $\mathbb{CP}^m$ no contiene curvas algebraicas racionales, y por tanto, $(\delta\mathcal{S})_{(n-1)}$ no es genéricamente unireglado. Esto implica, por el Teorema 1.3 (iii), que $\mathrm{p}(\mathcal{S}) = +\infty$. A pesar de todo, como ya hemos mencionado en el apartado (ii), si $\mathcal{S}$ es conexo entonces es completamente conexo por semilíneas regulares y para cada punto $p \in \delta\mathcal{S}$ existe una semilínea regular que pasa por p y está contenida en $\mathrm{Cl}_{\mathbb{R}^m}(\mathcal{S})$.

Referencias

[BCR] J. Bochnak, M. Coste, M.F. Roy: Real algebraic geometry. *Ergeb. Math.* **36**. Springer-Verlag, Berlin: 1998.

[C] H. Clemens: Curves in generic hypersurfaces, *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.* **19** (1986), 629-636.

[F] J.F. Fernando: On the one dimensional polynomial and regular images of $\mathbb{R}^n$. *Preprint* RAAG, 2012.

[FG1] J.F. Fernando, J.M. Gamboa: Polynomial images of $\mathbb{R}^n$. *J. Pure Appl. Algebra* **179** (2003), no. 3, 241–254.

[FG2] J.F. Fernando, J.M. Gamboa: Polynomial and regular images of $\mathbb{R}^n$. *Israel J. Math.* **153**, (2006), 61–92.

[FG3] J.F. Fernando, J.M. Gamboa: On the irreducible components of a semialgebraic set. *Internat. J. Math.* **23** (4), (2012).

[FGU1] J.F. Fernando, J.M. Gamboa, C. Ueno: On convex polyhedra as regular images of $\mathbb{R}^n$. *Proc. London Math. Soc.* (3) **103** (2011), 847-878.

[FGU2] J.F. Fernando, J.M. Gamboa, C. Ueno: On complements of convex polyhedra as polynomial and regular images of $\mathbb{R}^n$. *Preprint* RAAG, 2012.

[FU] J.F. Fernando, C. Ueno: On the set of infinite points of a polynomial image of $\mathbb{R}^n$. *Preprint* RAAG, 2012.

[G] J.M. Gamboa: Reelle Algebraische Geometrie, June, $10^{\text{th}}-16^{\text{th}}$ (1990), Oberwolfach.

[M] J. Milnor: Singular points of complex hypersurfaces, *Annals of Math. Studies*, **61** Princeton University Press, Princeton, N.J.; University of Tokyo Press, Tokyo: 1968.

[Mu] D. Mumford: Algebraic geometry. I. Complex projective varieties. *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*, **221**. Springer-Verlag, Berlin-New York: 1976.

[S] A. Seidenberg: A new decision method for elementary algebra. *Ann. of Math.* **60** (1954), 365–374.

[Sh1] I.R. Shafarevich: Basic Algebraic Geometry I. Varieties in projective space. Second edition. Translated from the 1988 Russian edition and with notes by Miles Reid. Springer-Verlag, Berlin: 1994.

[Sh2] I.R. Shafarevich: Basic Algebraic Geometry II. Schemes and complex manifolds. Second edition. Translated from the 1988 Russian edition by Miles Reid. Springer-Verlag, Berlin: 1994.

[T] A. Tarski: A decision method for elementary algebra and geometry. Prepared for publication by J.C.C. Mac Kinsey, Berkeley: 1951.

[U1] C. Ueno: A note on boundaries of open polynomial images of $\mathbb{R}^2$. *Rev. Mat. Iberoam.* **24** (2008), no. 3, 981-988.

[U2] C. Ueno: On convex polygons and their complementaries as images of regular and polynomial maps of $\mathbb{R}^2$. *J. Pure Appl. Algebra* doi:10.1016/j.jpaa.2012.03.016. (2012).

[V] C. Voisin: On a conjecture of Clemens on rational curves on hypersurfaces. *J. Differential Geom.* **44** (1996), 200-214.

[ZS] O. Zariski, P. Samuel: Commutative Algebra. Vol. I. GTM **28**. Berlin: Springer-Verlag (1975).

Some classes of Bounded sets in Metric Spaces

María Isabel GARRIDO and Ana Soledad MEROÑO

Departamento de Geometría y Topología
Universidad Complutense de Madrid
E-28040 Madrid, Spain
maigarri@mat.ucm.es
anamerogno@gmail.com

Dedicat al Professor Joan Tarrés.

ABSTRACT

This note deals with some classes of bounded subsets in a metric space. Namely, sets of finite diameter, totally-bounded sets and the so-called Bourbaki-bounded sets. We will see some good and some bad properties of each class, as well as their relationships. A more detailed study about Bourbaki-boundedness is also presented. Finally a new property of completeness in metric spaces is introduced, which we call Bourbaki-completeness.

Key words: metric-bounded, totally-bounded, Bourbaki-bounded, Bourbaki-complete.

2010 Mathematics Subject Classification: Primary 54E35, 54E45; Secondary 46A17.

1. Introduction

It is well known that bounded sets play an important role in the frame of metric spaces and normed vector spaces. For that reason this concept has been extended and generalized to different settings. This note deals with some classes of bounded subsets in a metric space (X, d). Namely, we are here interested in sets of finite diameter, in totally-bounded sets and in the so-called Bourbaki-bounded sets. We will present some good and some bad properties of each class, as well as their relationships. We will make a more detailed study of the Bourbaki-bounded sets since they are in fact one of the main subject in our recent research (see [9] and [10]). More precisely, we will give here a characterization of Bourbaki-boundedness in terms of a new kind of sequences that we call Bourbaki-Cauchy. Next, from this type of sequences, we will introduce a new notion of completeness in metric spaces, that we call Bourbaki completeness. Mostly results in this note are contained in [10].

1. Supported in part by MICINN Project-MTM2009-07848 (Spain) and by Fundación Caja-Madrid Grants 2011-2012 (Spain).
2. Supported in part by UCM Grant GR35/10-A (Spain).

2. Some classes of bounded-sets

We start with the most usual notion of boundedness in a metric space (X, d). We say that $B \subset X$ is a *metric-bounded* set if it has finite diameter, i.e. when,

$$\operatorname{diam}(B) = \sup\{d(x, y) : \ x, y \in B\} < \infty.$$

If we denote by $B(x, r)$ the open ball of center $x \in X$ and radius $r > 0$, i.e., $B(x, r) = \{y : d(x, y) < r\}$, then B is a metric-bounded set if, and only if, B is contained in some open ball.

This concept of boundedness is the most easy and natural in a metric space. It is well known that metric-bounded sets have a lot of good properties, but also that they have certain inconvenience. Namely,"to be a metric-bounded subset" is a property that is not preserved by uniform homeomorphisms, i.e. it is not a uniform property. For instance, if we consider in the real line $\mathbb{R}$ the usual metric d_u and the metric $\tilde{d} = \min\{1, d_u\}$, then both metrics are uniformly equivalent, but obviously they do not provide the same metric-bounded sets.

Next, we will consider the notion of totally-bounded set. Recall that in a metric space (X, d), a subset $B \subset X$ is said to be *totally-bounded* or *precompact* if for every $\varepsilon > 0$ there is a finite set $\{x_1, \ldots, x_n\}$ in B, such that

$$B \subset B(x_1, \varepsilon) \cup ... \cup B(x_n, \varepsilon).$$

It is easy to see that every totally-bounded set is, in particular, a metric-bounded set. The most typical example showing that the converse is not true, consists of taking the unit ball $B(0, 1)$ in any infinite dimensional normed space $(X, \|\cdot\|)$. Nevertheless, there are easier examples as we will see later.

The good thing now is that totally-boundedness is a uniform property, that is even preserved by uniformly continuous functions. On the other hand, it is possible to see this property somehow very restrictive, since sometimes there are few totally-bounded subsets in a metric space. For instance, this happens if we take the set of natural numbers $\mathbb{N}$ with the metric $\tilde{d} = \min\{1, d_u\}$, where every subset is metric-bounded but only the finite subsets are totally-bounded.

Then, we are specially interested in the study of an intermediate class of bounded sets, namely the so-called Bourbaki-bounded sets. Recall that a set $B \subset X$ is *Bourbaki-bounded* if for every $\varepsilon > 0$ there are a finite set $\{x_1, \ldots, x_n\}$ in B and some $m \in \mathbb{N}$, such that

$$B \subset B^m(x_1, \varepsilon) \cup ... \cup B^m(x_n, \varepsilon)$$

where $B^m(x, \varepsilon)$ denotes the set of points $y \in X$ that can be joined to x by means of an ε-chain in X of length m. An *ε-chain* in X of length m from x to y, is any collection of points $a_0, \ldots, a_m \in X$ such that, $a_0 = x$, $a_m = y$ and $d(a_i, a_{i+1}) < \varepsilon$, for every $i = 0, \ldots, m - 1$.

Note that if in the last definition we put $m = 1$, for every $\varepsilon > 0$, then we recover the notion of totally-bounded set. Hence every totally-bounded set is in particular Bourbaki-bounded. But the converse is not true. For that, take again the unit ball

$B(0,1)$ in an infinite dimensional normed space $(X, \|\cdot\|)$. Indeed, in this case $B(0,1)$ is not precompact but it is Bourbaki-bounded since, for every $\varepsilon > 0$, we have that,

$$B(0,1) \subset B^m(0,\varepsilon)$$

for $m > 1/\varepsilon$. In addition, we can deduce at once that every metric-bounded set in a normed space is Bourbaki-bounded. And hence we see that, at least in some frames, to be Bourbaki-bounded is a property not so much restrictive.

On the other hand, that every Bourbaki-bounded set in a metric space (X,d) is metric-bounded is consequence of the next inclusion,

$$B^m(x,\varepsilon) \subset B(x,m\varepsilon).$$

To see that the converse fails, take for instance $\mathbb{R}$ with the metric $\tilde{d} = \min\{1, d_u\}$, where the Bourbaki-bounded sets are not every subset of $\mathbb{R}$ but those that are metric-bounded with the usual metric.

Moreover, it is easy to check that uniformly continuous functions preserve the Bourbaki-bounded sets, and then "to be Bourbaki-bounded" is a uniform property. In the next section we will see more interesting relations between this kind of sets and the uniformly continuos functions.

Nevertheless, there is some inconvenience about this property. Namely, to be Bourbaki-bounded is not an intrinsic property since it depends on the ambient space where we are. In fact, it is posible for a subset B to be Bourbaki-bounded in X but not Bourbaki-bounded in itself. For instance, if $X = \ell_2$ is the classical Hilbert space of square sumable real sequences, and $B = \{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ is the canonical basis, then B is Bourbaki-bounded in X, but not in itself. Indeed, in the metric space (B, d_B), we have that $B^m(e_n, 1/2) = \{e_n\}$, for every $n, m \in \mathbb{N}$. And then every $1/2$-chain in B has only one point.

To finish this section, recall that a family $\mathbf{B}$ of subsets of X is said to be a *bornology* in X when it satisfies the following conditions:

(1) For every $x \in X$, the set $\{x\} \in \mathbf{B}$.

(2) If $B \in \mathbf{B}$ and $A \subset B$, then $A \in \mathbf{B}$.

(3) $A, B \in \mathbf{B}$ then $A \cup B \in \mathbf{B}$.

Moreover, if X is a topological space, we say that $\mathbf{B}$ is *closed* bornology when,

(4) If $B \in \mathbf{B}$ then its closure $\overline{B} \in \mathbf{B}$.

Thus, if we denote by $\mathbf{B}_d(X)$ the metric-bounded subsets, $\mathbf{TB}_d(X)$ the totally-bounded subsets and $\mathbf{BB}_d(X)$ the Bourbaki-bounded subsets, it is easy to check that all of these families are closed bornologies in the metric space (X,d). Moreover, we have the following relations among these (different) bornologies,

$$\mathbf{TB}_d(X) \subset \mathbf{BB}_d(X) \subset \mathbf{B}_d(X).$$

Note that combining some previous examples we can see that all of these bornologies can be different for a metric space X. For instance, let $X = \ell_2 \times \mathbb{R}$ endowed with the metric $d((x,t),(y,t')) = \|x-y\| + \tilde{d}(t,t')$, where $\tilde{d} = \min\{1, d_u\}$. Now, if $B(0,1)$ is the unit ball in ℓ_2, then $B(0,1) \times \mathbb{R}$ is a metric-bounded set in X not Bourbaki-bounded, and $B(0,1) \times [0,1]$ is a Bourbaki-bounded that is not totally-bounded.

The general study of bornologies in a topological space X, also known as *bornological universes*, have shown to be very useful in the frame of some convergence structures on hyperspaces as well as in optimization theory (see [6] and references therein). One of the most natural questions in this setting consists of determining the metrizability of the given bornologies. This problem was studied and solved in a nice way by Hu in [12]. About this interesting result of metrizability, the authors of [5] say that "it is a little surprising that it does not appears in the standard topology texts". Concerning this topic, we have recently studied in [9] the general problem of the uniformly metrizability of bornologies. And we have obtained some particular results for the three bornologies above considered. Recall that a bornology $\mathbf{B}$ on a metric space (X, d) is said to be *metrizable* (repectively, *uniformly metrizable*) when there exists some metric d' on X, topologically equivalent (resp. uniformly equivalent) to d, such that $\mathbf{B} = \mathbf{B}_{d'}(X)$. The problem of the uniform metrizability of bornologies was also considered by Beer in [3] but in a different approach. He uses the so-called *metric modes of convergence to infinity*, which provides a kind of dual point of view to boundedness.

3. More about Bourbaki-bounded sets

In this section we will make a more detailed study of the bornology $\mathbf{BB}_d(X)$. Recall that the notion of Bourbaki-bounded set was introduced by Atsuji [1] in the frame of metric spaces, under the name of *finitely chainable* set. Later on, it was generalized by Hejcman [11] to the general setting of uniform spaces. The name of Bourbaki-bounded cames from the book of Bourbaki [2], where the study of certain properties of these sets is proposed as an exercise. More recently, Vroegrijk in [13] consider this kind of sets in relation with the study of when a bornology is what he calls uniformizable.

We start with a result giving a nice characterization of Bourbaki-bounded sets by means of uniformly continuous functions.

Theorem 3.1. (Atsuji [1], Hejcman [11]). *Let (X, d) be a metric space and let $B \subset X$. The following are equivalent:*

(a) B is Bourbaki-bounded in X.
(b) $f(B)$ is bounded for every uniformly continuous real-valued function on X.
(c) B is a metric-bounded set for every metric uniformly equivalent to d.

It is interesting to note that the equivalence between (a) and (c) says that the Bourbaki-bounded sets in (X, d) are those that remain bounded under every metric d' uniformly equivalent to d. That is,

$$\mathbf{BB}_d(X) = \bigcap_{d' \overset{u}{\simeq} d} \mathbf{B}_{d'}(X).$$

Then a natural question arises: when there exists one metric d', uniformly equivalent to d, such that this intersection reduces to $\mathbf{B}_{d'}(X)$? Since the Bourbaki-bounded sets are the same for all uniformly equivalent metrics, then this question is equivalent to the following.

Question 3.2. *Which metric spaces (X, d) satisfy $\mathbf{BB}_d(X) = \mathbf{B}_d(X)$?*

As we have seen before, every normed space have this property. On the other hand, according to condition (b) in above Theorem 3.1, we are looking for those metric spaces where their real uniformly continuous functions are bounded on the metric-bounded sets. We do not know the complete answer to this question but we can say that not only every normed space but also every *length* space, every *quasi-convex* space or more generally every *small-determined* metric space enjoys that property. Recall that the class of small-determined metric spaces where introduced by Garrido and Jaramillo in [8]. There, it is proved that these spaces can be characterized by the fact that every real uniformly continuous function can be uniformly approximated by real Lipschitz functions. Then it is clear that in these spaces, uniformly continuous functions must be bounded on the metric-bounded sets. Unfortunately, the converse is not true. For instance, if we take the set $\mathbb{N}$ endowed with the usual metric, we have that Bourbaki-bounded sets and metric-bounded sets coincide, but $\mathbb{N}$ it is not a small-determined space. Indeed, the uniformly continuous function $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, defined by $f(n) = n^2$, $n \in \mathbb{N}$, can not be uniformly approximated by Lipschitz functions. Otherwise f would admit some uniformly continuous extension to whole $\mathbb{R}$, what it is impossible.

On the other hand, next question is also natural in this context.

Question 3.3. *Which metric spaces* (X, d) *satisfy* $\mathbf{BB}_d(X) = \mathbf{TB}_d(X)$?

Related with this question we can assure that, from condition (b) in Theorem 3.1, last equality holds if the uniformity of the metric space (X, d) is the weak uniformity given by some family of real functions. Note that in this case pre-compactness coincides with weakly pre-compactness. For instance it is true for every finite dimensional normed space since it is uniformly homeomorphic to $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$, whose uniformity is the weak given by the corresponding projections functions. On the other hand, there exists metric spaces whose uniformity is not a weak uniformity but Bourbaki-bounded sets and totally-bounded sets are the same. For example this is the case of any uncountable set X endowed with the discrete $0-1$ metric.

In fact, we will see at the end of the paper (Proposition 4.6) that for every metric space (X, d) there exists a metric d', topologically equivalent to d, such that $\mathbf{BB}_{d'}(X) = \mathbf{TB}_{d'}(X)$.

Next we are going to change our point of view by using some kind of sequences in X instead of real functions defined on X. Our first objective will be to characterize Bourbaki-bounded sets in terms of sequences as in the case of totally-bounded sets. It is well known that in a metric space (X, d), a set $B \subset X$ is totally-bounded if, and only if, every sequence $(x_n)_n$ in B has some Cauchy subsequence. Then, in order to get an analogous result for Bourbaki-boundedness we introduce in [10] the following definition.

Definition 3.4. A sequence $(x_n)_n$ is said to be *Bourbaki-Cauchy* in (X, d), whenever for every $\varepsilon > 0$ there exist $n_0 \in \mathbb{N}$ and $m \in \mathbb{N}$ such that $x_n \in B^m(x_{n_0}, \varepsilon)$, for $n \geq n_0$.

Of course, every Cauchy sequence is Bourbaki-Cauchy. But the converse is not true. For instance, let $(x_n)_n$ some enumeration of the set $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$. Then, this sequence is Bourbaki-Cauchy in $(\mathbb{R}, d_u)$, but it is not a Cauchy sequence. Note that to be Bourbaki-Cauchy depends on the whole space X where we are. For instance, the sequence $(0, 1, 0, 1, ...)$ is Bourbaki-Cauchy in $(\mathbb{R}, d_u)$, but not in $(\mathbb{N}, d_u)$.

From last definition we obtain the desired characterization of Bourbaki-bounded sets by means of sequences. The proof of next result can be also seen in [10].

Theorem 3.5. *Let (X,d) be a metric space. A set $B \subset X$ is Bourbaki-bounded in X if, and only if, every sequence $(x_n)_n$ in B has some subsequence that is Bourbaki-Cauchy in X.*

Since every subsequence of a Bourbaki-Cauchy sequence is also Bourbaki-Cauchy then from last theorem we have that every Bourbaki-Cauchy sequence is, in particular, a Bourbaki-bounded set. Then, this assessment gives us a partial answer to the last Question 3.3. Namely, in a metric space (X,d), the Bourbaki-bounded sets and the totally-bounded sets coincide if, and only if, every Bourbaki-Cauchy sequence in X has some Cauchy subsequence. As an easy consequence, we can deduce that every uniformly discrete metric space enjoys that property, since the only Bourbaki-Cauchy sequences are those being eventually constants. Recall that a metric space (X,d) is uniformly discrete when there is some $\delta > 0$ such that $B(x,\delta) = \{x\}$, for every $x \in X$. In particular, for every $x \in X$, we have also that $B^m(x,\delta) = \{x\}$, for all $m \in \mathbb{N}$.

4. Bourbaki completeness

In this section we will introduce a new notion of completeness in metric spaces by means of Bourbaki-Cauchy sequences, similarly that Cauchy sequences define completeness. Firstly, note that if a Cauchy sequence clusters, i.e., if it admits some convergent subsequence, then it is itself convergent. But for a Bourbaki-Cauchy sequence this is no longer true. In fact a Bourbaki-Cauchy sequence could have many different cluster points, and hence it can not be convergent. For instance, any enumeration of $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ is a Bourbaki-Cauchy sequence in $(\mathbb{R}, d_u)$ having uncountable cluster points.

Definition 4.1. A metric space (X,d) is said to be *Bourbaki-complete* whenever every Bourbaki-Cauchy sequence in X clusters.

As an example of Bourbaki-complete space, we can consider $\mathbb{R}^n$ endowed with the usual metric, or more generally every finite dimensional normed space. Moreover, we can prove that Bourbaki-completeness is a uniform property that is countably productive and hereditary for closed subspaces (see [10]).

It is interesting to note here that this property relays between compactness and completeness, since in a compact metric space every sequence clusters. Then we have the following chain of (non reversible) implications,

$$compact \;\Rightarrow\; Bourbaki-complete \;\Rightarrow\; complete.$$

Recently Beer, in a nice paper entitled "Between compactness and completeness" [4], studies different properties of this type in the setting of metric spaces. For instance, he consider UC-spaces, cofinally complete spaces, uniformly locally compact spaces, etc. We are currently interested in studying all these intermediate properties mainly in connection with Bourbaki-completeness.

On the other hand, it is well known that a metric space is compact if, and only if, it is complete and totally-bounded. Our next result can be considered the analogous one for Bourbaki-completeness.

Theorem 4.2. *Let (X, d) be a metric space. The following are equivalent:*

(a) *X is compact.*
(b) *X is Bourbaki-complete and Bourbaki-bounded.*

Proof. It is clear that (a) implies (b). Conversely, in order to see that X is compact we need to prove that every sequence in X clusters. Thus, if $(x_n)_n$ is a sequence in X then, from Theorem 3.5, it has a Bourbaki-Cauchy subsequence. Now by Bourbaki-completeness this subsequence clusters, and hence the same happens with $(x_n)_n$. □

As an easy consequence of above result, we can determine when a normed space is Bourbaki-complete.

Corollary 4.3. *A normed space $(X, \|\cdot\|)$ is Bourbaki-complete if, and only if, it has finite dimension.*

Proof. As we have mentioned before, any finite dimensional normed space is Bourbaki-complete. Conversely, if X has not finite dimension then its closed unit ball B is not compact. Since every metric-bounded set in a normed space is Bourbaki-bounded then, from last Theorem 4.2, B can not be Bourbaki-complete. And therefore, the whole space X can not be either Bourbaki-complete, since this property is hereditary for closed subspaces. □

Hence, there exist complete metric spaces that are not Bourbaki-complete, namely every infinite dimensional Banach space. Now the natural question arises, when a complete metric space is Bourbaki-complete? Next result gives an answer.

Theorem 4.4. *Let (X, d) be a metric space. The following are equivalent:*

(a) *X is Bourbaki-complete.*
(b) *X is complete and $\mathbf{BB}_d(X) = \mathbf{TB}_d(X)$.*

Proof. The proof can be obtained by using properly some of the previous results. □

We finish this paper by posing the following topological question:

Question 4.5. *When a metric space (X, d) is Bourbaki-completely metrizable?*

That is, when there exists a metric d', topologically equivalent to d, such that (X, d') is Bourbaki-complete? Recall that the classic result by Čech asserts that a metric space X is completely metrizable whenever it is a G_δ-set in βX, its Stone-Čech compactification (see for instance [7]). We wonder is the same result will be true for Bourbaki-completely metrizability. Note that if that were true then, in spite of completeness and Bourbaki-completeness are different uniform properties, their corresponding topological versions would be the same.

Proposition 4.6. *Let (X, d) be a Bourbaki-completely metrizable space. Then there is some metric d', topologically equivalent to d, such that $\mathbf{BB}_{d'}(X) = \mathbf{TB}_{d'}(X)$.*

Proof. This is an immediate consequence of Theorem 4.4. □

In order to see that the converse of last result is not true, it is enough to consider the set $\mathbb{Q}$ of the rational numbers endowed with the usual metric. Indeed, every Bourbaki-bounded set, and in fact every metric-bounded set, in $\mathbb{Q}$ is totally bounded, but it is well known that this space is not completely metrizable, and hence it can not be Bourbaki-completely metrizable.

On the other hand, note that for any uniform space $(X,\mathcal{U})$ there is always a topologically equivalent uniformity $\mathcal{U}'$, for which the totally-bounded sets and the Bourbaki-bounded sets coincide, i.e. $\mathbf{BB}_{\mathcal{U}'}(X) = \mathbf{TB}_{\mathcal{U}'}(X)$. To achieve this is only necessary to take as $\mathcal{U}'$ the weak uniformity on X given by the family of all the real uniformly continuous functions on $(X,\mathcal{U})$ and then to apply the corresponding version of Theorem 3.1 given by Hecjman in the frame of uniform spaces (see [11]).

References

[1] M. Atsuji, *Uniform continuity of continuous functions of metric spaces*, Pacif. J. Math. 8 (1958) 11-16.

[2] N. Bourbaki, *Topologie Générale*, Hermann, 1965.

[3] G. Beer, *On metric boundedness structures,* Set-Valued Anal. 7 (1999) 195-208.

[4] G. Beer, *Between compactness and completeness,* Topol. Appl. 155 (2008) 503-514.

[5] G. Beer, C. Constantini and S. Levi, *Total boundedness in metrizable spaces,* Houston J. Math. 37 (2011) 1347-1362.

[6] G. Beer and S. Levi, *Gap, Excess and Bornological Convergence,* Set-Valued Anal. 16 (2008) 489-506.

[7] K. Engelking, *General Topology*, Heldermann Verlag, Berlin, 1989.

[8] M.I. Garrido and J.A. Jaramillo, *Lipschitz-type functions on metric spaces,* J. Math. Anal. Appl. 380 (2008) 282-290.

[9] I. Garrido and A.S. Meroño, *Uniformly Metrizable Bornologies,* To appear in Journal of Convex Analysis (2013).

[10] I. Garrido and A.S. Meroño, *A new class of completeness in metric spaces,* Preprint.

[11] J. Hejcman, *Boundedness in uniform spaces and topological groups,* Czechoslovak Math. J. 9 (1959) 544-561.

[12] S.T. Hu, *Boundedness in a topological space,* J. Math. Pures Appl. 228 (1949) 287-320.

[13] T. Vroegrijk, *Uniformizable and realcompact bornological universes,* Appl. Gen. Topol. 10 (2009) 277-287.

Continuación de atractores y conjuntos "non-saddle"

Antonio GIRALDO y José SANJURJO

Departamento de Matemática Aplicada
Facultad de Informática
Universidad Politécnica de Madrid
E-28040 Madrid, Spain
agiraldo@fi.upm.es

Departamento de Geometría y Topología
Facultad de CC.Matemáticas
Universidad Complutense de Madrid
E-28040 Madrid, Spain
jose_sanjurjo@mat.ucm.Es

Dedicado al profesor Joan Tarrés.

ABSTRACT

En este trabajo expositivo se presentan algunas propiedades dinámicas y topológicas de continuaciones de atractores y conjuntos no-saddle de flujos en variedades. Un caso interesante se produce para el sistema de Lorenz para valores de parámetro cercanos a la situación de preturbulencia. Se presenta un resultado general, motivado por este caso particular.

In this survey we present some dynamical and topological properties of continuations of attractors and non-saddle sets of flows on manifolds. An interesting case occurs for the Lorenz system for parameter values close to the situation of preturbulence. A general result, motivated by this particular case, is presented.

Key words: dynamical system, continuation of isolated invariant sets, singular continuation, attractor, cuasi attractor, shape, Lorenz system.

2010 Mathematics Subject Classification: 37B25, 37D45.

1. Preliminares

En este trabajo expositivo se estudian algunas propiedades, dinámicas y topológicas, de continuación en familias uniparamétricas de flujos. En sistemas dinámicos, no sólo en el marco teórico, sino también al describir fenómenos naturales del mundo real, es frecuente la aparición de espacios con comportamiento local muy complicado (ejemplos típicos son el atractor de Lorenz y los solenoides). Como fue observado por Kennedy y Yorke en [18] "las topologías extrañas son naturales en sistemas dinámicos". Cuando se trabaja con estos espacios, la teoría de homotopía clásica no es totalmente satisfactoria. La herramientas adecuadas para estudiar propiedades topológicas globales son en este caso la homología y cohomología de Čech [9] y la teoría de la forma, introducida por K.Borsuk [4].

Ambos autores subvencionados por la Dirección General de Investigación.

Dado un conjunto compacto invariante K de un flujo $\varphi : X \times \mathbb{R} \longrightarrow X$ en un espacio métrico localmente compacto X, se dice que K es un conjunto invariante aislado si existe un entorno compacto N de K en X tal que K es el subconjunto invariante máximo de N. Decimos entonces que N es un entorno aislante para K.

Ejemplos particulares de conjuntos invariantes aislados son los atractores y los conjuntos aislados "non-saddle". Un conjunto compacto $K \subset X$ es un atractor si existe un entorno U de K en X tal que cada $x \in U$ cumple que para cada entorno V de K en X existe $t \in \mathbb{R}_+$ tal que $\varphi(\{x\} \times [t, \infty)) \subset V$. K es un atractor asintóticamente estable si es un atractor tal que cada entorno de K contiene un entorno positivamente invariante. En este trabajo, todos los atractores se supondrán asintóticamente estables. Por otro lado, un conjunto invariante K de un flujo $\varphi : X \times \mathbb{R} \longrightarrow X$ es un conjunto non-saddle si para cada entorno U de K existe un entorno V de K tal que para cada $x \in V$, $\gamma^+(x) = \varphi(\{x\} \times [0, \infty)) \subset U$ o $\gamma^-(x) = \varphi(\{x\} \times (-\infty, 0]) \subset U$. En todo este trabajo consideraremos conjuntos "non-saddle" que además sean conjuntos aislados.

Uno de los hitos de la aplicación de la teoría de la forma a sistemas dinámicos fue la demostración de que todo atractor (asintóticamente estable) de un flujo en un ANR localmente compacto (en particular en una variedad) tiene la forma de un poliedro (finito). Esta propiedad se ha formulado en [3] [14] y [23] en distintos niveles de generalidad (véase también [10, 25] para otros resultados relacionados). En [11] se demostró un resultado análogo para conjuntos "non-saddle".

Sea X un espacio métrico localmente compacto y sea $\varphi_\lambda : X \times \mathbb{R} \longrightarrow X$ una familia uniparamétrica de flujos (parametrizada por $\lambda \in [0, 1]$), tal que $\Phi : X \times I \times \mathbb{R} \longrightarrow X \times I$, dada por $\Phi(x, \lambda, t) = (\varphi_\lambda(x, t), \lambda)$, es un flujo en $X \times I$. Sean $K_0 \subset X$ y $K_1 \subset X$ conjuntos invariantes aislados para φ_0 y φ_1, respectivamente. Decimos que φ es una continuación de K_0 a K_1, o que K_1 es una continuación de K_0, si existe un conjunto invariante aislado $K \subset X \times I$ para Φ tal que $K_0 = K \cap (X \times \{0\})$ y $K_1 = K \cap (X \times \{1\})$. Esto equivalente a que exista una familia K_λ, $\lambda \in [0, 1]$, con K_λ conjunto invariante aislado para φ_λ, tal que, si N_{λ_0} es un entorno aislante para K_{λ_0}, existe $\varepsilon > 0$ tal que N_{λ_0} es un entorno aislante para K_λ, para cada $\lambda \in (\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0 + \varepsilon) \cap [0, 1]$.

Una propiedad de un conjunto invariante aislado es robusta si se transmite a los conjuntos cercanos de la continuación. Es bien conocido que la propiedad de ser un atractor es robusta. Esto no es cierto, en general, para conjuntos non-saddle, aunque sí se cumple bajo determinadas condiciones que veremos en la sección 2. Por otra parte, si tenemos una familia uniparamétrica continua de flujos $\varphi_\lambda : X \times \mathbb{R} \longrightarrow X$ ($\lambda \in [0, 1]$) y una familia de atractores $\{K_\lambda | \lambda \in [0, 1)\}$ relacionados por continuación, puede o no existir un atractor K_1 que complete la continuación. En el resto de las secciones veremos algunos resultados relacionados con esta situación. En particular, en la sección 6, a partir del estudio del sistema de Lorenz para algunos valores clásicos del parámetro, veremos un resultado para el caso de continuaciones de atractores en $[0, 1)$ que no pueden extenderse a $[0, 1]$, sino que experimentan una transición de atractor a repulsor cuando el parámetro toma el valor 1. Mostramos que, bajo hipótesis muy generales, el repulsor tiene la misma forma que los atractores de la continuación.

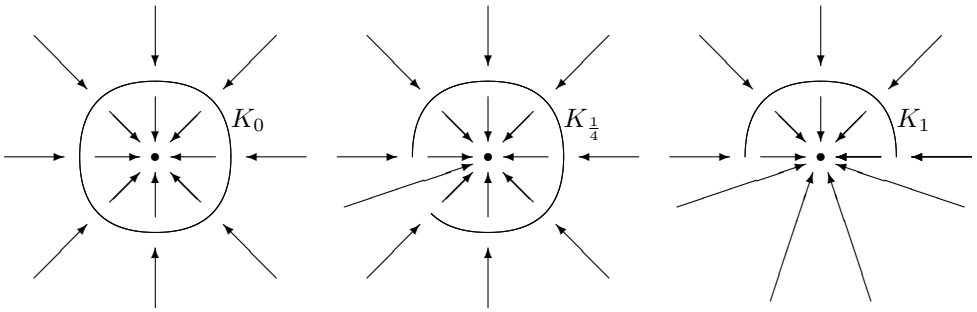
Para obtener información acerca de los resultados básicos de la teoría de la forma recomendamos los libros [4, 7, 19, 6] y el artículo [22]. También utilizamos conceptos y resultados de la teoría del índice Conley [5, 8]. Para la teoría general de sistemas dinámicos recomendamos los libros [2, 27, 1, 20]. Finalmente, recomendamos el libro

[26] y el survey [28] para obtener información general sobre el atractor de Lorenz.

2. Propiedades de robustez de continuaciones

Sea X un espacio métrico localmente compacto y localmente conexo y sea $\varphi_\lambda : X \times \mathbb{R} \longrightarrow X$ una familia uniparamétrica de flujos ($\lambda \in [0,1]$). Sean $K_0, K_1 \subset X$ conjuntos invariantes aislados de φ_0 y φ_1, respectivamente, relacionados por continuación por φ. Si K_0 es un atractor, existe $\delta > 0$ tal que K_λ es un atractor, para cada $\lambda < \delta$. Nos podemos preguntar si esta propiedad de robustez de atractores también la tienen los conjuntos "non-saddle". La respuesta es negativa, incluso para los conjuntos "non-saddle" conexos, como se muestra en el ejemplo siguiente.

Ejemplo 2.1. *Considere la familia de las flujos en el plano dado por las siguientes gráficas*



donde, para cada $\lambda \in [0,1]$, K_λ es un arco de longitud igual a $2\pi - \lambda\pi$.

Entonces $\{K_\lambda\}$ es una continuación de conjuntos invariantes aislados, pero mientras que K_0 es "non-saddle", ninguno de los K_λ con $\lambda > 0$ lo es.

En las siguientes definiciones introducimos algunas nociones de robustez dinámica y topológica para conjuntos invariantes aislados.

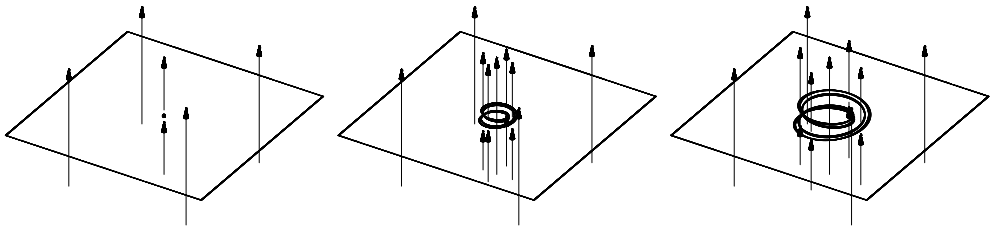
Definición 2.2. Sea $\varphi_\lambda : X \times \mathbb{R} \longrightarrow X$ una familia uniparamétrica de flujos ($\lambda \in [0,1]$) en un ANR localmente compacto, X y supongamos que K_0 es un conjunto aislado "non-saddle" de φ_0. Decimos que:

i) K_0 es *dinámicamente robusto* si dado N entorno aislante de K_0 existe $\delta > 0$ tal que, para cada $\lambda \in [0, \delta)$, el subconjunto invariante aislado de N (para el flujo φ_λ) que tiene N como un entorno aislante es un conjunto "non-saddle" (no vacío).

ii) K_0 es *topológicamente robusto* si dado N entorno aislante de K_0 existe $\delta > 0$ tal que, para cada $\lambda \in [0, \delta)$, el subconjunto invariante aislado de N (para el flujo φ_λ) que tiene N como un aislamiento de Vecindad tiene la misma forma que K_0.

El ejemplo anterior muestra que la robustez topológica no se da en general, pues un conjunto invariante conexo con el tipo de homotopía y la forma de una circunferencia continúa en conjuntos invariantes conexos contractibles. En el ejemplo siguiente se muestra que incluso puede no conservarse la propiedad de tener forma poliédrica.

Ejemplo 2.3. Consideramos una familia $\varphi_\lambda : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^4$ ($\lambda \in I$) de flujos en $\mathbb{R}^4$ tal que, para cada $\lambda \in I$, el flujo es transversal a un hiperplano tridimensional y hay un conjunto invariante compacto $\{K_\lambda\}$ contenido en ese hiperplano, como se muestra en la figura siguiente.



Entonces $\{K_\lambda\}$ es una continuación de conjuntos invariantes aislados pero, mientras que K_0 tiene la forma de un punto, el resto de K_λ con $\lambda > 0$ son solenoides con forma no poliédrica.

Para que se tenga la robustez topológica tenemos que imponer una condición adicional de regularidad [24], relacionada con el comportamiento de las órbitas en la frontera del entorno aislante de los conjuntos "non-saddle", y otra de compatibilidad entre entornos regulares en la continuación. En el caso de familias uniparamétricas diferenciables, estas condiciones adicionales no son necesarias.

Definición 2.4. Sea $\varphi : X \times \mathbb{R} \longrightarrow X$ un flujo en un ANR localmente compacto, X. Un conjunto invariante aislado S es *regular* si existe un entorno aislante N tal que si $x \in N$, $t \geq 0$ y $\varphi(x,t) \in N$ entonces $\varphi(\{x\} \times [0,t]) \subset N$. Esto equivale a decir que las órbitas que dejan N nunca regresan. Decimos entonces que N es un entorno aislante regular para S.

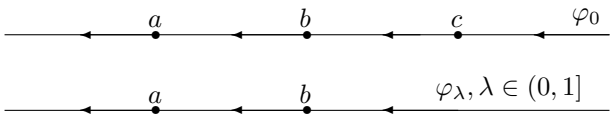
Si $\varphi_\lambda : X \times \mathbb{R} \longrightarrow X$ es una familia uniparamétrica de flujos ($\lambda \in [0,1]$) y K_0 es un conjunto aislado "non-saddle" regular para φ_0, decimos que K_0 es *regularmente dinámicamente robusto* si para cada entorno aislante N de K_0 existe $\delta > 0$ tal que si $\lambda \in [0,\delta)$, el subconjunto invariante aislado de N (en relación con el flujo φ_λ) que tiene N como un entorno aislante es un conjunto "non-saddle" regular (no vacío) y, además, todos los K_λ ($0 \leq \lambda < \delta$) admiten un entorno aislante regular común.

Teorema 2.5. *Sea $\varphi_\lambda : X \times \mathbb{R} \longrightarrow X$ una familia uniparamétrica de flujos ($\lambda \in [0,1]$) en un* ANR *localmente compacto, X, y sea K_0 un conjunto invariante aislado conexo "non-saddle" regular de φ_0.*

Si K_0 es regularmente es dinámicamente robusto, K_0 es topológicamente robusto.

La condición de que K_0 sea un conjunto conexo "non-saddle" es necesaria, como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.6. Considérese



Entonces $K_0 = \{a, c\}$ es "non-saddle" regularmente dinámicamente robusto pero no topológicamente robusto.

Terminamos esta sección con un resultado que relaciona la robustez dinámica regular de un conjunto "non-saddle" y la de su conjunto dual [11]. Dado un conjunto "non-saddle" regular de un flujo $\varphi : X \times \mathbb{R} \longrightarrow X$, donde X es un espacio métrico compacto, consideramos el conjunto K' de todos los puntos $x \in X$ tales que $\omega^+(x) \not\subset K$ y $\omega^-(x) \not\subset K$. Entonces K' es también un conjunto aislado "non-saddle" regular llamado dual de K. Además, K' es no vacío si $K \neq X$.

Para conjuntos "non-saddle" regulares conexos con conjunto dual conexo, la robustez dinámica regular del primero implica la robustez dinámica regular de este último.

Teorema 2.7. *Sea $\varphi_\lambda : X \times \mathbb{R} \longrightarrow X$ una familia uniparamétrica de flujos ($\lambda \in [0,1]$) en un espacio métrico compacto, X, y supongamos que K_0 es un conjunto "non-saddle" conexo regular tal que su "non-saddle" dual K_0' es conexo y no vacío.*

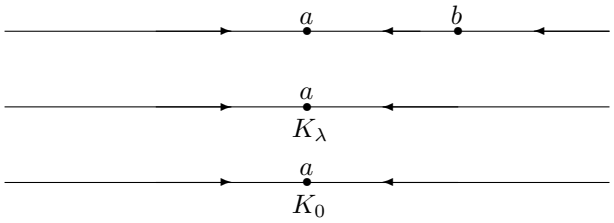
Supongamos que K_0 es regularmente dinámicamente robusto K_0 y, por tanto, topológicamente robusto. Entonces K_0' también es regularmente dinámicamente robusto y, por tanto, topológicamente robusto.

Además, si $\{K_\lambda\}_{\lambda\in[0,\delta)}$ es una familia de conjuntos "non-saddle" regulares (con respecto a los flujos $\{\varphi_\lambda\}_{\lambda\in[0,\delta)}$) con un entorno aislante regular común, entonces, la familia $\{K'\}_{\lambda\in[0,\delta)}$ de sus duales comparten también un entorno aislante regular común y, por lo tanto, es una continuación local de K_0'.

3. Continuaciones de atractores

Si $\{K_\lambda\}$ es una continuación de conjuntos invariantes aislados tal que K_λ es un atractor, para $\lambda \in [0,1)$, K_1 no tiene necesariamente que ser un atractor, tal y como se muestra en el ejemplo siguiente.

Ejemplo 3.1. Considérese la siguiente familia de flujos que son iguales en un entorno de a, mientras que lejos de a se van ralentizando hasta que aparece un nuevo punto fijo b cuando $\lambda = 1$.



Entonces, $[a,b]$, $\{a,b\}$ y $\{a\}$ (para $\lambda = 1$) son continuaciones de $K_0 = \{a\}$. Se tiene que K_λ es un atractor para $0 < \lambda < 1$. Sin embargo, de las tres posibles continuaciones para $\lambda 01$, K_0, $[a,b]$ y $\{a\}$ son atractores, mientras que $\{a,b\}$ no lo es.

Este ejemplo motiva el teorema siguiente.

Teorema 3.2. *Supongamos que $\varphi_\lambda : X \times \mathbb{R} \longrightarrow X$ es una familia uniparamétrica de flujos ($\lambda \in [0,1]$) sobre un* ANR *localmente compacto, X, y supongamos que $K_0 \subset X$ es un atractor conexo para φ_0. Sea K_1 relacionado por continuación con K_0.*

I) *Si K_1 es conexo, entonces K_1 es un atractor y* $\mathrm{Sh}(K_0) = \mathrm{Sh}(K_1)$.

II) *Si K_1 no es conexo, entonces $K_1 = K_1^1 \cup K_1^2$ (con $K_1^1 \cap K_1^2 = \emptyset$), donde K_1^1 es un atractor conexo que continúa K_0, y K_1^2 es un compacto invariante con índice de Conley trivial. Además,* $\mathrm{Sh}(K_0) = \mathrm{Sh}(K_1^1)$.

Observación 3.3. *A pesar de tener índice de Conley trivial, K_1^2 puede ser topológicamente muy complicado. Se puede demostrar, por una construcción similar a la del Ejemplo 3.1 que cualquier compacto finito-dimensional K puede ser sumergido en $\mathbb{R}^n$, para un n adecuado, de tal manera que existe una familia uniparamétrica de flujos $\varphi_\lambda : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ($\lambda \in [0,1]$) tal que $K_0 = \{0\}$ es un atractor conexo para φ_0 y $K_1 = K_0 \cup K$ (unión disjunta) está relacionado por continuación con K_0.*

4. Continuaciones de atractores a cuasi-atractores

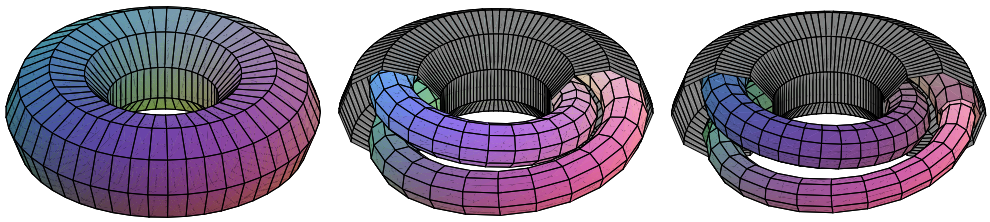
Un cuasi-atractor de un flujo φ es un conjunto invariante compacto, no vacío, K, que es una intersección de atractores de φ. Se sabe que, para un flujo en el plano, los únicos atractores posibles son compactos con un número finito de componentes, que descompongan el plano en un número finito de componentes (es decir, compactos con la forma de un poliedro finito). La noción de un cuasi-atractor es mucho más general.

Teorema 4.1. *Cualquier continuo del plano puede ser un cuasi-atractor de un sistema dinámico en $\mathbb{R}^2$.*

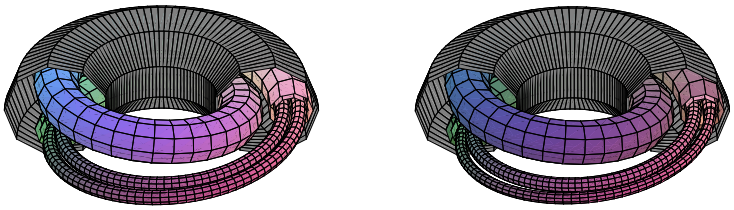
La demostración consiste en expresar un continuo del plano como una intersección decreciente (infinita) de poliedros finitos y construir un flujo que tiene cada uno de esos poliedros finitos como un atractor. Esta misma construcción se puede utilizar para probar que conjuntos más complicados en dimensiones superiores también pueden ser cuasi-atractores, e incluso obtener esos cuasi-atractores como una intersección alternada de atractores y repulsores. En el ejemplo siguiente se ilustra, en el contexto de flujos, algunas situaciones genéricas descritas por Kennedy [17] y Hurley [16].

Ejemplo 4.2. Vamos a construir un flujo en $\mathbb{R}^3$ que tiene un solenoide como cuasi-atractor. Nótese que el solenoide no puede ser un atractor de un flujo, ya que no tiene la forma de un poliedro.

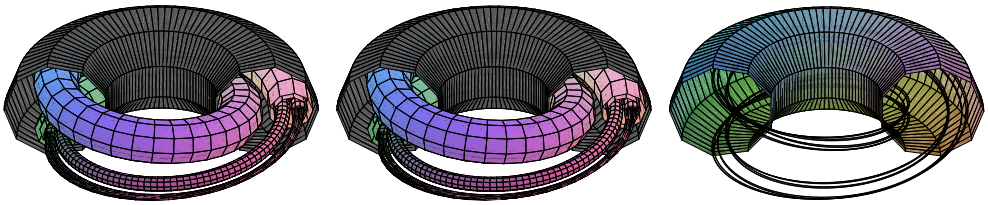
Empezamos con un toro sólido T_0, un segundo toro sólido T_1 enrollado dos veces dentro del primero. y un tercer toro sólido $T_2 \subset T_1$ isotópico a T_1. El flujo tendrá T_0 como un atractor, será estacionario entre T_0 y T_1, y tendrá T_2 como un repulsor.



Consideramos ahora dos toros sólidos isotópicos $T_4 \subset T_3$ enrollados dos veces en T_2. El flujo será estacionario entre T_2 y T_3 y tendrá T_4 como un atractor.



Consideramos ahora dos toros sólidos isotópicos $T_6 \subset T_5$ enrollados dos veces en T_4. El flujo será estacionario entre T_4 y T_5 y tendrá T_6 como un repulsor. Continuando este proceso obtenemos un flujo con el solenoide como un cuasi-atractor.



Existe una sucesión decreciente $\{T_i\}$ de toros tales que $T_0, T_4, T_8, \ldots$ son atractores, $T_2, T_6, T_{10}, \ldots$ son repulsores. y $\bigcap_{i=0}^{\infty} T_{4i}$ es el solenoide.

En la definición siguiente introducimos una clase de cuasi-atractores que son los que aparecerán como continuaciones de atractores.

Definición 4.3. Supongamos que $\varphi : X \times \mathbb{R} \to X$ es un flujo en un ANR localmente compacto, X. Un cuasi-atractor K de φ se dice que es "tame" si para cada entorno U de K en X existe un atractor $C \subset U$ tal que la inclusión $i : K \to C$ es una equivalencia "shape".

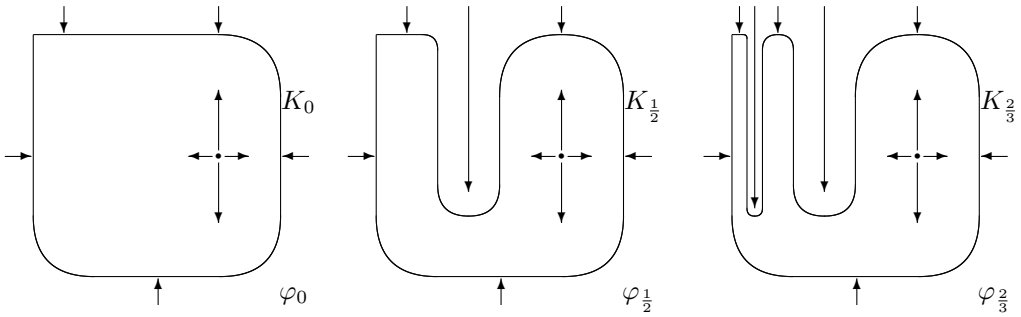
Esto equivale a que exista una sucesión anidada de atractores $\cdots \subset C_{n+1} \subset C_n \subset \cdots \subset C_1$ tal que $K = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$ y la inclusión $i : K \hookrightarrow C_n$ es una equivalencia "shape" para todo n.

En contraste con el caso general de los cuasi-atractores, los cuasi-atractores "tame" no pueden tener cualquier forma. Esto es una consecuencia del hecho de que los atractores de flujos en ANRs localmente compactos tienen forma poliédrica [23], lo que obliga a los cuasi-atractores "tame" a tener también forma poliédrica y por lo tanto homología y cohomología de Čech finitamente generadas. El solenoide, por tanto, no

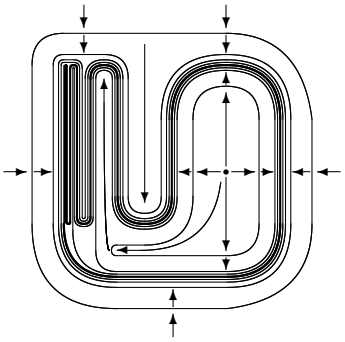
puede ser un cuasi-atractor "tame" de un flujo en una ANR. Por otra parte, además, gozan de una propiedad dinámica interesante relacionada con la noción de persistencia introducida por Hurley [15] (ver [12]).

Como una motivación para los conceptos introducidos en el resto de esta sección, presentamos el ejemplo siguiente basado en el círculo polaco.

Ejemplo 4.4. Considérese el siguiente flujo parametrizado φ_λ en $\mathbb{R}^2$, $\lambda \in [0,1]$. φ_0 consta de una curva cerrada simple K_0 que es un atractor y un punto repulsivo en la componente acotada del complemento de K_0. φ_0 puede ser continuamente deformado de forma que φ_λ consiste siempre en una curva cerrada simple K_λ, que es un atractor, y el mismo punto repulsor del caso $\lambda = 0$, que siempre se incluye en la componente acotada del complemento de K_λ.



Finalmente φ_1 será como sigue



donde hay una sucesión $K_1^0 \supset K_1^1 \supset K_1^2 \supset \dots$ de anillos tal que:

- $\bigcap_{i=0}^{\infty} K_1^i$ es un círculo polaco,
- los puntos del círculo polaco y los de las fronteras de los K_1^i son estacionarios,
- K_1^i es un atractor, para cada $i \geq 0$,
- K_1^i es un entorno de K_λ, el atractor de φ_λ, para cada λ, con $\frac{i}{i+1} \leq \lambda < 1$,

y existe un punto repulsivo en la componente acotada del complemento de la primera corona de K_1^0.

Entonces cualquier K_1^i es una continuación de K_0, mientras que el círculo polaco, que debería ser la continuación natural, no puede serlo por no ser aislado.

Definición 4.5. Sea $\varphi_\lambda : X \times \mathbb{R} \longrightarrow X$ una familia uniparamétrica de flujos ($\lambda \in [0,1]$) en un espacio métrico localmente compacto X. Sea $\{K_\lambda\}$ una continuación de atractores conexos y considérese la familia de todos los atractores K_1^i que son continuación de K_0. Si la intersección $K_1' = \bigcap K_1^i$ no puede reducirse a una intersección finita decimos que el cuasi-atractor K_1' es una singularidad de la continuación.

Obsérvese que si, por el contrario, $\bigcap K_1^i$ pudiera reducirse a una intersección finita, entonces $\bigcap K_1^i$ sería uno de los atractores K_1^i continuación de K_0.

Teorema 4.6. *Sea $\varphi_\lambda : X \times \mathbb{R} \longrightarrow X$ una familia uniparamétrica de flujos ($\lambda \in [0,1]$) definidos en un* ANR *localmente compacto, X (en particular en una variedad), y sea $\{K_\lambda\}$ una continuación de atractores conexos. Si K_1' es una singularidad de la continuación, K_1' es un cuasi-atractor "tame" y $\mathrm{Sh}(K_1') = \mathrm{Sh}(K_0)$. En particular, K_1' es un continuo con forma poliédrica y grupos de homología y cohomología de Čech finitamente generados y sólo una cantidad finita de ellos son no triviales.*

5. Espectros y esqueletos de continuaciones de un atractor

En esta sección no consideramos una continuación concreta sino todas las posibles continuaciones de un atractor.

Definición 5.1. Supongamos que $\varphi_\lambda : X \times \mathbb{R} \longrightarrow X$ es una familia uniparamétrica de flujos ($\lambda \in [0,1]$) en un espacio métrico localmente compacto X y supongamos que $K_0 \subset X$ es un atractor conexo para φ_0. Consideramos

$$\mathcal{K} = \left\{ K_1 \subset X \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{existe una continuación de } K_0 \text{ a } K_1 \\ \text{mediante conjuntos conexos (y por tanto atractores)} \end{array} \right\},$$

y, para cada $\lambda_0 \in [0,1]$,

$$\mathcal{K}_{\lambda_0} = \left\{ K \subset X \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{existe } \{K_\lambda\} \text{ continuación de } K_0 \\ \text{mediante conjuntos conexos con } K_{\lambda_0} = K \end{array} \right\}.$$

Si $\mathcal{K}_1 \neq \emptyset$, entonces $\mathcal{K}_\lambda \neq \emptyset$, para cada $\lambda \in [0,1]$, y decimos que $\tilde{K}_\lambda = \bigcap_{K_\lambda \in \mathcal{K}_\lambda} K_\lambda$ es el λ-*espectro* de K_0. Al 1-espectro $\tilde{K}_1$, se le llama, simplemente, *espectro* de K_0. Por último, la familia $\{\tilde{K}_\lambda\}_{\lambda \in [0,1]}$ es el *esqueleto de continuación* de K_0.

Observación 5.2. a) Como ocurría con las singularidades, el espectro de un atractor puede no ser un compacto aislado, aunque es un cuasi-atractor.

b) El espectro de K_0 no tiene por qué ser una singularidad inducida por una continuación $\{K_\lambda\}$ (ver Remark 2 en [13]).

c) Si $\mathcal{K}_1 \neq \emptyset$, entonces $\tilde{K}_\lambda \neq \emptyset$ para cada $\lambda \in [0,1]$, por lo tanto el esqueleto de la continuación y el espectro de K_0 están bien definidas.

El espectro de un atractor K_0 tiene propiedades topológicas globales similares a las de K_0.

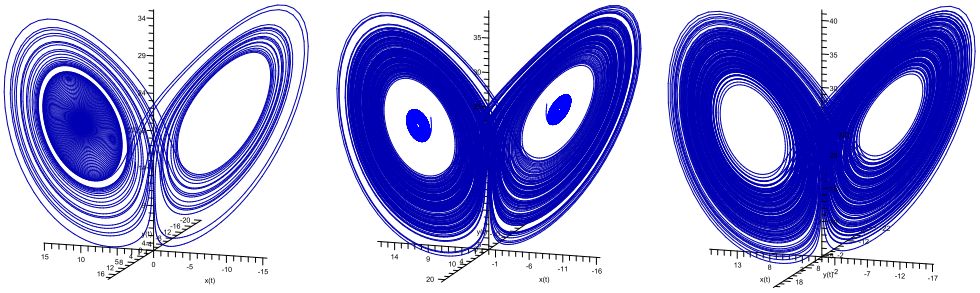
Teorema 5.3. *Sea $\varphi_\lambda : X \times \mathbb{R} \longrightarrow X$ una familia uniparamétrica de flujos ($\lambda \in [0,1]$) definidos en un* ANR *localmente compacto, X (en particular en una variedad), y sea $K_0 \subset X$ un atractor conexo de φ_0. Si $\tilde{K}_1 \neq \emptyset$ es el espectro de K_0 entonces $\tilde{K}_1$ es un cuasi-atractor "tame" y $\mathrm{Sh}(\tilde{K}_1) = \mathrm{Sh}(K_0)$. En particular, $\tilde{K}_1$ es un continuo con forma poliédrica y grupos de homología y cohomología de Čech finitamente generados y sólo una cantidad finita de ellos son no triviales.*

6. Continuaciones de atractores no extendibles

En muchas situaciones interesantes, existe una continuación de atractores $\{K_\lambda \mid 0 \leq \lambda < 1\}$ que no puede extenderse a $\lambda = 1$. Un ejemplo paradigmático de dicha evolución puede encontrarse en el sistema de Lorenz, dado por las ecuaciones

$$\frac{dx}{dt} = \sigma(y - x), \quad \frac{dy}{dt} = rx - y - xz, \quad \frac{dz}{dt} = xy - bz.$$

Fijaremos, como suele hacerse en la literatura, $\sigma = 10$ y $b = \dfrac{8}{3}$, y estudiaremos la evolución del sistema según varía r, según se describe en [26].



Preturbulencia ($r = 22$), atractor y puntos fijos atractivos ($r = 24,5$), atractor de Lorenz ($r = 26$)

Para cada valor del parámetro r existe un atractor global K_r, que puede obtenerse como la intersección de una sucesión anidada de elipsoides topológicos. Consideramos $\varphi'_r : K_r \times \mathbb{R} \longrightarrow K_r$ el flujo restringido a este atractor global K_r.

Para $\sigma = 10$ y $b = \dfrac{8}{3}$, el sistema se comporta, según varía r, de la manera siguiente:

- para $r = 24.06\ldots$ hay un par de puntos fijos atractivos, C_1 y C_2 y, si consideramos el flujo $\varphi'_r : K_r \times \mathbb{R} \longrightarrow K_r$ existe también un repulsor dual de $\{C_1, C_2\}$ en K_r, que contiene un conjunto extraño inestable que contiene el origen,
- para $24,06\ldots < r < 24{,}74\ldots$, C_1 y C_2 siguen siendo puntos fijos atractivos, pero el conjunto extraño es ahora un atractor A_r,
- para $r = 24{,}74\ldots$, C_1 y C_2 son ambos inestables.

Para $24,06 < r < 24{,}74$, hay un par de órbitas periódicas γ_1 y γ_2 cuyas variedades estables cerca son cilindros que separan el origen de los puntos estacionarios C_1 y C_2. Las trayectorias que comienzan dentro de uno de estos cilindros convergen al punto

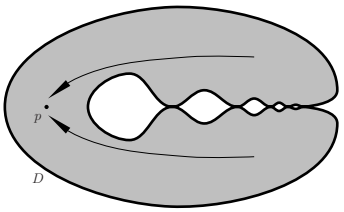
fijo dentro de él, mientras que las trayectorias que comienzan fuera de ellos convergen a A_r. Sea R_r el conjunto de puntos de K_r en el exterior o en la superficie de los cilindros. Entonces R_r es un repulsor para el flujo restringido $\varphi'_r : K_r \times \mathbb{R} \longrightarrow K_r$.

Por lo tanto, para 24,06 $< r \leq$ 24,74 existe una continuación de atractores de Lorenz $\{A_r\}$ que no puede extenderse a $r = 24,06$. Por otro lado, existe un repulsor $R_{24,06}$, tal que (A_r) converge semicontinua superiormente a él.

Sea $K'_r = K_r \setminus \{C_1, C_2\}$, conjunto invariante localmente compacto y consideremos el flujo restringido a este conjunto $\varphi''_r : K'_r \times \mathbb{R} \longrightarrow K'_r$. Entonces los conjuntos R_r son conjuntos invariantes compactos maximales para φ''_r.

Por otro lado, la inclusión de un atractor en su región de atracción $\mathcal{A}(A_r)$ es una equivalencia "shape". Para $24,06 < r <$ 24,74, la región de atracción de A_r para el flujo φ'_r en K_r es $\mathcal{A}(A_r) = R_r \setminus (\gamma_1 \cup \gamma_2)$. Se puede demostrar (ver [13]) que, para r cercano a 24.74, la inclusión de A_r en $\overline{\mathcal{A}(A_r)}$, la adherencia de su región de atracción, es una equivalencia "shape". Observe $\overline{\mathcal{A}(A_r)}$ coincide con el repulsor R_r definido anteriormente.

Es interesante observar, como se demostró en [21], que si K es un atractor de un flujo en un espacio localmente compacto, la inclusión de K en la adherencia de su región de atracción no es, en general, una equivalencia "shape". Un ejemplo viene dado por el siguiente flujo



que tiene un punto fijo que atrae a todos los puntos del interior del conjunto de sombreado, mientras que los puntos de su frontera son estacionarios. Entonces el punto fijo es un atractor cuya región de atracción tiene forma trivial, pero su adherencia no, ya que divide el plano en un número infinito de componentes [21].

La siguiente definición y el teorema que le sigue está motivada por las propiedades del atractor de Lorenz discutidas anteriormente cuando el flujo se limita a K''_r (el atractor global menos los dos puntos fijos).

Definición 6.1. *Sea $\varphi : X \times \mathbb{R} \longrightarrow X$ un flujo en un espacio métrico localmente compacto, X, y supongamos que $K \subset X$ es un atractor de φ. Decimos que K es:*

I) *un atractor coherente si la inclusión de K en la adherencia de su región de atracción es una equivalencia "shape",*

II) *un atractor cuasi-global si la adherencia de su región de atracción es un conjunto invariante compacto que contiene cualquier otro conjunto compacto invariante.*

Teorema 6.2. *Supongamos que $\varphi_\lambda : X \times \mathbb{R} \longrightarrow X$ es una familia uniparamétrica de flujos ($\lambda \in [0,1]$) en un espacio métrico localmente compacto, X, y considérese una continuación de atractores conexos $\{K_\lambda \mid 0 \leq \lambda < 1\}$. Supongamos que $\{K_\lambda\}$ converge semicontinua superiormente a K_1 tal que K_1 es un repulsor de φ_1.*

Entonces existe $\delta > 0$ y una familia $\{K'_\lambda \mid \lambda \in [\delta, 1]\}$ tal que:

I) $K'_1 = K_1$,

II) $K'_\lambda \mid \lambda \in [\delta, 1]\}$ *es una continuación de repulsores,*

III) $K'_\lambda \supset K_\lambda$,

Además, si para algún $\lambda_0 \in [\delta, 1]$, K_{λ_0} *es un atractor cuasi-global coherente entonces* $\mathrm{Sh}(K_\lambda) = \mathrm{Sh}(K'_\lambda) = \mathrm{Sh}(K_1)$ *para todo* $\lambda \in [\delta, 1)$.

Corolario 6.3. *Consideremos el sistema de Lorenz para* $\sigma = 10$, $b = \dfrac{8}{3}$ *y* $24{,}06 \leq r \leq 24{,}74$. *Entonces el conjunto extraño que existe para* $r = 24,06$ *es un conjunto inestable con la misma forma que los atractores que existen para* $24,06 < r \leq 24{,}74$.

Referencias

[1] K.T.Alligood, T.D.Sauer and J.A.Yorke, Chaos. An introduction to dynamical systems, Springer, 1996.

[2] N.P.Bhatia and G.P.Szego, Stability theory of dynamical systems, Grundlehren der Math. Wiss. **161**, Springer-Verlag, Berlin, 1970.

[3] S.A.Bogatyi and V.I.Gutsu, *On the structure of attracting compacta*, Differentsial'nye Uravneniya, **25** (1989), 907–909 (in Russian).

[4] K.Borsuk, Theory of shape, Monografie Matematyczne **59**, Polish Scientific Publishers, Warszawa, 1975.

[5] C.C.Conley, Isolated invariant sets and the Morse index, CBMS Regional Conf. Ser. in Math. **38**, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1976.

[6] J.M.Cordier and T.Porter, Shape theory. Categorical methods of approximation, Ellis Horwood Series: Mathematics and its Applications, Ellis Horwood Ltd, Chichester, 1989.

[7] J.Dydak and J.Segal, Shape theory: An introduction, Lecture Notes in Math. **688**, Springer-Verlag, Berlin, 1978.

[8] R.W.Easton, Geometric methods for discrete dynamical systems, Oxford Engineering Science Series **50**, Oxford University Press, New York, 1998.

[9] S.Eilenberg and N.Steenrod, Foundations of Algebraic Topology, Princeton University Press, Princeton, 1952.

[10] A.Giraldo and J.M.R.Sanjurjo, *On the global structure of invariant regions of flows with asymptotically stable attractors*, Math. Z., **232** (1999), 739–746.

[11] A.Giraldo, M.A.Morón, F.R.Ruíz del Portal and J.M.R.Sanjurjo, *Some duality properties of non-saddle sets*, Topology and its Applications, **113** (2001), 51–59.

[12] A.Giraldo and J.M.R.Sanjurjo, *Topological robustness of non-saddle sets*, Topology and its Applications, **156** (2009), 1929–1936.

[13] A.Giraldo and J.M.R.Sanjurjo, *Singular Continuations of Attractors*, SIAM Journal on Applied Dynamical Systems, **8** (2009), 554–575.

[14] B.Günther and J.Segal, *Every attractor of a flow on a manifold has the shape of a finite polyhedron*, Proc. Amer. Math. Soc., **119** (1993), 321–329.

[15] M.Hurley, *Attractors: Persistence, and density of their basins*, Tran. Amer. Math. Soc., **269** (1982), 247–271.

[16] M.Hurley, *Properties of attractors of generic homeomorphisms*, Ergod. Th. & Dynam. Sys., **16** (1996), 1297–1310.

[17] J.A.Kennedy, *The topology of attractors*. Ergod. Th. & Dynam. Sys., **16** (1996), 1311–1322.

[18] J.A.Kennedy and J.A.Yorke, *Bizarre topology is natural in dynamical systems*, Bull. Amer. Math. Soc., **32** (1995), 309–316.

[19] S.Mardešić and J.Segal, *Shape theory*. North Holland, Amsterdam, 1982.

[20] J.C.Robinson, Infinite-dimensional dynamical systems. An introduction to dissipative parabolic PDEs and the theory of global attractors, Cambridge Texts in Applied Mathematics, Cambridge University Press, Cambridge, 2001.

[21] J.J.Sánchez-Gabites and J.M.R.Sanjurjo, *On the topology of the boundary of a basin of attraction*, Proc. Amer. Math. Soc., **135** (2007), 4087–4098.

[22] J.M.R.Sanjurjo, *An Intrinsic Description of Shape*, Trans. Amer. Math. Soc., **329** (1992), 625–636.

[23] J.M.R.Sanjurjo, *Multihomotopy, Čech spaces of loops and shape groups*, Proc. London Math. Soc., **69** (1994), 330–344.

[24] J.M.R.Sanjurjo, *Lusternik-Schnirelmann category and morse decompositions*, Mathematika, **47** (2000), 299–305.

[25] J.M.R.Sanjurjo, *Morse equations and unstable manifolds of isolated invariant sets*, Nonlinearity, **16** (2003), 1435–1448.

[26] C. Sparrow, Lorenz Equations: Bifurcations, Chaos and Strange Attractors, Springer, New York, 1982.

[27] R.Temam, Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics (Second edition), Applied Mathematical Sciences **68**, Springer-Verlag, New York, 1997.

[28] M. Viana, *What's new on Lorenz strange attractors*, Math. Intelligencer **22** (2000), 6-19.

Visualización matemática: intuición y razonamiento

Inés Mª Gómez-Chacón

Facultad de Ciencias Matemáticas
Universidad Complutense de Madrid
E-28040 Madrid, Spain
igomezchacon@mat.ucm.es

Dedicado a Juan Tarrés.

ABSTRACT

La matematización tiene un apoyo continuo en la intuición y en lo visual. Este trabajo versa sobre la visualización matemática, no sólo como las matemáticas reconocidas a través de imágenes sino como clave de significado en la comprensión e inspiradora en los descubrimientos matemáticos. A través de datos empíricos se reflexiona desde la Educación matemática universitaria, sobre las características de visualización geométrica y sobre algunos obstáculos y oportunidades de la enseñanza de la visualización con alumnado universitario.

Mathematization is heavily sustained by intuition and visual reasoning. In this work we consider mathematical visualization not only as the process of recognizing Mathematics though images, but also as a key factor to enhance understanding and inspiring mathematical discoveries. Within the frame of mathematical education at university level, we use empirical data to reflect on the characteristics of geometric visualization and on some of the obstacles and opportunities arising in the teaching of visualization in this particular context.

Key words: Visualization, Geometry, Teaching at university level, Mathematic education, visual thinking, geometrical thinking, learning and teaching geometry, intuition

2010 Mathematics Subject Classification: 97-XX, 97GXX, 97U70.

1. Introducción

Este capítulo está pensado como homenaje a la aportación docente de Juan Tarrés. Si algo puedo destacar de lo que he conocido como colega de Juan Tarrés es su preocupación por favorecer, desde su tarea docente, la formación matemática de los estudiantes en sus comienzos en la universidad y por impulsar una adecuada enseñanza de la Geometría en los futuros profesores de Secundaria. En una entrevista informal con Juan antes de empezar a incubar este capítulo, me comentaba que una constante en sus clases, tanto para los estudiantes futuros matemáticos como, en sus últimos años, para los estudiantes del Master de Formación del profesorado de Secundaria,

ha sido el desarrollo de la intuición matemática y las conexiones de los conceptos matemáticos con la realidad: "*Los alumnos tienen una experiencia inmensa que se puede utilizar en la Geometría Elemental. En particular, pienso en su familiaridad con la existencia y propiedades de la Geometría. Esta familiaridad procede de fuera de las clases de matemáticas, de la vida cotidiana, lo que debemos considerar como una situación especialmente favorecedora. Por eso continuamente usaba ejemplos en las clases de ese tipo. Convencer de que aquello tiene un sentido que va más allá del mero formalismo de una teoría acabada*" (conversación informal 14 de marzo de 2012). Estas palabras del profesor Tarrés me evocaron otras dichas por René Thom (1972): "*Se llega al rigor absoluto, solo eliminando significado... y si se debe elegir entre rigor y significado, elegiré este último. Es la elección que se ha hecho en matemática, en donde casi siempre se trabaja en una situación semi-formalizada, con un metalenguaje que es el habla ordinaria, no formalizada*". "*La tendencia modernista representa un aumento de la cultura en detrimento de la naturaleza; es, en el estricto significado del término, una preciosura. Pero si la preciosura tiene, a veces, encanto en arte y en literatura, puede no tenerlo en matemática*".

El profesor Tarrés siempre ha sido consciente de las dificultades que entraña la exposición elemental de los fundamentos de la Geometría, de ahí su interés en crear y elegir el "significado", como ha quedado evidenciado en varios de sus trabajos, sobre todo los que contribuyen a la comprensión del concepto de Dimensión o de Espacio Abstracto (Tarrés, 1991, 1994 y 2011a). La forma de generar significado para sus alumnos siempre ha sido a través de conexiones con la realidad. Por ejemplo, en una de sus conferencias más recientes en la Universidad de Santander, nos planteaba una serie de preguntas para ayudar a reflexionar sobre el espacio. Decía:

> "*Quiero que pensemos juntos qué entendemos por espacio en Matemáticas y por qué se ha llegado al concepto de espacio que se utiliza en la actualidad, a través de las siguientes cuestiones:*
>
> *¿Se puede pasar realmente al otro lado del espejo, o sólo es posible en un mundo de sueños y fantasía? ¿Necesitó Alicia sumergirse en otro espacio y utilizar otra geometría?*
>
> *¿Cómo podemos interpretar las diferentes visiones que nos ofrece Internet de una determinada panorámica al ir aproximándonos a la misma? ¿Qué conclusión se puede sacar al comprobar que los detalles de aquella zona y las relaciones entre los diferentes objetos son cada vez más nítidos?*
>
> *¿Qué visión de una ciudad tiene el viajero que se desplaza por ella utilizando solamente el "Metro"? ¿Podrá ser capaz de relacionar entre sí los diferentes lugares que ha visitado? ¿Tendrá conciencia de cómo es aquella ciudad con la simple contemplación del plano del Metro?*
>
> *¿Qué espacio ha querido representar un pintor al crear y ejecutar su obra? ¿Expresa la misma clase de espacio un cuadro del Renacimiento que otro de Dalí o Magritte, por ejemplo? ¿Qué pensar de los dibujos de Escher? ¿Qué nos quiere decir Euclides en sus Elementos cuando postula que "una recta se puede prolongar indefinidamente"? ¿En qué espacio se debe prolongar? ¿Volverá el alguna vez sobre sí misma*?" (Tarrés, 2011b).

Para el profesor Tarrés la Geometría es comprendida, en el sentido clásico de la palabra, cómo un área que tiene mucho que ofrecer como gimnasia razonadora y como depósito de ejemplos que ayuden a comprender el mundo, la matemática, las ciencias naturales y el arte (ver por ejemplo, Tarrés, 2011a).

Se puede afirmar que de forma constante en sus escritos, ha puesto de relieve la función central de la Geometría en el desarrollo de la matemática y su conexión con la sociedad. Para Juan Tarrés los procesos intuitivos y la visualización aparecen como algo profundamente natural, tanto en el nacimiento del pensamiento geométrico como en el descubrimiento de nuevas relaciones entre los objetos matemáticos y también, naturalmente, en la transmisión y comunicación propias de la actividad matemática. Compartimos completamente con él esta visión, la cual tomamos como punto de partida para la realización de este artículo.

Por tanto, como tema central hemos elegido el razonamiento visual o los procesos de visualización en el aprendizaje geométrico a nivel universitario. A través de algunos resultados procedentes de la investigación en Educación matemática, trataremos de poner de manifiesto la naturaleza de esta visualización de los estudiantes en situaciones de aprendizaje que podría servir de aval en la práctica docente.

2. Razonamiento visual y visualización

A lo largo de estas páginas utilizaremos los términos razonamiento visual y visualización indistintamente, por lo que, antes de avanzar, tomaremos la resolución del siguiente problema para hacernos una idea sobre el razonamiento visual de una forma más concreta: *Hallar el lugar geométrico de los puntos, para los cuales la suma de las distancias a dos rectas dadas, "a" y "b", que se cortan, sea igual a una longitud dada.*

Una forma (global) de comenzar es argumentar que el lugar tiene que estar contenido en una región acotada del plano, porque cualquier punto que esté lejos está necesariamente lejos de una de las rectas. Otra forma más local de comenzar a resolver el problema es preguntarse si cualquier punto del lugar geométrico descansa sobre las rectas dadas, y comenzar a buscar a lo largo de estas rectas. Esta búsqueda se puede aproximar dinámicamente comenzando en el punto de intersección y moviéndonos a lo largo de las dos rectas. Al proceder así, la distancia desde la otra recta crece desde cero sin límite, por lo tanto en un cierto momento pasa por un punto que pertenece al locus. Análogamente, se pueden identificar cuatro puntos. El lugar es un rectángulo cuyas esquinas son los cuatro puntos (Figura 1).

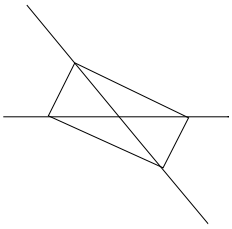


Figura 1: Solución del problema

Establecer esto no es trivial, necesitándose de detallados argumentos analíticos, los cuales se pueden basar en las proporciones de los triángulos semejantes. El anterior

argumento se puede considerar esencialmente como información visual. El razonamiento visual que hemos utilizado puede ser global o local, dinámico o estático, pero no es meramente perceptivo, implica argumentos analíticos que van dirigiendo cada etapa de la resolución.

En este artículo vamos a entender la visualización desde una concepción global: "*Visualización es la capacidad, el proceso y el producto de la creación, interpretación, uso y reflexión sobre figuras, imágenes, diagramas, en nuestra mente, sobre el papel o con herramientas tecnológicas con el propósito de representar y comunicar información, pensar y desarrollar ideas y avanzar la comprensión* "(Arcavi, 2003:217). La visualización como camino para "*ver lo invisible*", idea que enlaza con la intuición de lo abstracto señalada por Tarrés (1991, 1994). Junto a la definición expresada queremos hacer notar también que la visualización es la "*intencionalidad* "(Gianquinto, 1992) que no está presente en el mero ver. La consideramos "*una manera de ver las cosas*" (Davis, 1993). Esta expresión de Davis sugiere que los conceptos matemáticos son "*cosas*"para la persona en cuestión, y por lo tanto, "*una manera de mirar*" es una síntesis (a menudo) tácita de comprender las propiedades de estas cosas y requiere de una comprensión de los conceptos más allá de la presentación visual.

3. La actividad del matemático ejemplo de visualización

Una de las mayores aportaciones que han hecho la Filosofía y la Historia de la matemática es considerar la matemática como una ciencia temporal y conectada con la sociedad que le ha permitido su desarrollo. Gianquinto (2005) distingue varias fases en la actividad global del matemático: descubrimiento, explicación, justificación y aplicaciones. Estas fases ponen de manifiesto facetas del trabajo matemático, algunas de ellas con influencia implícita en la docencia. El contexto de descubrimiento precisa las condiciones que permiten el hallazgo y la elaboración de los conceptos a partir de la resolución de problemas. La explicación matemática a menudo involucra imágenes, representaciones, diagramas o imágenes mentales. La justificación se relaciona con la forma en que un resultado se presenta, se defiende, se justifica en una comunidad investigadora. Estas diferentes fases o contextos de la actividad del matemático no se refieren a lo puramente científico, sino que, a lo largo del pasado siglo, distintos matemáticos han señalado la necesidad de tener en cuenta en la invención matemática la naturaleza psicológica, como es el caso de los ensayos de Hadamard (1908/1945) o, posteriormente, los trabajos de Lakatos y Kuhn que permitieron enriquecer el contexto de descubrimiento, introduciendo una perspectiva más sociológica, como un contexto destinado a favorecer el trabajo de los matemáticos: *"como seres humanos que hacen avanzar la comprensión humana de las matemáticas"* (Thurston, 1995).

Por tanto, definir las matemáticas a partir de la actividad de los matemáticos nos obliga a mirar sus trabajos para comprender mejor la naturaleza y el contenido de las matemáticas. Para situar la relevancia de la visualización en la enseñanza universitaria nos gustaría tener en cuenta algunos testimonios de matemáticos que nos han precedido. El siguiente testimonio sobre el papel de la visualización, en el que se explicita la influencia de la imagen en los procesos del pensamiento matemático lo tomamos de Hadamard:

> "*Yo mismo he dado una demostración simplificada de la parte (a) del teorema de Jordan. Por supuesto, mi demostración es completamente arit-*

> *metizable (de otro modo debería ser considerada inexistente), pero al construirla nunca he cesado de pensar en el diagrama (pensando solamente en una curva muy retorcida) y así lo hago cuando la recuerdo. No puedo siquiera decir que he verificado explícitamente (o que puedo verificar) cada paso del argumento en cuanto a su aritmetizabilidad (con otras palabras, el argumento aritmetizado no aparece en general en mi plena conciencia). Sin embargo, que cada paso del argumento puede ser aritmetizado es incuestionable tanto para mí como para cualquier matemático que quiera leer la demostración. Yo puedo darlo inmediatamente en su forma aritmetizada, lo cual demuestra que esa forma aritmetizada está presente en mi conciencia marginal*" (Hadamard (1945, p.103).

Otros matemáticos y físicos perspicaces describen su pensamiento como dominado por imágenes. Con frecuencia las imágenes son visuales, e incluso pueden ser somatosensoriales. No es sorprendente que Benoit Mandelbrot, que ha dedicado toda su vida a la geometría fractal, diga que piensa siempre en imágenes. En cuanto a Albert Einstein, según cita Hadamard (1945), no tenía dudas acerca del proceso: "*Las palabras del lenguaje, tal como se escriben o se hablan, no parecen desempeñar papel alguno en mi mecanismo de pensamiento. Las entidades psíquicas que parecen servir como elementos en el pensamiento son determinados signos o imágenes más o menos claras que pueden reproducirse y combinarse "voluntariamente". Existe, desde luego, una cierta conexión entre estos elementos y los conceptos lógicos relevantes. También es evidente que el deseo de llegar finalmente a conceptos conectados de forma lógica es la base emocional de este juego más bien vago con los elementos anteriormente mencionados". Y más adelante, en el mismo texto, lo explicita de forma todavía más clara: "Los elementos anteriores mencionados son, en mi caso, de tipo visual y muscular. Las palabras u otros signos convencionales sólo han de buscarse laboriosamente en una fase secundaria, cuando el juego asociativo citado se halla suficientemente establecido y puede reproducirse a voluntad*" (A. Einstein, citado en J. Hadamard (1945)).

Estos testimonios sugieren que el principal contenido de nuestro pensamiento son imágenes, con independencia de la modalidad sensorial en la que son generadas. Nuestra percepción se realiza prioritariamente a través de la visión, por tanto, no debe sorprender que esta actividad de matematización tenga un apoyo continuo en lo visual. Pero no debemos pensar que este apoyo se limita únicamente a actividades perceptibles por la vista, como pueden ser las propias de la Geometría, sino que en actividades más abstractas también desempeña un importante papel como una intuición de lo abstracto, como la aportación sobre la Topología General desde sus comienzos hasta Hausdorff, descrita por Tarrés, así nos lo muestra (para más desarrollo de este aspecto ver el capítulo de Capi Corrales en este mismo volumen).

Escondidos tras estas representaciones o imágenes, existen en realidad numerosos procesos que guían la generación y el despliegue de dichas imágenes. Las investigaciones en Educación matemática indican que estos procesos utilizan reglas y estrategias encarnadas en representaciones disposicionales, representaciones que puede favorecer una comunicación externa adecuada. Coincidimos con otros autores cuando señalan que una labor importante del experto matemático "*en su tarea de formación de los más jóvenes, debe consistir en tratar de transmitir no solamente la estructura formal y lógica del quehacer matemático en este campo particular, sino también, y probable-*

mente con mucho más énfasis, estos aspectos estratégicos e intuitivos de su oficio, que por otra parte son probablemente mucho más difíciles de hacer explícitos y asimilables para los estudiantes, precisamente por encontrarse muchas veces situados en los sustratos menos conscientes de la propia actividad del experto" (Guzmán, 1996, p. 34).

4. Pensamiento Geométrico: Génesis de razonamiento visual, instrumental y discursivo

En las últimas décadas la visualización en Educación matemática se reconoce como un aspecto importante del razonamiento matemático y los procesos de resolución de problemas. Varias investigaciones han demostrado que las actividades que promueven la construcción de las imágenes pueden mejorar enormemente el aprendizaje de las matemáticas (Presmeg, 2006; Stylianou, 2002; Rivera, 2010, Tall, 1991), contribuyendo significativamente a la profundidad de la comprensión en los estudiantes.

En el estudio de los procesos de razonamiento matemático geométrico el papel de la intuición y la visualización es clave (Duval, 2005) y así ha sido señalado en los distintos modelos de aprendizaje (Mammana, y Villani, 1998). Aquí aludiremos brevemente a dos de ellos: el modelo de Van Hiele (Van Hiele, 1986), procedente de la escuela holandesa, y el de Houdement y Kuzniak (1998, 2006 y 2010), en el ámbito de la escuela francesa.

El modelo de Van Hiele está constituido por dos componentes: a) la descripción de los distintos tipos de razonamiento geométrico de los estudiantes a lo largo de su formación matemática, que van desde el razonamiento intuitivo en las etapas iniciales hasta el formal y abstracto de los estudios superiores; b) la delineación de un esquema de enseñanza en cinco fases con el que el profesor pueda organizar la actividad en sus clases a fin de que el alumnado pueda alcanzar el nivel de razonamiento superior. Por su parte, el modelo de Espacio de Trabajo de la Geometría (ETG) y paradigmas, que destacan que en el dominio de la Geometría aparecen claramente tres paradigmas que se designan bajo los términos de Geometría I (o Geometría natural), Geometría II (o Geometría natural axiomática) y, finalmente, Geometría III (o Geometría axiomática formal). La idea que sustenta este modelo es que sólo se puede hablar de trabajo geométrico cuando la actividad del alumno es a la vez lo suficientemente coherente y compleja como para permitir la puesta en ejecución de una actividad de raciocinio. De esta manera, en cierto modo, hacen suyo el pensamiento de Gonseth (1945, p. 72): "*Ser geómetra significa no confundir una evidencia nacida de la intuición con una información experimental, el resultado de una experiencia con la conclusión de un raciocinio*".

Estos autores introducen dos niveles conectados en la estructuración del ETG: el nivel epistemológico y el nivel cognitivo:

1. *El nivel epistemológico.* La actividad geométrica en su dimensión puramente matemática se caracteriza por tres componentes: Un espacio real y local, como material de apoyo con un conjunto de objetos concretos y tangibles, un conjunto de artefactos, tales como instrumentos de dibujo o de software y un marco teórico de referencia sobre la base de definiciones y propiedades. Estas componentes no están simplemente yuxtapuestas, sino que se deben organizar con un objetivo preciso en función del ámbito matemático en su dimensión epistemológica. Esto justifica el nombre de plano

epistemológico dado a este primer nivel. En este marco teórico, el concepto de paradigma geométrico reúne a los componentes de este plano epistemológico. Cuando una comunidad se pone de acuerdo sobre un paradigma, podrá formular problemas y organizar sus soluciones con herramientas o estilos de pensamiento preciso que da lugar al ETG de referencia.

2. *El nivel cognitivo*. Un segundo nivel, centrado en la articulación cognitiva de los componentes del ETG. Este plano nos ayuda a entender cómo los grupos, y también las personas particulares hacen uso y adecúan el conocimiento geométrico en la práctica. Siguiendo a Duval (2005) estos autores destacan tres procesos cognitivos implicados en la actividad geométrica:

- Una visualización del proceso conectado a la representación del espacio y el material de apoyo.
- Un proceso de construcción determinado por instrumentos (reglas, compás, manejo de software, etc.) y configuraciones geométricas.
- Un proceso discursivo que transmite la argumentación y las pruebas.

Este enfoque busca comprender mejor la creación y desarrollo de todos los componentes y niveles mostrados en el diagrama de la Figura 2. El trabajo geométrico se ve como un proceso que implica la creación, desarrollo y transformación. Todo el proceso se estudia a través de la noción de génesis, utilizado en un sentido general que se centra no sólo en el origen, sino también en el desarrollo y la transformación de las interacciones. A través del proceso de transformación, se estructura el espacio de trabajo geométrico.

Los dos niveles, cognitivos y epistemológicos, necesitan ser articulados con el fin de garantizar un trabajo geométrico completo y coherente. Este proceso supone una serie de transformaciones que es posible identificar a través de tres génesis fundamentales, como se muestra en la Figura 2:

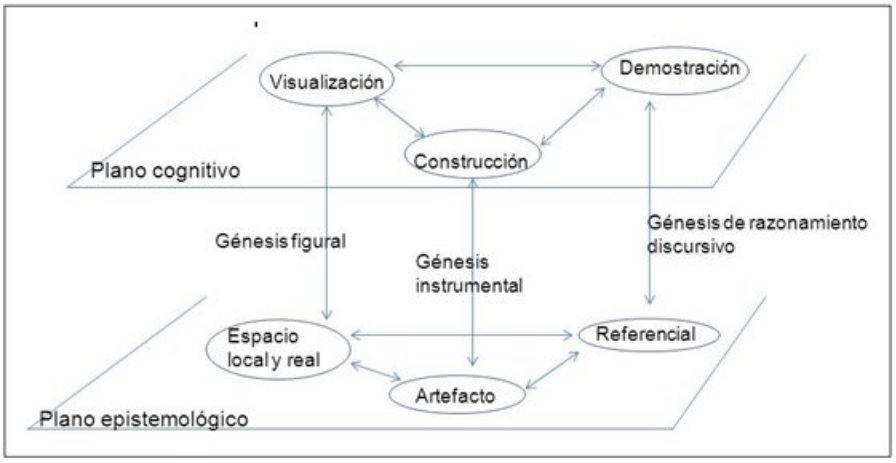


Figura 2: Espacio de trabajo geométrico: planos y génesis (Kuzniak, 2011)

1. *Una génesis figurativa y semiótica* que proporciona a los objetos tangibles su estado de funcionamiento de los objetos matemáticos.

2. *Una génesis instrumental* que transforma los objetos en las herramientas en el proceso de construcción.

3. *Una génesis discursiva* de la prueba que da sentido a las propiedades utilizadas en el razonamiento matemático.

Las ciencias cognitivas han puesto de relieve los procesos para el estudio del pensamiento geométrico: percepción, lenguaje y acción. En el lenguaje de la Geometría, la visión está constituida por la percepción que conduce a los procesos de visualización. La acción se refleja fuertemente en los procesos de construcción. Finalmente, en el marco de la Geometría la articulación de los procesos de razonamiento está estrechamente asociada a las cuestiones de inferencia y toma de decisión. En definitiva, cada componente del trabajo geométrico está asociada a estos procesos cognitivos. Estudiar estas génesis y las conexiones entre ellas en ambientes tecnológicos puede suponer un avance para ofrecer a un profesor conocimiento estratégico para aprender a enseñar con tecnología (ver sección 5.3).

5. Algunos resultados de nuestro contexto

En este apartado se presentan algunos resultados de estudios empíricos realizados con estudiantes de Matemáticas sobre el rechazo o la preferencia a utilizar visualización en el aprendizaje, sobre el nivel de razonamiento de los estudiantes y por último sobre el aprendizaje de la Geometría en contextos tecnológicos.

5.1. Rechazo o preferencia por lo visual en los estudiantes

Distintas investigaciones han señalado que una de las dificultades que pueden encontrar los profesores para trabajar la matemática mediante razonamiento visual es el rechazo o la no valoración por parte de los estudiantes (Eisenberg y Dreyfus, 1991; Eisenberg, 1994). En un estudio con 29 estudiantes de primer curso de la Licenciatura de Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid (Souto y Gómez-Chacón, 2011), evaluando la influencia del método visual para la comprensión del concepto de integral, se puso de manifiesto el uso limitado que hacen los estudiantes del registro visual y la dificultad cognitiva propia del uso del registro visual, como una de las causas para el rechazo de la visualización. Para este grupo de estudiantes, el concepto de integral se identifica con el cálculo de primitivas y con la aplicación indiscriminada de la regla de Barrow, la integral, para ellos, no comporta ningún proceso de convergencia ni tampoco ningún aspecto geométrico. Es, por tanto, un proceso puramente algebraico. La mayoría de los problemas que se les plantearon estaban basados en conceptos que tiene una interpretación visual, y esto hizo que los estudiantes no pudieran hacer muchos de los problemas de la lista, ya que "*parecen no haber aprendido*"a explotar las representaciones visuales asociadas con los conceptos y muestran deficit en la coordinación entre el registro visual y analítico o en la combinación de ambos.

En otro de los estudios sobre pensamiento geométrico y aprendizaje con sistemas de geometría dinámica (SGD), realizado también en nuestra facultad, con 30 estudiantes formándose como profesores de Secundaria (Gómez-Chacón, 2012) se buscó detectar factores que favorecían o inhibían el uso del pensamiento visual, focalizando en qué dificultades estaban generadas por las creencias sobre el razonamiento visual y qué tipologías de emoción se derivaban de ellas. Los datos pusieron de manifiesto que todos los estudiantes consideraban que el razonamiento visual es algo central en la resolución de problemas matemáticos. Sin embargo, pudimos observar que frente a esta misma creencia se produjeron emociones diferentes. En un primer momento estas emociones fueron categorizadas como: gusto (77 %), disgusto (10 %), e indiferencia (13 %) hacia el objeto. Las razones que aducen para justificar estas emociones son: a) placer/gusto como una indicación de que uno puede lograr un conocimiento experto (30 % de los estudiantes); b) placer/gusto cuando se progresa en la esquematización y se logra una forma conceptual suave (35 %); c) placer y gusto como control y creación de aprendizaje profundo (40 %); d) placer y gusto porque está asociado con aspectos intuitivos y lúdicos del conocimiento matemático (20 %); e) emociones de indiferencia ante la visualización (13 %); f) no placer y gusto cuando la visualización tiene una demanda cognitiva más fuerte (10 %).

Una respuesta similar se obtuvo cuando se exploró las creencias relacionadas con el uso de software de Geometría dinámica como una ayuda para la comprensión y la visualización del concepto de lugar geométrico. Todos los estudiantes afirmaron que les resultó útil y el 80 % expresaron emociones positivas sobre la base de su fiabilidad, rapidez de ejecución y el potencial para desarrollar su intuición y visión espacial. Agregaron que la herramienta les ayudó a superar bloqueos mentales y mejorar su confianza y motivación. Como futuros docentes hicieron hincapié en que GeoGebra puede favorecer no sólo el pensamiento visual, sino que ayuda a mantener una vía afectiva productiva. Indicaron que el trabajo con la herramienta les favorece creencias positivas hacia las matemáticas y hacia sí mismos como aprendices y estimula su propia capacidad y voluntad de participar en el aprendizaje de las matemáticas. En síntesis, estos resultados muestran que la valoración o rechazo por la visualización está ligado al área de conocimiento, así como al uso de determinados instrumentos (atribución de gran valor al aprendizaje con ordenador). La elección de la representación en la que se resuelve un problema parece depender tanto del propio problema, como de las preferencias y habilidades visuales personales.

5.2. Niveles de razonamiento de los estudiantes

Otro de los estudios que nos ha aportado datos sobre lo que les sucede a nuestros estudiantes y que pudiera ofrecer pistas para la acción docente en pensamiento geométrico avanzado es una investigación que tenía por objeto el estudio del razonamiento geométrico en la transición Bachillerato a la Universidad (Gómez-Chacón, Sevilla y Castrillón, 2012). Siguiendo el modelo de Van Hiele anteriormente mencionado, nos centramos en la identificación de distintos niveles de razonamiento de los estudiantes (visualización, deducción informal, deducción formal, rigor y abstracción). El grupo de estudio estuvo formado por 22 estudiantes de segundo de Bachillerato y 28 estudiantes de primero de Licenciatura de Matemáticas.

Este trabajo ha tratado de poner de relieve que gran parte de la dimensión de

dificultad del paso de la Matemática en la transición del bachillerato a la universidad en el área de Geometría Avanzada está estrechamente ligada a los procesos cognitivos del razonamiento geométrico referidos a la deducción formal y a los procesos de rigor y abstracción implicados en esa deducción formal, mediados por la visualización y análisis de objetos.

Como instrumento para la recogida de datos se elaboró un cuestionario compuesto por problemas de Geometría que requieren del resolutor una secuencia que permite identificar niveles de razonamiento. Este cuestionario fue aplicado de forma colectiva pidiéndole de forma detallada el protocolo de resolución. Comentamos los resultados de uno de los problemas:

Problema

Sabemos que un modo que facilita contar el número de vértices, aristas, caras, etc., de un cubo o hipercubo, es reducir una zona y ampliar otra de la figura, aplastar y obtener la nueva la figura reducida en una dimensión respecto a la de partida.

a) Así, de un cubo de dimensión 3, quedaría en dimensión 2, según se muestra en el dibujo siguiente. Anota:

-el número de vértices:
-el número de aristas:
-el número de caras:

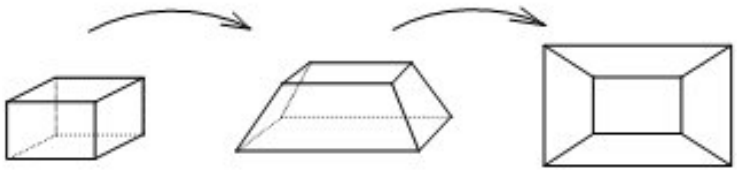


Figura 3: Cubo

b) Dibuja lo que ocurriría si aplastamos a dimensión 1 un cuadrado de dimensión 2 y anota:

-el número de vértices:
-el número de aristas:

c) El hipercubo de dimensión 4 ¡no lo puedes dibujar!. Sin embargo, ¿podrías dibujar la figura aplastada que resultaría en dimensión 3? Anota en su caso:

-el número de vértices:
-el número de aristas:
-el número de caras:
-el número de cubos:

A fin de recoger y analizar la información de las producciones de los estudiantes en relación con los niveles de Van Hiele, se determinó y categorizó una serie de niveles

de desempeño (acompañados de sus correspondientes indicadores) a contrastar en las respuestas de los alumnos. Estos niveles van recorriendo de forma progresiva las dificultades a superar en cada uno de los niveles según el Modelo de Van Hiele. Los niveles analizados en los estudiantes fueron los siguientes:

Nivel 1 (Visualización/ Análisis). [1] Análisis y conteo de los elementos del cubo (Indicador: Contar bien elementos cubo).

Nivel 2 (Deducción informal). Deducción informal y ordenación. Dibujo de un cuadrado reducido y conteo de elementos del cuadrado (Indicadores: Dibujar cuadrado reducido. Contar bien elementos del cuadrado).

Nivel 3 (Deducción formal). Deducción formal. Intentar dibujar hipercubo reducido como consecuencia de una compresión del proceso y reglas de reducción de dimensión a partir de lo aprendido en el caso de dimensión 2 ó 3. (Indicador: Intentar dibujar hipercubo reducido).

Nivel 4 (Rigor y abstracción). Rigor y abstracción. Dibujar bien el hipercubo reducido, distinguiendo correctamente sus elementos así como la forma que tendrán cada uno de ellos. Como consecuencia se puede hacer un conteo correcto de los mismos, en el que además se identifican correctamente las hipercaras, ingrediente que no es una mera generalización del caso tridimensional, sino fruto de un proceso de abstracción e inducción. (Indicadores: Dibujar hipercubo reducido. Contar bien elementos del hipercubo).

Del análisis de los datos se desprenden los siguientes cuatro asertos:

- El rigor y abstracción propia de la enseñanza de la Geometría avanzada y relacionados con el Nivel 4, sólo lo muestra el 11 % de alumnos de universidad y ningún alumno de bachillerato.
- La deducción formal y la imaginación espacial, relacionadas con el Nivel 3, sólo son alcanzadas por el 43 % de los alumnos de universidad y ningún alumno de bachillerato.
- La deducción informal, relacionada con el Nivel 2, es alcanzada por el 43 % de alumnos de universidad y por un 32 % de los alumnos de bachillerato.
- Los indicadores asociados a la visualización relacionada con el Nivel 1, son alcanzados por el 68 % de universitarios y por el 55 % de alumnos de bachillerato.

5.3. Visualización y trabajo geométrico con ordenador

Un objetivo principal en las investigaciones recientes consiste en caracterizar y especificar la naturaleza exacta del trabajo geométrico realizado por los estudiantes de matemáticas en los contextos tecnológicos con programas de Geometría dinámica (SGD). Respecto al aprendizaje geométrico en contextos tecnológicos son varias las cuestiones que se nos plantean: ¿Cómo se articulan las tres tipologías de génesis necesarias para la construcción de pensamiento geométrico en la integración de software de sistemas dinámicos (Cabri, GeoGebra, etc.) en el trabajo geométrico? ¿Qué rol desempeña el instrumento (software, p.e. GeoGebra) en la construcción del espacio geométrico? ¿Cómo interviene la utilización de los SGD en el paso de la Geometría

[1] Este nivel integra el Nivel 0 y 1 del modelo de Van Hiele.

I a la Geometría II (axiomática natural) o de la Geometría II a la III (axiomática formal), particularmente en los procesos visualización e intuición geométrica y cómo influye el uso de este software? ¿Qué nuevo rol tienen las propiedades geométricas cuando se usa software dinámico? ¿Cómo puede hacer un profesor en su actividad docente que el artefacto (p.e. software de SGD) sea un instrumento matemático?

En nuestro caso, utilizando el marco teórico de los espacios de trabajo geométricos (ETG) mencionado en la sección 3 y el enfoque instrumental (Artigue, 2002) hemos podido constatar varios hechos en los estudiantes: no dominio del ciclo de razonamiento y la necesidad de profundizar en la visualización icónica versus la visualización no icónica.

5.3.1. Ciclo de razonamiento

Se constató el carácter incompleto del ciclo de trabajo geométrico del alumnado (Gómez-Chacón y Kuzniak, 2011). Para dominar todo el ciclo de razonamiento, los estudiantes deben dominar al mismo tiempo las técnicas aplicadas en tres génesis - figurativa, instrumental y discursiva- y mostrar un grado de flexibilidad cognitiva en el uso de diferentes facetas del trabajo geométrico. Volver al instrumento para poner fin al ciclo puede ser problemático entre los estudiantes que apoyan su investigación en la resolución de los problemas sobre los aspectos figurativos y discursivos cuando no hay congruencia entre el instrumento teórico y un instrumento informático. Este carácter incompleto del ciclo de razonamiento fue constatado en dos experimentaciones, una primera con 30 estudiantes de matemáticas, confirmada por una experimentación complementaria con cuatro grupos de clase, con un total de 98 estudiantes.

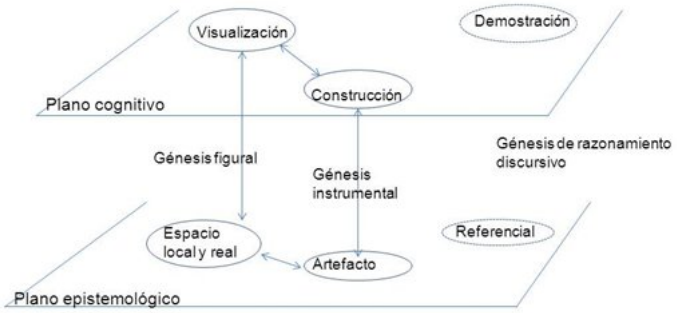


Figura 4: Diagrama de trabajo geométrico que privilegia la génesis instrumental

También, el estudio muestra que al punto de vista sobre el desarrollo del razonamiento geométrico hay que añadir el mantenimiento de la construcción de una génesis discursiva relacionada con los elementos visuales de la deconstrucción de figuras. Esta forma de razonamiento requiere una reflexión sobre el papel de las definiciones y teoremas en el proceso de desarrollo de lo geométrico de cara a que los estudiantes pasen de un trabajo práctico perteneciente a Geometría I a una Geometría más axiomática (Geometría II).

5.3.2. Visualización icónica versus visualización no icónica

Dos modos opuestos de funcionamiento cognitivo en los cuales los procesos de reconocimiento de los objetos representados difieren radicalmente en el trabajo geométrico son la *visualización icónica* y la *visualización no icónica* (Duval, 2005). Si tenemos en cuenta la complejidad del proceso puesto en juego en el acto de "*ver*", "*ver*"conlleva siempre dos niveles de operaciones que son diferentes e independientes uno del otro, aunque frecuentemente éstos se fusionan en la sinergia del acto de ver. Estos dos niveles de operaciones son el reconocimiento discriminativo de las formas y la identificación de los objetos correspondientes a las formas reconocidas. El problema cognitivo mayor es saber cómo se realiza el paso de un reconocimiento discriminativo de formas a la identificación de los objetos a ver.

En la *visualización icónica* el reconocimiento de lo que representan las formas se hace por el parecido con el objeto (real) que representa, o en su defecto, por comparación con un modelo tipo de formas (una figura particular sirve de modelo, y las otras figuras son reconocidas según su grado de parecido con este modelo).

La *visualización no icónica* reconoce las formas, bien en virtud de las limitaciones internas de organización que hacen imposible ciertas deformaciones o ciertas aproximaciones, bien en virtud de deducciones efectuadas discursivamente en función de las propiedades que han sido enunciadas en las definiciones o en los teoremas, o bien a partir de hipótesis que declaran lo que representa una figura.

Hemos podido constatar que en el aprendizaje geométrico con software dinámico se produce una gran ruptura entre estas dos diferentes formas de visualización. Y esta ruptura es muy importante, ya que sólo la visualización no icónica es pertinente para los procesos geométricos que se deben producir. Tomemos un ejemplo, que también fue trabajado por Tarrés (2010) en su forma analítica y desde distintos tipos de registros. El problema es el siguiente: *Una escalera que mide 5 metros está apoyada por su extremo superior en una pared vertical, y su extremo inferior está situado en el suelo ¿Cuál es el lugar geométrico descrito por el punto medio M de la escalera al resbalar y caer ésta? (Y si el punto no es el punto medio de la escalera).*

Consideramos que se trata de un problema de nivel medio alto para nuestros estudiantes. El enunciado está formulado sin consignas explícitas de construcción. Es una situación realista de fácil comprensión. No obstante, la traslación a construcción con el software GeoGebra no es evidente, es necesario ayudarse de un objeto auxiliar. El razonamiento visual-analítico requiere superar la dificultad inicial de construcción de la escalera a través de un objeto auxiliar, en ese caso GeoGebra ofrece el locus de forma precisa. Para el registro analítico o algebraico es necesario situar cinco puntos sobre el locus y después trazar con el comando "*cónica que pasa por tres puntos*". En este caso se obtiene la ecuación algebraica precisa. En lo referente al razonamiento instrumental que debe seguir el estudiante, dos momentos son claves en este problema: 1) La construcción de la escalera con una circunferencia auxiliar, 2) Y si se quiere estudiar el lugar que describen los puntos sobre la escalera, estos puntos deben estar determinados de forma precisa (punto medio, 1/4).

En esta tipología es clave la visualización no-icónica (para una resolución completa de elementos de visualización no-icónica en lápiz y papel ver Tarrés (2010)). A continuación comentamos brevemente algunas de las dificultades de los alumnos en una resolución con ordenador (GeoGebra). Una primera tipología de dificultad son las construcciones estáticas (tratamiento discreto, Fig. 6). En esta tipología el alumno

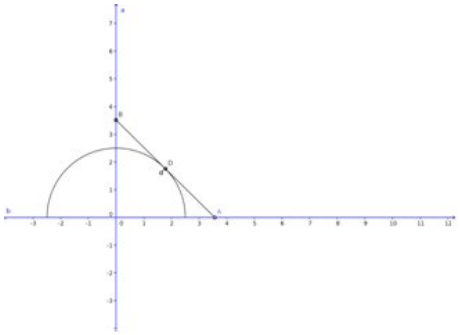


Figura 5: Resolución del problema de la escalera

utiliza GeoGebra como una pizarra avanzada pero no utiliza el dinamismo que propicia el software, sólo repite las construcciones para un conjunto de puntos. Para trazar el lugar geométrico se ayudan del comando cónica que pasa por 5 puntos.

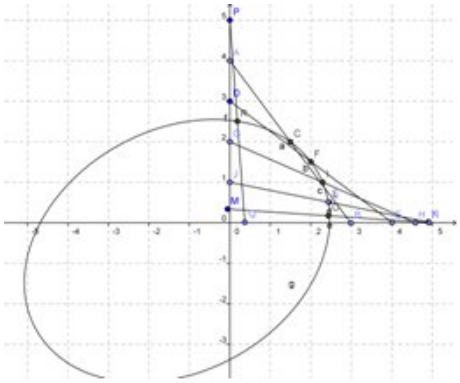


Figura 6: Resolución de alumno 13

Otra segunda tipología de dificultad es la definición no correcta de la construcción (punto libre). El alumno resuelve aparentemente el problema pero la solución impide la utilización de las herramientas de GeoGebra. Para utilizar la herramienta lugar geométrico es necesario que los puntos que lo definen estén correctamente determinados (no pueden ser puntos libres). En esta aproximación el alumno, en el mejor de los casos, puede obtener una representación parcialmente válida pero que no admite ningún tratamiento algebraico con GeoGebra. En este problema, la dificultad está en definir el punto de la escalera que no es el punto medio. Si se toma un punto libre no se podrá utilizar la herramienta Locus.

Como se puede observar en la Figura 7, la solución que se obtiene es visual, aproximada y no da una solución exacta. Los estudiantes de esta tipología de solución quedan absolutamente convencidos y no son conscientes de que su solución es errónea.

Por último, otra tipología de dificultades es la utilización de elementos instrumentales no válidos. Por ejemplo, para este problema se utiliza la herramienta deslizador para desplazar el "*mover*". El alumno se da cuenta de que el "*mover*" hay que aco-

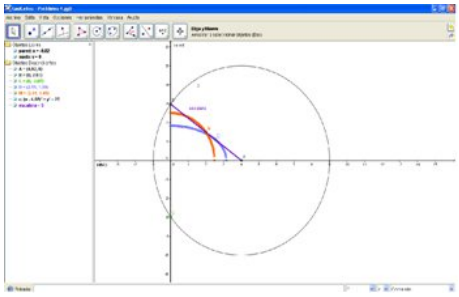


Figura 7: Solución del estudiante 23

tarlo y lo hace a través del deslizador. El problema es que en el sistema GeoGebra el deslizador es un escalar, y por lo que tras ello no se puede utilizar la herramienta lugar geométrico [2]

En una proporción amplia de estudiantes se produce una deficiencia heurística ("*esa incapacidad de ir más allá de lo que se aprecia en un primer vistazo*") en la interpretación geométrica de las visualizaciones, este caso en la comprensión de lugar geométrico desde el punto de vista funcional. A veces, la figura en Geometría funciona como una verdadera representación icónica que deja sin significado la aprehensión discursiva. Coincidimos con Duval cuando afirma que: "*la complejidad de la visualización matemática no radica en sus unidades visuales -que son menos y más homogéneas que para las imágenes- sino en la selección implícita de las variables visuales contrastadas dentro de la configuración de unidades que son relevantes y las que no*"(Duval, 1999, p.15).

¿Se tiene esto en cuenta en la enseñanza? Muchas veces se enseña a construir imágenes, pero esto no es enseñar visualización. En construir incluso algunos alumnos son buenos, pero muchos se quedan en la aprehensión local, y no son capaces de llegar a lo global (ver Gómez-Chacón y Escribano, 2011 y Souto y Gómez-Chacón, 2011 a propósito de la visualización de la integral definida). En la enseñanza es importante diferenciar entre utilizar una figura, manipularla en búsqueda de nuevas ideas y de comprensión, o utilizarla como esquema, como apoyo del proceso deductivo que se sigue. Es decir, en una situación la figura sirve para razonar, para generar nuevas ideas, para inventar, crear. En la otra, la imagen tan sólo tiene un papel explicativo, está subordinado a lo formal (discursivo). Por tanto, de cara a la docencia parece pertinente distinguir dos posibles funciones de las figuras: heurística (para crear, manipular, asociada a la aprehensión operativa); ilustrativa (explicativa, subordinada a las hipótesis y el pensamiento deductivo, asociada a la aprehensión discursiva). Para el estudiante, o para el profesor como mediador en el aprendizaje, no es fácil activar los resortes necesarios para que la figura funcione de forma heurística, como base del pensamiento. Por ejemplo, en el aprendizaje uno de estos resortes podría ser la habilidad de introducir nuevas unidades en la figura, así como las operaciones visuales que definen.

Por otro lado, cuando se trabaja con Geometría dinámica la aprehensión percep-

[2]Hacemos notar que en este estudio se utilizó la versión 3.7; en la actualidad los creadores de GeoGebra han incorporado esta posibilidad.

tual, que sirve para ver las figuras y las visualizaciones icónicas, no siempre conduce a la aprehensión operativa. Por ejemplo, en el problema de la escalera que hemos descrito, la utilización de las representaciones físicas es muy diferente en la Geometría dinámica: qué nos da la información visual y qué esconde toda una visualización no-icónica. Habitualmente la construcción paso a paso con SGD para realizar la representación visual de un problema de lugares geométricos procede del siguiente modo: construir las figuras geométricas basadas en las hipótesis del problema, aplicar las transformaciones geométricas, (mover el punto M a lo largo de una recta A), comprender las relaciones entre la construcción euclídea y la demostración, crear la demostración que involucra y determinada activación de comandos, averiguar las conexiones tanto geométricamente y algebraicamente para llegar a una demostración.

Normalmente los estudiantes cuando resuelven este tipo de problemas utilizan más bien el comando "*Traza*" que "*Lugar geométrico*". Pensamos que una justificación de este hecho puede darse por el punto de vista conceptual geométrico de la definición de Lugar Geométrico en los manuales. Comprender estos aspectos epistemológicos que afecten a la dimensión cognitiva-instrumental de los estudiantes es clave. En los libros de texto la noción de *Lugar geométrico* se introduce vinculada a construcciones con regla y compás, donde su aspecto constructivo y mecánico es claro en el contexto de las aplicaciones (caso1). Pero también, podemos encontrar la noción *Lugar geométrico* en el contexto de las transformaciones, mostrando que estas transformaciones son herramientas muy eficaces para resolver problemas de *Lugares* (caso 2), cuyo significado no es el mismo.

En el primer caso la definición vendría dada en el siguiente modo Definición 1: *Un lugar geométrico es el conjunto de puntos que satisfacen una determinada propiedad expresable a partir de una construcción geométrica realizada con regla y compás.* Ésta es conocida como la aproximación "*clásica*". También, podemos encontrar otro tipo de formulación en el contexto de las transformaciones, en este caso nos referimos a un conjunto de puntos que son imágenes de un conjunto de puntos, se define como la imagen de un objeto bajo una aplicación o transformación. "*Si llamamos f de la función*: $M \rightarrow N = f(M)$, *buscar el lugar geométrico de N es buscar el conjunto de todos los puntos* $f(M)$". En este último caso, *Locus* se define de forma funcional, teóricamente tenemos que considerar que un punto P variable que pertenece a una figura F considerado como un conjunto de puntos (una línea recta, un círculo...) corresponde a un punto P', la imagen de P por una la aplicación f. Locus tiene un doble significado: por una parte legítima el cambio de una figura sintética (un punto global de ver) a una figura como un conjunto de puntos, y permite recomponer la figura. Esta distinción entre trayectoria y locus expresada en estas definiciones se refleja en el software de Geometría dinámica mediante dos herramientas "*Lugar geométrico* " y "*Traza*". Utilizar la herramienta "*Lugar geométrico*" requiere de una aprehensión operatoria para hacer fecunda la intuición de la figura. La visualización no icónica requiere la toma de conciencia de las propiedades que están ligadas a las operaciones que se efectúan, bien para construir una figura o bien para transformarla.

6. Conclusión

En síntesis, en este capítulo se ha argumentado, dando evidencias empíricas que, la articulación entre visualización y razonamiento está en la base de toda actividad

matemática, y en particular de la geométrica. La visualización aparece de forma natural por la propia naturaleza de la matemática -concepto de matematización-; porque nuestra percepción es prioritariamente visual pero también es esencialmente relevante en actividades matemáticas en las que la abstracción parece llevarnos lejos de lo perceptible por la vista. En esos casos, los matemáticos se valen de procesos simbólicos, diagramas visuales y otros procesos imaginativos que les ayuden a desarrollar una intuición de lo abstracto.

También, se muestra que los procesos de visualización no están ausentes de dificultad en la transmisión de la disciplina. Para que una imagen sirva para visualizar, no basta con que se establezcan conexiones parciales de sus elementos con el registro analítico, sino que debe lograrse una visión más global, conjunta, que involucre a todos los elementos y relaciones relevantes, y se realice de forma independiente al registro analítico y especialmente si trabajamos con situaciones de aprendizaje con usos tecnológicos. Parece pertinente estudiar la importancia de los contextos informáticos en las interrelaciones de las tres génesis (figural, instrumental y de razonamiento discursivo) en el espacio de trabajo geométrico. El comportamiento de los estudiantes en situaciones de aprendizaje geométrico con SGD muestra que es necesario añadir una dimensión para el desarrollo de razonamiento geométrico del estudiante que tome en cuenta una línea de construcción de la génesis discursiva articulada con elementos de de-construcción visual.

Por último, no tenemos duda de que desarrollar el pensamiento matemático avanzado de nuestros estudiantes supone trabajar los procesos de representar, visualizar, generalizar, clasificar, conjeturar, inducir, analizar, sintetizar, abstraer y formalizar. Sin embargo, en la educación matemática que ofrecemos, a veces corremos el riesgo de no inculcar el hábito de interpretar y descodificar adecuadamente nuestras visualizaciones, tratando de hacerlas explícitas a nuestro alumnado y traduciéndolas, cuando esto resulte adecuado, a un lenguaje formal. Contar con una enseñanza explícita de los diferentes tipos de visualización para cada una de las cuales se muestre sus codificaciones y descodificaciones, utilidades, conversiones de registros sería un inestimable impulso a la comprensión conceptual de nuestros alumnos. Y como ha mostrado el profesor Tarrés, esta codificación y descodificación está inmersa en todo un cúmulo de intercambios personales y sociales, buena parte de ellos arraigados profundamente en la misma historia de la actividad matemática.

Referencias

[1] Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics, *Educational Studies in Mathematics*. 52(3), 215-24.

[2] Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning* 7(3): 245-274.

[3] Davis, P. J. (1993). Visual theorems. *Educational Studies in Mathematics* 24(4), 333-344.

[4] Duval, R. (1999). Representation, vision and visualization: Cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning. En F. Hitt y M. Santos (Eds.), *Proceedings of the 21st North American PME Conference*, 1, 3-26.

[5] Duval, R. (2005). Les conditions cognitives de lapprentissage de la géométrie: Développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives* 10, 5-53.

[6] Eisenberg, T. (1994). On understanding the reluctance to visualize. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 26, 109-113.

[7] Eisenberg, T. y Dreyfus, T. (1991). On the reluctance to visualize in mathematics. En W. Zimmemann, W. y Cunningham (Eds.) *Visualization in Teaching and Learning Mathematics*, MAA Notes n. 19, 25-37. Washington, D.C.

[8] Giaquinto, M. (1992). Visualization as a means of geometrical discovery. *Mind and Language*, 7, 382 - 401.

[9] Giaquinto, M. (2005). From symmetry perception to basic geometry. In P. Mancosu, K. F. JØrgensen & S.A. Pedersen (Eds.) *Visualization, Explanation and Reasoning Styles in Mathematics* (pp. 31-55). The Netherland: Springer.

[10] Gonseth, F. (1945-1955). La géométrie et le problème de l'espace, *Éditions du Griffon, Lausanne*.

[11] Gómez-Chacón, I. M & Escribano, J. (2011). Teaching geometric locus using GeoGebra. An experience with pre-service teachers, *GeoGebra International Journal of Romania (GGIJRO), GeoGebra The New Language For The Third Millennium*, 2 (1), 209-224.

[12] Gómez-Chacón, I. M & Kuzniak, A. (2011) Les espaces de travail Géométrique de futurs professeurs en contexte de connaissances technologiques et professionnelles. *Annales de didactique et de sciences* 16, 187 - 216.

[13] Gómez-Chacón, I. M (2012) Prospective Teachers' Interactive Visualization and Affect in Mathematical Problem-Solving. *The Montana Mathematics Enthusiast Journal*, vol. 10, 1 y 2.

[14] Gómez-Chacón, I. M; Sevilla, I. y Castrillón, M. (2012) Un estudio en Geometría en la transición Secundaria/Universidad a través de la óptica del modelo de Van Hiele. *Facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid*.

[15] Guzmán, M. de (1996). El rincón de la pizarra. Ensayos de visualización en análisis matemático, *Ediciones Pirámide, S. A.*

[16] Hadamard, J. (1945) The psychology of invention in the mathematical field, *Princeton University Press. Princeton N. J.*

[17] Houdement, C. & Kuzniak, A. (1998). Géométrie et Paradigmes géométriques. *Petit x*, n 51, 5-21.

[18] Houdement, C. et Kuzniak, A. (2006). Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 11, 175-193.

[19] Kuzniak, A. (2011). L'Espace de Travail Mathématique et ses genèses. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 16, 9-24.

[20] Mammana, C. y Villani, V. (Ed.) (1998). *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publisher.

[21] Presmeg, N. C. (2006). Research on visualization in learning an teaching mathematics, *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future*. PME 1976-2006. Ed. Sense Publishers, 205-235.

[22] Rivera, F. D. (2011). *Toward a visually-oriented school mathematics curriculum. Research, theory, practice and issues*. New York: Springer.

[23] Souto, B. & Gómez-Chacón, I. M (2011). Visualization at university level. The concept of Integral, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 16, 217 - 246.

[24] Stylianou, D. A. (2002). On the interaction of visualization and analysis: the negotiation of a visual representation in expert problem solving, *Journal of Mathematical Behavior 21 (2002) 303-317.*

[25] Tall, D. (1991). Intuitions and rigour: the role of visualization in the calculus. En W. Zimmermann & S. Cunningham (Eds). *Visualization in teaching and learning mathematics* (pp. 105-119). Washington: M.A.A.

[26] Tarrés Freixenet, J. (2010). La escalera que se desliza, *Boletín de la Sociedad Puig Adam de Profesores de Matemáticas*, 85, pp 25-36.

[27] Tarrés Freixenet, J. (1991). Historia de la teoría de la dimensión, en *Seminario de Historia de la Matemática I.* (pp. 59-96). Madrid: Universidad Complutense de Madrid.

[28] Tarrés Freixenet, J. (1994). La Topología General desde sus comienzos hasta Hausdorff, en *Historia de la Matemática en el siglo XIX.* (pp. 191-211). Madrid: Edición de la Real Academia de la CC. Exactas, Físicas y Naturales.

[29] Tarrés Freixenet, J. (2011). ¿Cómo paso Alicia al otro lado del espejo? Reflexiones de un matemático sobre el espacio. Conferencia impartida el 23 de marzo de 2011, Universidad de Cantabria. (http://www.matesco.unican.es/talleres_matematicas/transparencias20102011/tarres.pdf)

[30] Tarrés Freixenet, J. (2011). Los espacios abstractos, En Corrales Rodrigáñez C. y Gómez-Chacón, I.M (Ed.) *Ideas y Visualizaciones Matemáticas*, Publicaciones Cátedra Miguel de Guzmán, Facultad de Matemáticas, UCM.

[31] Thom, R. (1972) ¿Existe la matemática moderna? Conferencia pronunciada en el 2 *Congreso Internacional sobre la Enseñanza de la Matemática*, Exeter 1972. Traducido en Conceptos de Matemática, Buenos Aires, n 31, 1974, p. 5-12.

[32] Thurston, W. P. (1995). On Proof and Progress in Mathematics, *For the Learning of Mathematics*, 15(1), 29-35.

[33] Van Hiele, P. (1986). *Structure and insight. A theory of Mathematics Education.* Academic Press.

Un método original de cálculo de curvaturas para la clasificación de subvariedades en espacios homogéneos

José Guijarro y Javier Lafuente

Departamento de Geometría y Topología
Facultad de Ciencias Matemáticas
Universidad Complutense de Madrid
E-28040 Madrid, Spain
jose_guijarro@mat.ucm.es
lafuente@mat.ucm.es

Dedicado a Juan Tarrés con motivo de su jubilación.

ABSTRACT

We show an original method to compute curvatures based on the prolongation of fundamental fields and the integration of their flows.

Key words: curvature, differential invariant, homogeneous space, contact order, jet.

2010 Mathematics Subject Classification: 53A55, 53C30, 53B25.

1. Introducción histórica

Nuestra pequeña historia se remonta al otoño de 1869 cuando el joven S. Lie conoció a F. Klein en el seminario que Kummer daba en Berlín. De esa amistad derivó una mutua influencia en sus ideas. Por un lado Lie estableció y aplicó las transformaciones de contacto al estudio de las simetrías de ecuaciones diferenciales, y por otro lado Klein sentó las bases de una geometría como el estudio de las propiedades invariantes bajo la acción de un grupo, en su famosa disertación en la Universidad de Erlanger en 1872. Con el transcurrir del tiempo, Lie desarrolló en la universidad de Leipzig su teoría de grupos continuos de transformaciones por el que llegó a recibir el premio Lobachevski en 1897, gracias una vez más a la influencia que tuvo su amigo Klein frente a las autoridades académicas rusas. Mientras, desde dicha universidad, Lie iba encontrando un marco adecuado para difundir sus ideas, principalmente entre los jóvenes matemáticos franceses que pasaban un semestre en Leipzig.

A través de uno de estos matemáticos franceses llegó a conocer E. Cartan la obra de Lie y fue tal el interés que despertó en él que en 1894 publicaba su tesis doctoral *Sobre la estructura de los grupos infinitos de transformaciones* marcando un hito importante en esta disciplina. Posteriormente, en 1899 formalizaba la noción de forma diferencial

que ya se usaba durante todo el siglo XIX, introducía la idea de una multiplicación exterior y de una *expresión derivada* que en 1901 modificaba ligeramente dando lugar a lo que hoy conocemos como diferencial exterior. Con ello caracterizaba los grupos de Lie por medio de un conjunto de 1-formas diferenciales invariantes, llamadas hoy en día las formas de Maurer - Cartan. La diferencial exterior de estas formas expresada respecto de ellas mismas da lugar a las ecuaciones de estructura del grupo de Lie. A modo de ejemplo, Darboux ya había usado estas formas y ecuaciones de estructura del grupo ortogonal en el estudio de las superficies.

A partir de aquí se empezó a establecer una doble vía de investigación: por un lado se caracterizaban los grupos de simetrías de ecuaciones diferenciales dando lugar a su clasificación bajo transformaciones de contacto y por otro se clasificaban subvariedades en espacios homogéneos. Es en este último problema donde Cartan introdujo su famoso método de referencias móviles basado en la construcción de un sistema Pfaffiano canónico cuyas variedades integrales son las referencias de Frenet a lo largo de la subvariedad, trabajos que le llevarían a recibir en 1937 el premio Lobachevski que Lie recibiera en su primera edición. Muchos autores desde entonces han querido sentar en un marco teórico este método de Cartan. Y destacamos principalmente el trabajo de G. Jensen de 1977 [6], y más tarde el de M. Fels y P. Olver en 1999 [2], y últimamente el de P. Vassiliou de 2009 [10].

En este trabajo, sin embargo, no pretendemos dar un nuevo marco teórico al problema de clasificación de subvariedades en espacios homogéneos sino más bien dar un nuevo algoritmo de cálculo de los invariantes que clasifican las subvariedades, que no son más que las famosas curvatura y torsión de curvas, o las curvaturas principales de superficies. Dicho algoritmo está basado en el método primigenio de Lie que caracteriza las curvaturas como invariantes diferenciales y que exponemos a continuación.

2. La importancia de las curvaturas

La interpretación de una geometría como el estudio de las propiedades invariantes bajo la acción de un grupo, aunque formalizada por Klein en su famosa disertación aludida antes, tiene su origen en la obra de *Los Elementos* de Euclides. En el estudio de las figuras geométricas planas, la noción de igualdad se establece cuando hay un movimiento del plano que mueve una figura en otra. Esta sencilla idea es la que subyace en el resto de este trabajo, y formalizamos a continuación.

Partimos de una acción diferenciable y transitiva de un grupo de Lie G sobre una variedad $\mathcal{E}$

$$\begin{array}{ccc} G \times \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathcal{E} \\ (g,p) & & g \cdot p \end{array}$$

que da lugar al difeomorfismo $\lambda_g : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ que hace el papel del movimiento en la geometría de Euclides. Diremos que dos subvariedades $S, S' \subset \mathcal{E}$ son congruentes, es decir iguales en el sentido de Euclides, cuando hay un movimiento que las identifica, es decir $\exists g \in G$ tal que $\lambda_g(S) = S'$. El problema planteado es saber cuándo dos subvariedades son congruentes. En el caso de la geometría de Euclides, recuérdese cómo demuestra que si en dos triángulos, dos lados y el ángulo correspondiente son iguales entonces los triángulos son iguales. En nuestro contexto más general, van a ser las curvaturas de las subvariedades las que demuestren que son congruentes, de ahí su importancia. Pero vayamos paso a paso hasta llegar a introducir las curvaturas.

La noción para llegar a hablar de congruencia es la de $G-$ contacto, que descansa sobre la conocida situación del contacto de dos subvariedades en un mismo punto [1]:

Definition 2.1. $S, S' \subset \mathcal{E}$ tienen $G-$ contacto de orden $\geq r \in \mathbb{N}$ en $s \in S$, $s' \in S'$ y lo denotaremos como $(S, s) \overset{r}{\sim} (S', s')$, cuando $\exists g \in G$ tal que $g \cdot s = s'$ y $\lambda_g(S), S'$ tienen contacto de orden $\geq r$ en s'

Un difeomorfismo entre dos subvariedades $\phi : S \to S'$ define un $G-$ contacto de orden $\geq r$ cuando $(S, s) \overset{r}{\sim} (S', \phi(s)) \quad \forall s \in S$. Lo que se prueba es que dadas dos subvariedades hay un orden r tal que cualquier difeomorfismo entre ellas que genere un $G-$ contacto de orden $\geq r$ es de hecho un movimiento y por tanto las subvariedades son congruentes, es decir

Teorema 2.2. *Dada la subvariedad $S \subset \mathcal{E}$ y un punto de ella $p \in S$, $\exists r \in \mathbb{N}$ tal que si $\phi : S \to S'$ define un $G-$ contacto de orden $\geq r$ en el entorno U de p entonces $\exists g \in G$ tal que*

$$\phi|_U = \lambda_g|_U$$

Por supuesto que este orden r del teorema depende esencialmente de las subvariedades, pudiendo tener distintos valores aún dentro del mismo espacio $\mathcal{E}$ bajo la misma acción. Y de aquí se sigue la importancia que tiene el saber caracterizar el $G-$ contacto. La herramienta que vamos a emplear para ello es el fibrado de escamas también llamado el fibrado de jets extendido.[2]

Consideremos el conjunto de todos los posibles contactos de orden r en un punto $p \in \mathcal{E}$

$$\mathcal{G}^r_p(\mathcal{E}) = \{T^r_p S \ / \ p \in S \subset \mathcal{E}\}$$

donde estamos describiendo el contacto por el espacio tangente generalizado de orden r.[3] La union de todos ellos da lugar al fibrado de escamas

$$\mathcal{G}^r(\mathcal{E}) = \bigcup_{p \in \mathcal{E}} \mathcal{G}^r_p(\mathcal{E}) \longrightarrow \mathcal{E}$$

que también fibra sobre órdenes más pequenos

$$\pi^r_s : \mathcal{G}^r(\mathcal{E}) \longrightarrow \mathcal{G}^s(\mathcal{E})$$

con $r > s$, y la acción de partida induce sobre este fibrado la siguiente acción:

$$\begin{array}{ccc} G \times \mathcal{G}^r(\mathcal{E}) & \longrightarrow & \mathcal{G}^r(\mathcal{E}) \\ \left(g, T^r_p S\right) & & T^r_{g \cdot p} \lambda_g(S) \end{array} \tag{1}$$

Cuando se hace un estudio local en un entorno U de un punto $p \in \mathcal{E}$, como cuando se introducen coordenadas en $\mathcal{E}$, se manejan las subvariedades $S \subset \mathcal{E}$ por sus parametrizaciones

$$\begin{array}{rccc} \zeta : & \mathbb{R}^{\mathbf{s}} & \longrightarrow & \mathbb{R}^{\mathbf{m-s}} \\ & x & & u = \zeta(x) \end{array}$$

[1] Dos subvariedades S, S' tienen contacto de orden $\geq r$ en un mismo punto $p \in S \cap S'$ cuando sus tangentes generalizados de orden r son iguales como subespacios del tangente generalizado de orden r de $\mathcal{E}$, es decir $T^r_p S = T^r_p S'$ en $T^r_p \mathcal{E}$

[2] Véase [3]

[3] Véase [8]

siendo $\mathbf{s} = \dim \mathcal{S}$, $\mathbf{m} = \dim \mathcal{E}$, y los tangentes generalizados $T_p^r S$ vienen dados por los jets de dichas parametrizaciones [4]

$$j_p^r \zeta = \left(x(p), \zeta(x(p)), \frac{\partial \zeta}{\partial x}(x(p)), ..., \frac{\partial^r \zeta}{\partial x^r}(x(p)) \right)$$

usándose entonces en vez de el fibrado de escamas en p, $\mathcal{G}_p^r(\mathcal{E})$, el fibrado de jets en p

$$J_p^r(\mathbb{R}^{\mathbf{s}}, \mathbb{R}^{\mathbf{m}-\mathbf{s}})$$

Con esto, podemos hablar ya de curvaturas

Definition 2.3. Una curvatura de orden $\geq r$ es una función definida en un abierto U^r invariante por (1)

$$\kappa : U^r \subset \mathcal{G}^r(\mathcal{E}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

diferenciable e invariante por (1).

Este tipo de curvatura sólo se aplicará por su propia definición a la familia de subvariedades cuyas clases de contacto estén dentro del dominio de definición de κ, es decir a

$$\mathcal{F} = \{S \subset \mathcal{E} \ / \ T_s^r S \subset U^r \ \forall s \in S\}$$

ya que da lugar a la función curvatura sobre una subvariedad

$$\begin{array}{rccc} \kappa_S : & S & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & s & & \kappa\left(T_s^r S\right) \end{array}$$

cuando $S \in \mathcal{F}$. El siguiente resultado es consecuencia clara de las definiciones

Teorema 2.4. *Dada una curvatura κ de orden $\geq r$, y dos subvariedades de la familia correspondiente $\mathcal{F}$, si tienen $G-$ contacto de orden $\geq r$ en puntos correspondientes sus curvaturas valen lo mismo en dichos puntos, es decir*

$$(S, s) \overset{r}{\sim} (S', s') \Longrightarrow \kappa_S(s) = \kappa_{S'}(s')$$

Demostración. $\kappa_S(s) = \kappa\left(T_s^r S\right) \overset{1}{=} \kappa\left(T_{s'}^r \ \lambda_g(S)\right) \overset{2}{=} \kappa\left(T_{s'}^r S'\right) = \kappa_{S'}(s')$ donde 1 es por la invarianza de la curvatura y 2 por la hipótesis. □

Este resultado da pié a buscar cuántas curvaturas son necesarias para determinar el $G-$ contacto, y así se define:

Definition 2.5. Un sistema completo de curvaturas de orden $\geq r$, $\{\kappa^i\}$ son aquellas que verifican que

$$\kappa_S^i(s) = \kappa_{S'}^i(s') \ \forall i \Longrightarrow (S, s) \overset{r}{\sim} (S', s')$$

para todas aquellas subvariedades de $\mathcal{F}$.

Esto explica la importancia que tienen las curvaturas. Llegar a obtener un sistema completo es el objetivo en el estudio de una geometría. Desde los trabajos originales de Cartan, muchos son los métodos que describen cómo buscar dichas curvaturas. Sin embargo, creemos que el mejor aspecto de esta búsqueda es la que permite un cálculo explícito de las curvaturas, es decir, calculadas a partir de las parametrizaciones de las subvariedades. Por eso presentamos a continuación el método de cálculo original de Lie, con la mirada puesta en mejorarlo para dicho cálculo explícito.

[4] Se sobreentiende la notación de multiíndices

3. El método de Lie

A partir de la acción inducida (1) se consideran los campos fundamentales sobre el fibrado de escamas

$$\begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & \mathcal{G}^r(\mathcal{E}) \\ \Phi_t^X(g) = g\ \exp(tX) & & \left(X_{\mathcal{G}^r(\mathcal{E})}\right)_p = \frac{d}{dt}\big|_0 \exp(tX)\cdot p \\ \uparrow & & \\ \mathfrak{g} & & \\ X & & \end{array}$$

donde Φ_t^X es el flujo del campo invariante a izquierdas X. Por otro lado, para cualquier campo $Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{E})$ su flujo $\Phi_t^Y : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ como difeomorfismo que es, se prolonga al fibrado de escamas $pr^r\Phi_t^Y : \mathcal{G}^r(\mathcal{E}) \longrightarrow \mathcal{G}^r(\mathcal{E})$ dando lugar al campo prolongado $pr^rY \in \mathfrak{X}(\mathcal{G}^r(\mathcal{E}))$. Se tiene entonces el siguiente resultado

$$X_{\mathcal{G}^r(\mathcal{E})} = pr^r X_{\mathcal{E}}$$

que muestra que la prolongación de un campo fundamental sobre $\mathcal{E}$ coincide con el campo fundamental sobre el fibrado de escamas. Así, por un lado, lo que es fácil de calcular son las prolongaciones de campos fundamentales en $\mathcal{E}$, (véase [3])[5] pero lo que usaremos para desarrollar la teoría es la condición de campo fundamental en el fibrado de escamas bajo la acción inducida (1). De hecho, una curvatura de orden $\geq r$ es una integral primera de $X_{\mathcal{G}^r(\mathcal{E})}\ \forall X \in \mathfrak{g}$, es decir que $X_{\mathcal{G}^r(\mathcal{E})}(\kappa) = 0$. Es el resultado siguiente el que hace que esta propiedad sea factible, al descansar sólo sobre una base del álgebra de Lie:

Teorema 3.1. *Sea U^r un abierto invariante bajo (1), $\kappa : U^r \to \mathbb{R}$ diferenciable es curvatura de orden $\geq r$ si y sólo si*

$$X_{\mathcal{G}^r(\mathcal{E})}(\kappa) = 0 \quad \forall X \in \mathcal{B}$$

siendo $\mathcal{B}$ una base de $\mathfrak{g}$.

4. Ejemplos

4.1. Teoría clásica de invariantes

Tenemos la acción local [6]

[5] Dando coordenadas en $\mathcal{E}$ (x_α, u^i), a partir de

$$X_{J^0} = \xi^\alpha(x_\alpha, u^i)\ \partial_{x_\alpha} + \eta^i(x_\alpha, u^i)\ \partial_{u^i}$$

se tiene que

$$X_{J^r} = X_{J^0} + \left[D_K\left(\eta^i - \xi^\alpha u^i_\alpha\right) + \xi^\alpha u^i_{K\alpha}\right]\ \partial_{u^i_K}$$

y definiendo la característica de un campo prolongado en J^1 como $Q^i = \eta^i - \xi^\alpha u^i_\alpha$, se reescribe como

$$X_{J^r} = \xi^\alpha D_\alpha + \left(D_K Q^i\right)\ \partial_{u^i_K}$$

[6] Una acción es local cuando se puede definir sobre un abierto U del producto $G \times \mathcal{E}$ tal que $\{e\} \times \mathcal{E} \subset \mathcal{U}$

$$\begin{array}{ccccc} GL(2,\mathbb{R})^4 & \times & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} & * & (x,u) & & \begin{pmatrix} \frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}, & \frac{u}{\gamma x+\delta} \end{pmatrix} \end{array}$$

vamos a calcular las curvaturas de curvas en $\mathbb{R}^2$ vistas como funciones sobre x, $u(x)$.

El álgebra de Lie del grupo que actúa $GL(2,\mathbb{R})$, es $\mathfrak{g} = gl(2,\mathbb{R})$ de donde escogemos la base

$$\mathcal{B} = \left\{ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Calculamos como ejemplo el campo fundamental del primer elemento de la base, A, dejando el resto para el lector. Así, primero calculamos la exponencial de A : $\exp At = \exp \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Luego le aplicamos la acción: $\exp At * (x,u) = (e^t x, u)$ y derivando cada componente resulta el campo sobre $\mathbb{R}^2$: $A_{\mathbb{R}^2} = x\partial_x$. En resumen:

$$\begin{gathered} A_{\mathbb{R}^2} = x\partial_x \\ B_{\mathbb{R}^2} = \partial_x \\ C_{\mathbb{R}^2} = -x^2\partial_x - xu\partial_u \\ D_{\mathbb{R}^2} = -x\partial_x - u\partial_u \end{gathered}$$

Dado que hay 4 parámetros, prolongaremos hasta el tercer orden los campos fundamentales, resultando la siguiente tabla:

$$\begin{gathered} pr^3 A_{\mathbb{R}^2} = x\partial_x - u_x\partial_{u_x} - 2u_{xx}\partial_{u_{xx}} - 3u_{xxx}\partial_{u_{xxx}} \\ pr^3 B_{\mathbb{R}^2} = \partial_x \\ pr^3 C_{\mathbb{R}^2} = -x^2\partial_x - xu\partial_u + (xu_x - u)\partial_{u_x} + 3xu_{xx}\partial_{u_{xx}} + (5xu_{xxx} + 3u_{xx})\partial_{u_{xxx}} \\ pr^3 D_{\mathbb{R}^2} = -x\partial_x - u\partial_u + u_{xx}\partial_{u_{xx}} + 2u_{xxx}\partial_{u_{xxx}} \end{gathered}$$

Ahora buscamos una integral primera $F(x,u,u_x,u_{xx},u_{xxx})$ común de los cuatro campos prolongados.

1. Usando $pr^3 B_{\mathbb{R}^2}$ obtenemos una integral primera de la forma $F(u,u_x,u_{xx},u_{xxx})$.
2. Ahora imponemos que $pr^3 A_{\mathbb{R}^2}(F) = 0$, y usando el flujo de $pr^3 A_{\mathbb{R}^2}$ vemos que

$$\begin{cases} u = c_1 \\ u_x^2/u_{xx} = c_2 \\ u_x^3/u_{xxx} = c_3 \end{cases}$$

   por lo que la integral primera es de la forma $F\left(u, u_x^2/u_{xx}, u_x^3/u_{xxx}\right)$.

3. Imponiendo que $pr^3 D_{\mathbb{R}^2}(F) = 0$ y usando el flujo de $pr^3 D_{\mathbb{R}^2}$ vemos que

$$-F_1 u - F_2 \frac{u_x^2}{u_{xx}} - 2F_3 \frac{u_x^3}{u_{xxx}} = 0$$

   y haciendo el cambio de variables

$$\left\{ x = u, y = u_x^2/u_{xx}, z = u_x^3/u_{xxx} \right.$$

resulta $xF_x + yF_y + 2zF_z = 0$ que para encontrar sus integrales primeras se acude al SEDO auxiliar

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y \\ z' = 2z \end{cases}$$

y de aquí vemos que

$$\begin{cases} \frac{y}{x} = c_1 \\ \\ \frac{z}{x^2} = c_2 \end{cases}$$

por lo que la integral primera común a los campos anteriores sería $F\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x^2}\right)$ y deshaciendo el cambio de variable resulta

$$F\left(\frac{u_x^2}{u\ u_{xx}}, \frac{u_x^3}{u^2 u_{xxx}}\right)$$

4. Por último se procede de forma análoga con el flujo de $pr^3 C_{\mathbb{R}^2}$. Aplicando el cambio de variable

$$\left\{x = u_x^2/u\ u_{xx},\ y = u_x^3/u^2 u_{xxx}\right.$$

y viendo a través del flujo de $pr^3 C_{\mathbb{R}^2}$ que $x' = -2u_x/u_{xx}$ y que

$$y' = -3u_x^2 \frac{u\ u_{xxx} + u_x u_{xx}}{u^2 u_{xxx}^2}$$

obtenemos que $2x^2 F_x + 3y(x+y)F_y = 0$ cuyo SEDO auxiliar

$$\begin{cases} x' = 2x^2 \\ y' = 3y(x+y) \end{cases}$$

que es equivalente a la EDO Homogénea

$$2y' = 3\frac{y}{x} + 3\left(\frac{y}{x}\right)^2$$

que conduce a la solución general

$$\frac{y^2}{x(3y+x)^2} = c$$

y deshaciendo el cambio resulta una integral primera común a los 4 campos fundamentales prolongados:

$$F\left(\frac{u\ u_{xxx}^3}{\left(u\ u_{xxx} + 3u_x u_{xx}\right)^2}\right)$$

4.2. Las superficies en geometría euclidea (I)

El siguiente ejemplo muestra que si bien el método de Lie es conceptualmente sencillo, su aplicación inmediata, en general, es imposible de llevar a la práctica. Así, empezamos con $\mathbb{R}^3$ con coordenadas (x, y, z) y donde se toma como origen el punto $m_0 = (0, 0, 0)$. Sobre él actúa transitivamente el grupo de Lie $G^6 = SO(3, \mathbb{R})\circledS\mathbb{R}^3$ producto semidirecto del grupo ortogonal directo con $\mathbb{R}^3$. Vamos a intentar calcular las curvaturas de superficies en $\mathbb{R}^3$ vistas como funciones sobre x, y, $u(x, y)$. El álgebra de Lie de G es $\mathfrak{g} = so(3, \mathbb{R}) \oplus \mathbb{R}^3$ de donde escogemos la base

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{array}{c} X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ Y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ U = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \right\} \tag{2}$$

Los campos fundamentales correspondientes son:

$$\begin{array}{c} X_{\mathbb{R}^3} = \partial_x \\ Y_{\mathbb{R}^3} = \partial_y \\ U_{\mathbb{R}^3} = \partial_u \\ A_{\mathbb{R}^3} = -u\partial_x + x\partial_u \\ B_{\mathbb{R}^3} = -u\partial_y + y\partial_u \\ C_{\mathbb{R}^3} = -y\partial_x + x\partial_y \end{array} \tag{3}$$

y como es de sobra conocido, las primeras curvaturas, la curvatura gausiana y la media, o las curvaturas principales de una superficie, son de orden dos, por eso vamos a prolongar hasta orden dos estos campos fundamentales, resultando:

$$\begin{array}{c} pr^2 X_{\mathbb{R}^3} = \partial_x \\ pr^2 Y_{\mathbb{R}^3} = \partial_y \\ pr^2 U_{\mathbb{R}^3} = \partial_u \\ pr^2 A_{\mathbb{R}^3} = -u\partial_x + x\partial_u + (1 + u_x^2)\partial_{u_x} + u_x u_y \partial_{u_y} + \\ +3u_x u_{xx}\partial_{u_{xx}} + (2u_x u_{xy} + u_y u_{xx})\partial_{u_{xy}} + (u_x u_{yy} + 2u_y u_{xy})\partial_{u_{yy}} \\ pr^2 B_{\mathbb{R}^3} = -u\partial_y + y\partial_u + u_x u_y \partial_{u_x} + (1 + u_y^2)\partial_{u_y} + \\ (2u_x u_{xy} + u_y u_{xx})\partial_{u_{xx}} + (u_x u_{yy} + 2u_y u_{xy})\partial_{u_{xy}} + 3u_y u_{yy}\partial_{u_{yy}} \\ pr^2 C_{\mathbb{R}^3} = -y\partial_x + x\partial_y - u_y\partial_{u_x} + u_x\partial_{u_y} + \\ -2u_{xy}\partial_{u_{xx}} + (u_{xx} - u_{yy})\partial_{u_{xy}} + 2u_{xy}\partial_{u_{yy}} \end{array} \tag{4}$$

Para buscar una integral primera $F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy})$ común de los seis campos prolongados habría que buscar una integral primera de los tres últimos, que no dependa de las tres primeras variables $F(u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy})$. Usando el flujo de

$pr^2 A_{\mathbb{R}^3}$ vemos que

$$\begin{cases} \frac{u_y}{\sqrt{1+u_x^2}} = c_1 \\ \\ \frac{u_{xx}}{(1+u_x^2)^{3/2}} = c_2 \\ \\ \frac{u_{xy}-u_x u_y u_{xx}}{1+u_x^2} = c_3 \\ \\ \frac{u_{yy}}{u_y} - 2u_x c_3 - u_x^2 c_1 c_2 = c_4 \end{cases}$$

luego la integral primera es de la forma

$$F\left(\frac{u_y}{\sqrt{1+u_x^2}},\ \frac{u_{xx}}{(1+u_x^2)^{3/2}},\ \frac{u_{xy}-u_x u_y u_{xx}}{1+u_x^2},\ \frac{u_{yy}}{u_y} - 2u_x c_3 - u_x^2 c_1 c_2\right)$$

Sin embargo, usar el flujo de $pr^2 B_{\mathbb{R}^3}$ sobre F para buscar nuevas integrales primeras comunes es casi imposible de abordar desde un punto de vista práctico.

5. El método del flujo

La idea para hacer práctico el método de Lie, o sea el teorema 3.1, es ir adaptando la base del álgebra $\mathfrak{g}$ a cada orden de derivación r, de tal manera que para buscar invariantes de orden r se utilizan sólo los primeros vectores de la base. En concreto, partiendo de la acción $G \times \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ se busca el grupo de isotropía del origen m_0, G_0, y se adapta la base $\mathcal{B}$ de $\mathfrak{g}$ de tal manera que

$$\mathcal{B} = \overline{\mathcal{B}}_0 \cup \mathcal{B}_0$$

siendo $\mathcal{B}_0$ una base de $\mathfrak{g}_0$ el álgebra de Lie de G_0. Sin embargo, dado que en problemas geométricos la acción es transitiva, no hay invariantes de orden cero, siendo por tanto este un paso del que bien se puede prescindir y suponer que empezamos con la acción inducida (1) a orden uno $G_0 \times \mathcal{G}^1_{m_0}(\mathcal{E}) \longrightarrow \mathcal{G}^1_{m_0}(\mathcal{E})$. A continuación se usan las prolongaciones de $\mathcal{B}_0$ para determinar una sección $\mathcal{W} \subset \mathcal{G}^1_{m_0}(\mathcal{E})$ de esta última acción. En general a estos órdenes bajos la acción sigue siendo transitiva por lo que se obtiene una sección puntual $m_1 \in \mathcal{G}^1_{m_0}(\mathcal{E})$ junto con su álgebra de isotropía $\mathfrak{g}_1$ de la que se escoge una base $\mathcal{B}_1$ que permite escribir

$$\mathcal{B} = \overline{\mathcal{B}}_0 \cup \overline{\mathcal{B}}_1 \cup \mathcal{B}_1$$

En general el proceso continua adaptando la base $\mathcal{B}$ a acciones transitivas cada vez más pequeñas, no sólo por que el grupo de Lie se ha reducido sino también porque las escamas están siendo apoyadas en un origen. Y veamos cómo se procede cuando llegamos a una acción de orden r

$$G_{r-1} \times \mathcal{G}^r_{m_{r-1}}(\mathcal{E}) \longrightarrow \mathcal{G}^r_{m_{r-1}}(\mathcal{E})$$

que ya no es transitiva. Como siempre, usamos las prolongaciones de $\mathcal{B}_{r-1}$ de la siguiente manera: dado que para $p \in \mathcal{G}^r_{m_{r-1}}(\mathcal{E})$ su álgebra de isotropía viene dado por

$$\mathfrak{g}(p) = \left\{ X \in \mathfrak{g}_{r-1} \ /\ (X_{\mathcal{G}^r})_p = 0 \right\}$$

se tiene que tomando coordenadas respecto de $\mathcal{B}_{r-1}$, (t_λ) con $\lambda \leq \dim \mathfrak{g}_{r-1}$

$$\mathfrak{g}(p) = \left\{ (t_\lambda) \ / \sum_\lambda t_\lambda \ \left(D_K Q^i_\lambda\right)(p) = 0 \right\}$$

siendo $\left(D_K Q^i_\lambda\right)(p)$ las prolongaciones de $\mathcal{B}_{r-1}$ evaluadas en p. (Véase [3]). Entonces primero se buscan los puntos de $\mathcal{G}^r_{m_{r-1}}(\mathcal{E})$ que tienen álgebras de isotropía de la misma dimensión a través de estudiar la ecuación

$$Rg\left(D_K Q^i_\lambda\right)(p) = n \tag{5}$$

para n un valor máximo posible, dando lugar a una subvariedad abierta invariante $\mathcal{A}$, puesto que

$$\mathfrak{g}(g * p) = Ad_g(\mathfrak{g}(p))$$

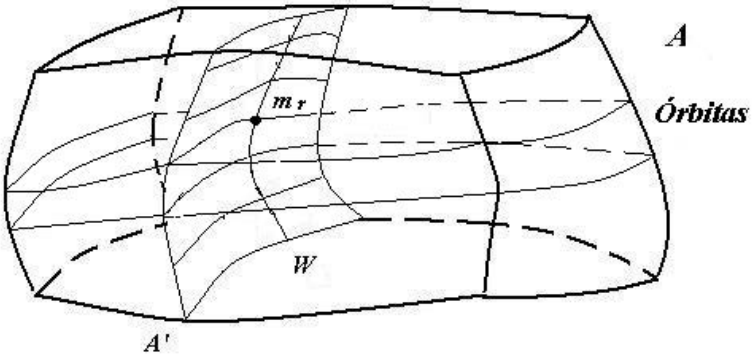
que significa que las álgebras de isotropía a lo largo de una órbita están relacionadas por el isomorfismo adjunto. En segundo lugar, fijando un punto $m_r \in \mathcal{A}$ y calculando su álgebra de isotropía $\mathfrak{g}_r$ que da lugar a la descomposición

$$\mathcal{B} = \overline{\mathcal{B}}_0 \cup \overline{\mathcal{B}}_1 \cup ... \cup \overline{\mathcal{B}}_r \cup \mathcal{B}_r$$

se buscan los puntos $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ que tienen la misma álgebra de isotropía que m_r buscando dónde se cumple la siguiente condición:

$$\left(X_{\mathcal{G}^r}\right)_p = 0 \quad \forall X \in \mathfrak{g}_r \tag{6}$$

Y en tercer y último lugar, dado que $\mathcal{A}$ es invariante contiene a las órbitas, y cocientamos $\mathcal{A}'$ por las órbitas para quedarnos con una sección $\mathcal{W}$ que pasa por m_r.



Sección W

Es esta sección $\mathcal{W}$ la que proporciona los invariantes de orden r. Haciendo uso del siguiente

Teorema 5.1. *Sea M una variedad diferenciable de dimensión m, y $p \in M$ un punto de ella. Sean $X_1, .., X_m$ una familia de m campos tales que $(X_i)_p$ $\forall i$ son linealmente independientes. Entonces en un entorno de $p \in U \subset M$ existe un sistema de coordenadas $(k_i)_{i=1..m}$ de forma que $\forall x \in U$*

$$p = \Phi^m_{k_m}\left(\Phi^{m-1}_{k_{m-1}} ... \left(\Phi^1_{k_1}(x)\right)\right)$$

donde Φ^i_t es el flujo de X_i.

se llega a $\mathcal{W}$ a través de las curvas integrales de los campos prolongados de $\overline{\mathcal{B}}_\mu$ $\mu \leq r$, que arrancan en una escama arbitraria $p \in \mathcal{G}^r_{m_{r-1}}(\mathcal{E})$, ya que con $\overline{\mathcal{B}}_1$ movemos la escama $\pi^r_1 p$ a m_1, y sucesivamente con $\overline{\mathcal{B}}_\mu$ $\mu \leq r-1$ movemos la escama de orden μ, $\pi^r_\mu p$ hasta llevarla a m_μ. Y finalmente con $\overline{\mathcal{B}}_r$ llevamos la escama de orden r, p, sobre $\mathcal{W}$ obteniendo de este modo las curvaturas de orden r.

6. Ejemplos

6.1. Las superficies en geometría euclidea (II)

Retomamos la clasificación de superficies $u(x, y)$ en geometría euclidea considerando la acción del producto semidirecto $SO(3, \mathbb{R})\circledS\mathbb{R}^3$ sobre $\mathbb{R}^3$. Como base del álgebra de Lie correspondiente se toma (2) y los campos fundamentales a los que da lugar son (3). Buscamos aquellos que se anulen en el origen $m_0 = (0, 0, 0)$ obteniendo que una base del álgebra de isotropía de m_0, $\mathfrak{g}_0$, es

$$\mathcal{B}_0 = \{A, B, C\}$$

Dado que la acción es transitiva no hay curvaturas de orden cero.

Con las prolongaciones de orden uno de la base $\mathcal{B}_0$ sacadas de (4) y evaluadas en $(0, 0, 0, u_x, u_y)$, estudiamos el rango de la matriz

$$\begin{pmatrix} 1+u_x^2 & u_x u_y & -u_y \\ u_x u_y & 1+u_y^2 & u_x \end{pmatrix}$$

y como el primer menor tiene por determinante $1 + u_x^2 + u_y^2 \neq 0$, esta matriz tiene siempre rango dos, lo que permite tomar el punto $m_1 \in J^1_{m_0}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ con $u_x = u_y = 0$ cuya álgebra de isotropía $\mathfrak{g}_1$ tiene por base $\mathcal{B}_1 = \{C\}$. Además, las prolongaciones muestran que la acción

$$G_0 \times J^1_{m_0}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}) \to J^1_{m_0}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$$

es transitiva por lo que no hay curvaturas de orden 1.

Con la prolongación de orden dos de la base $\mathcal{B}_1$ sacada de (4) y evaluada en

$$(0, 0, 0, 0, 0, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy})$$

estudiamos el rango de la matriz

$$\begin{pmatrix} -2u_{xy} \\ u_{xx} - u_{yy} \\ 2u_{xy} \end{pmatrix}$$

y obtenemos que para $u_{xy} \neq 0$ ó $u_{xx} \neq u_{yy}$ la matriz tiene rango uno, lo que permite tomar el punto $m_2 \in J^2_{m_1}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ con $u_{xx} = 1$, $u_{xy} = u_{yy} = 0$, cuya álgebra de isotropía es $\mathfrak{g}_2 = 0$. Por eso, la condición (6) se reduce a considerar todas las escamas apoyadas en m_1, es decir

$$\mathcal{A}' = \mathcal{A} = J^2_{m_1}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$$

Y dado que los espacios tangentes a las órbitas están dados por los campos fundamentales, la órbita en $G_1 \times J^2_{m_1}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}) \to J^2_{m_1}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ que pasa por m_2 tiene por tangente a $\left(pr^2 C\right)_{m_2} = (0, 1, 0)$. Así encontramos como sección bidimensional

$$\mathcal{W} \equiv u_{xy} = 0$$

Ahora es el momento de usar los flujos de los campos prolongados para encontrar la expresión de las curvaturas en la parametrización $u(x, y)$. Vamos a suponer que la superficie pasa por el origen, es decir que $u(0, 0) = 0$ con lo que nos evitamos usar los flujos de los campos X, Y, U y de sus prolongaciones. Y llamemos $z_x = u_x(0, 0)$, $z_y = u_y(0, 0)$ a la escama de orden uno en el origen, y sucesivamente $z_{xx} = u_{xx}(0, 0)$, etc, a las escamas de orden dos en el origen. Empezamos pues, con

$$pr^1 A = \begin{cases} \dot{u_x} = 1 + u_x^2 \\ \dot{u_y} = u_x u_y \end{cases}$$

cuyo flujo es

$$\phi_t^{pr^1 A} = \begin{cases} u_x(t) = \frac{z_x + tg(t)}{1 - z_x tg(t)} \\ \\ u_y(t) = \frac{z_y \sqrt{1 + tg(t)^2}}{1 - z_x tg(t)} \end{cases}$$

Para $tg(t_A) = -z_x$ se alcanza el valor

$$\begin{cases} u_x(t_A) = 0 \\ u_y(t_A) = \frac{z_y}{\sqrt{1 + z_x^2}} \end{cases}$$

que se toma como valor inicial para el flujo de

$$pr^1 B = \begin{cases} \dot{u_x} = u_x u_y \\ \dot{u_y} = 1 + u_y^2 \end{cases}$$

que vale

$$\phi_t^{pr^1 B} = \begin{cases} u_x(t) = 0 \\ \\ u_y(t) = \frac{z_y + tg(t)\sqrt{1 + z_x^2}}{\sqrt{1 + z_x^2} - z_y tg(t)} \end{cases}$$

y considerando $tg(t_B) = -z_y / \sqrt{1 + z_x^2}$ se alcanza el valor

$$\begin{cases} u_x(t_B) = 0 \\ u_y(t_B) = 0 \end{cases}$$

Este resultado expresa que en geometría euclidea siempre se puede mover una superficie hasta situar su plano tangente en el origen coincidente con el plano x, y.

En cuanto a las segundas prolongaciones,

$$pr^2 A = \begin{cases} \dot{u_{xx}} = 3u_x u_{xx} \\ \dot{u_{xy}} = 2u_x u_{xy} + u_y u_{xx} \\ \dot{u_{yy}} = u_x u_{yy} + 2u_y u_{xy} \end{cases}$$

cuyo flujo mueve la escama inicial de orden dos al valor

$$\begin{cases} u_{xx}(t_A) = \frac{z_{xx}}{(1+z_x^2)^{3/2}} \\ u_{xy}(t_A) = \frac{z_{xy}}{1+z_x^2} - \frac{z_x z_y z_{xx}}{(1+z_x^2)^2} \\ u_{yy}(t_A) = \frac{z_{yy}}{(1+z_x^2)^{1/2}} - 2\frac{z_x z_y}{(1+z_x^2)^{3/2}} z_{xy} + \frac{z_x^2 z_y^2}{(1+z_x^2)^{5/2}} z_{xx} \end{cases}$$

y el flujo de pr^2B con valor inicial el anterior, acaba arrojando el valor

$$\begin{cases} u_{xx}(t_B) = \frac{z_{xx}}{(1+z_x^2)(1+z_x^2+z_y^2)^{1/2}} \\ u_{xy}(t_B) = \frac{(1+z_x^2)z_{xy} - z_x z_y z_{xx}}{(1+z_x^2)(1+z_x^2+z_y^2)} \\ u_{yy}(t_B) = \frac{(1+z_x^2)^2 z_{yy} - 2z_x z_y (1+z_x^2) z_{xy} + z_x^2 z_y^2 z_{xx}}{(1+z_x^2)(1+z_x^2+z_y^2)^{3/2}} \end{cases}$$

A partir de aquí entra en juego el flujo de

$$pr^2C = \begin{cases} \dot{u_{xx}} = -2u_{xy} \\ \dot{u_{xy}} = u_{xx} - u_{yy} \\ \dot{u_{yy}} = 2u_{xy} \end{cases}$$

que vale

$$\phi_t^{pr^2C} = \begin{cases} u_{xx}(t) = -u_{xy}(t_B)\ sen(2t) + \frac{u_{xx}(t_B) - u_{yy}(t_B)}{2}\ \cos(2t) + \frac{u_{xx}(t_B) + u_{yy}(t_B)}{2} \\ u_{xy}(t) = u_{xy}(t_B)\ \cos(2t) + \frac{u_{xx}(t_B) - u_{yy}(t_B)}{2} sen(2t) \\ u_{yy}(t) = u_{xy}(t_B)\ sen(2t) - \frac{u_{xx}(t_B) - u_{yy}(t_B)}{2}\ \cos(2t) + \frac{u_{xx}(t_B) + u_{yy}(t_B)}{2} \end{cases}$$

Y para llevarlo a la sección $\mathcal{W}$ calculamos t_C que hace que $u_{xy}(t_C) = 0$ obteniendo que

$$sen(2t_C) = \frac{u_{xy}(t_B)}{\sqrt{u_{xy}^2(t_B) + \left(\frac{u_{xx}(t_B) - u_{yy}(t_B)}{2}\right)^2}}$$

$$\cos(2t_C) = \frac{u_{xx}(t_B) - u_{yy}(t_B)}{2\sqrt{u_{xy}^2(t_B) + \left(\frac{u_{xx}(t_B) - u_{yy}(t_B)}{2}\right)^2}}$$

y las curvaturas salen de los valores

$$u_{xx}(t_C) = \frac{u_{xx}(t_B) + u_{yy}(t_B)}{2} - \sqrt{\left(\frac{u_{xx}(t_B) + u_{yy}(t_B)}{2}\right)^2 - \left(u_{xx}(t_B)u_{yy}(t_B) - u_{xy}^2(t_B)\right)}$$

$$u_{yy}(t_C) = \frac{u_{xx}(t_B) + u_{yy}(t_B)}{2} + \sqrt{\left(\frac{u_{xx}(t_B) + u_{yy}(t_B)}{2}\right)^2 - \left(u_{xx}(t_B)u_{yy}(t_B) - u_{xy}^2(t_B)\right)}$$

y viendo que

$$\frac{u_{xx}(t_B)+u_{yy}(t_B)}{2}=\frac{(1+z_x^2)z_{yy}-2z_xz_yz_{xy}+(1+z_y^2)z_{xx}}{(1+z_x^2+z_y^2)^{3/2}}=2H$$

que no es otra cosa que dos veces la curvatura media de la superficie, y

$$u_{xx}(t_B)u_{yy}(t_B)-u_{xy}^2(t_B)=\frac{z_{xx}z_{yy}-z_{xy}^2}{(1+z_x^2+z_y^2)^2}=K$$

que es la curvatura gausiana, se deduce que las curvaturas encontradas son las curvaturas principales de la superficie.

6.2. Las congruencias de rayos luz en $\mathbb{R}^3_1$

Sea $\mathbb{R}^3_1$ el espacio $(x,y,t)\in\mathbb{R}^3$ con la métrica $(1,1,-1)$. Los rayos luz son rectas de dirección $\overrightarrow{v}=(x,y,t)$ tal que $x^2+y^2-t^2=0$. Se considera M el conjunto de todos los rayos luz de $\mathbb{R}^3_1$. Para parametrizarlo, se consideran todos los puntos del plano $\{t=0\}$ por donde pasan todos los rayos luz. Ahora, fijado un punto de dicho plano, los rayos luz que pasan por dicho punto forman un cono que cortado con el plano $\{t=1\}$ da lugar a una circunferencia. A través de la proyección estereográfica, un rayo luz de dirección $(x_0,y_0,t_0)\neq(0,1,1)$ se parametriza por

$$\xi=\frac{x_0}{t_0-y_0}$$

y recíprocamente, el rayo luz con parámetro ξ tiene por dirección $(2\xi,\ \xi^2-1,\ \xi^2+1)$. Así, en esta parametrización queda

$$M=\{(x,y,\xi)\in\mathbb{R}^3\}$$

Sobre M actúa el grupo de Lie G producto semidirecto de $\mathbb{R}^3$ con $O(3,1)$

$$\begin{array}{ccccc} G^6 & & M^3 & \longrightarrow & M^3 \\ (\overrightarrow{v},A) & \times & (x,y,\xi) & & (x',y',\xi') \end{array}$$

de la manera siguiente: al punto (x,y,ξ) le corresponde el rayo luz

$$\begin{pmatrix} x\\ y\\ 0\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix} 2\xi\\ \xi^2-1\\ \xi^2+1\end{pmatrix}$$

sobre el que actúa el elemento del grupo asignándole el rayo luz

$$\overrightarrow{v}+A\begin{pmatrix} x\\ y\\ 0\end{pmatrix}+\lambda A\begin{pmatrix} 2\xi\\ \xi^2-1\\ \xi^2+1\end{pmatrix} \tag{7}$$

al cual le corresponde los valores (x',y',ξ') que explícitamente no son necesarios conocer.

Esta acción establece un espacio homogéneo, con origen $m_0 = (0, 0, 0)$, en el que vamos a considerar el problema de contacto de superficies, es decir el cálculo de curvaturas de superficies parametrizadas por

$$S = \begin{cases} x = x \\ y = y \\ \xi = \xi(x, y) \end{cases}$$

usando el método del flujo.

6.2.1. Los campos fundamentales

El álgebra de Lie viene dada por

$$\mathfrak{g} = \underset{\begin{pmatrix} x \\ y \\ t \end{pmatrix}}{\mathbb{R}^3} \times \underset{\begin{pmatrix} 0 & -\varphi & \alpha \\ \varphi & 0 & \beta \\ \alpha & \beta & 0 \end{pmatrix}}{o(3,1)}$$

Calcularemos el campo fundamental correspondiente al giro hiperbólico de ángulo α, A, con detalle dejando los cálculos del resto para el lector. Así, empezamos calculando la exponencial de la matriz asociada a dicho giro

$$\exp \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ch\ \alpha & 0 & sh\ \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ sh\ \alpha & 0 & ch\ \alpha \end{pmatrix}$$

y usándola en la fórmula (7) resulta

$$\begin{pmatrix} x\ ch\ \alpha \\ y \\ x\ sh\ \alpha \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2\xi\ ch\ \alpha + (\xi^2+1)\ sh\ \alpha \\ \xi^2 - 1 \\ 2\xi\ sh\ \alpha + (\xi^2+1)\ ch\ \alpha \end{pmatrix}$$

y da lugar a los parámetros

$$\begin{cases} x' = x\ ch\ \alpha - \frac{x\ sh\ \alpha}{2\xi\ sh\ \alpha + (\xi^2+1)\ ch\ \alpha} \left(2\xi\ ch\ \alpha + (\xi^2+1)\ sh\ \alpha\right) \\ y' = y - \frac{x\ sh\ \alpha}{2\xi\ sh\ \alpha + (\xi^2+1)\ ch\ \alpha} \left(\xi^2 - 1\right) \\ \xi' = \frac{2\xi\ ch\ \alpha + (\xi^2+1)\ sh\ \alpha}{2\xi\ sh\ \alpha + (\xi^2+1)\ ch\ \alpha + 1 - \xi^2} \end{cases}$$

Al derivar en α, para $\alpha = 0$ resulta el campo fundamental:

$$A = -\frac{2x\xi}{\xi^2+1}\partial_x - x\frac{\xi^2-1}{\xi^2+1}\partial_y - \frac{\xi^2-1}{2}\partial_\xi$$

De la misma manera se obtienen los demás:

$$B = -\frac{y}{\xi^2+1}\partial_x - y\frac{\xi^2-1}{\xi^2+1}\partial_y + \xi\partial_\xi$$

$$\Phi = -y\partial_x + x\partial_y + \frac{\xi^2+1}{2}\partial_\xi$$

$$X = \partial_x \quad Y = \partial_y$$

$$T = -\frac{2\xi}{\xi^2+1}\partial_x - \frac{\xi^2-1}{\xi^2+1}\partial_y$$

Para determinar $\mathfrak{g}_0$ buscamos tres campos, combinaciones lineales de los anteriores, cuyas componentes se anulen en m_0. Así se tiene que $\mathfrak{g}_0 = \{C,\ B,\ U\}$ siendo

$$C = \Phi - A = \left(\frac{2x\xi}{\xi^2+1} - y\right)\partial_x + 2x\frac{\xi^2}{\xi^2+1}\partial_y + \xi^2\partial_\xi$$

$$U = Y - T = \frac{2\xi}{\xi^2+1}\partial_x + \frac{2\xi^2}{\xi^2+1}\partial_y$$

6.2.2. Curvaturas de orden 1

Se prolongan los campos de $\mathfrak{g}_0 = \{C,\ B,\ U\}$

$$pr^1 C = \left(\frac{2\xi^3}{\xi^2+1}\xi_x + 2x\frac{\xi^2-1}{(\xi^2+1)^2}\xi_x^2 - \frac{2\xi^2}{\xi^2+1}\xi_y - x\frac{4\xi}{(\xi^2+1)^2}\xi_x\xi_y\right)\partial_{\xi_x}$$

$$\left(2\xi\xi_y + \xi_x + 2x\frac{\xi^2-1}{(\xi^2+1)^2}\xi_x\xi_y - x\frac{4\xi}{(\xi^2+1)^2}\xi_y^2\right)\partial_{\xi_y}$$

$$pr^1 B = \left(\xi_x - y\frac{2\xi}{(\xi^2+1)^2}\xi_x^2 + y\frac{4\xi}{(\xi^2+1)^2}\xi_x\xi_y\right)\partial_{\xi_x}$$

$$\left(\frac{2\xi^2}{\xi^2+1}\xi_y + \frac{1}{\xi^2+1}\xi_x - y\frac{2\xi}{(\xi^2+1)^2}\xi_x\xi_y + y\frac{4\xi}{(\xi^2+1)^2}\xi_y^2\right)\partial_{\xi_y}$$

$$pr^1 U = \left(2\frac{\xi^2-1}{(\xi^2+1)^2}\xi_x^2 - \frac{4\xi}{(\xi^2+1)^2}\xi_x\xi_y\right)\partial_{\xi_x}$$

$$\left(2\frac{\xi^2-1}{(\xi^2+1)^2}\xi_x\xi_y - \frac{4\xi}{(\xi^2+1)^2}\xi_y^2\right)\partial_{\xi_y}$$

Para calcular el álgebra de Lie de isotropía de $(0,0,0,\xi_x,\xi_y)$, se calcula el núcleo de

$$\begin{pmatrix} 0 & \xi_x & -2\xi_x^2 \\ \xi_x & \xi_x & -2\xi_x\xi_y \end{pmatrix}$$

Como se tiene que

$$\begin{cases} \xi_x = 0 & Rg = 0 \\ \xi_x \neq 0 & Rg = 2 \end{cases}$$

entonces buscando el caso genérico se tiene que para $m_1 = (0,0,0,1,0)$ su álgebra de isotropía viene dada por

$$\mathfrak{g}_1 = \{H = -2C + 2B + U\}$$

En este caso la región $\mathcal{A}$ es un abierto de $J^1_{m_0}(\mathbb{R}^{\mathbf{2}},\mathbb{R})$ y por las primeras prolongaciones restantes se ve que la acción

$$G_0 \times J^1_{m_0}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}) \to J^1_{m_0}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$$

es transitiva por lo que no hay curvaturas de orden 1.

6.2.3. Curvaturas de orden 2

Con pr^2H que por razones de espacio omitimos, se calcula el álgebra de Lie de isotropía de $(0,0,0,1,0,\xi_{xx},\xi_{xy},\xi_{yy})$ a través del núcleo de

$$\begin{pmatrix} \xi_{xx}-1 \\ \xi_{xy} \\ \xi_{yy} \end{pmatrix}$$

Como

$$\begin{cases} \xi_{xx}=1,\ \xi_{xy}=\xi_{yy}=0 & Rg=0 \\ resto & Rg=1 \end{cases}$$

se tiene que para $m_2=(0,0,0,1,0,0,0,0)$ el álgebra de isotropía es cero, es decir, $\mathfrak{g}_2=0$.

Ahora, la región $\mathcal{A}$ vuelve a ser un abierto de $J^2_{m_1}(\mathbb{R}^{\mathbf{2}},\mathbb{R})$, pero como ahora $\mathfrak{g}_2=0$, tenemos que $\mathcal{A}'=\mathcal{A}$. Por otro lado, el tangente a la órbita en m_2 viene dado por

$$\left(pr^2H\right)_{m_1}=\left(\partial_{\xi_{xx}}\right)_{m_2}$$

por lo que podemos tomar como subvariedad bidimensional $\mathcal{W}\equiv\xi_{xx}=0$ lo que conduce a tener dos curvaturas de orden 2.

6.2.4. Los flujos

Resumiendo los cálculos anteriores, se tiene que $\mathfrak{g}=\{A,X,Y,B,C,H\}$ donde $\overline{\mathcal{B}}_0=\{A,X,Y\}$; $\overline{\mathcal{B}}_1=\{B,C\}$; $\overline{\mathcal{B}}_2=\{H\}$. Dada la superficie

$$S=\begin{cases} x=x \\ y=y \\ \xi=\xi(x,y) \end{cases}$$

supongamos que $\xi(x_0,y_0)=\xi_0$.

1. Usando el flujo de A, movemos S de tal forma que para la nueva superficie, ξ_0 tome el valor 0. Así:

$$\begin{cases} \overset{\bullet}{x}=\frac{2\xi}{\xi^2+1}x \\ \overset{\bullet}{y}=\frac{\xi^2-1}{\xi^2+1}x \\ \overset{\bullet}{\xi}=\frac{\xi^2-1}{2} \end{cases}$$

de la última ecuación sacamos que

$$\xi = \frac{(1+\xi_0)e^{-t} + \xi_0 - 1}{1 - \xi_0 + (1+\xi_0)e^{-t}}$$

y para

$$t = Ln\frac{1+\xi_0}{1-\xi_0}$$

se consigue que $\xi = 0$. Además también se cambiarían los valores de (x_0, y_0) pasando a valer (x_0', y_0').

2. Mediante los flujos de X e Y, se movería la superficie obtenida anteriormente a otra cuyos valores para (x_0, y_0) serían $(0,0)$. En vez de llevar a cabo este movimiento, a partir de ahora supongamos que la superficie S verifica que $\xi(0,0) = 0$, lo que nos dice que S pasa por el punto m_0 escogido como origen del espacio homogéneo. Además esto hace que no usemos los flujos de orden cero, del resto de los campos fundamentales.

3. Usamos el flujo de $pr^1 B$ sobre $J^1_{m_0}(\mathbb{R}^{\mathbf{2}}, \mathbb{R})$

$$\begin{cases} \overset{\bullet}{\xi_x} = \xi_x \\ \\ \overset{\bullet}{\xi_y} = \xi_x \end{cases}$$

que nos da

$$\begin{cases} \xi_x = u_x e^t \\ \xi_y = u_x e^t + u_y - u_x \end{cases}$$

siendo (u_x, u_y) el valor de la escama de primer orden de S en m_0. Así, para $t = -Ln\ u_x$ se consigue que al mover la escama de primer orden de S se obtenga que

$$\begin{cases} \xi_x = 1 \\ \xi_y = 1 + u_y - u_x \end{cases} \tag{8}$$

4. Con el flujo de $pr^1 C$ sobre $J^1_{m_0}(\mathbb{R}^{\mathbf{2}}, \mathbb{R})$

$$\begin{cases} \overset{\bullet}{\xi_x} = 0 \\ \\ \overset{\bullet}{\xi_y} = \xi_x \end{cases}$$

movemos los valores de la escama de orden 1, arrancando en (8), de la manera siguiente:

$$\begin{cases} \xi_x = 1 \\ \xi_y = t + 1 + u_y - u_x \end{cases}$$

Entonces para $t = u_x - u_y - 1$ se alcanzan los valores del punto m_1 :

$$\begin{cases} \xi_x = 1 \\ \xi_y = 0 \end{cases}$$

5. Ahora prolongamos el campo B a J^2 que hasta ahora no se había hecho. Con esto usamos el flujo de pr^2B sobre $J^2_{m_1}(\mathbb{R}^{\mathbf{2}},\mathbb{R})$

$$\begin{cases} \overset{\bullet}{\xi_{xx}} = \xi_{xx} \\ \\ \overset{\bullet}{\xi_{xy}} = \xi_{xx} + 2\xi_{xy} \\ \\ \overset{\bullet}{\xi_{yy}} = 2\xi_{xy} \end{cases}$$

y arrancando en el valor de la escama de orden 2 de S, (u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) se tiene que

$$\begin{cases} \xi_{xx} = u_{xx}e^t \\ \xi_{xy} = -u_{xx}e^t + (u_{xx}+u_{xy})e^{2t} \\ \xi_{yy} = -u_{xx}e^t + \frac{2}{3}(u_{xx}+u_{xy})e^{2t} + \left(\frac{1}{3}u_{xx} - \frac{2}{3}u_{xy} + u_{yy}\right)e^{-t} \end{cases}$$

Entonces para el valor de t encontrado anteriormente, $t = -Ln\ u_x$ se consiguen los valores

$$\begin{cases} \xi_{xx} = \frac{u_{xx}}{u_x} \\ \xi_{xy} = -\frac{u_{xx}}{u_x} + \frac{u_{xx}+u_{xy}}{u_x^2} \\ \xi_{yy} = -\frac{u_{xx}}{u_x} + \frac{2}{3}\frac{u_{xx}+u_{xy}}{u_x^2} + \\ \quad + \left(\frac{1}{3}u_{xx} - \frac{2}{3}u_{xy} + u_{yy}\right)u_x \end{cases}$$

6. Análogamente usamos el flujo de pr^2C sobre $J^2_{m_1}(\mathbb{R}^{\mathbf{2}},\mathbb{R})$

$$\begin{cases} \overset{\bullet}{\xi_{xx}} = -2 \\ \\ \overset{\bullet}{\xi_{xy}} = -\xi_{xx} \\ \\ \overset{\bullet}{\xi_{yy}} = -2\xi_{xy} \end{cases}$$

que arrancando en los valores anteriores queda

$$\begin{cases} \xi_{xx} = \frac{u_{xx}}{u_x} - 2t \\ \xi_{xy} = t^2 - \frac{u_{xx}}{u_x}(t+1) + \frac{u_{xx}+u_{xy}}{u_x^2} \\ \xi_{yy} = -\frac{2}{3}t^3 + \frac{u_{xx}}{u_x}(t^2+2t-1) + \left(\frac{2}{3} - 2t\right)\frac{u_{xx}+u_{xy}}{u_x^2} + \\ \quad + \left(\frac{1}{3}u_{xx} - \frac{2}{3}u_{xy} + u_{yy}\right)u_x \end{cases}$$

Para el valor de t usado anteriormente con el flujo de pr^1C, $t = u_x - u_y - 1$, se llega a la escama

$$\begin{cases} \xi_{xx} = \frac{u_{xx}}{u_x} - 2u_x + 2u_y + 2 \\ \xi_{xy} = (u_x - u_y - 1)^2 - \frac{u_{xx}}{u_x}(u_x - u_y) + \frac{u_{xx}+u_{xy}}{u_x^2} \\ \xi_{yy} = -\frac{2}{3}(u_x - u_y - 1)^3 + \frac{u_{xx}}{u_x}(u_x - u_y - 1)^2 + \\ \quad +2\frac{u_{xx}(u_x-1)-u_{xy}}{u_{x^2}}(u_x - u_y - 1) - \frac{u_{xx}}{u_x} + \\ \quad +\frac{2}{3}\frac{u_{xx}+u_{xy}}{u_x^2} + \left(\frac{1}{3}u_{xx} - \frac{2}{3}u_{xy} + u_{yy}\right)u_x \end{cases}$$

7. Por último se usa el flujo de $pr^2 H$ sobre $J^2_{m_1}(\mathbb{R}^{\mathbf{2}}, \mathbb{R})$

$$\begin{cases} \overset{\bullet}{\xi_{xx}} = -4\xi_{xx} + 4 \\ \overset{\bullet}{\xi_{xy}} = -4\xi_{xy} \\ \overset{\bullet}{\xi_{yy}} = -4\xi_{yy} \end{cases}$$

que arrancando en los valores anteriores resulta

$$\begin{cases} \xi_{xx} = 1 + \left(\frac{u_{xx}}{u_x} - 2u_x + 2u_y + 1\right) e^{-4t} \\ \xi_{xy} = \left[(u_x - u_y - 1)^2 - \frac{u_{xx}}{u_x}(u_x - u_y) + \frac{u_{xx}+u_{xy}}{u_x^2}\right] e^{-4t} \\ \xi_{yy} = \left[-\frac{2}{3}(u_x - u_y - 1)^3 + \frac{u_{xx}}{u_x}((u_x - u_y)^2 - 2) + \right. \\ \quad \left. + \frac{u_{xx}+u_{xy}}{{u_x}^2}(-2u_x + 2u_y + \frac{8}{3})\right] e^{-4t} + \\ \quad + \left(\frac{1}{3}u_{xx} - \frac{2}{3}u_{xy} + u_{yy}\right) u_x \end{cases}$$

Calculando el valor de t que hace que $\xi_{xx} = 0$, se obtiene de las otras coordenadas las dos curvaturas de orden 2:

$$\mathbb{K} = \frac{(u_x - u_y - 1)^2 - \frac{u_{xx}}{u_x}(u_x - u_y) + \frac{u_{xx}+u_{xy}}{u_x^2}}{2u_x - 2u_y - 1 - \frac{u_{xx}}{u_x}}$$

$$\mathbb{H} = \frac{(u_x - u_y - 2)\frac{u_{xx}}{u_x} - (u_x - u_y - \frac{5}{3})\frac{u_{xx}+u_{xy}}{u_x^2} + \left(\frac{1}{3}u_{xx} - \frac{2}{3}u_{xy} + u_{yy}\right) u_x}{2u_x - 2u_y - 1 - \frac{u_{xx}}{u_x}}$$

7. Mejoras del método del flujo

Como se ha visto, este método es realmente fácil de manejar, muy adecuado a los cálculos en coordenadas, si bien descansa en la integración de las ecuaciones diferenciales que determinan los campos fundamentales. La investigación en la que estamos embarcados los autores es demostrar la posibilidad de utilizar este método para clasificar las subvariedades que no se engloben en el caso genérico, caso que se da cuando el rango (5) es máximo. Ello pasa por determinar prolongaciones de subvariedades más que de campos, aunque el terreno todavía está muy inexplorado. Y esperamos que en un futuro no muy lejano podamos volverselo a dedicar a nuestro amigo J. Tarrés.

Referencias

[1] E. Cartan *La théorie des groupes finis et continus et la géométrie différentielle traitees par la méthode du repère mobile* Gautier - Villars, Paris 1937

[2] M. Fels & P. Olver *Moving Coframes II. Regularization and theoretical foundations* Acta Appl. Math. **55** (1999) 127 - 208

[3] P. Olver *Applications of Lie Groups to Differential Equations* 2^a Edición. Graduate text in Math. Vol. 107 Springer Verlag 1993

[4] P. Olver *Equivalence, Invariants, and Symmetry* Cambridge University Press 1995

[5] J.L. Guijarro *Lie. Más allá de la geometría* Colección: La matemática en sus personajes 29. Ed. Nivola 2007

[6] G. Jensen *Higher order contact of submanifolds of homogeneous spaces* Lecture Notes in Math. 610 Springer Verlag 1977

[7] J. Lafuente *Sobre el problema de clasificación de curvas en una geometría de Klein* Contribuciones matemáticas: homenaje a J. Arregui. Ed. Universidad Complutense 2004

[8] J. Lafuente *Sobre el orden de contacto entre variedades sumergidas* Contribuciones matemáticas: homenaje a E. Outerelo. Ed. Universidad Complutense 2005

[9] S. Lie Gesammelte Abhandlungen V1-6 Leipzig Teubner 1922 - 1937

[10] P.J. Vassiliou *Contact Geometry of Curves* Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications. SIGMA **5** (2009) 98 - 125

Utilización de material divulgativo para la enseñanza de la Topología

F. G. Lupiáñez

Departamento de Geometría y Topología
Facultad de Ciencias Matemáticas
Universidad Complutense de Madrid
E-28040 Madrid. Spain
fg_lupianez@mat.ucm.es

ABSTRACT

Se describe la experiencia didáctica de utilización de material divulgativo (artículos, libros, comics) para la enseñanza universitaria de la Topología en el primer ciclo de la titulación de Ciencias Matemáticas.

We describe the learning experience of use of popular science articles, books, and comics, for university teaching of topology in the first cycle of the degree in Mathematics.

Key words: Experiencia didáctica, enseñanza universitaria, Topología, material didáctico, divulgación matemática

2010 Mathematics Subject Classification: 97C70,54D99

En los estudios de Licenciatura (o Grado) en Matemáticas, en España, desde hace más de 10 años hay una asignatura de Introducción a la Topología en Primer Ciclo, que tiene carácter troncal, es decir, es absolutamente obligatoria para todos los alumnos que cursen esa titulación. En los planes de estudios anteriores, esa situación no se daba. La Topología sólo la cursaban los alumnos de las especialidades de Matemática fundamental y de Metodología (en las universidades en que esta última especialidad existía). La situación actual origina un grave problema de fracaso entre los estudiantes, ya que en las aulas donde se explica Topología hay alumnos de 2^o o 3er curso de carrera que, posteriormente se inclinarán, unos hacia Matemática fundamental, pero otros a cosas tales como Estadística, Matemática Computacional, Astronomía... especialidades en las que es bastante dudosa la utilidad de la Topología. Además, el carácter abstracto de los conceptos que aparecen en la asignatura, unido a la gran abundancia de conceptos nuevos que presentamos a los estudiantes a lo largo del curso, les abruma.

Ya en las primeras semanas de curso se advierte un abandono de la asistencia a clase de Topología por parte de bastantes alumnos, puesto que es algo que, en muchos casos, no entienden y que ven alejado de aplicaciones prácticas.

En el presente curso, he comenzado a tomar medidas directas para motivar a los alumnos al estudio de la Topología, independientemente de la especialidad matemática por la que luego se inclinen. El hecho de hacerlo en este curso precisamente es debido al cambio de plan de estudios (de Licenciatura a Grado) que se está realizando y que, en la actualidad, está en el 3er curso. En los estudios de Grado existe la posibilidad de dedicar alguna de las clases prácticas a "seminario". Yo he tomado la decisión de hacer consistir esos seminarios de alguna de las horas de prácticas en la exposición y comentario de material divulgativo sobre Topología a nivel de primer ciclo. Aunque pueda, en principio, parecer raro, este tipo de material (libros, artículos, comics) es relativamente abundante, bonito y motivador para los estudiantes que se inician en el estudio de la Topología. El procedimiento práctico que se puede seguir en las clases podría variar en función del número de alumnos presentes en el aula. Si hubiera muchos alumnos, el profesor podría realizar transparencias de las páginas del libro o artículo que piensa usar en la clase de ese día e ir, en su caso, aclarando o comentando en la pizarra los conceptos que vayan apareciendo en ese material divulgativo. Si el número de alumnos presentes en el aula es pequeño, el profesor puede distribuir entre los alumnos fotocopias del material que va a usar en la clase de ese día y, luego, ir comentando o aclarando en la pizarra lo que estime conveniente. Mi experiencia es que, por desgracia, si a los alumnos se les avisa de que la clase práctica del día siguiente va a consistir en la exposición y comentario en clase de material divulgativo sobre Topología, la asistencia a esa clase práctica baja considerablemente. Eso, parece que no tiene arreglo, puesto que hay alumnos que se desentienden de aquello que los profesores no le van a preguntar en los exámenes.

El material divulgativo existente sobre Topología, no cubre todos los temas de la asignatura que se explica en el Grado, pero hay variedad suficiente para amenizar varios de los conceptos o espacios topológicos que aparecen a lo largo del curso. Concretamente, se expone material sobre espacios cociente interesantes, como la banda de Moebius y la botella de Klein; se motiva la definición de curva topológica mostrando previamente la curva de Peano, la alfombra de Sierpinski y la esponja de Menger; se muestran aproximaciones a la clasificación de las superficies compactas,...

A continuación, vamos a mostrar los diversos materiales utilizados.

1. **Sobre la banda de Moebius y la botella de Klein**

Aquí he utilizado, fundamentalmente los artículos divulgativos realizados por la Profa. M. Macho Stadler [7,8,9,10] y el comic "El Topologicón"de J. P. Petit [11] del cual, como ejemplo, presento una página (véanse los Anexos 1, 2, 3 y 4).

2. **Sobre el concepto de curva**

Aquí he utilizado principalmente el libro de Boltyanskii y Efremovich [1], y el material elaborado por dos profesores de la Universidad Politécnica de Madrid para un curso de fractales en la red (véase el Anexo 5).

3. **Clasificación de superficies compactas**

Exposiciones divulgativas de la clasificación topológica de superficies compactas se pueden encontrar en los ya citados libro de Boltyanskii y Efremovich [1] y artículo de Macho Stadler [7], donde hay dibujos con utilidad didáctica para esta asignatura.

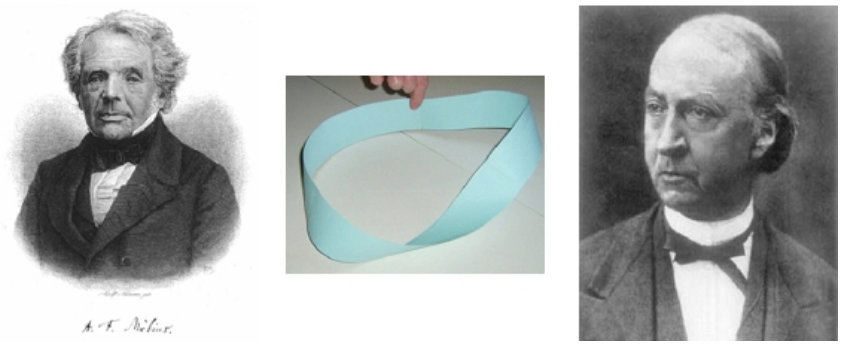
4. **Generalidades sobre Topología**

El comic "El Topologicón" [11] inicia al alumno en las aplicaciones de la Topología a otras ramas de la Matemática. Otros libros con dibujos bonitos y atrayentes para los alumnos, son [2], [3], [4], [12] y [13].

Con este material se trata de motivar a los alumnos para el estudio de la Topología en 1er ciclo y, en lo posible, entusiasmarlos para que continúen con estudios topológicos más avanzados.

Siguen los anexos mencionados en el texto.

ANEXO 1

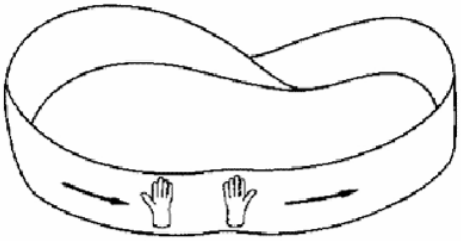


Möbius, la banda y Listing

Si se toma una tira de papel y se pegan los extremos como muestra la figura de debajo, se obtiene un cilindro, es decir, una superficie que tiene como bordes dos circunferencias disjuntas y dos lados (la cara interior y la exterior de la figura).

Si se hace lo mismo, pero antes de pegar los extremos se gira uno de ellos 180 grados, el objeto que se obtiene es una banda de Möbius.

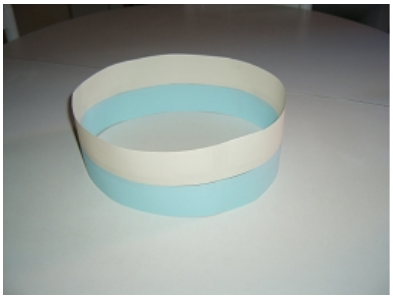
La banda de Möbius posee dimensión dos –como el cilindro–, pero sorprendentemente tiene un único borde (el doble de largo: su longitud es la suma de las de las dos circunferencias que forman el borde del cilindro) y una única cara. Para comprobarlo, basta con pasar un dedo por el borde de la cinta, hasta verificar que se ha recorrido todo sin levantarlo en ningún momento; y pasar un lápiz por la cara de la banda, constatando que al regresar al punto de partida, las supuestas dos caras del objeto han quedado marcadas.

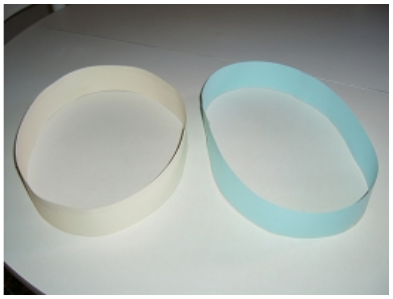


La banda de Möbius es no orientable: todas sus propiedades singulares (y de cualquier otro objeto que "la contenga") se derivan de esta última propiedad. En efecto, si se dibuja una mano sobre la banda y se mueve a lo largo de su única cara, al regresar al punto de partida, ¡la mano ha cambiado de sentido!

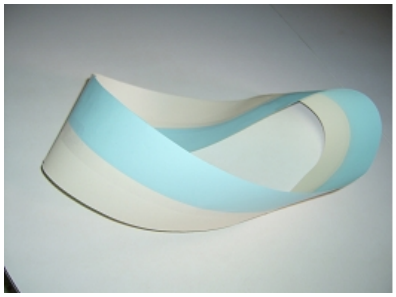
¿Qué sucede si antes de pegar los extremos de la banda de papel se gira uno de ellos 360 grados? Se obtiene (*topológicamente*) un cilindro, ya que este objeto y el obtenido al pegar sin realizar ningún giro son *homeomorfos*. Es fácil comprobar que, de hecho, sólo hay dos posibilidades al pegar una banda por dos de sus extremos opuestos: o bien se obtiene un cilindro (si antes de pegar los extremos, se gira uno de ellos un múltiplo par de 180 grados) o bien una banda de Möbius (en caso contrario).

Vamos a hacer un par de experimentos de extraño resultado. Si cortamos por la altura mitad un cilindro, se obtienen dos cilindros, la mitad de altos que el cilindro original:





Si se hace lo mismo con la banda de Möbius, parece que lo lógico sería obtener dos bandas de Möbius más pequeñas. Pero, no... se obtiene una única cinta, que es un cilindro, pues posee dos caras.



ANEXO 2

Se pueden realizar algunas experiencias con la banda de Möbius, que dan resultados paradójicos:

- Si se corta la banda por su mitad, como muestra la Figura 41, aparece una cinta el doble de larga, que contiene 4 semivueltas, dos caras y dos bordes, luego no es una banda de Möbius, sino un cilindro;
- Si se corta la banda de Möbius a la altura 1/3, se obtienen dos bandas de Möbius entrelazadas, una más larga que otra: la altura 1/2 es la única ***especial***.

La banda de Möbius ha inspirado a artistas y científicos, como muestran los ejemplos que siguen.

El dibujante e ilustrador Jean Giraud *Möbius* (1938-), y su autocaricatura, portada del libro *Mi doble y yo*.

Las hormigas de Escher.

Elisabeth Zimmermann y sus bufandas de Möbius.

Figura 42.

ANEXO 3

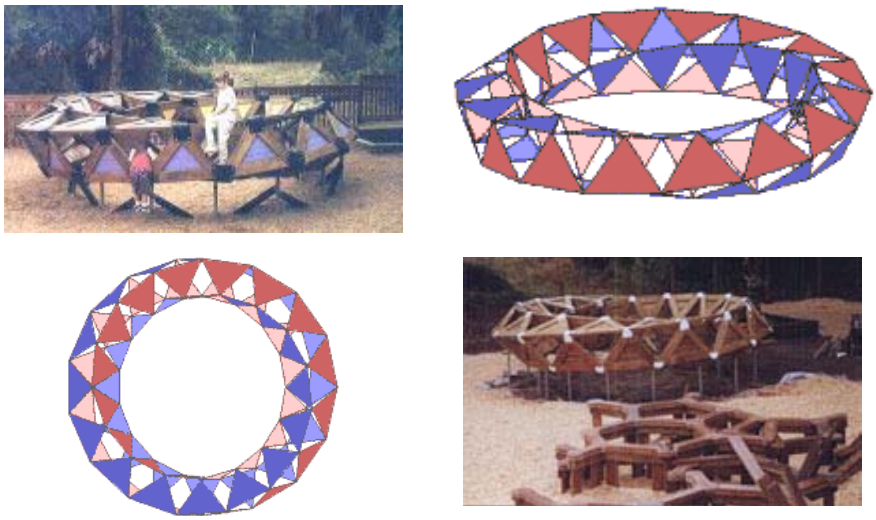


Figura 44.

10.2. La botella de Klein

La *botella de Klein* es una superficie obtenida al identificar los lados de un cuadrado como muestra la Figura 45:

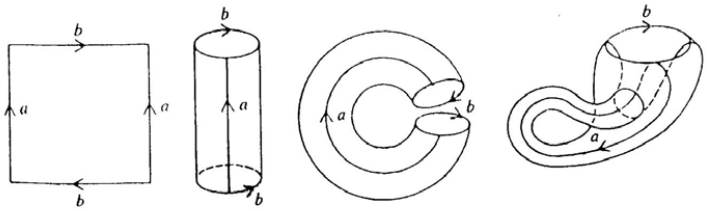
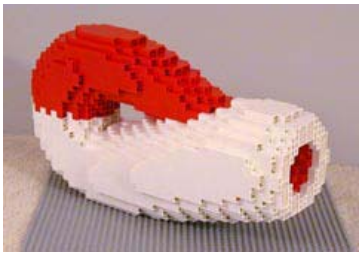


Figura 45.

Esta figura no puede construirse en el espacio de dimensión tres sin autointersecarse, pero sí que está contenida en el espacio de dimensión cuatro.

La botella de Klein presenta varias propiedades paradójicas: posee ***un*** solo lado (no tiene cara interior ni cara interior) y ***no*** tiene borde: de hecho, puede obtenerse esta superficie a partir de dos bandas de Möbius, y por ello hereda sus ***extrañas*** propiedades.

La botella de Klein ha servido de modelo para muchas construcciones extraordinarias, como muestran las imágenes que aparecen a continuación.



La botella de Klein de LEGO de Andrew Lipson.

La botella de Klein de origami de Robert Lang.

Figura 46.

En la Figura 47 aparecen algunas botellas de Klein de Cliff Stoll, de la *Acme Klein Bottle*.

Figura 47.

ANEXO 4

¿Existen volúmenes no contráctiles?
Si, por ejemplo el TORO
Está claro. Si no la corto, la podré contraer como mucho, según una circunferncia.
la "superficie del TORO" tampoco es contráctil.
decid, exactamente, ¿a qué jugais?
¡ apáñate !
no sé si teneis en cuenta que tenemos un explorador cataléptico en nuestras manos
¿creeis que cortando las pastas a trozos es como saldremos de ésta?
Su GEONEUROSIS tiene un origen geométrico. Puede que sólo profundizando en los conceptos geométricos que nos encontremos, podamos curarle.
Toda su persona estaba orientada hacia el descubrimiento del POLO SUR, idea con la que estaba obsesionado, en el ámbito personal y social.

ANEXO 5

Example 18 The Polish mathematician Sierpiński constructed an interesting curve. We divide a square into nine equal squares and discard the central square (Figure 39a). Then we divide each of the remaining squares into nine equal squares and again discard the central square (Figure 39b). After one more such operation we arrive at the figure shown in Figure 39c. In the limit we obtain a one-dimensional figure C, i.e., a curve (known as the *Sierpiński carpet*).

The figure C is a *universal* plane curve: *If a curve l can be embedded in the plane, then it can be embedded in the Sierpiński carpet*, i.e., there is a curve $l' \subseteq C$ that is homeomorphic to l. It is clear that a curve that cannot be embedded in the

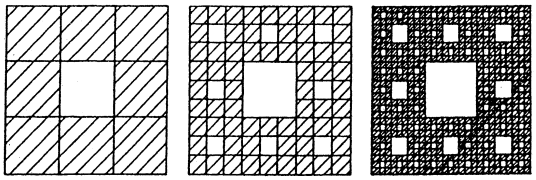


FIGURE 39.

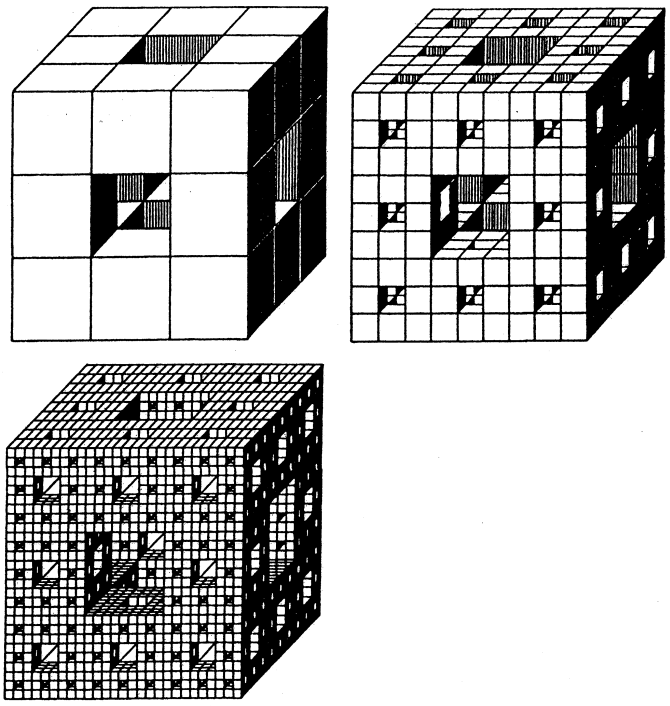


FIGURE 40.

plane cannot be embedded in the Sierpiński carpet either. But as was shown by the Austrian mathematician Menger, there is a curve in space, analogous to the Sierpiński carpet (Figure 40), in which any curve can be embedded.

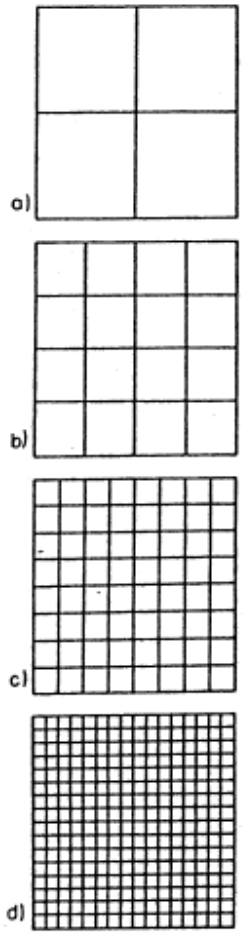


FIGURE 42.

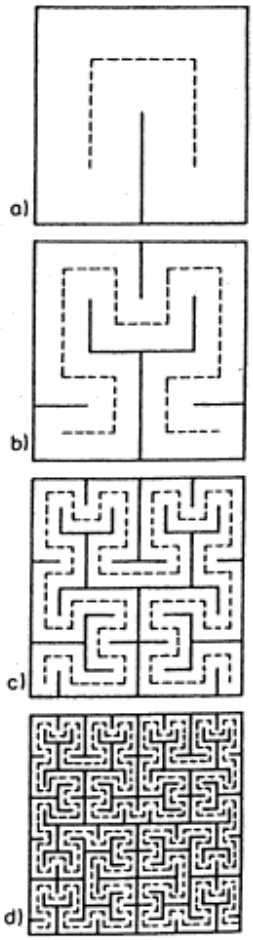


FIGURE 43.

To obtain a Peano curve we construct in a square Q ever more winding strips and take the limit of their midlines. This is a shorthand description of the following procedure: We divide the square into 4, 16, 64, ..., 4^n, ... congruent squares (Figure 42). At each stage of subdivision we remove some of the sides of the "subsquares" of the square. The leftover sides form non-removable partitions that determine the successive strips. In each strip we introduce its midline. (The first few winding strips and their midlines are shown in Figure 43; the midlines are the broken lines.) The limit of these midlines is a path that fills the whole square, i.e., a Peano curve.

Referencias

[1] Boltyanskii, V.G. and Efremovich, V.A. (2001). Intuitive combinatorial Topology. New York: Springer.

[2] Carlson, S.C. (2001). Topology of surfaces, knots, and manifolds: a first undergraduate course. New York: John Wiley & Sons.

[3] Francis, G.K. (2007). A topological picturebook. New York: Springer.

[4] Huggett, S. and Jordan, D. (2001). A topological aperitif. New York: Springer.

[5] Luque, B. y Agea, A. Curva de Hilbert, http://www.dmae.upm.es/cursofractales/capitulo1/4.html en "Fractales en la red". Madrid: Universidad Politécnica de Madrid.

[6] Luque, B. y Agea, A. Alfombra de Sierpinski y Esponja de Menger, http://www.dmae.upm.es/cursofractales/capitulo1/5.html en "Fractales en la red". Madrid: Universidad Politécnica de Madrid.

[7] Macho Stadler, M. (2002). ¿Que es la Topología? Sigma, n^o 20, 63-77.

[8] Macho Stadler, M. (2006). La paradoja en la ciencia y el arte. Matematicalia, Vol 2, n^o 2.

[9] Macho Stadler, M. (2008). Las sorprendentes aplicaciones de la banda de Möbius, en "Segundo Congreso Internacional de Matemáticas en la Ingeniería y en la Arquitectura". Madrid: Universidad Politécnica de Madrid, pp. 29-61.

[10] Macho Stadler, M.(2009). Listing, Möbius y su famosa banda, en "Un paseo por la Geometria". Bilbao: Universidad del País Vasco, pp. 59-78.

[11] Petit, J-P. (2006) El Topologicón, Savoir sans frontières, en http://www.jp-petit.com

[12] Prasolov, V.V.(1995). Intuitive Topology. Providence: AMS.

[13] Sauvy, J. and S. (1974). The child's discovery of space: from hopscotch to mazes: an introduction to intuitive Topology. Harmondsworth: Penguin Books.

Manifolds with Corners Modeled on Convenient Vector Spaces

Juan MARGALEF and Enrique OUTERELO

Instituto de Física Fundamental
Consejo Superior de Investigaciones Científicas
Calle Serrano, 123
E-28006 Madrid, Spain
margalef@imaff.cfmac.csic.es

Departamento de Geometría y Topología
Facultad de Ciencias Matemáticas
Universidad Complutense de Madrid
E-28040 Madrid, Spain
outerelo@mat.ucm.es

Dedicado al Profesor Dr. Juan Tarrés Freixenet.

ABSTRACT

The authors of the present paper realize a quite systematic study of infinite-dimensional Banach manifolds with corners in [8]. Here, we extend some features of the manifolds with corners modeled on Banach spaces to manifolds with corners modeled on convenient vector spaces, that have arisen as important, in the last years, in Global Analysis.

Key words: Quadrants on vector spaces, Bornological space, Mackey convergence, Mackey complete spaces, Convenient vector spaces, Differentiation theory in convenient vector spaces, Manifolds with corners.

2010 Mathematics Subject Classification: 58A05, 58B10.

1. Introduction

The study of manifolds with corners was originally developed by J. Cerf [1] and A. Douady [2] as a natural generalization of the concept of finite-dimensional manifold with smooth boundary.
Stability under finite products of manifolds with corners is of a great importance and one can consider enough by itself to justify the detailed study of this type of manifolds.
Another important question in this field, with pioneer contributions by the authors in the category of manifolds with corners modeled on Banach spaces (as has been recognized by Jean Pradines in [10]), is the existence of quotient manifolds of manifolds with smooth boundary or more general manifolds with corners (see [8]).
In [9] the authors survey the main features about the construction of manifolds with corners modeled on Banach spaces, normed spaces, locally convex topological vector spaces and convenient vector spaces. In this paper we present, with detailed proofs of the principal results, the construction of manifolds with corners modeled on convenient vector spaces with the necessary differential calculus.

2. Quadrants

The local models to construct the manifolds with corners are open subsets of quadrants of topological vector spaces. Thus in this paragraph we introduce the quadrants in vector spaces, topological vector spaces and convenient vector spaces (Mackey complete vector spaces) and we survey the main properties of them.
All the vector spaces will be real vector spaces (*rvs*). However, we remark that the results established here can be extended to complex vector spaces by considering its real restrictions and carrying out adequate adjustments of the notions considered.

Quadrants in vector spaces

Definition 2.1. Let E be a real vector space (*rvs*). A subset Q of E is called quadrant of E if there exist a basis $B = \{u_i\}_{i\in I}$ of E and a subset K of I such that

$$Q = L\{u_k : k \in K\} + \left\{ \sum_{i\in I\smallsetminus K} a_i u_i : \sum_{i\in I\smallsetminus K} a_i u_i \text{ has positive finite support} \right\}$$

($L\{u_k : k \in K\}$ is the vector subspace of E generated by $\{u_k : k \in K\}$ and positive finite support means: There exists a finite subset F of $I \smallsetminus K$ such that $a_i > 0$ for all $i \in F$ and $a_i = 0$ for all $i \in (I \smallsetminus K) \smallsetminus F$).
In this case, we say that the pair (B, K) is adapted to the quadrant Q.

Note that B is a subset of Q and

$$L\{u_k : k \in K\} \bigcap \left\{ \sum_{i\in I\smallsetminus K} a_i u_i : \sum_{i\in I\smallsetminus K} a_i u_i \text{ has positive finite support} \right\} = \{\bar{0}\}$$

Note that E is a quadrant of E, $(K = I)$, and if E is non-trivial, then $\{\bar{0}\}$ is not a quadrant of E.

The following result has an easy proof by the usual techniques of Linear Algebra.

Proposition 2.2. *Let Q be a quadrant of a rvs E and let $(B = \{u_i\}_{i\in I}, K \subset I)$ and $(B' = \{u'_m\}_{m\in M}, N \subset M)$ be pairs adapted to Q. Then:*

(i) $L\{u_k : k \in K\} = L\{u'_n : n \in N\}$.

(ii) $card(I) = card(M), card(K) = card(N), card(I \smallsetminus K) = card(M \smallsetminus N)$.

(iii) *There exists a bijective map $\sigma : I \smallsetminus K \to M \smallsetminus N$ such that $u'_{\sigma(i)} = r_i u_i + x_i$ for all $i \in I \smallsetminus K$, where $x_i \in L\{u_k : k \in K\}$ and r_i is a positive real number.*

(iv) *If $K = \emptyset$, there exists a bijective map $\sigma : I \to M$ such that $u'_{\sigma(i)} = r_i u_i$ for all $i \in I$, where r_i is a positive real number.*

This result proves the consistence of the following definitions.

Definition 2.3. Let Q be a quadrant of a *rvs* E and $(B = \{u_i\}_{i\in I}, K \subset I)$ a pair adapted to Q. Then:

(i) $L\{u_k : k \in K\}$ is called the *kernel* of Q and is denoted by Q^0.

(ii) $card(I \setminus K)$ is called the *index* of Q and is denoted by $index(Q)$. Finally $card(K)$ (i.e. the dimension of Q^0) is called *coindex* of Q and is denoted by $coindex(Q)$.

Proposition 2.4. *Let Q and Q' be quadrants of a rvs E such that $index(Q) = index(Q')$ and $coindex(Q) = coindex(Q')$. Then there exists a linear isomorphism $\alpha : E \to E$ such that $\alpha(Q) = Q'$ and $\alpha(Q^0) = Q'^0$.*

Proposition 2.5. *Let E be a rvs. We have:*

(i) *If Q is a quadrant of E and $(B = \{u_i : i \in I\}, K \subset I)$ is a pair adapted to Q, then there exists a linear isomorphism*

$$\delta : E \to Q^0 \times \mathbb{R}^{(I \setminus K)}$$

such that $\delta(Q) = Q^0 \times \left(\mathbb{R}^{(I \setminus K)}\right)^+$, where

$$\mathbb{R}^{(I \setminus K)} = \left\{x \in \mathbb{R}^{I \setminus K} : \text{ there is } F_x \text{ finite subset of } I \setminus K \text{ with } x_i = 0 \text{ for all } i \notin F_x\right\}$$
$$\text{and } \left(\mathbb{R}^{(I \setminus K)}\right)^+ = \left\{x \in \mathbb{R}^{(I \setminus K)} : \ x_i \geqslant 0 \text{ for all } i \in I \setminus K\right\},$$

and $\delta(Q^0) = Q^0 \times \{\bar{0}\}$.
$(\delta^{-1}\left((x_0, (x_i)_{i \in I \setminus K}\right)) = x_0 + \sum_{i \in I \setminus K} x_i u_i$, $x_0 \in Q^0$, $(x_i)_{i \in I \setminus K} \in \mathbb{R}^{(I \setminus K)}$).

(ii) *Let Q and Q' be quadrants of E with finite indexes. Suppose that $index(Q) = index(Q')$. Then $coindex(Q) = coindex(Q')$, (Q^0 and Q'^0 have the same dimension).*

The quadrants in a *rvs* E can be described by linear maps on E.

Proposition 2.6. *Let Q be a quadrant of a rvs E. Then there exists $\Lambda = \{\lambda_m : m \in M\}$, a linearly independent system of elements of*

$$E^* = L(E, \mathbb{R}) = \{\lambda : \ \lambda \text{ is a linear map from } E \text{ into } \mathbb{R}\},$$

such that

$$Q = E^+_\Lambda = \{x \in E : \ \lambda_m(x) \geqslant 0 \text{ for all } m \in M\},$$
$$Q^0 = E^0_\Lambda = \{x \in E : \ \lambda_m(x) = 0 \text{ for all } m \in M\} \text{ and } card(M) = index(Q).$$

Therefore Q is a convex set of E (i.e. for every $x, y \in Q$ and all real number t with $0 \leqslant t \leqslant 1$, one has $tx + (1-t)y \in Q$) and $tQ \subset Q$ for every real number $t \geqslant 0$, i.e. Q is a wedge set of E.

Proof. Let $(B = \{u_i : \ i \in I\}, K \subset I)$ be a pair adapted to Q. For every $j \in I \setminus K$, let λ_j be the element of E^* defined by: $\lambda_j(u_k) = 0$ for all $k \in I \setminus \{j\}$ and $\lambda_j(u_j) = 1$. We take $M = I \setminus K$ and all the statements are easily proved. □

Remark 2.7. If $index(Q) = 0$, (i.e. $K = I$), then $Q = Q^0 = E$ and, obviously, $E^+_\Lambda = E^0_\Lambda = E$ with $\Lambda = \emptyset$.

Proposition 2.8. *Let E be a rvs and $\Lambda = \{\lambda_1, ..., \lambda_p\}$ a finite set of $L(E, \mathbb{R})$. Then,*

(i) *$\{\lambda_1, ..., \lambda_p\}$ is a linearly independent system of elements of $L(E, \mathbb{R})$ if and only if there exists a finite subset $\{x_1, ..., x_p\}$ of E such that $\lambda_i(x_j) = \delta_{ij}$, $i, j = 1, ..., p$ (δ_{ij} Kronecker's index). In this case, $E = E^0_\Lambda \bigoplus L\{x_1, ..., x_p\}$.*

(ii) *If $\{\lambda_1, ..., \lambda_p\}$ is a linearly independent system of elements of $L(E, \mathbb{R})$, we have that E^+_Λ is a quadrant of E such that index $\left(E^+_\Lambda\right) = card(\Lambda) = p$ and $\left(E^+_\Lambda\right)^0 = E^0_\Lambda$, (By (i), we have $E = E^0_\Lambda \oplus L\{x_1, ..., x_p\}$, ($\lambda_i(x_j) = \delta_{ij}$)).*

Proposition 2.9. *Let Q be a quadrant of finite index on a rvs E. Then, if $\Lambda = \{\lambda_m : m \in M\}$ and $\Lambda' = \{\mu_p : p \in P\}$ are linearly independent systems of elements of $L(E, \mathbb{R})$ such that $Q = E^+_\Lambda = E^+_{\Lambda'}$, one verifies:*

(i) *$Q^0 = E^0_\Lambda = E^0_{\Lambda'}$.*

(ii) *$card(M) = card(P) = index(Q)$.*

(iii) *There exists a bijective map $\sigma : M \longrightarrow P$ such that $\mu_{\sigma(m)} = r_m \lambda_m$, where r_m is a positive real number, for all $m \in M$.*

Remark 2.10. In the preceding result, the statement "*index* (Q) is finite" is an essential condition, as proves the example of page 986 of [9].

Proposition 2.11. *Let E be a rvs.*

(a). *Let Q be a quadrant of E and $(\{u_i : i \in I\}, K \subset I)$ a pair adapted to Q. Then:*

(i) *We know that $Q^0 = L\{u_k : k \in K\}$ is an intrinsic subset of Q (2.2 and 2.3). If $K = I$, then $Q^0 = E = Q$ and if $K = \emptyset$, then $Q^0 = \{\overline{0}\}$.*

(ii) *For all $n \in \mathbb{N}$, let Q^n be the set*

$$\{x \in Q : \text{ there exist } x_0 \in Q^0, i_1, \ldots, i_n \in I \setminus K \text{ and } a_{i_1}, \ldots, a_{i_n} \in \mathbb{R} \text{ such that } a_{i_1} > 0, \ldots, a_{i_n} > 0, \text{ and } x = x_0 + a_{i_1} u_{i_1} + \cdots + a_{i_n} u_{i_n}\}.$$

This definition of Q^n does not depend of the pair adapted to Q considered, (2.2), and it is clear that Q^n can be empty, but if $Q^n \neq \emptyset$ then $Q^m \neq \emptyset$ for all $m \in \mathbb{N}$ with $m < n$.

(b). *Let Q be a quadrant of E. Then:*

(i) *If $index(Q)$ is infinite, then $\{Q^n : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ is a partition of the quadrant Q.*

(ii) *If index $(Q) = n$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, then $Q^m = \emptyset$ for all $m > n$ and $\{Q^0, Q^1, ..., Q^n\}$ is a partition of Q.*

(c). *Let Q be a quadrant of E. Then:*

(i) *If* $index(Q)$ *is infinite and* $x \in Q^n$, $(n \in \mathbb{N} \cup \{0\})$, *we say that* x *has coindex* n $(coindex(x) = n)$.

(ii) *If* $index(Q)$ *is finite* $(index(Q) = n)$ *and* $x \in Q^m$, $0 \leqslant m \leqslant n$, *we say that* x *has coindex* m *and index* $n - m$ $(index(x) = n - m)$. *In this case (of* $index(Q) = n$*),* $\{x \in Q : x \text{ has index } n\} = Q^0$.

(d). *Let* Q *be a quadrant of* E *with finite index* n. *Let* $\Lambda = \{\nu_1, ..., \nu_n\}$ *be a linearly independent system of elements of* $L(E, \mathbb{R})$ *such that* $Q = E^+_\Lambda$, *(consequently* $Q^0 = E^0_\Lambda$ *(2.9)). Then for* $x \in Q$ *we have:*

$$coindex(x) = m \text{ if and only if } card\{i : \nu_i(x) \neq 0\} = m$$
$$\text{and } index(x) = p \text{ if and only if } card\{i : \nu_i(x) = 0\} = p.$$

Quadrants in Hausdorff real topological vector spaces

In Hausdorff real topological vector spaces we are only interested in quadrants with non-empty interior.

Lemma 2.12. *Let* $(E, \mathcal{T})$ *be a Hausdorff real topological vector space (Hrtvs) (i.e.* E *is a rvs,* $\mathcal{T}$ *is a Hausdorff topology in* E *and the addition of vectors,* $+ : (E, \mathcal{T}) \times (E, \mathcal{T}) \to (E, \mathcal{T})$, *and the product of vectors by scalars,* $\cdot : (\mathbb{R}, T_u) \times (E, \mathcal{T}) \to (E, \mathcal{T})$ *are continuous maps) and* Q *a quadrant of* E. *Then:*

- *If* $index(Q)$ *is infinite,* $int(Q) = \emptyset$, *(*$int(Q)$ *is the interior of* Q *in the topological space* $(E, \mathcal{T})$*).*
- *If* $index(Q)$ *is finite and* Q^0 *is not closed in* $(E, \mathcal{T})$, $int(Q) = \emptyset$.

Proof. Let $(B = \{u_i : i \in I\}, K \subset I)$ be a pair adapted to Q. Suppose $index(Q) = card(I \setminus K)$ infinite. Let x be an element of Q and U an open neighborhood of x. Then $-x + U(= V)$ is an open set of E with $0 \in V$. The point x can be uniquely expressed by $x = x_0 + a_1 u_{j_1} + ... + a_r u_{j_r}$, $x_0 \in Q^0$, j_1,...,j_r elements of $I \setminus K$, $a_1 > 0$,...,$a_r > 0$. If j_0 is an element of $I \setminus K$ with $j_0 \notin \{j_1, ..., j_r\}$ and $-\frac{1}{n_0} u_{j_0} \in V$, then $x - \frac{1}{n_0} u_{j_0} \in U$ and $x - \frac{1}{n_0} u_{j_0} = x_0 + a_1 u_{j_1} + ... + a_r u_{j_r} - \frac{1}{n_0} u_{j_0} \notin Q$. Thus $int(Q) = \emptyset$.

Suppose now that $index(Q)$ is finite and Q^0 is not closed in $(E, \mathcal{T})$. Then $I \setminus K = \{i_1, ..., i_n\}$. One considers the linearly independent system of elements of $E^* = L(E, \mathbb{R})$, $\Lambda = \{\lambda_i\}_{i \in \{i_1, ..., i_n\}}$ given by $\lambda_i(u_j) = \delta_{ij}$ (δ_{ij} Kronecker's index), $i \in \{i_1, ..., i_n\}$, $j \in I$. Then, by 2.6, $Q = E^+_\Lambda$ and $Q^0 = \bigcap_{j=1}^{j=n} ker(\lambda_{i_j})$. Since Q^0 is not closed in $(E, \mathcal{T})$, there exists $j \in \{1, ..., n\}$ such that $ker(\lambda_{i_j})$ is dense in $(E, \mathcal{T})$ (5.4, page 37, of [5]), (suppose $j = 1$). Let x be an element of Q and V an open neighborhood of x. Then, there exists $y \in ker(\lambda_{i_1}) \cap V$ and therefore $y = y_0 + a_2 u_{i_2} + ... + a_n u_{i_n}$ with $y_0 \in Q^0$. Thus, if $-\frac{1}{n_0} u_{i_1} \in V - y$ (a such element always exists), $y - \frac{1}{n_0} u_{i_1} = y_0 - \frac{1}{n_0} u_{i_1} + a_2 u_{i_2} + ... + a_n u_{i_n}$ is an element of $V \cap (E \setminus Q)$ and $int(Q) = \emptyset$. □

Proposition 2.13. *Let* Q *be a quadrant of a Hrtvs* $(E, \mathcal{T})$. *Then the following statements are equivalent:*

(i) $int(Q) \neq \emptyset$ *(*$int(Q)$ *is the interior of* Q *in the topological space* $(E, \mathcal{T})$*).*

(ii) $index(Q)$ *is finite and* Q^0 *is closed in* $(E, \mathcal{T})$ *(we remark that if* $index(Q) = 0$*, then* $Q^0 = Q = E$*).*

Proof. The step "$(i) \Longrightarrow (ii)$" follows from the above lemma.
Step "$(ii) \Longrightarrow (i)$". The case $index(Q) = 0$ is trivial ($Q = E = Q^0$). Suppose $index(Q) = n \geqslant 1$ and let $(\{u_i : i \in I\}, K \subset I)$ be a pair adapted to Q. Then, $I \setminus K = \{i_1, ..., i_n\}$ and by 2.6 the linearly independent system $\Lambda = \{\lambda_1, ..., \lambda_n\}$ of elements of $E^* = L(E, \mathbb{R})$, where $\lambda_k(u_j) = \delta_{kj}$ for all $j \in I$ and $k = 1, ..., n$ verifies that $Q = E^+_\Lambda$ and $Q^0 = E^0_\Lambda$. Moreover

$$\alpha : (Q^0, \mathcal{T}|_{Q^0}) \times (\mathbb{R}^n, \mathcal{T}^n_u) \to (Q^0, \mathcal{T}|_{Q^0}) \times (L\{u_{i_1}, ..., u_{i_n}\}, \mathcal{T}|_{L\{u_{i_1}, ..., u_{i_n}\}}) \overset{+}{\to} (E, \mathcal{T}),$$
$$(x_0, (r_1, ..., r_n)) \mapsto (x_0, r_1u_1 + ... + r_nu_n) \mapsto x_0 + r_1u_1 + ... + r_nu_n,$$

is a linear homeomorphism, since we apply the general results: (1) *Let* $(E, \mathcal{T})$ *be a topological vector space and* F *a closed vector subspace of finite codimension of* $(E, \mathcal{T})$*. Then every algebraic supplement* G *of* F *in* E *is a topological supplement of* F *in* $(E, \mathcal{T})$; (2) *A linear subspace* G *of finite dimension* n *of a Hrtvs* $(E, \mathcal{T})$ *is linearly homeomorphic to* $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}^n_u)$ *(therefore* G *is complete and closed in* $(E, \mathcal{T})$*).* Consequently, for all $i \in \{1, ..., n\}$, $\lambda_i = p_i \circ \alpha^{-1}$, (where $p_i : Q^0 \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $p_i(x_0, (r_1, ..., r_n)) = r_i$), is a continuous mapping from $(E, \mathcal{T})$ into $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$. Thus,

$$\Lambda \subset \mathcal{L}((E, \mathcal{T}), (\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)) = \{\lambda : \lambda \text{ is a continuous linear map of } (E, \mathcal{T}) \text{ into } (\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)\}.$$

Furthermore, $\alpha^{-1}(Q) = \{(x_0, (r_1, ..., r_n)) \in Q^0 \times \mathbb{R}^n : r_1 \geqslant 0, ..., r_n \geqslant 0\}$ and therefore

$$int(Q) = \left\{x_0 + r_1u_{i_1} + ... + r_nu_{i_n} : x_0 \in Q^0,\ r_1 > 0, ..., r_n > 0\right\} \neq \emptyset.$$

□

Proposition 2.14. *Let* Q *be a quadrant of a Hrtvs* $(E, \mathcal{T})$*. Then the following statements are equivalent:*

(i) $index(Q)$ *is finite and* Q^0 *is closed in* $(E, \mathcal{T})$*.*

(ii) *There exists a finite linearly independent system* Λ *of elements of*

$$\mathcal{L}((E, \mathcal{T}), (\mathbb{R}, \mathcal{T}_u))) = \{\lambda : \lambda \text{ is a continuous linear map from } (E, \mathcal{T}) \text{ in } (\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)\}$$

such that $Q = E^+_\Lambda$*. (See 2.8(ii))*

Moreover if (ii) *is fulfilled,* $cardinal(\Lambda) = index(Q)$ *and* $Q^0 = E^0_\Lambda$*.*

Proposition 2.15. *Let* Q *and* P *be quadrants of a Hrtvs* $(E, \mathcal{T})$ *such that* Q^0 *and* P^0 *are closed in* $(E, \mathcal{T})$*, and* $index(Q) = index(P)$*, finite. Then, there exists a linear homeomorphism* $\alpha : E \to E$ *such that* $\alpha(P) = Q$ *and* $\alpha(P^0) = Q^0$*.*

Proof. It is an easy consequence of the general result: *Let* $(E, \mathcal{T})$ *be a Hrtvs and* F*,* G *closed vector subspaces of* E *with the same finite codimension. Then* F *and* G *are linearly homeomorphic.* □

Quadrants in Hausdorff locally convex real topological vector spaces

Now we consider a special class of Hausdorff topological vector spaces, namely the class of the Hausdorff locally convex real topological vector spaces (*Hlcrtvs*) (i.e. Hausdorff topological vector spaces such that the zero vector $\bar{0}$ has a basis of neighborhoods consisting of open convex sets). For a detailed study of the *Hlcrtv* spaces the reader can consult the books [4] and [7], where one can find the omitted proofs of some results established in the present paper.

Definition 2.16. (i) Let E be a *rvs*. A subset C of E is called *absolutely convex* if for every $x, y \in C$ and real numbers r, s with $|r| + |s| \leqslant 1$, one has $rx + sy \in C$.
A subset R of E is called *radial* if $[0,1]R \subset R$.
A subset A of E is called *absorbing* if $\bigcup_{r>0} rA = E$.

(ii) Let $(E, \mathcal{T})$ be a *rtvs*. A subset B of E is called *bounded* if for all neighborhood U of $\bar{0}$ there exists a real number r such that $B \subset rU$.
A radial subset V of E is called *bornivorous* if it absorbs each bounded set (i.e. for every bounded set B of E there exists a real number $r > 0$ such that $B \subset [0, r]V$).

Proposition 2.17. *Let $(E, \mathcal{T})$ be a Hausdorff topological real vector space. Then, the following results are equivalent:*

(i) *$(E, \mathcal{T})$ is a Hlcrtvs.*

(ii) *The zero vector $\bar{0}$ has a basis of neighborhoods consisting on closed absolutely convex sets.*

(iii) *The zero vector $\bar{0}$ has a basis of neighborhoods consisting on open absolutely convex sets.*

(iv) *The topology $\mathcal{T}$ is described by a family of semi-norms $\{p_i = \|\cdot\|_i\}_{i\in I}$, (i.e. the family of finite intersections of elements of $\left\{p_i^{-1}([0,\varepsilon)) : i \in I,\ \varepsilon > 0\right\}$ is a basis of neighborhoods of the zero vector $\bar{0}$).*

(v) *The topology $\mathcal{T}$ is described by a family of continuous semi-norms $\{p'_i = \|\cdot\|'_i\}_{i\in I}$, (i.e. the family of finite intersections of elements of $\left\{(p'_i)^{-1}([0,\varepsilon)) : i \in I,\ \varepsilon > 0\right\}$ is a basis of neighborhoods of the zero vector $\bar{0}$).*

(A semi-norm p in a *rvs*, E, is a map $p : E \to \mathbb{R}$ such that: $p(x) \geqslant 0$, $p(x+y) \leqslant p(x) + p(y)$, $p(rx) = |r|p(x)$, $x, y \in E$, $r \in \mathbb{R}$. If B is an absolutely convex absorbing subset of E, then $p_B : E \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \inf\{r \in \mathbb{R} : x \in rB\}$, is a semi-norm in E such that $\{x : p_B(x) < 1\} \subset B \subset \{x : p_B(x) \leqslant 1\}$ (Minkowski functional). In the proof of the step "(iii)$\Longrightarrow$(iv)" of the above proposition consider the Minkowski functionals p_U, U open absolutely convex neighborhood of $\bar{0}$ (U is clearly absorbing)).

Proposition 2.18. *Let $(E, \mathcal{T})$ be a Hausdorff locally convex rtvs (Hlcrtvs) and*

$$\mathcal{V}(0) = \{V \subset E : V \text{ is a bornivorous absolutely convex subset of } E\}.$$

Then:

(i) $\mathcal{V}(0)$ *is a* 0*-neighborhood basis of a (unique) Hausdorff locally convex topology on* E*, denoted by* $\mathcal{T}_{born}$ *and called bornologification of* $(E,\mathcal{T})$*. This topology,* $\mathcal{T}_{born}$*, is finer than* $\mathcal{T}$ *(*$\mathcal{T}\subset\mathcal{T}_{born}$*).*

(ii) $(E,\mathcal{T})$ *and* $(E,\mathcal{T}_{born})$ *have the same collection of bounded sets, and* $(E,\mathcal{T}_{born})$ *is the finest Hausdorff locally convex topology on* E *with this property.*

Proposition 2.19. *Let* $(E,\mathcal{T})$ *be a Hlcrtvs. Then:*

(i) $(E,\mathcal{T}_{born})$ *is a bornological Hlcrtvs (A Hlcrtvs* $(E',\mathcal{T}')$ *is said to be a bornological space, if every bornivorous absolutely convex subset in* $(E',\mathcal{T}')$ *is a neighborhood of* 0 *in* $(E',\mathcal{T}')$*).*

(ii) $(E,\mathcal{T})$ *is bornological if and only if* $\mathcal{T}=\mathcal{T}_{born}$*.*

(iii) *For any Hlcrtvs* $(F,\mathcal{T}')$*,*

$$\begin{aligned}&\mathcal{L}((E,\mathcal{T}_{born}),(F,\mathcal{T}'))=\\&\qquad=\{h:(E,\mathcal{T}_{born})\to(F,\mathcal{T}'):\ h\text{ is a linear continuous map}\}=\\&=\{f:(E,\mathcal{T})\to(F,\mathcal{T}'):\ f\text{ is a bounded linear map}\}(=L_b((E,\mathcal{T}),(F,\mathcal{T}'))).\end{aligned}$$

(iv) *Let* A *be an absolutely convex set in* $(E,\mathcal{T})$*. Then* A *is a* 0*-neighborhood in* $(E,\mathcal{T}_{born})$ *if and only if* A *is a bornivorous subset.*

(v) *The continuous semi-norms on* $(E,\mathcal{T}_{born})$ *are exactly the bounded semi-norms on* $(E,\mathcal{T})$*.*

(vi) *If* F *is a vector subspace of* $(E,\mathcal{T})$ *of finite codimension, then* $(\mathcal{T}|_F)_{born}=(\mathcal{T}_{born})|_F$*.*

(vii) *If* $(E,\mathcal{T})$ *is metrizable,* E *is bornological. In particular, if* E *is a Fréchet (or normable) space, then* $(E,\mathcal{T})$ *is bornological.*

(viii) *The topological product of at most countably many bornological spaces is again bornological.*

Definition 2.20. Let $(E,\mathcal{T})$ be a *Hlcrtvs*, G an open set of $(\mathbb{R},\mathcal{T}_u)$ and let $c:G\longrightarrow E$ be a map. Then:

(i) c is called differentiable if the derivative, $c'(t)=\lim_{s\to 0}\frac{c(t+s)-c(t)}{s}$ at t, exists for all $t\in G$, (consequently c is continuous).

(ii) We say that c is C^0 if c is continuous on G. We say that c is C^1 if $c'(t)$ exists for all $t\in G$ and c' is continuous on G. We say that c is C^2 if c' and $(c')'\,(=c'')$ exist and c'' is continuous. In general, we say that c is C^n if c', c'', ..., $c^{(n}$ exist and $c^{(n}$ is continuous.

(iii) c is called smooth or C^∞ if all the iterated derivatives exist.

The set of C^p maps of G into E will be denoted by $C^p(G,E)$, $(p\in\{0\}\cup\mathbb{N}\cup\{\infty\})$.

The above definition also has meaning for maps defined on arbitrary intervals of $\mathbb{R}$ considering lateral limits in the extreme points (if they exist) of the interval.

Definition 2.21. Let $(E,\mathcal{T})$ be a Hlcrtvs.

(i) We denote by $C^\infty\mathcal{T}$, (which will be called C^∞-topology), the final topology in E induced by the family

$$C^\infty(\mathbb{R},E)=\{c:\mathbb{R}\longrightarrow E : c \text{ is a smooth map (curve) from } \mathbb{R} \text{ into } (E,\mathcal{T})\}.$$

The topological space $(E,C^\infty\mathcal{T})$, will be also denoted by $C^\infty E$.

(ii) Let X be a subset of E. Let us consider the set

$$\mathcal{C}_X^\infty=\{c:\mathbb{R}\longrightarrow E:\ c \text{ is a smooth curve in } (E,\mathcal{T}) \text{ with } im(c)\subset X\}.$$

The final topology in X generated by the family $\mathcal{C}_X^\infty$ will be called $C^\infty-$topology of X and the corresponding topological space will be denoted by $C^\infty X$.
This topology contains the topology $(C^\infty\mathcal{T})|_X$, but, in general, they do not coincide.
Note that, if X is open in $(E,C^\infty\mathcal{T})$ or X is convex and locally closed in $(E,C^\infty\mathcal{T})$, then the C^∞-topology of X is equal to $(C^\infty\mathcal{T})\,|_X$.

Proposition 2.22. *Let $(E,\mathcal{T})$ be a Hlcrtvs. Then $C^\infty\mathcal{T}$ is the final topology $\mathcal{T}^{\mathcal{F}}$ in E induced by the family*

$$\mathcal{F}=\{c:G\to E:\ G \text{ open in } (\mathbb{R},\mathcal{T}_u) \text{ and } c \text{ is a smooth map}\}.$$

Proof. Since $C^\infty(\mathbb{R},E)\subset\mathcal{F}$, we have that $\mathcal{T}^{\mathcal{F}}\subset C^\infty\mathcal{T}$.
On the other hand, if G is an open set of $(\mathbb{R},T_u)$ and $c:G\to E$ is a smooth map, one has that $G=\bigcup_{i\in N}(a_i,b_i)$ where N is a countable set (finite or infinite) and $(a_i,b_i)\cap(a_j,b_j)=\emptyset$, $i,j\in N$, $i\neq j$, and for all $i\in N$ there is a bijective map $\varphi_i:(a_i,b_i)\to\mathbb{R}$ such that φ_i and φ_i^{-1} are C^∞-maps. Thus if $A\in C^\infty\mathcal{T}$, then

$$c^{-1}(A)=\bigcup_{i\in N}(c|_{(a_i,b_i)})^{-1}(A)=\bigcup_{i\in N}\varphi_i^{-1}((c|_{(a_i,b_i)}(\varphi_i)^{-1})^{-1}(A))$$

is open in $(\mathbb{R},T_u)$ since $c|_{(a_i,b_i)}(\varphi_i)^{-1}:\mathbb{R}\to E$ is a smooth map for all $i\in N$. Thus, $C^\infty\mathcal{T}\subset\mathcal{T}^{\mathcal{F}}$ □

Proposition 2.23. *Let $(E,\mathcal{T})$ and $(F,\mathcal{T}')$ be Hlcrtv spaces and $\lambda:(E,\mathcal{T})\to(F,\mathcal{T}')$ a continuous linear mapping. Then,*

(i) *If G is an open set of $(\mathbb{R},\mathcal{T}_u)$ and $c:G\to E$ is a smooth map, one has that $\lambda c:G\to F$ is a smooth map and $(\lambda c)^{(n}=\lambda c^{(n}$ for all $n\in\mathbb{N}$.*

(ii) *λ is a continuous mapping from $(E,C^\infty\mathcal{T})$ into $(F,C^\infty\mathcal{T}')$.*

Proposition 2.24. *Let $(E,\mathcal{T})$ be a Hlcrtvs.*

(i) $\mathcal{T}\subset\mathcal{T}_{born}\subset C^\infty\mathcal{T}$.

(ii) *The spaces $(E,\mathcal{T})$ and $(E,\mathcal{T}_{born})$ have the same smooth curves, (see [7]).*

(iii) $C^\infty(\mathcal{T}_{born})=C^\infty\mathcal{T}$.

(iv) *If $(E,\mathcal{T})$ is metrizable, then, $\mathcal{T}=\mathcal{T}_{born}=C^\infty\mathcal{T}$. In particular, this takes place if $(E,\mathcal{T})$ is a Fréchet space, and in the special case of $(\mathbb{R}^n,T_u^n)$, $C^\infty T_u^n=(\mathcal{T}_u^n)_{born}=T_u^n$ (the usual topology of $\mathbb{R}^n$).*

Note that $(E,C^\infty\mathcal{T})$ is not, in general, a *rtvs* ($C^\infty\mathbb{R}^I$, where $card(I)\geqslant 2^{\aleph_0}$, is not completely regular (see [7], page 46)).

Remark 2.25. In general, the C^∞-topology of a product of two *Hlcrtv* spaces is not the product of the C^∞-topologies of the factor spaces. However, if $(E,\mathcal{T})$ and $(F,\mathcal{T}')$ are *Hlcrtv* spaces, then $C^\infty\mathcal{T}\times C^\infty\mathcal{T}'\subset C^\infty(\mathcal{T}\times\mathcal{T}')$.

Lemma 2.26. *([7], page 41). Let $(E,\mathcal{T})$ be a Hlcrtvs, U an open set in $C^\infty(E\times\mathbb{R})$ and K a compact subset of $(\mathbb{R},\mathcal{T}_u)$. Then, $(U_0=)\{x\in E:\{x\}\times K\subset U\}$ is open in $C^\infty E$.*

Proposition 2.27. *Let $(E,\mathcal{T})$ be Hlcrtvs and $n\in\mathbb{N}$. Then,*

(i) *The C^∞-topology of $E\times\mathbb{R}^n$ is the product topology of $C^\infty\mathcal{T}$ by $\mathcal{T}_u^n$.*

(ii) *The C^∞-topology of $E\times[0,+\infty)^n$ is the product topology of $C^\infty\mathcal{T}$ and $\mathcal{T}_u^n|_{[0,+\infty)^n}$, i.e. the topology induced by the C^∞-topology of $E\times\mathbb{R}^n$ in $E\times[0,+\infty)^n$.*

Proof. (i) See the page 42 of [7].
(ii) Let $\mathcal{T}^*$ be the C^∞-topology of $E\times[0,+\infty)^n$. By 2.21(ii), we know that $C^\infty\mathcal{T}\times\mathcal{T}_u^n|_{E\times[0,+\infty)^n}\subset\mathcal{T}^*$.
The other inclusion follows recursively from the special case $E\times[0,+\infty)$, for which we can proceed as follows. Take an open neighborhood U of an arbitrary point $(x,t)\in E\times[0,+\infty)$ in the topology $\mathcal{T}^*$. Since the map $c(s)=(x,s^2)$ from $\mathbb{R}$ into $E\times[0,+\infty)$ is a smooth curve, there exists $\varepsilon>0$ such that $c(s)\in U$ for all $s\in(\sqrt{t}-\varepsilon,\sqrt{t}+\varepsilon)$. Then $K=c([\sqrt{t}-\varepsilon/2,\sqrt{t}+\varepsilon/2])$ is a compact neighborhood of t in $([0,+\infty),\mathcal{T}_u|_{[0,+\infty)})$. Then, by the above lemma (2.26), $U_0=\{y\in E:\{y\}\times K\subset U\}$ is open in $C^\infty E$, $x\in U_0$ and $U_0\times K\subset U$. Thus U is an neighborhood of (x,t) in $(E,C^\infty\mathcal{T})\times([0,+\infty),\mathcal{T}_u|_{[0,+\infty)})$, and $\mathcal{T}^*\subset C^\infty\mathcal{T}\times\mathcal{T}_u|_{[0,+\infty)}$. □

Proposition 2.28. *Let $(E,\mathcal{T})$ be a Hlcrtvs and F a linear subspace of E closed in $(E,C^\infty\mathcal{T})$ (in particular, in $(E,\mathcal{T})$). Then,*

(i) *A curve into F is smooth if and only if it is smooth in E, ([7], page 28).*

(ii) *The topology $C^\infty\mathcal{T}$ induces in F the topology $C^\infty(\mathcal{T}|_F)$. If F is not closed this result is not true in general, ([7], page 47).*

Proposition 2.29. *Let $(E,\mathcal{T})$ be a bornological Hlcrtvs ($\mathcal{T}=\mathcal{T}_{born}$). One has:*

(i) *If V is an absolutely convex subset of E, then V is a 0-neighborhood of $(E,\mathcal{T})$ if and only if V is a 0-neighborhood in $C^\infty E=(E,C^\infty\mathcal{T})$.*

(ii) *If U is a convex subset of E, then U is C^∞-open if and only if U is open in $(E,\mathcal{T})$.*

Lemma 2.30. *Let $(E,\mathcal{T})$ be a Hlcrtvs, x_0 and x_1 elements of E and $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Then the map*

$$\tau : (E, C^\infty\mathcal{T}) \to (E, C^\infty\mathcal{T}),\ x \mapsto x_0 + r(x - x_1)$$

is a homeomorphism ($\tau^{-1}(y) = x_1 + r^{-1}(y - x_0)$).

Proposition 2.31. *([7], page 247). Let $(E,\mathcal{T})$ be a Hlcrtvs and K a convex set (in particular, a quadrant Q) of $(E,\mathcal{T})$ with non-empty C^∞-interior, that is, $int_{C^\infty\mathcal{T}}(K) \neq \emptyset$. Then,*

(i) *The segment $(x,y] = \{x + t(y-x) :\ 0 < t \leqslant 1\} \subset int_{C^\infty\mathcal{T}}(K)$ for all $x \in K$ and all element y of $int_{C^\infty\mathcal{T}}(K)$.*

(ii) *The C^∞-interior of K is convex and open even in $(E,\mathcal{T}_{born})$, ($\mathcal{T}_{born} \subset C^\infty\mathcal{T}$). Furthermore, $int_{C^\infty\mathcal{T}}(K) = int_{\mathcal{T}_{born}}(K) \neq \emptyset$*

(iii) *K is closed in $(E,\mathcal{T}_{born})$ if and only if it is closed in $(E, C^\infty\mathcal{T})$.*

Theorem 2.32. *Let $(E,\mathcal{T})$ be a Hlcrtvs, and let Q be a quadrant in E. Then, the following statements are equivalent:*

(i) *The C^∞-interior of Q is non-empty, (that is $int_{C^\infty\mathcal{T}}Q \neq \emptyset$).*

(ii) *The index of Q is finite and Q^0 is closed in $(E,\mathcal{T}_{born})$.*

(iii) *There exists a finite linearly independent system Λ of elements of $L_b(E,\mathbb{R})$ (the space of bounded linear maps from $(E,\mathcal{T})$ into $\mathbb{R}$) such that $Q = E^+_\Lambda = \{x \in E :\ \lambda(x) \geqslant 0$ for all $\lambda \in \Lambda\}$.*

Moreover if (iii) is fulfilled, $cardinal(\Lambda) = index(Q)$ and $Q^0 = E^0_\Lambda$.

Proof. (i)$\Longrightarrow$ (ii). By 2.31(ii), $int_{\mathcal{T}_{born}}Q = int_{C^\infty\mathcal{T}}Q \neq \emptyset$. Then, by 2.13, the index of Q is finite and Q^0 is closed in $(E,\mathcal{T}_{born})$.
(ii)$\Longrightarrow$ (iii). By 2.14 there exists a linearly independent system Λ of elements of $\mathcal{L}((E,\mathcal{T}_{born}),(\mathbb{R},\mathcal{T}_u))$ such that $Q = E^+_\Lambda$ (moreover $cardinal(\Lambda) = index(Q)$ and $Q^0 = E^0_\Lambda$). Then, (iii) follows of 2.19 (iii).
(iii)$\Longrightarrow$ (i). Since $L_b(E,\mathbb{R}) = \mathcal{L}((E,\mathcal{T}_{born}),(\mathbb{R},\mathcal{T}_u))$, (2.19(iii)), by 2.14 and 2.13 one has that $int_{born}Q \neq \emptyset$, and (i) follows of 2.31(ii). □

Proposition 2.33. *Let $(E,\mathcal{T})$ be a Hlcrtvs and let Λ be a finite linearly independent system of elements of $L_b((E,\mathcal{T}),\mathbb{R}) = \mathcal{L}((E,\mathcal{T}_{born}),(\mathbb{R},\mathcal{T}_u))$ (2.19(iii)). Then:*

(i) *$Q = E^+_\Lambda = \{x \in E :\ \lambda(x) \geqslant 0$ for all $\lambda \in \Lambda\}$ is a quadrant in E such that $index(Q) = cardinal(\Lambda)$. Furthermore, $Q^0 = E^0_\Lambda = \{x \in E :\ \lambda(x) = 0$ for all $\lambda \in \Lambda\}$. Finally, if $\Lambda = \emptyset$, one has that $Q = Q^0 = E$.*

(ii) *$Q = E^+_\Lambda$ and $Q^0 = E^0_\Lambda$ are closed in $(E,\mathcal{T}_{born})$ and therefore in $(E, C^\infty\mathcal{T})$.*

(iii) *$int_{\mathcal{T}_{born}}(Q) = int_{C^\infty\mathcal{T}}Q \neq \emptyset$.*

(iv) *If* $\Lambda = \{\lambda_1, ..., \lambda_n\} \neq \emptyset$ *and* $\{x_1, ..., x_n\}$ *is a subset of* E *(a such subset always exists) such that* $\lambda_i(x_j) = \delta_{ij}$, $i, j = 1, ..., n$, *one has that,*

$$\alpha : Q^0 \times \mathbb{R}^n \to E, \ \ (x_0, (r_1, ..., r_n)) \mapsto x_0 + r_1 x_1 + ... + r_n x_n.$$

is a linear homeomorphism from $C^\infty Q^0 \times (\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_u^n)$ *into* $C^\infty E = (E, C^\infty \mathcal{T})$.

(v) *The* C^∞*-topology on* Q *coincides with* $C^\infty \mathcal{T}|_Q$, *and the* C^∞*-topology of* Q^0 *coincides with* $C^\infty \mathcal{T}|_{Q^0}$.

(vi) *Let* U *be a non-void element of* $(C^\infty \mathcal{T})|_Q$. *Then* $int_{C^\infty \mathcal{T}}(U)$ *is also non-empty.*

Proof. (i). If $\Lambda \neq \emptyset$, the result follows from 2.8(ii). The case $\Lambda = \emptyset$ is a trivial verification.
(ii). It follows from (i).
(iii). By the above theorem $int_{C^\infty E} Q \neq \emptyset$ and by 2.31 one has that $int_{C^\infty E} Q = int_{\mathcal{T}_{born}} Q$.
(iv). By (ii), we have that

$$(Q^0, \mathcal{T}_{born}|_{Q^0}) \times (L\{x_1, ..., x_n\}, \mathcal{T}_{born}|_{L\{x_1,...,x_n\}}) \to (E, \mathcal{T}_{born}),$$
$$(x_0, a_1 x_1 + ... + a_n x_n) \mapsto x_0 + a_1 x_1 + ... + a_n x_n,$$

is a linear homeomorphism. Consequently, by 2.24(iv),

$$\alpha : (Q^0, \mathcal{T}_{born}|_{Q^0}) \times (\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_u^n) \to (E, \mathcal{T}_{born}), (x_0, (a_1, ..., a_n)) \mapsto x_0 + a_1 x_1 + ... + a_n x_n,$$

is a linear homeomorphism and by 2.23(ii), 2.24(iii) and 2.27(i)

$$\alpha : (Q^0, C^\infty(\mathcal{T}_{born}|_{Q^0})) \times (\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_u^n) \to (E, C^\infty \mathcal{T})$$

is also a linear homeomorphism. Finally, since Q^0 is a subspace of $(E, \mathcal{T})$ of finite codimension (n), by 2.19(vi) one has that $(\mathcal{T}|_{Q^0})_{born} = \mathcal{T}_{born}|_{Q^0}$ and therefore $C^\infty(\mathcal{T}_{born}|_{Q^0}) = C^\infty((\mathcal{T}|_{Q^0})_{born})) = C^\infty((\mathcal{T}|_{Q^0}) = C^\infty \mathcal{T}|_{Q^0}$.
(v) It follows from (iv) and 2.27(ii).
(vi). It is a consequence of (iv). □

Corollary 2.34. *Let* $(E, \mathcal{T})$ *be a Hlcrtvs, and* Q *a quadrant in* E *with* $int_{C^\infty E} Q \neq \emptyset$. *Then, for all non-empty* C^∞*-open set* U *of* Q, $(C^\infty(T|_Q) = C^\infty T|_Q)$, *one verifies that* $int_{C^\infty E} U = U \cap int_{C^\infty E} Q \neq \emptyset$.

Proof. By the above proposition, we have that

$$\alpha : C^\infty Q^0 \times (\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_u^n) \to (E, C^\infty \mathcal{T}), \ \ (x_0, (r_1, ..., r_n)) \mapsto x_0 + r_1 x_1 + ... + r_n x_n$$

is a linear homeomorphism. Thus, if U is a non-empty C^∞-open set of Q, $\alpha^{-1}(U)$ is a non-empty open set of $C^\infty Q^0 \times ([0, +\infty)^n, \mathcal{T}_u^n|_{[0,+\infty)^n})$, and $\alpha^{-1}(U) \cap (Q^0 \times (0, +\infty)^n) \neq \emptyset$ which proves that $int_{C^\infty E} U = U \cap int_{C^\infty E} Q \neq \emptyset$. □

3. Differentiation theory in convenient vector spaces

For a detailed study of the differentiation theory of maps defined on C^∞-open subsets of convenient vector spaces the reader can consult the books [3] and [7].

Mackey-convergence

Definition 3.1. (Mackey-convergence). Let E be a *Hlcrtvs*. We say that a net $\{x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ in E Mackey-converges (or M-converges) to $x \in E$, if there exists a closed bounded absolutely convex subset B of E such that

$$\{x_\gamma : \gamma \in \Gamma\} \cup \{x\} \subset \langle B\rangle = L(B) = \bigcup_{t>0} t \cdot B$$

and the net $\{x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ converges to x in the normed space $E_B = (\langle B\rangle, p_B)$ where $p_B(y) = \inf\{r > 0 : y \in r \cdot B\}$ for all $y \in \langle B\rangle$.

Proposition 3.2. *Let E be a Hlcrtvs, $\{x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ a net in E and x a point of E. Then $\{x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ Mackey-converges to $x \in E$ if and only if there exists a bounded absolutely convex subset B' of E such that $\{x_\gamma : \gamma \in \Gamma\} \cup \{x\} \subset \langle B'\rangle$ and the net $\{x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ converges to x in the normed space $E_{B'} = (\langle B'\rangle, p_{B'})$.*

Remarks 3.3. **(1).** A net $\{x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ in E Mackey-converges to $x \in E$ if and only if $\{x_\gamma - x\}_{\gamma\in\Gamma}$ Mackey-converges to $\bar{0} \in E$.

(2). If the net $\{x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ in E Mackey-converges to $x \in E$, then there exists a sequence $\{\gamma_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in Γ such that the sequence $\{x_{\gamma_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ Mackey-converges to $x \in E$.

(3). Let $(E, \mathcal{T})$ be a *Hlcrtvs* and B a bounded absolutely convex subset of E. Since

$$\langle B\rangle = \bigcup_{t>0} t \cdot B \text{ and } \{x \in \langle B\rangle : p_B(x) < 1\} \subset B \subset \{x \in \langle B\rangle : p_B(x) \leqslant 1\},$$

we have that the inclusion $i_B : E_B \hookrightarrow E$ is a continuous map, which is equivalent to $\mathcal{T}|_{\langle B\rangle} \subset \mathcal{T}_{p_B}$ $(E_B = (\langle B\rangle, p_B))$. Therefore, if $\{x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ is a net in E that Mackey-converges to $x \in E$, then $\{x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ converges to x in $(E, \mathcal{T})$.

(4). Let $(E, \mathcal{T})$ be a *Hlcrtvs*. Then $(E, \mathcal{T}_{born})$ has the same Mackey converging sequences as $(E, \mathcal{T})$ and $\mathcal{T}_{born}$ is the final topology in E with respect to the inclusions $i_B : E_B \hookrightarrow E$ for all B bounded and absolutely convex in E. Moreover, if $\widetilde{\mathcal{T}}$ is a locally convex topology on E and it has the same Mackey converging sequences as $(E, \mathcal{T})$, then $\widetilde{\mathcal{T}} \subset \mathcal{T}_{born}$.

(5). Let $(E, \mathcal{T})$ be a *Hlcrtvs*. Then, $\mathcal{T}_{born}$ is the final topology in E with respect to the inclusions $i_B : E_B \to E$, for all B closed bounded and absolutely convex in $(E, \mathcal{T})$.

Proposition 3.4. *Let E be a Hlcrtvs, B a bounded absolutely convex subset of E, $\{x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ a net in $\langle B\rangle$ and $x \in \langle B\rangle$. Then the following conditions are equivalent:*

(i) *$\{x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ converges to $x \in E_B$.*

(ii) *There exists a net $\{\mu_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ in $\mathbb{R}$ which converges to 0 such that $(x_\gamma - x) \in \mu_\gamma \cdot B$, for all $\gamma \in \Gamma$.*

Proposition 3.5. *Let E be a Hlcrtvs. Then:*

(i) *Let $c : \mathbb{R} \to E$ be a C^1-curve and $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ a sequence of real numbers that converge to 0. Then, the sequence $\{c(t_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ Mackey-converge to $c(0) \in E$ (use the Mean value Theorem).*

(ii) *If $c : \mathbb{R} \to E$ is a C^2-curve in E, then the curve $t \longmapsto \frac{1}{t}(\frac{1}{t}(c(t) - c(0)) - c'(0))$ is bounded on bounded subsets of $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Therefore, if the sequence $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ converges to 0, the sequence $\{\frac{c(t_n)-c(0)}{t_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ Mackey-converges to $c'(0) \in E$.*

Proposition 3.6. *Let $(E, \mathcal{T})$ be a Hlcrtvs. Then:*

(i) *A subset A of E is closed in $C^\infty E = (E, C^\infty\mathcal{T})$ if and only if for every sequence $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in A, which Mackey-converges to $x \in E$, the point x belongs to A.*

(ii) *If U is a subset of E such that $U \cap \langle B\rangle$ is open in E_B for all B bounded and absolutely convex in E, then U is C^∞-open in $(E, \mathcal{T})$, i.e. $U \in C^\infty\mathcal{T}$.*

Mackey complete spaces or convenient vector spaces

Definition 3.7. (Mackey-Cauchy net). Let $\{x_\gamma, \gamma \in \Gamma, \leqslant\}$ be a net in a *Hlcrtvs* E. This net will be called Mackey-Cauchy net if there exist a bounded absolutely convex subset B of E and a net $\{\mu_{\gamma,\gamma'}, (\gamma, \gamma') \in \Gamma \times \Gamma, \leqslant \times \leqslant\}$ in $\mathbb{R}$ converging to 0 such that $x_\gamma - x_{\gamma'} \in \mu_{\gamma,\gamma'} \cdot B$, for all $(\gamma, \gamma') \in \Gamma \times \Gamma$.

Let B be a bounded absolutely convex subset of a *Hlcrtvs* E and $\{x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ a net in $\langle B\rangle$. Then $\{x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ is a Cauchy net in the normed space E_B if and only if there exists a net $\{\mu_{\gamma,\gamma'}, (\gamma, \gamma') \in \Gamma \times \Gamma, \leqslant \times \leqslant\}$ in $\mathbb{R}$ converging to 0 such that $x_\gamma - x_{\gamma'} \in \mu_{\gamma,\gamma'} \cdot B$, for all $(\gamma, \gamma') \in \Gamma \times \Gamma$ (i.e., $\{x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ is a Mackey-Cauchy net in E). Therefore, if $\{y_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ Mackey-converges to y in E, then $\{y_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ is a Mackey-Cauchy net.

Proposition 3.8. *Let $\{x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ be a Mackey-Cauchy net in a Hlcrtvs $(E, \mathcal{T})$ and $x \in E$. Then, $\{x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ converges to x in $(E, \mathcal{T})$ if and only if $\{x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ Mackey converges to $x \in E$.*

Definition 3.9. (Mackey complete space). The *Hlcrtvs* $(E, \mathcal{T})$ is called Mackey complete (or convenient) if every Mackey-Cauchy net in E converges in $(E, \mathcal{T})$.

Theorem 3.10. *([7]). Let E be a Hlcrtvs. The following conditions are equivalent:*
(i) E is Mackey-complete.
(ii) Every Mackey-Cauchy net in E, Mackey converges in E.
(iii) Every Mackey-Cauchy sequence in E converges in E.
(iv) Every Mackey-Cauchy sequence in E, Mackey converges in E.
(v) For all absolutely convex bounded subset B of E, the normed space E_B is complete.
(vi) For every absolutely convex closed bounded subset B of E, the normed space E_B is complete, i.e. E_B is a Banach space.
(vii) For every bounded subset B of E there exists an absolutely convex closed bounded subset B' of E such that $B \subset B'$ and $E_{B'}$ is complete.
(viii) For every bounded subset B of E there exists an absolutely convex bounded subset B' of E such that $B \subset B'$ and $E_{B'}$ is complete.
(ix) Any Lipschitz curve in E is locally Riemann integrable.
(x) For any $c_1 \in C^\infty(\mathbb{R}, E)$ there is $c_2 \in C^\infty(\mathbb{R}, E)$ such that $c_2' = c_1$.

(xi) E is closed in the C^∞-topology of any Hlcrtvs $\widetilde{E}$, where E is a topological vector subspace of $\widetilde{E}$ (Recall that the C^∞-topology on $\widetilde{E}$ is the final topology with respect to all smooth curves $c : \mathbb{R} \to \widetilde{E}$).
(xii) If $c : \mathbb{R} \to E$ is a curve such that $\lambda c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is smooth for all $\lambda \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$, then c is smooth.
(xiii) Any continuous linear mapping from a normed space F into E has a continuous extension to the completion of the normed space F.

Recall that $c : [a, b] \to E$ is Riemann integrable (by definition) if the net of Riemann sums converges in E. Moreover if c is continuous and E is sequentially complete (hence convenient), then c is Riemann integrable (in fact, the net of Riemann sums is a Cauchy net that has a subnet that is a sequence, and on the other hand an agglomeration point of a Cauchy net is a point of convergence of this net).

Proposition 3.11. *Let $(E, \mathcal{T})$ be a Hlcrtvs. Then we have:*

(i) *If E is complete (every Cauchy net in E converges in E), then E is sequentially complete (every Cauchy sequence in E converges in E).*

(ii) *If E is sequentially complete, then E is Mackey complete.*

(iii) *If E is metrizable, then: the statements "E is complete", "E is sequentially complete", and "E is Mackey complete", are equivalent.*

(iv) *$(E, \mathcal{T})$ is Mackey complete if and only if $(E, \mathcal{T}_{born})$ is Mackey complete (use the preceding theorem and 3.3(4).*

Proposition 3.12. *Let E, F be Hlcrtv spaces, and let $l : E \to F$ be a linear map. Then l is bounded (it maps bounded sets to bounded sets) if and only if it maps smooth curves in E to smooth curves in F.*

Smooth maps on C^∞-open sets of *Hlcrtv* spaces

Definition 3.13. ([7], page 30). Let E, F be Hlcrtv spaces, U a C^∞-open subset of E and $f : U \to F$ a map. Then f is called smooth if it maps smooth curves in U to smooth curves in F.

Note that in this case $f : C^\infty U \to C^\infty F$ is a continuous map, (since U is C^∞-open, we have that $C^\infty U$ is a subspace of $C^\infty E$, (2.21(ii))).

Remark 3.14. If $U = E = \mathbb{R}$, then $f : \mathbb{R} \to F$ is smooth (with the preceding definition) if and only if f is a smooth curve.

Proposition 3.15. *([7], page 28). Let $(E, \mathcal{T})$ be a Hlcrtvs. Then, the set of smooth curves $C^\infty(\mathbb{R}, E)$ is a Hlcrtvs with the pointwise vector operations ($(c_1 + c_2)(x) = c_1(x) + c_2(x)$, $(rc)(x) = r(c(x))$, $x \in \mathbb{R}$) and the topology of uniform convergence on compact sets of each derivative separately. This space is Mackey complete if and only if $(E, \mathcal{T})$ is Mackey complete.*

Proposition 3.16. *([7]) Let E, F be Hlcrtv spaces and U a C^∞-open subset of E. Then,*

$$(C^\infty(U, F) =)\{f : U \to F : \ f \text{ is a smooth map}\}$$

is a Hlcrtvs with pointwise linear structure $((f+g)(x) = f(x)+g(x)$, $(rf)(x) = r(f(x))$, $x \in U)$ *and the inicial topology with respect all mappings, (3.15),*

$$c^* : C^\infty(U,F) \to C^\infty(\mathbb{R},F), \quad f \mapsto fc, \quad c : \mathbb{R} \to U \text{ smooth curve.}$$

Theorem 3.17. *([7], page 30). Let* $(E_1,\mathcal{T}_1)$, $(E_2,\mathcal{T}_2)$, $(F,\mathcal{T}')$ *be Hlcrtv spaces,* U_1 *a* C^∞*-open subset of* $(E_1,\mathcal{T}_1)$ *and* U_2 *a* C^∞*-open subset of* $(E_2,\mathcal{T}_2)$*. Then, a mapping* $f : U_1 \times U_2 \to F$ *is smooth if and only if the canonical associated mapping* $f^\vee : U_1 \to C^\infty(U_2,F)$, $x_1 \mapsto f(x_1,\cdot)$, *exists and is smooth.*

Corollary 3.18. *([7], page 31). Let* $(E,\mathcal{T})$, $(F,\mathcal{T}')$, $(G,\mathcal{T}'')$ *be Hlcrtv spaces and* U *a* C^∞*-open subset of* $(E,\mathcal{T})$*. Then, the following canonical mappings are smooth:*

(i) $ev : C^\infty(U,F) \times U \longrightarrow F$, $(f,x) \mapsto f(x)$

(ii) $ins : E \longrightarrow C^\infty(F, E \times F)$, $x \mapsto (y \mapsto (x,y))$.

(iii) $\circ : C^\infty(U,F) \times C^\infty(F,G) \longrightarrow C^\infty(U,G)$, $(f,g) \mapsto gf$.

Corollary 3.19. *(Boman theorem, [7] page 31) Let* $f : A \to F$ *be a map, where* A *is an open set of* $\mathbb{R}^n$ *and* F *is a Hlcrtvs. Then* f *is smooth (with the preceding definition) if and only if* f *is an usual* C^∞*-map, i.e. there exist all partial derivatives of any order of* f *and all of them are continuous maps. In this case* $df : A \times \mathbb{R}^n \to F$, $(x,v) \mapsto d_v f(x)$, *is smooth and therefore* $d.f(x) : \mathbb{R}^n \to F$ *is smooth for all* $x \in A$.

Theorem 3.20. *([7], page 33)*
Let $(E,\mathcal{T})$ *and* $(F,\mathcal{T}')$ *be Hlcrtvs. Then:*

(i) $L_b((E,\mathcal{T}),(F,\mathcal{T}')) = \mathcal{L}((E,\mathcal{T}_{born}),(F,\mathcal{T}'))$ *is a closed linear subspace of the Hlcrtvs* $C^\infty(E,F)$ *and therefore is a Hlcrtvs. Furthermore, if* W *is a* C^∞*-open subset of a Hlcrtvs* G*, then a mapping* $f : U \to L_b(E,F)$ *is smooth if and only if composite map* $U \xrightarrow{f} L_b(E,F) \xhookrightarrow{i} C^\infty(E,F)$ *is smooth.*

(ii) *If* $(E,\mathcal{T})$ *is a convenient vector space, one has that* $L_b(E,F)$ *is a bornological space and the bornology on this space* $L_b(E,F)$ *consists of all pointwise bounded sets. So a mapping into* $L_b(E,F)$ *is smooth if and only if all composites with evaluations at points in* E *are smooth. Finally,* $L_b(E,F)$ *is a convenient vector space.*

Proposition 3.21. *Let* $(E,\mathcal{T})$ *be a convenient vector space,* $(F,\mathcal{T}')$ *a Hlcrtv space,* U *a* C^∞*-open subset of* E*, (*U *is open in* $C^\infty E = (E, C^\infty\mathcal{T})$*), and let* $f : U \to F$ *be a smooth map. Then:*

(i) *For all* $x \in U$ *and all* $v \in E$ *there exists* $\lim_{t\to 0} \frac{f(x+tv)-f(x)}{t} (= d_v f(x))$.

(ii) *For all* $x \in U$, $d.f(x)(= df(x)) : E \to F$, $v \mapsto d_v f(x)$, *is a linear map.*

(iii) *The map* $d.f(\cdot)(= df) : U \times E \to F$, $(x,v) \mapsto d_v f(x)$, *is smooth.*

(iv) *For all* $x \in U$ *the linear map* $df(x) : E \to F$ *is a smooth map* ($\Longleftrightarrow$ *bounded map, (3.12)) and* $df(x)$ *is a continuous linear map of* $(E,\mathcal{T}_{born})$ *into* $(F,\mathcal{T}')$.

Proof. (i). The map $c : \mathbb{R} \to E$, $t \mapsto x + tv$, is a smooth curve. Then there exists $\varepsilon > 0$ such that $c(t) \in U$ for all $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Let $\sigma : \mathbb{R} \to (-\varepsilon, \varepsilon)$ be a smooth curve such that $\sigma(t) = t$ for all $t \in (-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2})$. Then $c\sigma : \mathbb{R} \to U \hookrightarrow E$ is a smooth curve and $fc\sigma : \mathbb{R} \to F$ is a smooth curve. Consequently

$$(fc\sigma)'(0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x+tv) - f(x)}{t}.$$

(ii). Let x be a element of U, let v be an element of E and let r be a real number with $r \neq 0$. Then:

$$d_{rv}f(x) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x+trv) - f(x)}{t} = r \lim_{t\to 0} \frac{f(x+trv) - f(x)}{rt} = \\ = r \lim_{s\to 0} \frac{f(x+sv) - f(x)}{s} = rd_v f(x)$$

($s = rt$). If $r = 0$, then $d_{0\cdot v}f(x) = 0 = 0d_v f(x)$. Thus, $df(x) : E \to F$ is a homogeneous map.
Let x be an element of U and let u, v be elements of E. The map $h : \mathbb{R}^2 \to E$, $(t, s) \mapsto x + tu + sv$, is smooth, (3.19), and therefore is a continuous map of $C^\infty\mathbb{R}^2 = (\mathbb{R}^2, T_u^2)$, (2.24(iv)), in $C^\infty E$. Thus, $h^{-1}(U)$ is an open set in $(\mathbb{R}^2, T_u^2)$ that contains $(0, 0)$. Therefore, there exists $\delta > 0$ such that $x + tu + sv \in U$ for all $(t, s) \in (-\delta, \delta) \times (-\delta, \delta)$. Hence, we have the smooth map $g = f(h|_{(-\delta,\delta)\times(-\delta,\delta)}) : (-\delta, \delta) \times (-\delta, \delta) \to F$, $(t, s) \mapsto f(x + tu + sv)$. Then, by the Boman's theorem (3.19), g is continuously differentiable and $Dg(0, 0)(1, 1) = 1 \cdot D_1 g(0, 0) + 1 \cdot D_2 g(0, 0)$, i.e.

$$Dg(0,0)(1,1) = \lim_{t\to 0} \frac{g(t,t) - g(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(x+t(u+v)) - f(x)}{t} = \\ = d_{u+v}f(x) = \lim_{\tau\to 0} \frac{g(\tau,0) - g(0,0)}{\tau} + \lim_{\sigma\to 0} \frac{g(0,\sigma) - g(0,0)}{\sigma} = \\ \lim_{\tau\to 0} \frac{f(x+\tau u) - f(x)}{\tau} + \lim_{\sigma\to 0} \frac{f(x+\sigma v) - f(x)}{\sigma} = d_u f(x) + d_v f(x).$$

Thus, $df(x) : E \to F$ is a linear map for all $x \in U$.

(iii). The map $df : U \times E \to F$, $(x, v) \mapsto d_v f(x)$, is smooth. In fact:
First, we remark that $U \times E$ is open $C^\infty(E \times E)$ since by 2.25, $C^\infty\mathcal{T} \times C^\infty\mathcal{T} \subset C^\infty(\mathcal{T} \times \mathcal{T})$. Thus it has meaning the smoothness of df on $U \times E$.
Let $c : \mathbb{R} \to U \times E$ be a smooth curve. Since $p_1 : U \times E \to U$, $(x, v) \mapsto x$, and $p_2 : U \times E \to E$, $(x, v) \mapsto v$, are smooth maps, we have the smooth curves $c_1 = p_1 c : \mathbb{R} \to U$ and $c_2 = p_2 c : \mathbb{R} \to E$ such that $c = (c_1, c_2) : \mathbb{R} \to U \times E$.
We consider the smooth map $\alpha : \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\beta} U \times E \xrightarrow{+} E$, where $\beta(t, s) = (c_1(t), sc_2(t))$, $(t, s) \in \mathbb{R}^2$, and therefore $\alpha(t, s) = c_1(t) + sc_2(t)$ (the map $+ : U \times E \to E$ is smooth and therefore is a continuous map of $C^\infty(U \times E)$ into $C^\infty E$).
Then, $\alpha^{-1}(U)$ is open in $C^\infty\mathbb{R}^2 = (\mathbb{R}^2, T_u^2)$ and $\alpha^{-1}(U) \supset \mathbb{R} \times \{0\}$. Thus for every $r > 0$ there exists $\delta_r > 0$ such that $\alpha^{-1}(U) \supset (-r, r) \times (-\delta_r, \delta_r)$. Therefore for all $r > 0$, the map $h : (-r, r) \times (-\delta_r, \delta_r) \to F$, defined by $h(t, s) = f(c_1(t) + sc_2(t))$ is

smooth and

$$\partial_2 h(t,0) = \lim_{s\to 0} \frac{f(c_1(t)+sc_2(t)) - f(c_1(t))}{s} = d_{c_2(t)} f(c_1(t)) = ((df)c)(t) \text{ for all } t \in (-r,r).$$

This proves that $(df)c$ is a smooth curve and $df : U \times E \to F$ is smooth.

(iv). As a consequence of (iii), for all $x \in U$, $df(x) : E \to F$ is smooth since $df(x) = (df)i_x$, where $i_x(v) = (x,v)$, $v \in E$, and this map is smooth. Therefore, for all $x \in U$, $df(x) : E \to F$ is a bounded linear map and $df(x) : (E, \mathcal{T}_{born}) \to (F, \mathcal{T}')$ is a linear continuous map (see, 2.19(iii)). □

Proposition 3.22. *(chain rule) Let E, F, G be Hlcrtv spaces, U a C^∞-open subset in E, V a C^∞-open subset in F, $f : U \to F$ a map with $f(U) \subset V$ and $g : V \to G$ a map. Suppose that f, g are smooth maps. Then $gf : U \to G$ is a smooth map and $d(gf)(x,v) = dg(f(x), df(x,v))$, for all $(x,v) \in U \times E$. Consequently $d(gf)(x,\cdot) = dg(f(x),\cdot)df(x,\cdot) : E \to G$ for all $x \in U$. (See page 33 of [7]).*

Smooth maps on quadrants of convenient vector spaces

Definition 3.23. Let E, F be convenient vector spaces (i.e., Mackey complete spaces), Q a quadrant of E with $int_{C^\infty E}(Q) \neq \emptyset$, U a C^∞-open subset of Q and $f : U \to F$ a map. We say that f is smooth if for all smooth curve $c : \mathbb{R} \to U$, $fc : \mathbb{R} \to F$ is a smooth curve (recall that if $U \neq \emptyset$, then $int_{C^\infty E}(U) = U \cap int_{C^\infty E} Q \neq \emptyset$, (2.34)), (if $Q = E$ this definition is the given in 3.13).

Proposition 3.24. *Let $f : U \to V$ be a smooth map, where U is a C^∞-open set of a quadrant Q of a convenient vector space E with $int_{C^\infty E} Q \neq \emptyset$, and V is a C^∞-open set of a quadrant Q' of a convenient vector space F with $int_{C^\infty F} Q' \neq \emptyset$, and let $g : V \to G$ a smooth map with values in a convenient vector space G. Then $gf : U \to G$ is a smooth map.*

Proof. Let $c : \mathbb{R} \to U$ be a smooth curve. Since $f : U \to V$ is a smooth map, we have that $fc : \mathbb{R} \to V$ is a smooth curve. Thus, since $g : V \to G$ is a smooth map, $g(fc) = (gf)c : U \to G$ is a smooth curve. □

The result 3.12 can be drafted as follows:

Proposition 3.25. *Let $(E, \mathcal{T})$ and $(F, \mathcal{T}')$ convenient vector spaces, and let $\lambda : E \to F$ be a linear mapping. Then, λ is smooth if and only if λ is bounded (or bornological) ($\iff \lambda : (E, \mathcal{T}_{born}) \to (F, \mathcal{T}')$ is a continuous map).*

Proposition 3.26. *Let $(E, \mathcal{T})$, $(F, \mathcal{T}')$ be convenient vector spaces, Q a quadrant of E with $int_{C^\infty E}(Q) \neq \emptyset$, U a C^∞-open subset of Q and $f : U \to F$ a smooth map. Then, f is continuous of $C^\infty U = (U, C^\infty \mathcal{T}|_U)$ into $C^\infty F = (F, C^\infty \mathcal{T}')$. Therefore, f is a continuos map of $C^\infty U$ into $(F, \mathcal{T}')$, (by 2.24(i), $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}'_{born} \subset C^\infty \mathcal{T}'$).*

Proof. Let A be an open set of $C^\infty F$. For every smooth curve $c : \mathbb{R} \to U$, since f is a smooth map, $fc : \mathbb{R} \to F$ is a smooth curve, and therefore $(fc)^{-1}(A) = c^{-1}((f^{-1})(A))$ is open in $(\mathbb{R}, T_u)$. This proves that $f^{-1}(A)$ is open in the C^∞-topology of U. □

Theorem 3.27. *(Derivative of smooth maps on quadrants)*
Let $(E,\mathcal{T})$, $(F,\mathcal{T}')$ be convenient vector spaces, Q a quadrant of E with $int_{C^\infty E}(Q)\neq\emptyset$, U a C^∞-open subset of Q and $f:U\to F$ a smooth map (preceding definition). Then the map $(\rho=)f|_{int_{C^\infty E}(U)}:int_{C^\infty E}(U)\to F$ is smooth (3.13) and the map, $x\in int_{C^\infty E}(U)\mapsto d.\rho(x)=d\rho(x)\in\{\lambda:E\to F|\lambda$ is linear and bounded$\}=L_b(E,F)$, extends to a unique smooth map (preceding definition) $df:U\to L_b(E,F)$, and $df(x)$ is linear and continuous from $(E,\mathcal{T}_{born})$ into $(F,\mathcal{T}')$ for all $x\in U$, (2.19(iii). Note that the map, $(x,v)\in int_{C^\infty E}(U)\times E\mapsto d_v\rho(x)\in F$, is smooth (3.21(iii)). Moreover, for all $x\in int_{C^\infty E}(U)$, $d\rho(x):E\to F$ is smooth 3.13 and continuous from $(E,\mathcal{T}_{born})$ into $(F,\mathcal{T}')$, (3.21(iv)).

Proof. By 2.34, $int_{C^\infty E}U=U\cap int_{C^\infty E}Q$ is a non-empty C^∞-open set of E.
Since a smooth curve $c:\mathbb{R}\to int_{C^\infty E}U$ can be considered as a smooth curve with values in U, it is obvious that $f|_{int_{C^\infty E}}:int_{C^\infty E}U\to F$ is a smooth mapping. Thus only the extension property should be shown.
Let us first try to find a candidate to the value of $d_vf(x)$ for $x\in U$ and $v\in E$ with $x+v\in int_{C^\infty E}Q=int_{\mathcal{T}_{born}}Q$ (2.33(iii)). By convexity the smooth curve $c_{x,v}:t\mapsto x+t^2v$ takes for $0<|t|\leqslant 1$ values in $int_{C^\infty E}Q\subset Q$ (see 2.31, $(x+t^2v=(1-t^2)x+t^2(x+v))))$ and $c_{x,v}(0)=x\in U\subset Q$. By the continuity of $c_{x,v}:((-1,1),T_u|_{(-1,1)})\to(Q,C^\infty(\mathcal{T}|_Q))$, $(C^\infty(\mathcal{T}|_Q)=(C^\infty\mathcal{T})|_Q$ is the final topology in Q induced by the family of all smooth curves $\tau:\mathbb{R}\to Q)$, there exists ε such that $0<\varepsilon<1$ and $c_{x,v}:(-\varepsilon,\varepsilon)\to U$, $t\mapsto x+t^2v$, is a smooth curve, and consequently $fc_{x,v}:(-\varepsilon,\varepsilon)\to F$ is a smooth curve. In the special case where $x\in int_{C^\infty E}U=U\cap int_{C^\infty E}Q$ we have that $c_{x,v}((-\varepsilon,\varepsilon))\subset int_{C^\infty E}U$ and by the chain rule (3.21 and 3.22)

$$(\rho c_{x,v})'(t)=d_{c'_{x,v}(t)}\rho(c_{x,v}(t))=2td_v\rho(x+t^2v),\ \text{ for all }\ t\in(-\varepsilon,\varepsilon),$$
$$(\rho c_{x,v})''(0)=\lim_{t\to0}\frac{2td_v\rho(x+t^2v)-0}{t}=2d_v\rho(x),\ (3.21(iii)).$$

Thus we define $d_vf(x)=(1/2)(fc_{x,v})''(0)$ for $x\in U$ and $v\in int_{C^\infty E}Q-x$.

Note that for $x\in U$, $v\in int_{C^\infty E}U-x$ and $0<\delta<1$ we have $d_{\delta v}f(x)=\delta d_vf(x)$, since $c_{x,\delta v}(t)=x+t^2\delta v=c_{x,v}(t\sqrt{\delta})$ and we can apply twice the chain rule to the composition of the smooth curves $fc_{x,v}$ and $\alpha:(-\varepsilon,\varepsilon)\to(-\varepsilon,\varepsilon)$, $t\mapsto t\sqrt{\delta}$.

Next let us show that

$$d_vf(\cdot):(U_v=)\{x\in U:x+v\in int_{C^\infty E}Q\}\longrightarrow F$$

is smooth, $(U_v=\{x\in U:x\in int_{C^\infty E}Q-v\}=U\cap(int_{C^\infty E}Q-v)$ is C^∞-open in U, (2.30), and therefore C^∞-open in Q), so let $s\mapsto x(s)$ be a smooth curve in U_v. Then, $v\in int_{C^\infty E}Q-x(0)$, $x(s)+v\in int_{C^\infty E}Q$ for all s, $x(0)\in U_v$ and thus the map $(s,t)\mapsto c_{x(s),v}(t)=x(s)+t^2v=(1-t^2)x(s)+t^2(x(s)+v)\in Q$ is smooth from some neighborhood of $(0,0)$ into $U_v\subset U$ $(c_{x(s),v}:\mathbb{R}^2\to E$, $(s,t)\mapsto x(s)+t^2v$, is a smooth map). Hence, $(s,t)\mapsto f(c_{x(s),v}(t))$ is smooth, (3.24), and also its second derivative $s\mapsto(fc_{x(s),v})''(0)=2d_vf(x(s))$. Thus, $d_vf(\cdot):U_v\to F$ is a smooth map. In particular, let $x_0\in U$ and $v_0\in E$ such that $v_0\in int_{C^\infty E}Q-x_0$ and $x(s)=$

$x_0 + s^2 v_0$ $(x(s) + v_0 = x_0 + (1 + s^2)v_0 \in int_{C^\infty E} Q$ for sufficiently small s, since $x_0 + v_0 \in int_{C^\infty E} Q)$. Then

$$2d_{v_0} f(x_0) = (f c_{x_0,v_0})''(0) = \lim_{s\to 0} (\rho c_{x(s),v_0})''(0) = \lim_{s\to 0} 2d_{v_0}\rho(x(s))$$

with $x(s) \in int_{C^\infty E} Q$ for $0 < |s| < \varepsilon$. Obviously this shows that the given definition of $d_{v_0} f(x_0)$ is the only possible smooth extension of $d_{v_0}\rho(\cdot)$ to $\{x_0\} \cup int_{C^\infty E} U$.
Now let $v \in E$ arbitrary. Choose a $v_0 \in int_{C^\infty E} Q - x_0$. Since the set $int_{C^\infty E} Q - x_0 - v_0$ is a C^∞-open convex neighborhood of $\bar{0}$, hence absorbing (see 2.31 and 2.29), there exists some $\varepsilon > 0$ such that $v_0 + \varepsilon v \in int_{C^\infty E} Q - x_0$. For all $x \in int_{C^\infty E} U$ one has

$$d_v\rho(x) = \frac{1}{\varepsilon} d_{\varepsilon v}\rho(x) = \frac{1}{\varepsilon}\left(d_{v_0+\varepsilon v}\rho(x) - d_{v_0}\rho(x)\right).$$

By what we have proven above, the right side extends smoothly to $\{x_0\} \cup int_{c^\infty E} U$. The same is true for the left side. i.e. we define $d_v f(x_0) = \lim_{s\to 0} d_v f(x(s))$ for some smooth curve $x : (-\varepsilon, \varepsilon) \to U$ with $x(s) \in int_{C^\infty E} U$, $x(0) = x_0$, for $0 < |s| < \varepsilon$. Then $df(x)$ is linear as pointwise limit of $df(x(s)) \in L_b(E, F)$ and is bounded by the Banach-Steinhaus theorem $((E, \mathcal{T}_{born})$ is a bornological convenient vector space and $L_b((E, \mathcal{T}), (F, \mathcal{T}')) = \mathcal{L}((E, \mathcal{T}_{born}), (F, \mathcal{T}')))$.
This proves at the same time, that the definition does not depend on the smooth curve x, since for $v \in x_0 + int_{C^\infty E} Q$ it is the unique extension.
In order to show that $df : U \to L_b(E, F)$ is smooth it is, by 3.20, enough to show that the map

$$\mathbb{R} \xrightarrow{x} U \xrightarrow{df} L_b(E, F) \xrightarrow{ev_v} F,\ s \mapsto d_v f(x(s))$$

is smooth for all $v \in E$ and all smooth curves $x : \mathbb{R} \to U$. For $v \in int_{C^\infty E} Q$ this was shown above (in this case, if $x : \mathbb{R} \to U$ is a smooth curve, then $x(t) \in U_v$ for all $t \in \mathbb{R}$ and x is a smooth curve in U_v, (2.33(v)). For general $v \in E$, this follows since $d_v f(x(s))$ is a linear combination of $d_{v_0} f(x(s))$ for two $v_0 \in int_{C^\infty E} Q$. □

Lemma 3.28. *(Chain rule for curves) Let Q be a quadrant of a convenient vector space $(E, \mathcal{T})$ with $int_{C^\infty E} Q \neq \emptyset$, U a non-empty C^∞-open set of Q, $(F, \mathcal{T}')$ a convenient vector space and $f : U \to F$ a map such that $f|_{int_{C^\infty E} U} = \rho$ is a smooth mapping and there exists $df : U \to L_b(E, F)$ an extension of $d(f|_{int_{C^\infty E} U}) = d\rho$ which is continuous for the C^∞-topology of U. Then, if $c : \mathbb{R} \to U$ is a smooth curve, $(fc)'(t) = d_{c'(t)} f(c(t))$ for all $t \in \mathbb{R}$.*

Proof. We choose $y \in int_{C^\infty E} U = U \cap int_{C^\infty E} Q \subset Q$ and for all $s \in (-1, 1)$ let $c_s(t) = c(t) + s^2(y - c(t)) \in Q$, (2.31). Since, $\alpha : \mathbb{R} \times (-1, 1) \to Q$, $(t, s) \mapsto c_s(t)$, is a smooth map, one has that $\alpha^{-1}(U)$ is open in $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u) \times ((-1, 1), \mathcal{T}_u|_{(-1,1)})$ and further $\alpha^{-1}(U) \supset \mathbb{R} \times \{0\}$. Thus, there exists ε with $0 < \varepsilon < 1$ and such that $c_s(t) \in U$ for all $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ and all $t \in [-1, 1]$, and by 2.31 $c_s(t) \in int_{C^\infty E} U$ for all $s \in (-\varepsilon, \varepsilon) \setminus \{0\}$ and $t \in [-1, 1]$. Furthermore, $c_0 = c$, $(s, t) \mapsto c_s(t)$ is smooth and $c_s'(t) = (1 - s^2)c'(t)$. Then, by 3.10(ix), 3.22 and 3.29, for all $s \in (-\varepsilon, \varepsilon) \setminus \{0\}$,

$$\frac{\rho(c_s(t)) - \rho(c_s(0))}{t} = \int_0^1 (\rho c_s)'(t\tau) d\tau = (1 - s^2) \int_0^1 d_{c'(t\tau)}\rho(c_s(t\tau)) d\tau.$$

Now consider the specific case where $c(t) = x + tv$ with $x, x + v \in U$. Then, there exists $\delta > 0$ such that $x + tv \in U$ for all $t \in (-\delta, \delta)$, and since f is continuous along

$(t,s) \mapsto c_s(t) = x + tv + s^2(y - x - tv)$, the left side of the above equation converges to $(f(c(t)) - f(c(0)))/t$ for $s \to 0$ and since $d_v f(\cdot)$ is continuous along $(t, \tau, s) \mapsto c_s(t\tau)$ we have that $d_{c'(t\tau)}\rho(c_s(t\tau))$ converges to $d_v f(c(t\tau))$ uniformly with respect to $0 \leqslant \tau \leqslant 1$ for $s \to 0$. Thus, the right side of the above equation converges to $\int_0^1 d_v f(c(t\tau))d\tau$. Hence, we have for $t \to 0$

$$\frac{f(c(t)) - f(c(0))}{t} = \int_0^1 d_v f(x + t\tau v)d\tau \to \int_0^1 d_v f(c(0)) = d_{c'(0)} f(c(0)).$$

Now let $c : \mathbb{R} \to U$ be an arbitrary curve. Then, $(s,t) \mapsto c(0) + s(c(t) - c(0))$ is smooth and has values in U for $0 \leqslant s \leqslant \varepsilon$. By the above consideration we have for $x = c(0)$ and $v = (c(t) - c(0))/t$ that

$$\frac{f(c(t)) - f(c(0))}{t} = \int_0^1 d_{\frac{c(t)-c(0)}{t}} f(c(0) + \tau(c(t) - c(0))d\tau,$$

which converges to $d_{c'(0)} f(c(0))$ for $t \to 0$, since df is continuous along smooth curves in U and thus $df(c(0) + \tau(c(t) - c(0))) \to df(c(0))$ uniformly on the bounded set $\{(c(t) - c(0))/t : \ t \text{ near } 0\}$.
Thus fc is differentiable with derivative $(fc)'(t) = d_{c'(t)} f(c(t))$. □

Proposition 3.29. *(Chain rule) Let E, F, G convenient vector spaces, Q a quadrant of E with with $int_{C^\infty E}(Q) \neq \emptyset$, U a C^∞-open subset of Q, P a quadrant of F with $int_{C^\infty F}(P) \neq \emptyset$ and V a C^∞-open subset of P. One has:*
If $f : U \to F$ is a smooth map and $g : V \to G$ is a smooth map with $f(U) \subset V$, then $gf : U \to G$ is a smooth map and $d(gf)(x) = dg(f(x))df(x)$, for all $x \in U$.

Proof. Let x be an element of $int_{C^\infty E}U$ and $v \in E$. We consider the smooth curve $c(t) = x + tv$ in U $(t \in (-\varepsilon, +\varepsilon))$. Then, $e(t) = (fc)(t) = f(x + tv)$ is a smooth curve in V. By the above lemma (3.28), $(ge)'(t) = d_{e'(t)}g(e(t))$ and in particular $d_v(gf)(x) = (ge)'(0) = d_{e'(0)}g(e(0)) = d_{d_v f(x)}g(f(x))$. Thus for all $x \in int_{C^\infty E}U$, $d(gf)(x) = dg(f(x))df(x)$.
On the other hand by 3.27, 3.20 and 3.18, the map

$$\begin{aligned} U \to L_b(E,F) \times V \to L_b(E,F) \times L_b(F,G) \hookrightarrow C^\infty(E,F) \times C^\infty(F,G) \to C^\infty(E,G), \\ x \mapsto (df(x), f(x)) \mapsto (df(x), dg(f(x))) \mapsto (df(x), dg(f(x))) \mapsto dg(f(x))df(x), \end{aligned}$$

is smooth, which proves by 3.27 that $d(gf)(x) = dg(f(x))df(x)$ for all $x \in U$. □

Proposition 3.30. *Let E, F, convenient vector spaces, Q a quadrant of E with $int_{C^\infty E}(Q) \neq \emptyset$ and U a C^∞-open subset of Q. One has:*

(i) *(Restriction to open sets). If $f : U \to F$ is a smooth map and W is a C^∞-open subset of U, ($C^\infty U$ is a topological subspace of $C^\infty E$), then $f|_W : W \to F$ is a smooth map (of course W is a C^∞-open subset of Q) and $d(f|_W)(x) = df(x)$ for all $x \in W$.*

(ii) *(Restriction to vector subspaces). Let $f : U \to F$ be a smooth map, H a closed linear subspace of E (then a convenient vector space), Q_H a quadrant of H with $int_{C^\infty H}(Q_H) \neq \emptyset$. Suppose that $U \cap H$ is a C^∞-open subset of Q_H. Then $f|_{U \cap H} : U \cap H \to F$ is a smooth map and $d(f|_{U \cap H})(x) = df(x)|_H$, for all $x \in U \cap H$.*

(iii) *(Open covering property). If $f : U \to F$ is a map and $\{V_j | j \in J\}$ be a C^∞-open covering of U, then $f : U \to F$ is smooth if and only if $f|_{V_j} : V_j \to F$ is smooth for all $j \in J$.*

Proof. (i). $f|_W$ is a smooth map since every smooth curve in W is a smooth curve in U. On the other hand, $f|_W = fj$ where $j : W \hookrightarrow U$ is the inclusion map. Obviously, j is a smooth map and $d_v j(x) = v$ for all $x \in W$ and $v \in E$, and therefore by the chain rule, (3.29), $df(x) = d(f|_W)(x)$ for all $x \in W$.
(ii). $f|_{U\cap H} : U \cap H \to F$ is a smooth map since every smooth curve in $U \cap H$ can be considered as a smooth curve in U. Furthermore, $f|_{U\cap H} = fi$, where $i : U \cap H \hookrightarrow U$ is the inclusion map which is smooth and $d_v i(x) = v$ for all $x \in U \cap H$ and $v \in H$. Thus by the chain rule, (3.29), $df(x)|_H = d(f|_{U\cap H})(x)$, for all $x \in U \cap H$.
(iii). If $f : U \to F$ is a smooth map, then for all $j \in J$, $f|_{V_j} : V_j \to F$ is a smooth map by (i). Conversely, suppose that $f|_{V_j} : V_j \to F$ is a smooth map for all $j \in J$ and let $c : \mathbb{R} \to U$ be a smooth curve. Then for all $j \in J$, $A_j = c^{-1}(V_j)$ is an open set in $(\mathbb{R}, T_u)$ and $f(c|_{A_j})$ is a smooth map. Thus, since $\bigcup_{j\in J} A_j = \mathbb{R}$, we have that fc is a smooth curve and $f : U \to F$ is a smooth map. □

The above results give the essential tools (together with the theorem of invariance of the boundary) to construct manifolds with corners modeled on convenient vector spaces.

Proposition 3.31. *Let $(E, \mathcal{T})$ and $(F, \mathcal{T}')$ be convenient vector spaces, Q a quadrant of $(E, \mathcal{T})$ with $int_{C^\infty E} Q \neq \emptyset$, U a C^∞-open subset of Q and let $f : U \to F$ be a map. Then $f : U \to F$ is a smooth map if and only if $\lambda f : U \to \mathbb{R}$ is a smooth map for all $\lambda \in \mathcal{L}((F, \mathcal{T}'_{born}), (\mathbb{R}, \mathcal{T}_u))$ (3.23), (in particular F may be Fréchet or Banach).*

Definition 3.32. Let $(E, \mathcal{T})$ and $(F, \mathcal{T}')$ be convenient vector spaces, Q a quadrant of $(E, \mathcal{T})$ with $int_{C^\infty E} Q \neq \emptyset$, U a C^∞-open subset of Q, P a quadrant of $(F, \mathcal{T}')$ with $int_{C^\infty F} P \neq \emptyset$, V a C^∞-open subset of P, and let $f : U \to V$ be a map. We say that $f : U \to V$ is a smooth diffeomorphism if $f : U \to V$ is a bijective map and f, f^{-1} are smooth maps (3.23). Note that in this case $f^{-1} : V \to U$ is also a smooth diffeomorphism and one says that U and V are *sth*-diffeomorphic.

Proposition 3.33. (i) *The composition of a finite number of smooth diffeomorphisms is again a smooth diffeomorphism, and the identity map is a smooth diffeomorphism.*

(ii) *Let $f : U \to V$ be a smooth diffeomorphism. Then by 3.27, we have the smooth maps $df : U \to L_b(E, F)$ and $d(f^{-1}) : V \to L_b(F, E)$ and we know that $df(x) \in \mathcal{L}((E, T_{born}), (F, \mathcal{T}'))$ and $d(f^{-1})(f(x)) \in \mathcal{L}((F, T'_{born}), (E, \mathcal{T}))$ for all $x \in U$. By 3.29, $df(x)$ is an isomorphism and $(df(x))^{-1} = d(f^{-1})(f(x))$ for all $x \in U$. Finally $df(x)$ is a linear homeomorphism from (E, T_{born}) onto (F, T'_{born}) for all $x \in U$.*

Invariance of the boundary for smooth diffeomorphisms

Lemma 3.34. *Let $(E, \mathcal{T})$, $(F, \mathcal{T}')$ be convenient vector spaces, U a C^∞-open subset of E, $\lambda : F \to \mathbb{R}$ a bounded linear mapping with $\lambda \neq 0$, $x \in U$ and $f : U \to F^+_\lambda = \{v \in F : \lambda(v) \geqslant 0\}$ a smooth map such that $f(x) \in F^0_\lambda = \{v \in F : \lambda(v) = 0\}$. Then $df(x)(E) \subset F^0_\lambda$, (3.27).*

Proof. Let $\mathcal{T}'_{born}$ the bornologification of F. Then, $\lambda : (F, \mathcal{T}'_{born}) \to \mathbb{R}$ is continuous. Let $\{\| \ \|_i\}_{i\in I}$ be a collection of semi-norms on $(F, \mathcal{T}'_{born})$ that describes the locally convex topology of $(F, \mathcal{T}'_{born})$, (2.17(iv)). By 2.24(ii), $f : U \to (F, \mathcal{T}'_{born})$ is smooth. Since $\lambda : (F, \mathcal{T}'_{born}) \to \mathbb{R}$ is continuous and $\lambda(\bar{0}) = 0$, there exists a neighborhood $V^{\bar{0}}$ of $\bar{0}$ in $(F, \mathcal{T}'_{born})$ such that $\lambda(V^{\bar{0}}) \subset [-1, 1]$.
Then, there exist $\delta > 0$ and $i_1, ..., i_n \in I$ such that

$$\bigcap_{j=1}^{n} B_\delta^{\| \ \|_{i_j}}(\bar{0}) \subset V^{\bar{0}}$$

and therefore for all $z \in F$ with $\|z\|_{i_j} < \delta$ for all $j \in \{1, ..., n\}$, $|\lambda(z)| \leqslant 1$. Thus for all $w \in F$ with $\|w\|_{i_j} < 1$ for all $j = 1, ..., n$, one has that $\|\delta w\|_{i_j} = \delta\|w\|_{i_j} < \delta$ for all $j = 1, ..., n$ and $|\lambda(\delta w)| = \delta|\lambda(w)| \leqslant 1$, which implies $|\lambda(w)| \leqslant 1/\delta$.
Let $\varepsilon > 0$ and $u \in E$. Since, by 3.21(i),

$$d_u f(x) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x + tu) - f(x)}{t} \ \ (\text{in}(F, \mathcal{T}'_{born}))$$

and for all $j \in \{1, ..., n\}$, $B_\varepsilon^{\| \ \|_{i_j}}(d_u f(x))$ is a neighborhood of $d_u f(x)$ in (F, T_{born}), there exists $\eta_j > 0$ such that for all $t \in (-\eta_j, +\eta_j)$ with $t \neq 0$, $x + tu \in V^{\bar{0}}$ and

$$\|d_u f(x) - \frac{f(x + tu) - f(x)}{t}\|_{i_j} < \varepsilon, \ (j \in \{1, ..., n\}).$$

Let η be the positive real number $\min\{\eta_1, ..., \eta_n\}$. Thus, for all $t \in (-\eta, \eta)$ with $t \neq 0$

$$\|d_u f(x) - \frac{f(x + tu) - f(x)}{t}\|_{i_j} < \varepsilon, \ \text{ for all } \ j \in \{1, ..., n\}.$$

For all $t \in (-\eta, +\eta)$ with $t \neq 0$, let

$$u_t = d_u f(x) - \frac{f(x + tu) - f(x)}{t} \ \text{ and } \ v_t = \frac{u_t}{\varepsilon}.$$

Then $\|v_t\|_{i_j} < 1$ for all $j \in \{1, ..., n\}$, and

$$\varepsilon t v_t = t d_u f(x) - f(x + tu) + f(x) \ \text{ or } \ f(x + tu) - f(x) = t(d_u f(x) - \varepsilon v_t).$$

Since $f(x) \in F_\lambda^0$, $-f(x) \in F_\lambda^0$ and $f(x + tu) - f(x) \in F_\lambda^+$. Thus,

$$\lambda(f(x + tu) - f(x)) = \lambda(t(d_u f(x) - \varepsilon v_t)) = t(\lambda(d_u f(x)) - \varepsilon\lambda(v_t)) \geqslant 0.$$

Then one follows that:
(1^{st}) If $0 < t_1 < \eta$, then $\lambda(d_u f(x)) \geqslant \varepsilon\lambda(v_{t_1}) \geqslant -\varepsilon \cdot (1/\delta)$.
(2^d) If $-\eta < t_2 < 0$, then $\lambda(d_u f(x)) \leqslant \varepsilon\lambda(v_{t_2}) \leqslant \varepsilon \cdot (1/\delta)$.
Since ε is arbitrary, $\lambda(d_u f(x)) = 0$ and $d_u f(x) \in F_\lambda^0$. □

Theorem 3.35. *(Invariance of the boundary). Let $(E, \mathcal{T})$, $(F, \mathcal{T}')$ be convenient vector spaces, Q a quadrant of E with $\text{int}_{C^\infty E} Q \neq \emptyset$ (by 2.32, index(Q) is finite and Q^0 is closed in (E, T_{born})), P a quadrant of F with $\text{int}_{C^\infty F} P \neq \emptyset$ (by 2.32, index(P) is finite and P^0 is closed in (F, T'_{born})), U a C^∞-open set of Q, V a C^∞-open set of P and let $f : U \to V$ be a smooth diffeomorphism (3.32). Then we have:*

(i) $index(x) = index(f(x))$ *for all* $x \in U$, *(2.11).*

(ii) $\{x \in U | index(x) \geqslant 1\} \neq \emptyset$ *if and only if* $\{y \in V | index(y) \geqslant 1\} \neq \emptyset$. *(Note that* $int_{C^\infty E}Q = int_{T_{born}}Q \neq \emptyset$ *and* $int_{C^\infty F}P = int_{T'_{born}}P \neq \emptyset$, *(2.32 and 2.33(iii)).*

(iii) *If* $U \neq \emptyset$, $int_{C^\infty E}(U) \neq \emptyset$ *and* $int_{C^\infty F}(V) \neq \emptyset$.

(iv) $f(\{x \in U | index(x) \geqslant k\}) = \{y \in V | index(y) \geqslant k\}$, *for all* $0 \leqslant k \leqslant index(Q)$.

(v) $f(\{x \in U | index(x) = k\}) = \{y \in V | index(y) = k\}$, *for all* $0 \leqslant k \leqslant index(Q)$.

(vi) $f(int_{C^\infty E}(U)) = int_{C^\infty F}(V)$.

(vii) $f|_{int_{C^\infty E}(U)} : int_{C^\infty E}(U) \to int_{C^\infty F}(V)$ *is a smooth diffeomorphism (3.32) and* $d(f|_{int_{C^\infty E}(U)})(x) = df(x)$ *for all* $x \in int_{C^\infty E}(U)$.

Proof. By 2.32 and 2.33 there exist a linear independent system of elements of $L_b(E, \mathbb{R})$, $\Lambda = \{\lambda_1, ..., \lambda_n\}$, and a linearly independent system of elements of $L_b(F, \mathbb{R})$, $M = \{\eta_1, ..., \eta_n\}$, such that $Q = E^+_\Lambda$ and $P = F^+_M$.
(i). If $x \in U$, $k = index(x)$ and $k' = index(f(x))$, then, exactly k elements of Λ, λ_{i_1},...,λ_{i_k}, vanish at x and exactly k' elements of M, η_{i_1},..., $\eta_{i_{k'}}$, vanish at $f(x)$. We consider $J = \{i_1, ..., i_k\}$, $E_J = \bigcap_{j \in J} E^0_{\lambda_j}$ and $\Lambda_J = \{\lambda_i|_{E_J} : i \in I \setminus J\}$. Then, Λ_J is a linearly independent system of elements of $L_b(E_J, \mathbb{R})$ and $H = (E_J)_{\Lambda^+_J} = E^+_\Lambda \cap E_J$. Hence, by 2.33(v), $U \cap H$ is an C^∞-open set of H and $int_{C^\infty E_J}(U \cap H)$ is a C^∞-open set of E_J which contains the point x. We denote by V^x the C^∞-open set $int_{C^\infty E_J}(U \cap H)$. On the other hand, since E_J is C^∞-closed, $f|_{V^x} : V^x \to V \subset F^+_M$ is a smooth map and $(f|_{V^x})(x) \in \bigcap_{j=1}^{k'} F^0_{\eta_{i_j}}$. Hence by the above lemma (3.34) $d(f|_{V^x})(x, \cdot)(E_J) \subset \bigcap_{j=1}^{k'} F_{\eta^0_{i_j}}$ and

$$codim(df(x, \cdot)(E_J) = codim(E_J) = k \geqslant codim(\bigcap_{j=1}^{k'} F^0_{\eta_{i_j}}) = k'$$

Similarly, using f^{-1}, we obtain $k' \geqslant k$ and hence $k = k'$.
(ii), (iv) and (v) follow from (i), and (iii) follows from (i) and 2.34. Finally, (vi) and (vii) are consequence from (i) and 3.30. □

Proposition 3.36. *Let* E *be a convenient vector space and* Q, Q' *quadrants in* E *with non-empty* C^∞*-interior. Then* Q, Q' *are smooth diffeomorphic (3.32) if and only if* $index(Q) = index(Q')$, *(2.3(ii)).*

Proof. If $index(Q) = index(Q')$, by 2.32 and 2.15 there exists a linear homeomorphism $\alpha : (E, T_{born}) \to (E, T_{born})$ such that $\alpha(Q) = Q'$ and $\alpha(Q^0) = Q'^0$. By 3.25, $\alpha|_Q : Q \to Q'$ is a smooth diffeomorphism (3.32). For the converse, apply 3.35(i).
□

On constructing smooth manifolds with corners modeled over convenient vector spaces, the C^∞-open subsets of quadrants, with non-empty C^∞-interior will be the local models.

4. Manifolds with corners modeled on convenient real vector spaces

Let X be a non-empty set. We say that $(U, \varphi, (E, Q))$ is a chart on X if: U is a subset of X, E is a convenient vector space (i.e. a $Hlcrtvs$ which is Mackey complete (3.9)), Q is a quadrant on E with $int_{C^\infty\mathcal{T}}Q \neq \emptyset$ (where, $\mathcal{T}$ is the topology of E), $\varphi : U \to Q$ is an injective map, and $\varphi(U)$ is a C^∞-open subset of Q (note that the C^∞-topology of Q (2.33(v)) is $C^\infty\mathcal{T}|_Q$). In this case, U will be called the domain, φ the morphism and E (or Q) the model of the chart.
Recall that (2.32 and 2.33) $index(Q)$ is finite, Q^0 is closed in (E, T_{born}) and $int_{T_{born}}Q$ is non-empty. Consequently if $index(Q) = n \in \mathbb{N}$, by 2.32(iii), there exists a linearly independent system $\Lambda = \{\lambda_1, ..., \lambda_n\}$ of elements of $L_b(E, \mathbb{R})$ such that $Q = E^+_\Lambda$, (hence $Q^0 = E^0_\Lambda$, Q and Q^0 are closed in (E, T_{born}), and $int_{C^\infty T}(Q) = int_{T_{born}}(Q)$, (2.33(iii))).

Let $(U, \varphi, (E, Q))$, $(U', \varphi', (E', Q'))$ be charts on X. We say that they are smooth-compatible (sth-compatible) if: $\varphi(U \cap U')$ and $\varphi'(U \cap U')$ are C^∞-open subsets of Q and Q', respectively, and $\varphi'\varphi^{-1} : \varphi(U \cap U') \to \varphi'(U \cap U')$, $\varphi\varphi'^{-1} : \varphi'(U \cap U') \to \varphi(U \cap U')$ are smooth maps (3.23) (and hence inverse homeomorphisms for the C^∞-topology, (3.26)). In this case we shall write $(U, \varphi, (E, Q)) \sim (U', \varphi', (E', Q'))$.

A collection $\mathcal{A}$ of charts on X is called a smooth-atlas on X (sth-atlas) if the domains of the charts of $\mathcal{A}$ cover X and any two of them are sth-compatible.

Two sth-atlases $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}'$ on X are called smooth-equivalent (sth-equivalent) if $\mathcal{A} \cup \mathcal{A}'$ is a sth-atlas on X. In this case we shall write $\mathcal{A} \sim \mathcal{A}'$.

Proposition 4.1. *Let X be a non-empty set. Then the preceding relation binary $\sim$ is an equivalence relation over the sth-atlases on X.*

Proof. Reflexive and symmetric properties are obvious.
$\sim$ is transitive: Let $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ and $\mathcal{D}$ be sth-atlases on X such that $\mathcal{A} \sim \mathcal{B}$ and $\mathcal{B} \sim \mathcal{D}$. It should be proven that $A \sim \mathcal{D}$, which is equivalent to prove that $\mathcal{A} \bigcup \mathcal{D}$ is a sth-atlas on X.
It is clear that the elements of $\mathcal{A} \bigcup \mathcal{D}$ are charts on X and its domains cover X. Thus, it remains to prove that every element $(U, \varphi, (E, Q))$ of $\mathcal{A}$ is smooth compatible with every element $(U', \varphi', (E', Q'))$ of $\mathcal{D}$. We have that

$$\varphi(U \cap U') = \bigcup_{(c''=)(U'', \varphi'', (E'', Q'')) \in \mathcal{B}} \varphi(U \cap U' \cap U'') = \bigcup_{c'' \in \mathcal{B}} \varphi\varphi''^{-1}\varphi''(U \cap U' \cap U'')$$
$$= \bigcup_{(U'', \varphi'', (E'', Q'')) \in \mathcal{B}} \varphi\varphi''^{-1}(\varphi''(U \cap U'') \cap \varphi''(U' \cap U'')),$$
$$(U \cap U' = \bigcup_{(U'', \varphi'', (E'', Q'')) \in \mathcal{B}} (U \cap U' \cap U''), \ \ (U \cap U' \cap U'' = (U \cap U'') \cap (U' \cap U'')))),$$

is C^∞-open in the quadrant Q, since $(U, \varphi, (E, Q)) \sim (U'', \varphi'', (E'', Q''))$ $(\mathcal{A} \sim \mathcal{B})$, $(U', \varphi', (E', Q')) \sim (U'', \varphi'', (E'', Q''))$ $(\mathcal{B} \sim \mathcal{D})$ and $\varphi\varphi''^{-1} : \varphi''(U \cap U'') \to \varphi(U \cap U'')$

is a C^∞-homeomorphism. Analogously $\varphi'(U \cap U')$ is C^∞-open in the quadrant Q'. Since

$$\varphi'\varphi^{-1}|_{\varphi(U\cap U'\cap U'')} = (\varphi'\varphi''^{-1})(\varphi''\varphi^{-1})|_{\varphi(U\cap U'\cap U'')}$$

is a smooth map (by the chain rule (3.29) and the restriction of a smooth map to an C^∞-open set (3.30(i))), we have that $\varphi'\varphi^{-1} : \varphi(U \cap U') \to \varphi'(U \cap U')$ is a smooth map by the open covering property of the smooth maps (3.30(iii)). Analogously, $\varphi\varphi'^{-1} : \varphi'(U \cap U') \to \varphi(U \cap U')$ is a smooth map. □

Definition 4.2. If $\mathcal{A}$ is a *sth*-atlas on X, the equivalence class $[\mathcal{A}]$ is called *sth*-structure on X and the pair $(X, [\mathcal{A}])$ is called *sth*-manifold with corners (or *sth*-manifold).
If $(X, [\mathcal{A}])$ is a *sth*-manifold with corners, we shall say that $\mathcal{B}$ is an atlas of $(X, [\mathcal{A}])$ if $\mathcal{B} \in [\mathcal{A}]$, and we shall say that a chart $(U, \varphi, (E, Q))$ of X is a chart of $(X, [\mathcal{A}])$ if there exists $\mathcal{B} \in [\mathcal{A}]$ such that $(U, \varphi, (E, Q)) \in \mathcal{B}$.

Remark 4.3. For all *Hlcrtvs* $(E, \mathcal{T})$ we have: $C^\infty(\mathcal{T}_{born}) = C^\infty\mathcal{T}$ (2.24(iii)), $(E, \mathcal{T}_{born})$ is a bornological *Hlcrtvs* (2.19(i)), and: $(E, \mathcal{T})$ *is convenient if and only if* $(E, \mathcal{T}_{born})$ *is convenient* (3.11(iv)). Moreover, if $(E, \mathcal{T})$ is a convenient vector space, then the identity map, $1_E : (E, \mathcal{T}) \to (E, \mathcal{T}_{born})$, is a smooth diffeomorphism by 2.24(ii). In this way, we can consider that the *sth*-manifolds are modeled on bornological convenient vector spaces (see 2.19).

Remarks 4.4. (i) Two charts of a *sth*-manifold with corners are smooth compatible.

(ii) Let $(X, [\mathcal{A}])$ be a *sth*-manifold with corners and $(U, \varphi, (E, Q))$ a chart on X. Then $(U, \varphi, (E, Q))$ is a chart of $(X, [\mathcal{A}])$ if and only if there exists an atlas $\mathcal{B}$ of $(X, [\mathcal{A}])$ such that $(U, \varphi, (E, Q))$ is smooth compatible with all chart of $\mathcal{B}$.

(iii) Let $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ be smooth atlas on X. Then, $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ are smooth equivalent if and only if for all $x \in X$ there exists $(U, \varphi, (E, Q))$ and $(U', \varphi', (E', Q'))$ charts of $\mathcal{A}$ and $\mathcal{B}$, respectively, such that $x \in U \cap U'$ and these charts are smooth compatible.

(iv) Let $(X, [\mathcal{A}])$ be a *sth*-manifold with corners and $x \in X$. If $(U, \varphi, (E, Q))$ and $(U', \varphi', (E', Q'))$ are charts of $(X, [\mathcal{A}])$ with $x \in U \cap U'$, by chain rule (3.29), E and E' are linearly C^∞-diffeomorphic and $dim(E)$ is called dimension of $(X, [\mathcal{A}])$ at x and denoted $dim_x X$.

(v) If in the above definition of a *sth*-manifold with corners the charts are modeled only on Fréchet (Banach) spaces, we have the concept of Fréchet (Banach) manifold with corners (see [8]).

(vi) The topological manifolds with border modeled on convenient vector spaces can be defined analogously as we defined the *sth*-manifolds.

(vii) Let X be a set and $\mathcal{A}_\infty$ the collection of all smooth atlases on X. We have the equivalence relation $\sim$ on $\mathcal{A}_\infty$ and the ordering relation $\prec$ on $\mathcal{A}_\infty$ defined by: $\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$ if and only if $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$.
Then, if $\mathcal{A} \in \mathcal{A}_\infty$, $\mathcal{A}$ is a maximal element if and only if $\mathcal{A} = \bigcup\{\mathcal{B} : \mathcal{B} \in [\mathcal{A}]\}$.

(viii) Let $(X, [\mathcal{A}])$ be a *sth*-manifold with corners. Then:
(1). $\bigcup\{\mathcal{B} : \mathcal{B} \in [\mathcal{A}]\} \sim \mathcal{A}$.
(2). $\bigcup\{\mathcal{B} : \mathcal{B} \in [\mathcal{A}]\}$ is a maximal element.

The smooth manifolds with corners are endowed with a natural topology induced by the differentiable structure.

Proposition 4.5. *Let $(X, [\mathcal{A}])$ be is a sth-manifold with corners. Then, the set $\mathcal{B}_{[\mathcal{A}]} = \{U \subset X : U$ is a domain of a chart of $(X, [\mathcal{A}])\}$ is a basis of a topology $\mathcal{T}_{[\mathcal{A}]}$ on X (called the natural topology induced by $[\mathcal{A}]$).*

Proof. (1). $\bigcup_{U \in \mathcal{B}_{[\mathcal{A}]}} U = X$, since the domains of all charts that belong to the atlas $\mathcal{A}$ is a covering of X.
(2). For all $U_1, U_2 \in \mathcal{B}_{[\mathcal{A}]}$ and all $x \in U_1 \cap U_2$ there is $U_3 \in \mathcal{B}_{[\mathcal{A}]}$ such that $x \in U_3 \subset U_1 \cap U_2$. In fact: If $(U_1, \varphi_1, (E_1, Q_1))$ and $(U_2, \varphi_2, (E_2, Q_2))$ are chart of $(X, [\mathcal{A}])$, then $(U_1 \cap U_2, \varphi_1|_{U_1 \cap U_2}, (E_1, Q_1))$ and $(U_1 \cap U_2, \varphi_2|_{U_1 \cap U_2}, (E_2, Q_2))$ are charts of $(X, [\mathcal{A}])$. Thus, $U_3 = U_1 \cap U_2 \in \mathcal{B}_{[\mathcal{A}]}$. □

Remark 4.6. If $(U, \varphi, (E, Q))$ is a chart of the *sth*-manifold $(X, [\mathcal{A}])$ and V is an open set of $(X, \mathcal{T}_{[\mathcal{A}]})$, then $(U \cap V, \varphi|_{U \cap V}, (E, Q))$ is a chart of $(X, [\mathcal{A}])$.

Proposition 4.7. *Let $(X, [\mathcal{A}])$ be a sth-manifold with corners and $(U, \varphi, (E, Q))$ a chart of this manifold. Then, $\varphi : (U, \mathcal{T}_{[\mathcal{A}]}) \to (\varphi(U), \mathcal{T}^\infty\varphi(U))$, where $\mathcal{T}^\infty\varphi(U)$ is the C^∞-topology induced in $\varphi(U)$ by the C^∞-topology of Q (therefore by the C^∞-topology of E, (2.33(v)), is a homeomorphism.*

Proof. (1). $\varphi : U \to \varphi(U)$ is a bijective map.
(2). Let $(U', \varphi', (E', Q'))$ be a chart of $(X, [\mathcal{A}])$. Then, $\varphi(U \cap U')$ is C^∞-open in Q and therefore is an element of $\mathcal{T}^\infty\varphi(U)$, and φ is an open map.
(3). Let A be an element of $\mathcal{T}^\infty\varphi(U)$. Then, $(\varphi^{-1}(A), \varphi|_{\varphi^{-1}(A)}, (E, Q))$ is a chart of $(X, [\mathcal{A}])$. Thus $\varphi^{-1}(A) \in \mathcal{B}_{[\mathcal{A}]} \subset \mathcal{T}_{[\mathcal{A}]}$ and φ is a continuous map. □

The next proposition gives us a criterion to know when a topology on a *sth*-manifold with corners is the associated topology of the manifold.

Proposition 4.8. *Let $(X, [\mathcal{A}])$ be a sth-manifold with corners and $\mathcal{T}$ a topology on X. Then the following statements are equivalent:*

(i) $\mathcal{T}_{[\mathcal{A}]} = \mathcal{T}$.

(ii) *There is a sth-atlas $\{(U_j, \varphi_j, (E_j, Q_j)) : j \in J\}$ of $(X, [\mathcal{A}])$ such that $U_j \in \mathcal{T}$ and $\varphi_j : (U_j, \mathcal{T}|_{U_j}) \to (\varphi_j(U_j), \mathcal{T}^\infty\varphi_j(U_j))$ is a homeomorphism, for every $j \in J$.*

Proof. The result follows from the above proposition (4.7) and the general statement: *If two topologies on a set agree on every element of a common open covering, then they must be equal.* □

Definition 4.9. Let $(X, [\mathcal{A}])$ be a *sth*-manifold and $c : \mathbb{R} \to X$ a map. We say that c is a *sth*-curve on $(X, [\mathcal{A}])$ if:

(i) $c : (\mathbb{R}, T_u) \to (X, \mathcal{T}_{[\mathcal{A}]})$ is a continuous map.

(ii) For all chart $(U, \varphi, (E, Q))$ of $(X, [\mathcal{A}])$ such that $U \cap c(\mathbb{R}) \neq \emptyset$, the map

$$i\varphi(c|_{c^{-1}(U)}) : \ c^{-1}(U) \overset{c|_{c^{-1}(U)}}{\longrightarrow} U \xrightarrow{\varphi} \varphi(U) \overset{i}{\hookrightarrow} Q$$

is a C^∞ map (2.20), (by (i), $c^{-1}(U)$ is a non-empty open set of $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$).

Proposition 4.10. *Let $(X, [\mathcal{A}])$ be a sth-manifold with corners. Then, $T_{[\mathcal{A}]}$ is the final topology $\mathcal{T}^\infty_{[\mathcal{A}]}$ in X respect to the family $\{c : \mathbb{R} \to X | c$ is a sth-curve on $(X, [\mathcal{A}])\}$.*

Proof. Since every *sth*-curve on $(X, [\mathcal{A}])$ is a continuous map of $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ into $(X, \mathcal{T}_{[\mathcal{A}]})$, we have the inclusion $\mathcal{T}_{[\mathcal{A}]} \subset \mathcal{T}^\infty_{[\mathcal{A}]}$.
On the other hand, if $(U, \varphi, (E, Q))$ is a chart of $(X, [\mathcal{A}])$, then φ maps *sth*-curves in U into *sht*-curves in $\varphi(U)$ and conversely. Thus, $\varphi : C^\infty U \to C^\infty \varphi(U)$ is a homeomorphism and $C^\infty U = (U, \mathcal{T}^\infty_{[\mathcal{A}]}|_U) = (U, \mathcal{T}_{[\mathcal{A}]}|_U)$. Then by 4.8, $\mathcal{T}^\infty_{[\mathcal{A}]} = \mathcal{T}_{[\mathcal{A}]}$. □

Moreover, the topology of a *sth*-manifold verifies the T_1 axiom (the C^∞-topology of a *Hlcrtvs* is Hausdorff), and finally a *sth*-manifold fulfils the first axiom of countability if and only if it is a Fréchet manifold (see the proof of 4.19 in [7]).

Boundary of a *sth*-manifold with corners

Theorem 4.11. *Let $(X, [\mathcal{A}])$ be a sth-manifold with corners and $x \in X$. Then, if $(U, \varphi, (E, Q))$ and $(U', \varphi', (E', Q'))$ are charts of $(X, [\mathcal{A}])$ with $x \in U \cap U'$, we have that $index_Q(\varphi(x)) = index_{Q'}(\varphi'(x'))$.*

Proof. Since $\varphi'\varphi^{-1} : \ \varphi(U \cap U') \to \varphi'(U \cap U')$ is a *sth*-difeomorphism, the result follows from the theorem 3.35(i). □

Definition 4.12. Let $(X, [\mathcal{A}])$ be a *sth*-manifold with corners. Then:

(i) Let x be a point of X. The index of $\varphi(x)$ in Q, where $(U, \varphi, (E, Q))$ is a chart of $(X, [\mathcal{A}])$ with $x \in U$, will be called index of x and will be denoted by $index(x)$ (see the above theorem).

(ii) For all $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, the set $\{x \in X | index(x) \geqslant k\} (= \partial^k X)$ is called k-boundary of $(X, [\mathcal{A}])$ and the set $\partial^1 X (= \partial X)$ the boundary of $(X, [\mathcal{A}])$, $(\partial^0 X = X)$.

(iii) For all $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, the set $\{x \in X | index(x) = k\}$ is denoted by $B_k X$, (note that $\partial^k X = \bigcup_{k' \geqslant k} B_{k'} X$). The set $B_0 X = \{x \in X : \ index(x) = 0\} = X \setminus \partial X$ will be called the interior of X and denoted by Int(X).

Proposition 4.13. *Let $(X, [\mathcal{A}])$ be a sth-manifold with corners and $x \in X$. Then, there is a chart $(U, \varphi, (E, Q))$ of $(X, [\mathcal{A}])$ such that $x \in U$ and $\varphi(x) = 0$, and hence $index(x) = index(Q)$. Such a chart will be called centered at the point x.*

Proof. Let $(U', \varphi', (E', Q'))$ be a chart of $(X, [\mathcal{A}])$ such that $x \in U'$. By 2.32(iii) there is a linearly independent system $\Lambda' = \{\lambda'_1, ..., \lambda'_n\}$ of elements of $L_b(E', \mathbb{R})$ such that $Q' = E'^+_{\Lambda'}$. If $\lambda'_1(\varphi'(x))) = 0$,...,$\lambda'_n(\varphi'(x)) = 0$, take the chart $(U', t_{\varphi'(x)}\varphi', (E', Q'))$ of $(X, [\mathcal{A}])$, where $t_{\varphi'(x)}(y) = y - \varphi'(x)$, $y \in Q'$ (see 2.30).
If $\lambda'_1(\varphi'(x))) = 0$,...,$\lambda'_{i_r}(\varphi'(x)) = 0$ and $\lambda'_{i_{r+1}}(\varphi'(x))) > 0$,...,$\lambda'_n(\varphi'(x)) > 0$, take a

C^∞-open set W of $\varphi'(U')$ such that $\varphi'(x) \in W$ and $W \cap E'^0_{\lambda_i} = \emptyset$, $i = r+1, ..., n$ ($E'^0_{\lambda'_i}$ is closed in $(E', \mathcal{T}'_{born})$ and therefore is closed in $C^\infty E'$), and take the chart $(\varphi'^{-1}(W), t_{\varphi'(x)}(\varphi'|_{\varphi'^{-1}(W)}), (E', Q'))$. □

Proposition 4.14. *Let $(X, [\mathcal{A}])$ be a sth-manifold with corners and $k \in \mathbb{N}$. Then:*

(i) *$\partial^k X$ is a closed set of $(X, \mathcal{T}_{[\mathcal{A}]})$.*

(ii) *$Int(X)$ is a dense open set of $(X, \mathcal{T}_{[\mathcal{A}]})$.*

Proof. It is an easy consequence of the above proposition and 2.11(d). □

Proposition 4.15. *Let $(X, [\mathcal{A}])$ be a sth-manifold and $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Then, there exists a unique smooth differentiable structure on $B_k X$ such that for all $x \in B_k X$ and all chart $(U, \varphi, (E, Q))$ with $x \in U$ and $\varphi(x) = 0$ (4.13), the triplet $(U \cap B_k X, \varphi|_{U \cap B_k X}, Q^0)$ is a chart of that structure. Furthermore, $\partial B_k X = \emptyset$ and the topology of this manifold $B_k X$ is the topology induced by $T_{[\mathcal{A}]}$.*

Proof. If $x \in B_k X$ and $(U, \varphi, (E, Q))$ is chart of $(X, [\mathcal{A}])$ such that $x \in U$ and $\varphi(x) = 0$, we have $\varphi(U \cap B_k X) = \varphi(U) \cap Q^0$. From this equality and since that Q^0 is closed in $(E, \mathcal{T}_{born})$ (and therefore in $C^\infty E$) it is easy to deduce the assertions in the statement. □

Corollary 4.16. *Let $(X, [\mathcal{A}])$ be a sth-manifold. Then we have:*

(i) *There is a unique smooth differentiable structure on $Int(X)$ such that for all $x \in Int(X)$ and all chart $(U, \varphi, (E, Q))$ of $(X, [\mathcal{A}])$ with $x \in U$ and $\varphi(x) = 0$ (hence $Q = Q^0 = E$), the triplet (U, φ, E) is a chart of $Int(X)$. Moreover $Int(X)$ has no boundary ($\partial(Int(X)) = \emptyset$) and its topology is the topology induced by $\mathcal{T}_{[\mathcal{A}]}$.*

(ii) *If $\partial^2 X = \emptyset$, there is a unique smooth differentiable structure on ∂X such that for all $x \in \partial X$ an all chart $(U, \varphi, (E, Q))$ of $(X, [\mathcal{A}])$ with $x \in U$ and $\varphi(x) = 0$ (hence $Q = E^+_{\{\lambda\}}$ it happens that $(U \cap \partial X, \varphi|_{U \cap \partial X}, E^0_{\{\lambda\}})$ is a chart of ∂X. Furthermore $\partial(\partial X) = \emptyset$ and its topology is the topology induced by $\mathcal{T}_{[\mathcal{A}]}$.*

Examples 4.17. (i) Let $(E, \mathcal{T})$ be a convenient vector space, and let Q be a quadrant of $(E, \mathcal{T})$ with $int_{C^\infty E} Q \neq \emptyset$. Then $\mathcal{A}_E = \{(Q, Id_Q, (E, Q))\}$ is a smooth atlas on Q. Thus $(Q, [\mathcal{A}_E])$ is a *sth*-manifold with corners, called the usual differentiable structure of Q. If U is an C^∞-open subset of Q, then $(U, i, (E, Q))$ (i the inclusion map of U into Q) is a chart of $(Q, [\mathcal{A}_E])$. One has that $B_k((Q, [\mathcal{A}_E])) = \{x \in Q : index_Q(x) = k\}$ and $\mathcal{T}_{[\mathcal{A}_E]} = C^\infty(\mathcal{T}|_Q) = C^\infty \mathcal{T}|_Q$. Particularly, if $Q = E$, then $(E, [\mathcal{A}_E])$ is a *sth*-manifold without boundary.

(ii) Let $(X, [\mathcal{A}])$ be a *sth*-manifold and let G be an open set of $(X, \mathcal{T}_{[\mathcal{A}]})$. Then $\mathcal{A}_G = \{(U, \varphi, (E, Q)) : (U, \varphi, (E, Q))$ is a chart of $(X, [\mathcal{A}])$, $U \subset G\}$ is a smooth atlas on G and $(G, [\mathcal{A}_G])$ is a *sth*-manifold, called open submanifold of $(X, [\mathcal{A}])$. One has $B_k((G, [\mathcal{A}_G])) = G \cap B_k X$ and $\mathcal{T}_{[\mathcal{A}_G]} = \mathcal{T}_{[\mathcal{A}]}|_G$.

If the quadrants are omitted, the *sth*-manifolds that we obtain, in fact they were already defined in [7], p. 264, will be called smooth manifold without boundary (or corners).

Differentiable maps

The differential calculus of smooth maps defined on open sets of quadrants of convenient vector spaces and with values into Hausdorff locally convex vector spaces admits the following generalization to manifolds.

Definition 4.18. Let $(X,[\mathcal{A}])$ be a *sth*-manifold with corners, let $(F,\mathcal{T}')$ be a convenient vector space and let $f: X \to F$ be a map. We say that f is a smooth map, if for every $x \in X$ there exists a chart $c=(U,\varphi,(E,Q))$ of $(X,[\mathcal{A}])$ such that $x \in U$ and $f\varphi^{-1}: \varphi(U) \to F$ is a smooth map.

Remarks 4.19. (1) If $(X,[\mathcal{A}])$ is a *sth*-manifold with corners, $(F,\mathcal{T}')$ is a convenient vector space and $f: X \to F$ is a smooth map, then $f:(X,\mathcal{T}_{[\mathcal{A}]}) \to C^\infty F=(F,C^\infty\mathcal{T}')$ is a continuous map.
(2) Also, it is easy to prove, from the basic properties established in 3.30 and the chain rule (3.29), that: If $f:(X,[\mathcal{A}]) \to F$ is a smooth map and $(V,\psi,(E_1,Q_1))$ is a chart of $(X,[\mathcal{A}])$, then $f\psi^{-1}: \psi(V) \to F$ is a smooth map.
(3) Finally if $f: U \to F$ is a map, where U is an C^∞-open set of a quadrant Q of a convenient vector space E, with $int_{C^\infty E}Q \neq \emptyset$, and F is a convenient vector space, then the notion of smooth map given via 3.23 coincide with the notion of smooth map define above (4.18), considering U as an open *sth*-manifold with corners of Q with the usual differentiable structure (4.17)(i).

The smooth maps between *sth*-manifolds are defined as usually by localization.

Definition 4.20. Let $(X,[\mathcal{A}])$, $(X',[\mathcal{A}'])$ be smooth manifolds with corners and $f: X \to X'$ a map. We say that f is a smooth map, if for every $x' \in X'$ there exists a chart $(U',\varphi',(E',Q'))$ of $(X',[\mathcal{A}'])$ with $x' \in U'$, $f^{-1}(U')$ open in $(X,\mathcal{T}_{[\mathcal{A}]})$ and

$$j\varphi'(f|_{f^{-1}(U')}): f^{-1}(U') \overset{f|_{f^{-1}(U')}}{\longrightarrow} U' \overset{\varphi'}{\longrightarrow} \varphi'(U') \overset{j}{\hookrightarrow} Q'$$

smooth map according to 4.18 ($f^{-1}(U')$ is an open submanifold of $(X,[\mathcal{A}])$).

Proposition 4.21. *Let $(X,[\mathcal{A}])$, $(X',[\mathcal{A}'])$ be smooth manifolds with corners and $f: X \to X'$ a map. Then,*

(i) *The map f is smooth if and only if for every $x \in X$ there exists a chart $(U,\varphi,(E,Q))$ of $(X,[\mathcal{A}])$ with $x \in U$ and there exists a chart $(U',\varphi',(E',Q'))$ such that $f(U) \subset U'$ and the map $\varphi' f \varphi^{-1}: \varphi(U) \to \varphi'(U')$ is a smooth map.*

(ii) *If $f:(X,[\mathcal{A}]) \to (X',[\mathcal{A}'])$ is a smooth map, one has that $f:(X,\mathcal{T}_{[\mathcal{A}]}) \to (X',\mathcal{T}_{[\mathcal{A}']})$ is a continuous map.*

Also, it is easy to prove, from the basic properties established in 3.30 and the chain rule (3.29), that if $f:(X,\mathcal{T}_{[\mathcal{A}]}) \to (X',\mathcal{T}_{[\mathcal{A}']})$ is a smooth map, $(U_1,\varphi_1,(E_1,Q_1))$ is a chart of $(X,[\mathcal{A}])$ and $(U_1',\varphi_1',(E_1',Q_1'))$ is a chart of $(X',[\mathcal{A}'])$ such that $f(U_1) \subset U_1'$, then $\varphi_1' f \varphi_1^{-1}: \varphi_1(U_1) \to \varphi_1'(U_1')$ is a smooth map.

Proposition 4.22. (i) *If $(X, [\mathcal{A}])$ is a smooth manifold, then the identity map $Id_X : (X, [\mathcal{A}]) \to (X, [\mathcal{A}])$ is smooth.*

(ii) *The finite composition of smooth maps is a smooth map.*

(iii) *Let $(X, [\mathcal{A}])$ be a smooth manifold with corners and U an open set of $(X, \mathcal{T}_{[\mathcal{A}]})$. Then the inclusion map $j : (U, [\mathcal{A}_U]) \hookrightarrow (X, [\mathcal{A}])$, (4.17(ii)), is a smooth map.*

(iv) *If $f : (X, [\mathcal{A}]) \to (X', [\mathcal{A}'])$ is a smooth map and U is an open set of $(X, \mathcal{T}_{[\mathcal{A}]})$, then $f|_U : (U, [\mathcal{A}_U]) \to (X', [\mathcal{A}'])$, (4.17(ii)), is a smooth map.*

(v) *If $(X, [\mathcal{A}])$ and $(X', [\mathcal{A}'])$ are smooth manifolds with corners, $f : X \to X'$ is a mapping and $\mathcal{U}$ is an open covering of the topological space $(X, \mathcal{T}_{[\mathcal{A}]})$ such that $f|_U : (U, [\mathcal{A}_U]) \to (X', [\mathcal{A}'])$, (4.17(ii)), is a smooth map for all $U \in \mathcal{U}$, then $f : (X, [\mathcal{A}]) \to (X', [\mathcal{A}'])$ is a smooth map.*

(vi) *If $(X, [\mathcal{A}])$ is a smooth manifold and $c : \mathbb{R} \to X$ is a smooth curve on $(X, [\mathcal{A}])$, (4.9), then $c : (\mathbb{R}, [\mathcal{A}_{\mathbb{R}}]) \to (X, [\mathcal{A}])$ is a smooth map (4.20).*

Definition 4.23. Let $(X, [\mathcal{A}])$, $(X', [\mathcal{A}'])$ be smooth manifolds with corners and let $f : X \to X'$ be a map. Then f is called a smooth diffeomorphism if f is a bijective map and f, f^{-1} are smooth maps.

Note that every smooth diffeomorphism is an homeomorphism. Moreover the composition of smooth diffeomorphisms is a smooth diffeomorphism. On the other hand, if $[\mathcal{A}]$ and $[\mathcal{A}']$ are smooth structures with corners over a set X, it follows that Id_X is a smooth diffeomorphism from $(X, [\mathcal{A}])$ onto $(X, [\mathcal{A}'])$ if and only if $[\mathcal{A}] = [\mathcal{A}']$.

In order to prove that the smooth diffeomorphisms preserve the index of points and hence the boundary, we need the following lemma whose proof is not difficult.

Lemma 4.24. *Let $(X, [\mathcal{A}])$ be a smooth manifold with corners, U an open set of $(X, \mathcal{T}_{[\mathcal{A}]})$, F a convenient vector space, Q a quadrant of F with $int_{C^\infty F} Q \neq \emptyset$ and $\varphi : U \to F$ a map such that $\varphi(U)$ is a C^∞-open set of Q. Then the following statements are equivalent:*

(i) *$(U, \varphi, (F, Q))$ is a chart of $(X, [\mathcal{A}])$.*

(ii) *$\varphi : (U, [\mathcal{A}_U]) \to (\varphi(U), [(\mathcal{A}_F)_{\varphi(U)}])$ is a smooth diffemorphism, (4.17).*

The following result is of a great importance to the theory of *sth*-manifolds with corners.

Theorem 4.25. *Let $(X, [\mathcal{A}])$, $(X', [\mathcal{A}'])$ be smooth manifolds with corners and let $f : (X, [\mathcal{A}]) \to (X', [\mathcal{A}'])$ be a smooth diffeomorphism. Then, we have that:*

(i) *$index(x) = index(f(x))$ for all $x \in X$.*

(ii) *$f(\partial^k(X)) = \partial^k X'$ and $f(B_k(X)) = B_k(X')$ for all $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.*

(iii) *$f|_{B_k(X)} : B_k(X) \to B_k(X')$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, is a smooth diffeomorphism, where $B_k(X)$ and $B_k(X')$ are the manifolds described in 4.15. In particular, if $\partial^2 X = \emptyset$, f is smooth diffeomorphism of $\partial X = B_1(X)$ onto $\partial X' = B_1(X')$.*

Proof. (i). For $x \in X$, let $(U, \varphi, (E, Q))$ be a chart of $(X, [\mathcal{A}])$ with $x \in U$ and $\varphi(x) = 0$. Then by 4.24, $(f(U), \varphi f^{-1}, (E, Q))$ is a chart of $(X', [\mathcal{A}'])$ such that $f(x) \in f(U)$ and $\varphi f^{-1}(f(x)) = 0$. Hence, $index(x) = index(f(x)) = card(\Lambda)$.
(ii). It follows from (i).
(iii). Let $x \in B_k(X)$ and consider a chart $(U, \varphi, (E, Q))$ of $(X, [\mathcal{A}])$ such that $x \in U$ and $\varphi(x) = 0$. Then $(U \cap B_k(X), \varphi|_{U \cap B_k X}, Q^0)$ is a chart of $B_k(X)$. Since f is a smooth diffeomorphism, $(f(U), \psi = \varphi f^{-1}, (E, Q))$ is a chart of $(X', [\mathcal{A}'])$, $f(x) \in f(U)$ and $\varphi f^{-1}(f(x)) = 0$. Hence $(f(U) \cap B_k X', \psi|_{f(U) \cap B_k X'}, Q^0)$ is a chart of $B_k X'$. Then, it is clear that $f(U \cap B_k X) = f(U) \cap B_k X'$ and the map $\psi f(\varphi|_{U \cap B_k X})^{-1} : \varphi(U) \cap Q^0 \to \varphi(U) \cap Q^0$ is the identity map. Therefore $f|_{B_k X}$ and $(f|_{B_k X})^{-1}$ are smooth maps. □

Proposition 4.26. *Let $(X, [\mathcal{A}])$, $(X', [\mathcal{A}'])$ be smooth manifolds with corners and $f : X \to X'$ a map. Then, $f : (X, [\mathcal{A}]) \to (X', [\mathcal{A}'])$ is a smooth map if and only if f maps sth-curves in $(X, [\mathcal{A}])$ to sth-curves in $(X', [\mathcal{A}'])$.*

Proof. If $f : (X, [\mathcal{A}]) \to (X', [\mathcal{A}'])$ is a smooth map, then by 4.22(ii) $fc : (\mathbb{R}, [\mathcal{A}_{\mathbb{R}}]) \to (X', [\mathcal{A}'])$ is a smooth curve for each smooth curve $c : (\mathbb{R}, [\mathcal{A}_{\mathbb{R}}]) \to (X, [\mathcal{A}])$.
Conversely, by the above proposition 4.21(ii), $f : (X, \mathcal{T}_{[\mathcal{A}]}) \to (X', \mathcal{T}_{[\mathcal{A}']})$ is a continuous map. Then, for all $x \in X$ there exist $(U, \varphi, (E, Q))$ and $(U', \varphi', (E', Q'))$ charts of $(X, [\mathcal{A}])$ and $(X', [\mathcal{A}'])$, respectively, such that $x \in U$ and $f(U) \subset U'$. Then, by the hypothesis and the lemma 4.24 $\varphi' f \varphi^{-1}$ is a smooth map and by 4.21(i) $f : (X, [\mathcal{A}]) \to (X', [\mathcal{A}'])$ is a smooth map. □

The reader can study, for *sth*-manifolds with corners, the *general properties* (when they have meaning) established by the authors in [8] for C^r-manifolds with corners modeled on Banach spaces.

References

[1] J. Cerf: Topologie de certains espaces de plongements (*Bull. Soc. Math. France, 89 (1961) 227-380*)

[2] A. Douady: Variétés à bord anguleux et voisinages tubulaires, théorèmes d'isotopie et recollement. In: Séminaire Henri Cartan 1961/62, Exposé 1 (Secrétariat Math., París, 1961/1962)

[3] A. Frölicher and A. Kriegl: *Linear Spaces and Differentiation Theory* (Chichester and New York: John Wiley & Sons, 1988)

[4] H. Jarchow: *Locally Convex Spaces* (Stuttgart: B. G. Teubner, 1981)

[5] J.L. Kelley and I. Namioka: *Linear Topological Spaces* (Princeton: Van Nostrand, 1963)

[6] G. Köthe: *Topological Vector Spaces I* (Berlin: Springer-Verlag, 1969)

[7] A. Kriegl and P. W. Michor: *The Convenient Setting of Global Analysis* (Providence, R. I., A.M.S., 1997)

[8] J. Margalef-Roig and E. Outerelo Domínguez: *Differential Topology* (Amsterdam: North-Holland, 1992)

[9] J. Margalef-Roig and E. Outerelo Domínguez: Topology of Manifolds with Corners. In: Handbook of Global Analysis. D. Krupka and D. Saunders (Eds.) (Elsevier, 2007), 985-1035.

[10] J. Pradines: A convenient Category for Manifolds with Edges and Corners (Conference: *Geometry and Topology of Manifolds, Lödz, 2004*)

Normality on Topological Groups

Elena MARTÍN-PEINADOR

Departamento de Geometría y Topología
Facultad de Ciencias Matemáticas
Universidad Complutense de Madrid
E-28040 Madrid, Spain
peinador@mat.ucm.es

Dedicated to Professor Juan Tarrés on the occasion of his 65^{th} birthday.

Mathematics is, like music, worth doing for its own sake, P. Hilton.
(The Mathematical Component of the Good Education [9])

ABSTRACT

It is a well known fact that every topological group which satisfies a mild separation axiom like being T_0, is automatically Hausdorff and completely regular, thus, a Tychonoff space. Further separation axioms do not hold in general. For instance, the topological product of uncountable many copies of the discrete group of integer numbers, say $\mathbb{Z}^{\mathbb{R}}$ is not normal. Clearly it is a topological Abelian Hausdorff group, with the operation defined pointwise and the product topology τ. With this example in mind, one can ask, are there "many non-normal" groups? Markov asked in 1945 wether every uncountable abstract group admits a non-normal group topology. Van Douwen in 1990 asked if every Abelian group endowed with the weak topology corresponding to the family of all its homomorphisms in the unit circle of the complex plane should be normal. Here we prove that the above group $\mathbb{Z}^{\mathbb{R}}$ endowed with its Bohr topology τ_b is non-normal either, and obtain that all group topologies on $\mathbb{Z}^{\mathbb{R}}$ which lie between τ_b and the original one τ are also non-normal. In fact, every compatible topology for this group lacks normality and we raise the general question about the "normality behaviour" of compatible group topologies.

Key words: Precompact group, normal topological group, Bohr topology, compatible topology, duality.

2010 Mathematics Subject Classification: 54H11, 22D35, 22A10.

1. Introduction, Notation and Auxiliary Results

A topological group is a triple $(G, \cdot, \tau)$ formed by a set G, a binary operation $\cdot$ which provides G with a group structure and a topology τ on G such that the mappings $\varsigma : G \times G \to G$ and $\iota : G \to G$ defined by $\varsigma(x, y) = x \cdot y$ and $\iota(x) = x^{-1}$ are

The author acknowledges support of the MICINN of Spain, grant MTM2009-14409-C01-02.

continuous with respect to τ on G and the product topology $\tau \times \tau$ on $G \times G$. It is a common practice to write $x + y$ or xy instead of $x \cdot y$, and to write just G to denote a group or a topological group. Any abstract group endowed with the discrete topology is a topological group, and emblematic examples of topological groups are the real numbers $\mathbb{R}$ with ordinary addition and the usual euclidean topology $(\mathbb{R}, +, \tau_u)$, the complex numbers modulus one $\mathbb{T}$, with the ordinary complex multiplication and the topology induced by the euclidean in $\mathbb{C}$. The latter has an important role in the framework of Abelian groups: in fact, $\mathbb{T}$ is the dualizing object for the Pontryagin duality theory. If G is an Abelian group, every homomorphism from G into $\mathbb{T}$ is called a character and the set of all characters $Hom(G, \mathbb{T})$ has a group structure with respect to the pointwise multiplication, namely for $\phi, \varphi \in Hom(G, \mathbb{T})$, $(\phi\varphi)(x) = \phi(x)\varphi(x)$ for all $x \in G$. If G is an Abelian topological group, we will use the symbol $G^\wedge := CHom(G, \mathbb{T})$ to denote the group of all continuous characters of G.

Topological groups constitute a well behaved subclass of topological spaces. Roughly speaking, the algebraic structure helps the topology giving for free some properties. A well known instance of this effect (besides that mentioned in the abstract) is the Birkhoff-Kakutani Theorem, which states that every first countable Hausdorff topological group is metrizable. This does not hold for topological spaces as the Sorgenfrey line $\mathbb{S}$ shows, and consequently it can be asserted that $\mathbb{S}$ does not admit a topological group structure. A huge, impressive treatise concerning the interaction between Algebra and Topology [1] has been recently published. In this line we shall deal mainly with normality of Abelian topological groups. In the sequel we assume that the groups are Hausdorff. We recall first that a topological space X is normal if every pair of disjoint closed sets can be separated by disjoint open sets. The importance of normal spaces is stressed because of Tietze's Theorem, which places normal spaces as the adequate class where continuous real functions defined on closed subsets can be extended to the whole space.

2. Some classes of normal topological groups

(1) $\mathfrak{C}$ (Compact Hausdorff topological groups). We remark that $\mathbb{T}$, $\mathbb{T}^\alpha$ for any cardinal number α are distinguished members of $\mathfrak{C}$.

(2) $\mathfrak{M}$ (Metrizable topological groups). Clearly $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}^\mathbb{N}$ are in $\mathfrak{M}$.

(3) Countable groups endowed with any Hausdorff group topology. For instance $\mathbb{Z}$ endowed with the p-adic topology is normal. Other groups topologies on $\mathbb{Z}$ have been recently presented in [2]. A consequence is that any monothetic group contains a dense normal subgroup.

(4) Locally compact Hausdorff groups.

Observe that the classes given in (1) and (2) are normal independently of the group structure, since the property holds for topological spaces. However, countable (or locally compact) Hausdorff spaces need not be normal. Thus, the algebraic structure plays some role in the classes mentioned in (3) and (4). Concerning (3), the normality follows from the fact that Hausdorff implies regularity for a group topology, and regular + Lindelöf $\Rightarrow$ normal, even for topological spaces. (4) is proved e.g. in [8, 8.13].

3. The Bohr topology for Abelian groups

For an abstract Abelian group G, there is a topology very related with the algebraic structure which is called called the Bohr topology. It is the weak topology corresponding to the family of all its characters, $Hom(G, \mathbb{T})$. In the seminal paper [6], Van Douwen uses the symbol $G_\natural$ to denote an Abelian group G endowed with the Bohr topology and he studies many important properties of topological groups of this nature. Observe that $Hom(G, \mathbb{T})$ separates the points of G (see e.g. [10]), and therefore, $G_\natural$ can be isomorphically embedded as a subgroup of the product $\mathbb{T}^{Hom(G,\mathbb{T})}$. Thus $G_\natural$ is a precompact group, and the closure of its image in $\mathbb{T}^{Hom(G,\mathbb{T})}$ is called the Bohr compactification of $G_\natural$, and denoted by bG. It is asked in [6] (Question (4.10)) if for an uncountable Abelian group G, $G_\natural$ is normal. The author already knew that such a group $G_\natural$ is not paracompact, and provided the tools so that finally in [14] a negative answer was given. Summarizing all these results, we present the following:

Theorem 3.1. *For an uncountable Abelian group G, $G_\natural$ has the following properties:*

(i) $G_\natural$ *is* 0*-dimensional.*

(ii) $G_\natural$ *is not a Baire space.*

(iii) Every infinite subset $A \subset G_\natural$ has a relative discrete subset D with $|D| = |A|$ that is C^*-embedded in the Bohr compactification bG.

(iv) $G_\natural$ *is not normal.*

(v) No nontrivial sequence in $G_\natural$ converges to a point in bG. In other words, $G_\natural$ is sequentially closed in bG.

Proof. (i) and (ii) are respectively [6, 4.8 and 4.7 b)]. (iii) and (v) are [6, 1.1.3 (a) and (c)]. (iv) is proved in [14]. A more detailed proof is offered in [1], where important steps taken from [7] are also explained. Item (i) was taken further by Shakmatov in [11] where he proves that it is not strongly 0-dimensional either. For (i) and (v) uncountability of G is not needed. □

The notions of the Bohr topology and the Bohr compactification can be also defined for topological groups (and the previous notions $G_\natural$ and bG would correspond for an Abelian group G endowed with the discrete topology). Let (G, τ) be an Abelian topological group. The weak topology on G with respect to the family of its continuous characters $G^\wedge$, is called the *Bohr topology* for the topological group (G, τ). We shall denote it by τ_b.

If $G^\wedge$ separates the points of G, then the canonical mapping ω from (G, τ_b) into $\mathbb{T}^{G^\wedge}$ defined by $g \mapsto (\phi(g))_{\phi \in G^\wedge}$ is a topological embedding, which is also an isomorphism onto its image. The name Bohr compactification and the symbol bG is used to denote the closure of $\omega(G)$: it is a compactification of (G, τ_b). Although the term "Bohr compactification" and the symbol bG are also referred to the group (G, τ), it is not a compactification of the latter in the usual sense: in fact, ω is only a **continuous** isomorphic embedding from (G, τ) into bG.

The groups (G, τ) and (G, τ_b) admit the same continuous characters, and clearly this also happens with (G, ν) whenever ν is a group topology lying between τ_b and τ.

A group topology ν on G is called *compatible for* (G,τ) if $(G,\nu)^\wedge = (G,\tau)^\wedge =: G^\wedge$, as abstract groups. The set of all compatible topologies is referred to as the duality $(G, G^\wedge)$. Clearly τ_b is the bottom element for $(G, G^\wedge)$. In [3] compatible topologies are studied in an even more general context.

The constraint of "separating points", mentioned above, is by no means trivial! A topological group is said to be MAP (maximally almost periodic) if the continuous characters of G separate the points of G. The very deep Theorem of Peter-Weyl asserts that a compact Hausdorff Abelian group G is MAP. It is easy to derive from it that a locally compact Hausdorff Abelian group is also MAP, [10]. In this respect we claim (the proof is easy) that the product of MAP-groups is a MAP-group.

Lemma 3.2. *Let $\{G_\iota, \iota \in J\}$ be a family of MAP-groups. Then $G := \prod_{\iota\in J}$ is also a MAP-group.*

4. A topological group which does not admit normal compatible topologies

Before introducing the particular group we are going to deal with, we do some historical considerations. In the paper of Stone [12] where he proves his famous theorem that all metrizable spaces are paracompact, he also proves that the topological space $X := \mathbb{N}^{\mathbb{R}}$ is not normal. To this end he defines two closed disjoint subsets C_1 and C_2 such that every open set U containing C_1 must contain also some element of C_2. Therefore two open sets containing respectively C_1 and C_2 must intersect. This example can be easily parallelized in the space $(\mathbb{Z}^{\mathbb{R}}, \tau)$, and since the latter is a topological group, we have an example of a non-normal topological group. We can consider the Bohr topology for $G := (\mathbb{Z}^{\mathbb{R}}, \tau)$, that is, the weak topology τ_b corresponding to the family of all continuous characters on G, and we shall prove that $\mathbb{Z}^{\mathbb{R}}$ endowed with this weaker topology is neither a normal group.

Theorem 4.1. *Let $G := (\mathbb{Z}^{\mathbb{R}}, \tau)$, where each factor carries the discrete topology and τ is the product topology and let τ_b be the Bohr topology for G. The group $X := (\mathbb{Z}^{\mathbb{R}}, \tau_b)$ is not normal.*

Proof. Let us prove that X is separable and contains a closed discrete subset Y of continuum cardinality $\mathfrak{c}$. Then, applying Jones Lemma (see e.g. [15, 15.2]) we will have the non-normality of X.

Separability of G follows from Hewitt-Marczewski-Pondiczerny Theorem [15, 16.4 c)], which states that the product of $\mathfrak{c}$-many separable spaces is separable. Since $\tau_b < \tau$, separability of G implies the same property for X.

In order to find a "big" discrete subset, decompose the index set $\mathbb{R}$ into a disjoint union of countable sets. For instance, if $\{j_\alpha, \alpha \in A\}$ is a Hamel basis of $\mathbb{R}$ as vector space over $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R} = \bigcup_{\alpha\in A} \mathbb{Q}j_\alpha$ and clearly $|A| = \mathfrak{c}$. Write $M_\alpha := (\mathbb{Q}\setminus\{0\})j_\alpha$. Now $\mathbb{R}$ is a disjoint union of the sets M_α and $\{0\}$. The latter can be inserted in one of the sets M_α, say $M_\beta = \mathbb{Q}j_\beta$ for a fixed $\beta \in A$. Now we claim that $\mathbb{R} = \bigsqcup_{\alpha\in A} M_\alpha$ is written as an uncountable disjoint union of countable sets.

For every $\alpha \in A$ define $y_\alpha \in \mathbb{Z}^{\mathbb{R}}$ as the element whose coordinates, defined through the canonical projections $\pi_j, j \in \mathbb{R}$, are $\pi_j(y_\alpha) = 1$ whenever $j \in M_\alpha$ and 0 otherwise. So the elements of $Y := \{y_\alpha, \alpha \in A\}$ have countable many coordinates which are

equal to 1 and uncountable many which are 0. Let us prove that Y is closed and discrete in X.

In order to see that Y is discrete, it is enough to define a continuous character in G which takes the value -1 in y_α and 1 in y_β for every $\beta \in A \setminus \{\alpha\}$. Consider first $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{T}$, the character on $\mathbb{Z}$ such that $\varphi(n) = e^{\pi n i}, \forall n \in \mathbb{Z}$. It gives rise to characters on $\mathbb{Z}^{\mathbb{R}}$, just composing with the projections, say $\varphi\pi_j$, for all $j \in \mathbb{R}$. Clearly, if we take $j_0 \in M_\alpha$, $\varphi\pi_{j_0}(y_\alpha) = -1$, while $\varphi\pi_{j_0}(y_\beta) = 1$, for all $\beta \neq \alpha$. Thus the subset Y is discrete.

Now we prove that Y is closed. To this end, let $x \in \mathbb{Z}^{\mathbb{R}} \setminus Y$. Then there exist $j, k \in M_\alpha$ (for some $\alpha \in A$) such that $\pi_j(x) \neq \pi_k(x)$, or else there exists $j \in \mathbb{R}$ such that $\pi_j(x) = x_j \notin \{0, 1\}$. In the first case, a neighborhood of x can be taken just as $V := (\varphi\pi_j)^{-1}(I_1) \cap (\varphi\pi_k)^{-1}(I_2)$, where I_1 and I_2 are disjoint arcs in $\mathbb{T}$, centered respectively in $\varphi\pi_j(x)$ and $\varphi\pi_k(x)$. Now we have $V \cap Y = \emptyset$. For the second case, let $\zeta : \mathbb{Z} \to \mathbb{T}$ be a character such that $1 \neq \zeta(x_j) \neq \zeta(1)$. Clearly $\zeta\pi_j$ is a character on $\mathbb{Z}^{\mathbb{R}}$ which separates Y and x in the following sense: there exists an arc I in $\mathbb{T}$, centered at $\zeta(x_j)$, such that $(\zeta\pi_j)^{-1}(I) \cap Y = \emptyset$, being $(\zeta\pi_j)^{-1}(I)$ a neighborhood of x in X.

Summarizing, we have obtained a τ_b-closed discrete subset Y, with $|Y| = \mathfrak{c}$, which allows us to claim that X is non-normal. □

Observe that a closed discrete subset of a topological space (X, τ) is also closed and discrete for any topology τ' on X such that $\tau \leq \tau'$. Next, we use this fact to prove that all group topologies compatible with the duality $(G, G^\wedge)$, for G as in the previous Theorem, are nonnormal. Recall that a topological space (X, τ) is *collectionwise Hausdorff* if for every closed discrete subset $Y \subset X$, there is a family of pairwise disjoint open subsets of X, each containing a point of Y.

Corollary 4.2. *If μ denotes a group topology in $\mathbb{Z}^{\mathbb{R}}$ such that $\tau_b < \mu \leq \tau$, then $X_\mu := (\mathbb{Z}^{\mathbb{R}}, \mu)$ is a nonnormal topological group. The group X_μ is neither collectionwise Hausdorff.*

Proof. The subset Y constructed in the proof of the previous Theorem is also μ-closed and discrete, for any topology μ greater than τ_b. On the other hand, the argument proving the separability of X can be used to obtain the same property for X_μ. Thus X_μ is nonnormal. This provides an alternative proof of the fact that $(\mathbb{Z}^{\mathbb{R}}, \tau)$ is not normal.

For the last part take into account that the product $(\mathbb{Z}^{\mathbb{R}}, \tau)$ satisfies the countable chain condition, briefly ccc (as a product of σ-compact groups [13, 5.20]). Clearly, $\mu \leq \tau$ implies that also $(\mathbb{Z}^{\mathbb{R}}, \mu)$ has the ccc. Since Y is μ-closed discrete and $|Y| = \mathfrak{c}$, the claim follows. □

Next, we obtain the example mentioned in the title of this section.

Theorem 4.3. *Let $G := (\mathbb{Z}^{\mathbb{R}}, \tau)$, where each factor carries the discrete topology and τ is the product topology. Then, every topology compatible with the duality $(G, G^\wedge)$ is nonnormal.*

Proof. By the previous corollary we have that there are no **compatible normal** topologies for G weaker than τ. On the other hand τ is the greatest topology compatible for the duality $(G, G^\wedge)$. In fact, since the product $G = \mathbb{Z}^{\mathbb{R}}$ is a separable Baire

space, by [3, 1.6] G is a g-barrelled group. Applying [3, 4.6 (e)], we conclude that there do not exist topologies strictly finer than τ giving rise to the same dual group $G^\wedge$. □

In a context where Jones Lemma cannot be used, is still true the result of the Corollary 4.2? This can be formulated as:

Question 4.4. *(a) Let (G,τ) be a nonnormal topological group such that G endowed with the Bohr topology is neither normal. Are all topologies on G which admit the same dual group $G^\wedge$ also nonnormal?*

(b) The same question of (a) changing nonnormal, by normal.

(c) In [5] it is presented an example of a metrizable complete group (G,τ) such that the Bohr topology on τ_b is also metrizable. Therefore (G,τ) and (G,τ_b) are both normal. Are normal (or even metrizable) all the topologies between τ and τ_b?

We are also interested in which different precompact Hausdorff topologies on an abstract Abelian group G are normal. Precompact Hausdorff group topologies on G correspond one to one with dense subgroups of $Hom(G,\mathbb{T})$, being the latter endowed with the pointwise convergence topology. In fact, every precompact group topology ν on G is completely determined as the weak topology on G corresponding to $(G,\nu)^\wedge$ [4]. On the other hand $(G,\nu)^\wedge$ is dense in $Hom(G,\mathbb{T})$ with respect to the pointwise convergence topology if and only if $(G,\nu)^\wedge$ separates the points of G, which in turn is a necessary and sufficient condition for (G,ν) to be a Hausdorff group. The weak topology on G corresponding to the whole group $Hom(G,\mathbb{T})$ is also called in the Literature the maximal precompact topology on G. It is seldom normal: only if G is a countable group, $G_\natural$ is normal, as seen in Theorem 3.1. Leaning on this result, Trigos also proved the following [14]:

Proposition 4.5. *Let (G,τ) be a locally compact Abelian group. Then (G,τ_b) is normal iff (G,τ) is σ-compact.*

Let us clarify the picture with a well known topological group.

Example 4.6. Let $(\mathbb{R},\tau)$ be the group of the real numbers with its usual topology. Then $\mathbb{R}_b := (\mathbb{R},\tau_b)$ is normal (since Proposition 4.5 can be applied) but $\mathbb{R}_\natural$ is not normal (Theorem 3.1).

Since $\mathbb{R}_b$ can be embedded as a subgroup of $\mathbb{T}^{\mathbb{R}}$ (the exponent here stands for the dual of $(\mathbb{R},\tau)$ which can be identified again with $\mathbb{R}$), while $\mathbb{R}_\natural$ can be embedded as a subgroup of $T^{Hom(\mathbb{R},\mathbb{T})}$, being the first one normal and the second one nonnormal, an explanation should be in order.

Question 4.7. *Which are the normal nonclosed subgroups of $\mathbb{T}^\alpha$, for any cardinal α?*

Summarizing, the possible cases of normality for the Bohr topology of an Abelian topological group (G,τ) and for the corresponding maximal precompact topology, in the examples which have so far appeared are:

- (G,τ), (G,τ_b) and $G_\natural$ are nonnormal. (G as in Theorem 4.1).

- (G,τ) and (G,τ_b) are normal but $G_\natural$ is not normal. ((G,τ) a locally compact, σ-compact group).
- (G,τ) normal, but (G,τ_b) and $G_\natural$ nonnormal. ((G,τ) a locally compact, non σ-compact group).
- (G,τ), (G,τ_b) and $G_\natural$ are all normal. (Any countable Hausdorff (G,τ)).

In the second family the assumption "locally compact" can be relaxed: it is enough to take (G,τ) as a σ-compact, uncountable group. In that case it is already Lindelöf (therefore normal), and the same happens to the weaker topology τ_b.

We do not have yet an example of a nonnormal MAP group whose corresponding Bohr topology is normal.

References

[1] A. V. Arhangel'skii and M. G.Tkachenko, *Topological Groups and Related Structures*, Atlantis Press/World Scientific, Amsterdam-Paris, 2008.

[2] L. Aussenhofer and D. de la Barrera, *Linear topologies on $\mathbb{Z}$ are not Mackey topologies*, J. Pure Appl. Algebra 216 (2012) 1340–1347.

[3] M. J. Chasco, E. Martín-Peinador and V. Tarieladze, *On Mackey topology for groups*, Studia Math. 132 (3) (1999) 257–284.

[4] W. W. Comfort and K. A. Ross, *Topologies induced by groups of characters*, Fund. Math. 55 (1964) 283–291.

[5] D. Dikranjan, E. Martín-Peinador and V. Tarieladze, *Group valued null sequences and metrizable non-Mackey groups*, Forum Math. DOI 10.1515/ forum-2011–0099.

[6] E. K. van Douwen, *The maximal totally bounded group topology on G and the biggest minimal G-space, for abelian groups G*, Topology and Appl. 34 (1990) 69–91.

[7] K.P. Hart and J van Mill, *Discrete sets and the maximal totally bounded group topology*, J. Pure Appl. Algebra 70 (1991), 73–80.

[8] E. Hewitt and K. Ross, *Abstract Harmonic Analysis I*, Die Gründlehren der Mathematischen Wissenschaften 115. Springer Verlag (1963).

[9] P. Hilton, *The Mathematical Component of the Good Education*, Miscellanea Mathematica Springer-Verlag 1991.

[10] S. Morris, *Pontryagin Duality and the Structure of Locally Compact Abelian Groups*, London Mathematical Society Lecture Note Series, No. 29, 1977.

[11] D. Shakmatov, *Imbeddings into topological groups preserving dimensions*, Topology Appl. 36 (2) (1990) 181–204.

[12] A. H. Stone, *Paracompact and product spaces*, Bull. Amer. Math. Soc. 54 (1948), 977–982.

[13] M. Tkachenko, L.M.Villegas, C.Hernández and O.J.Rendón, *Grupos Topológicos*, Universidad Autónoma Metropolitana 1997.

[14] F. J. Trigos-Arrieta, *Every uncountable Abelian group admits a nonnormal group topology*, Proc. Amer. Math. Soc., 122, n^o 3, (1994), 907–909.

[15] S. Willard, *General Topology*, Addison-Wesley, 1968.

Branched folded coverings and 3-manifolds

José María MONTESINOS-AMILIBIA

Departamento de Geometría y Topología,
Facultad de Ciencias Matemáticas
Universidad Complutense de Madrid
E-28040, Spain
montesin@mat.ucm.es

Dedicado a mi condiscípulo y amigo Juan Tarrés Freixenet con agradecimiento y afecto.

ABSTRACT

Under the framework of Fox spreads and its completions a theory that generalizes coverings (folding covering theory) and a theory that generalizes branched coverings (branched folding theory) is defined and some properties are proved. Two applications to 3-manifold theory are given. A problem is stated.

Key words: knots, links, 3-manifolds, branched coverings, foldings, strings, spreads, Cantor sets.

2010 Mathematics Subject Classification: 14E20, 57M15, 57M25, 57M30, 57M35, 57N05, 57N10, 57Q45.

1. Introduction

This is mainly a didactical paper and, except for the results of the last section, there is no claim at all for originality. Perhaps the only original thing in it is just the definition of folding and branched folding. These concepts generalize, respectively, coverings and branched coverings (see [25] and [24]).

After the work of Thurston, and also the early work of Poincaré, Bianchi and others, it is clear that it is not necessary to distinguish between groups acting freely and those acting with fixed points. All of them give rise to quotient spaces, orbifolds, that generalize the concept of manifold. As a consequence it is convenient to generalize the concept of covering and branched covering and this is the content of this paper, which resumes my lectures at the Universidad Complutense along several years.

As an example take the 3-sphere S^3. There are several involutions all of them having an m-sphere Σ^m of fixed points.

If $m = 1$ the quotient space is S^3 and the induced identification map $f : S^3 \to S^3_1$ is the standard 2-fold covering branched over the trivial knot $f(\Sigma^1) = \Sigma^1_1$. The restriction g of f to $S^3 \backslash \Sigma^1$ is an ordinary covering over $S^3_1 \backslash \Sigma^1_1$. Moreover the composition of g and the natural inclusion $j : S^3_1 \backslash \Sigma^1_1 \to S^3_1$ is a spread

$$j \circ g : S^3 \backslash \Sigma^1 \to S^3_1$$

The author has been supported by MEC-MTM-2009-07030.

in Fox sense, and the original map f is its Fox completion (completing the missing points over Σ^1_1). The important point here that allows the Fox completion is that Σ^1_1 fails to separate S^3_1. Similarly if we take the reflection of S^3 across a zero dimensional sphere Σ^0. The quotient space is the suspension $S(\mathbb{R}P^2)$ of the projective plane $\mathbb{R}P^2$. The the induced identification map $f : S^3 \to S(\mathbb{R}P^2)$ is a 2-fold orbifold covering and the topological underlying map f is a 2-fold covering branched over the suspension 0-sphere, denoted S^0. The restriction g of f to $S^3\backslash\Sigma^0$ is an ordinary covering over $S(\mathbb{R}P^2)\backslash S^0$. The composition of g and the natural inclusion $j : S(\mathbb{R}P^2)\backslash S^0 \to S(\mathbb{R}P^2)$ is a spread

$$j \circ g : S^3\backslash\Sigma^1 \to S(\mathbb{R}P^2)$$

in Fox sense, and the original map f is its Fox completion (completing the missing points over S^0). Here again S^0 fails to separate $S(\mathbb{R}P^2)$.

If we take the reflection of S^3 across a two dimensional sphere Σ^2 the quotient space is a 3-ball B^3 (orbifold with mirror ∂B^3) and the the induced identification map $f : S^3 \to B^3$ is a 2-fold orbifold covering. The underlying topological map is what I call a folding and generalizes the concept of covering, because here there is no branching set. The map f is a complete spread in Fox sense. Note that ∂B^3 fails to separate B^3.

Finally take the action of the Klein group G of order four, generated by both the reflection on the equator Σ^2 of S^3 and the reflection through the poles Σ^0 of S^3. The the quotient space is the cone $C(\mathbb{R}P^2)$ over the projective plane and the induced identification map $f : S^3 \to C(\mathbb{R}P^2)$ is a 4-fold orbifold covering. The underlying topological map is what I call a branched folding and generalizes the concept of branched covering. Here we have a mixture of folding and branched covering. The restriction g' of f to each component of $S^3\backslash(\Sigma^0 \cup \Sigma^2)$ is an ordinary covering. While the restriction g of f to $S^3\backslash(\Sigma^0)$ is a folding over $C(\mathbb{R}P^2)\backslash\{x\}$, where x denotes the cone apex. Moreover the composition of g and the natural inclusion

$$j : C(\mathbb{R}P^2)\backslash\{x\} \to C(\mathbb{R}P^2)$$

is a spread

$$j \circ g : S^3\backslash\Sigma^0 \to C(\mathbb{R}P^2)$$

in Fox sense, and the original map f is its Fox completion (completing the missing points over x). Note that the branching set $\{x\}$ fails to separate $C(\mathbb{R}P^2)$.

Therefore we need a theory that generalizes coverings (folding covering theory) and a theory that generalizes branched coverings (branched folding theory). Fortunately this can be done under the framework of Fox spreads and its completions.

I thank Professor Antonio Costa for his interest in this topic. He contributed to the theory with the early paper [3]. Also I thank Professor Raquel Díaz who being a student enhanced my lectures with her detailed notes.

2. Coverings and foldings

Let $g : Y \to Z$ be a map (continuous). An open nbd W of $z \in Z$ is called *elementary* if $z \in g(Y)$ and g maps each (connected) component of $g^{-1}(W)$ homeomorphically onto W.

A *covering* is a map $g : Y \to Z$, where Y and Z are connected, locally connected and each $z \in Z$ possesses an elementary nbd.

A metrizable topological space M is a (topological) *n-manifold* iff every point $x \in M$ possesses a *parametrization* $h : (X, o) \to (U, x)$, where U is an open nbd of x in M, X is either R^n or

$$R^n_+ := \{(x_1, ..., x_n) \in R^n : x_1 \geq 0\},$$

h is a homeomorphism, $o = (0, ..., 0)$, and $h(o) = x$. A point $x \in M$ belongs to the *interior* $IntM$ of M if x has a nbd homeomorphic to R^n. Otherwise, it belongs to the *boundary* ∂M of M. The n-manifold M is called *unbounded* (resp. *bounded*) iff ∂M is empty (resp. non-empty). The boundary of M is an unbounded $(n-1)$-manifold. If N is a topological n-manifold ∂N there is an open nbd U of ∂N in N and a homeomorphism $h : \partial N \times [0, 1) \to U$ such that $h((x, 0)) = x$, for each $x \in \partial N$. Such U is called a *collar*.

The following definition formalizes the idea of folding a piece of paper.

Definition 2.1. A map $g : M \to N$ between (bounded or unbounded) connected n-manifolds is a *folding* iff every point $x \in N$ possesses a *coordinate nbd* U. That is, if $x \in IntN$ the nbd U is just an elementary nbd, and if $x \in \partial N$ there is a parametrization $h : (R^n_+, o) \to (U, x)$ such that if U' is an arbitrary component of $g^{-1}(U)$ then $g(U') = U$ and, if $g|U' : U' \to U$ is not a homeomorphism, there exists a parametrization $h' : R^n \to U'$ such that

$$h^{-1} \circ g \circ h' : R^n \to R^n_+$$

is the map $(x_1, ..., x_{n-1}, x_n) \longmapsto (x_1, ..., x_{n-1}, |x_n|)$.

By definition a folding is an open map.

The points $x \in \partial N$ possessing an elementary nbd in N form obviously an open subset of ∂N. The points $x \in \partial N$ not having an elementary nbd form, according with the definition of folding, an open subset of ∂N. Call these last points *mirror points* and denote by $\partial_m N$ their union. Then $\partial_m N$ is the union of a set of connected components of ∂N. Call $\partial_m N$ the *mirror* of N. Note that if $\partial_m N$ is empty g is a covering.

Let $x \in \partial_m N$. Then a point $y = g^{-1}(x)$ possessing a nbd U' such that $g|U' : U' \to U$ is a homeomorphism is called a *mirror point in* M. The set $\partial_m M$ of mirror points of M is called the *mirror* M: it is the union of a set of connected components of ∂M. Note that $\partial_m M = \partial M \cap g^{-1}(\partial_m N)$.

Remark 2.2. A folding $g : M \to N$ where $\partial_m M$ is empty is just an ordinary covering between manifolds.

Exercise 2.3. *Fold the segment* $M = [-3, 3]$ *as a carpenter rule around the hinges* $\{-1\}$ *and* $\{1\}$ *and project it onto the segment* $N = [-1, 1]$. *This is a folding between* 1*-manifolds. The mirror boundaries are* $\partial_m M = \partial M$ *and* $\partial_m N = \partial N$.

Example 2.4. Let M be a torus represented by a rombus with opposite sides identified by translation. The reflection through a diagonal of M defines a folding $g : M \to N$ where N is a Möbius band and $\partial_m N = \partial N$.

Example 2.5. Let C be an unbounded $(n-1)$-manifold and let $q : C' \to C$ be an arbitrary covering. The map

$$g : C' \times (-1,1) \to C \times [0,1),$$

defined by $g(x,t) = (q(x), |t|)$ is a folding.

Example 2.6 (The double of a bounded manifold). Let N be a manifold with mirror $\partial_m N$. Form $N \times \{0,1\}$ and identify $(x,0)$ with $(x,1)$ for all $x \in \partial_m N$. Endow the resulting set $D_{\partial_m N}(M)$ with the topology of the identification. This is a manifold, called the *double of N along its mirror*. The map $g : D_{\partial_m N}(M) \to N$, defined by $g(x,i) = x$, for $i = 1,2$, is a folding. The mirror of $D_{\partial_m N}(M)$is empty.

Example 2.7. Let N be the Möbius band with mirror ∂N. The double of N is the Klein bottle.

Theorem 2.8. *Let $g : M \to N$ be a folding. Let the space $\{+,-\}$ have the discrete topology, Assume N is oriented. Then M is an orientable manifold iff there is a (continuous) map*

$$\varepsilon : M \backslash g^{-1}(\partial_m N) \to \{+,-\}$$

such that the points of any two connected components with common adherent points have different image.

Proof. If M is orientable select a concrete orientation. Then each component C of $M \backslash g^{-1}(\partial_m N)$ has two different orientation: one is the induced orientation as a submanifold of M, the other orientation is induced by g. Assign to C the sign $+$ (resp. $-$) iff the two orientations agree (resp. disagree). Then if $x \in \overline{C_1} \cap \overline{C}_2$ there is a nbd U' of x such that $g(U')$ is a coordinate nbd U of $g(x)$. Give to U' the orientation induced as a subset of M. Then $g|_{U' \cap C_1}$ is orientation preserving iff $g|_{U' \cap C_2}$is orientation reversing. Thus if $x_i \in U' \cap C_i$ we have $\varepsilon(x_1) \neq \varepsilon(x_2)$. Conversely, assume ε exists. Assign to an arbitrary component C of $M \backslash g^{-1}(\partial_m N)$ the orientation induced by g iff $\varepsilon(C) = +$ or the opposite orientation iff $\varepsilon(C) = -$. Then M is oriented. □

Theorem 2.9. *Let $g : Y \to Z$ be a folding (resp. a covering). Let W be an open connected set of Z, and let C be any connected component of $g^{-1}(W)$. Then $g(C) = W$ and*

$$g|_C : C \to W$$

is a folding (resp. a covering).

Proof. Since Y is locally connected and $g^{-1}(W)$ is open the component C is open in Y . Since g is open $g(C)$ is open, connected and contained in W. Let

$$z \in \overline{g(C)} \cap W.$$

Let V be a coordinate (resp. elementary) nbd of z contained in W. Since

$$V \cap g(C) \neq \emptyset,$$

there exists $x \in C$ such that $g(x) \in V$. Let D be the x-component of $g^{-1}(V)$. Then $V \subset W$ implies $D \subset C$. Since V is coordinate (resp. elementary):

$$g(D) = V \subset g(C).$$

Hence $z \in V$ lies in $g(C)$. Thus $g(C)$ is clopen in W. Since W is connected, $g(C) = W$. This proves the first part.

To see that

$$h = g|_C : C \to W$$

is a folding (resp. covering), take a coordinate (resp. elementary) nbd (with respect to g) $V \subset W$ of a point $z \in W$. Let D be any component of $h^{-1}(V)$. Since $V \subset W$, D is a component of $g^{-1}(V)$ and $D \subset C$. Then

$$h|_D = (g|_C)|_D = g|_D.$$

Thus V is a coordinate (resp. elementary) nbd (with respect to h) of the point $z \in W$. □

The definition of folding suggests that the theory of foldings is analogous to the theory of coverings. To substantiate this claim we need a proper definition ([12]) of the *fundamental group* $\pi_1^m(N, \partial_m N)$ *of* N *with mirror* $\partial_m N$. (Almost always $\partial_m N = \partial N$. In these cases we will write $\pi_1^m(N)$.)

Let N be a connected manifold with mirror $\partial_m N$. Let $*$ be some base point in $IntN$. We say that a loop $\gamma : [0,1] \to N$ with $\gamma(0) = \gamma(1) = *$ is *transversal to* $\partial_m N$ if either $\gamma([0,1]) \cap \partial_m N$ is empty or $\gamma(t_i) \in \partial_m N$ for only finitely many $t_1, ..., t_k$. Moreover if $\gamma(t_0) \in \partial_m N$ there is a parametrization

$$h : (R^n_+, 0) \to (U, \gamma(t_0))$$

and an $\varepsilon > 0$ such that

$$h^{-1} \circ (\gamma|[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]) : [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \to R^n_+$$

is the map $t \longmapsto (0, ..., 0, |-t + t_0|)$. We will say that $\gamma([t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon])$ is a *pin*.

A homotopy

$$F : [0,1] \times [0,1] \to N$$

such that

$$F_0 = \gamma, F_1 = \gamma', F(\{1\} \times [0,1]) = F(\{0\} \times [0,1]) = *,$$

will be called *transversal to* $\partial_m N$ if F_t is transversal to $\partial_m N$ for all $t \in [0,1]$, and if $\gamma(t_0) \in \partial_m N$ then

$$F(\{t_0\} \times [0,1]) \subset \partial_m N.$$

Let $\gamma : [0,1] \to N$ be transversal to $\partial_m N$. Two pins $\gamma([t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon])$ and $\gamma([t_1 - \varepsilon', t_1 + \varepsilon'])$ are called *consecutive* iff there is no pin in $\gamma((t_0, t_1))$ and $\gamma([t_0 - \varepsilon, t_1 + \varepsilon'])$ lies in a nbd U homeomorphic to R^n_+. Define a loop γ' which is the composition of $\gamma|[0, t_0 - \varepsilon]$ with $\gamma|[t_0 + \varepsilon, t_1 - \varepsilon']$ and with $\gamma|[t_1 + \varepsilon', 1]$. Transition from γ to γ' (resp. γ' to γ) will be called *cancelation* (resp. *addition*) *of consecutive pins.*

Two transversal loops γ and γ' will be called *rel.*$\partial_m N$ *homotopic* if it possible to pass from γ to γ' by a finite application of transversal homotopies and cancelations and additions of consecutive pins.

This definition is taylored to ensure that the projection of a rel. ∂ homotopy between two paths α, α' connecting $(1, 0, ..., 0)$ to $(-1, 0, ..., 0)$ in R^n and transversal

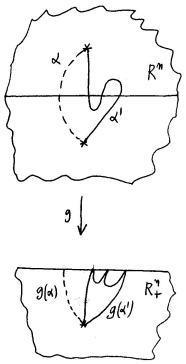


Figure 1: Projecting a homotopy

to $R^{n-1} \times \{0\}$ (see Figure 1) is a rel. ∂_m homotopy between the loops $g(\alpha)$, $g(\alpha')$ under the (local) folding $g : R^n \to R^n_+$ given by

$$(x_1, ..., x_{n-1}, x_n) \longmapsto (x_1, ..., x_{n-1}, |x_n|).$$

Of course we can define the *fundamental group* $\pi_1^m(N, *)$ *of* N *with mirror* $\partial_m N$ as the rel. $\partial_m N$ homotopy classes of transversal loops under composition.

Let α be an arc running from $*$ to some point $p \in C$, where C is a component of $\partial_m N$. Assume that the loop $\alpha * \alpha^{-1}$ is transversal to $\partial_m N$. The rel. $\partial_m N$ homotopy class of $\alpha * \alpha^{-1}$ is called a *boundary generator*. Of course boundary generators have order two in $\pi_1^m(N)$. Define

$$f : \pi_1(C, p) \to \pi_1^m(N, *)$$

by $f([\lambda]) = [\alpha\prime * \lambda' * \alpha'^{-1}]$, where α' is a subarc of α running from $*$ to a point p' very near p and λ' is a loop based on p' and running trough $IntM$ parallel to λ (use a collar of C). Then the boundary generator defined by $\alpha * \alpha^{-1}$commutes with the elements of $f(\pi_1(C, p))$ (slide the pin of $\alpha * \alpha^{-1}$ along λ').

Then it is not difficult to see that, if $\partial_m N$ has k components $C_1, ..., C_k$, the group $\pi_1^m(N, *)$ is isomorphic to the quotient

$$(\pi_1(N, *) * Z_1 * ... * Z_k)/K,$$

where Z_i is the cyclic group of two elements generated by a boundary generator c_i of C_i and K is the subgroup normally generated by the commutators of c_i with all the elements of the image of $\pi_1(C_i, p_i)$ in $\pi_1(N, *)$ for $i = 1, ..., k$.

Example 2.10. Let (N,$\partial_w N$) be the Möbius band and its boundary. Then

$$\pi_1^m(N, *) = |x, y : x^2 = 1, xy^2 = y^2x|$$

where x is some boundary generator and y^2 generates $\pi_1(\partial N)$. The second relation says that x comes back after dragging it twice along y.

Exercise 2.11. *Let M be a connected unbounded manifold and let N be a bounded manifold. Prove that $\pi_1^m(M \times N, *)$ is isomorphic to $\pi_1(M,*) \times \pi_1^m(N,*)$.*

With these definitions it is not difficult to see that the theory of coverings can be transferred to a similar theory of foldings. To adapt the concept of path lifting to foldings we define that the lifting of the map

$$\gamma : [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \to U = R^n_+, t \longmapsto (0, ..., 0, -|t| + t_0)$$

is the map

$$\gamma' : [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \to U' = R^n, t \longmapsto (0, ..., 0, -t + t_0)$$

if

$$g|U' : U' = R^n \to U = R^n_+$$

is the map $(x_1, ..., x_{n-1}, x_n) \longmapsto (x_1, ..., x_{n-1}, |x_n|)$.

We will say that the folding $g : M \to N$ is a *h-sheeted folding* iff $\#g^{-1}(x) = h$ for (all) $x \in N \backslash \partial_m N$.

Given the folding $g : M \to N$ and the base point $* \in IntN$ we can define the *monodromy*

$$\omega : \pi_1^m(N,*) \to \Sigma_F.$$

This is a representation (homomorphism) into the symmetric group of the fiber $F = g^{-1}(*)$, that is, the group of bijections of F. Given $[\gamma] \in \pi_1^m(N,*)$, lift $\gamma : [0,1] \to N$ to $\gamma' : [0,1] \to M$ with $\gamma'(0) = p \in F$. Define $\omega([\gamma]) : F \to F$, by $\omega([\gamma])(p) = \gamma'(1) \in F$ (compare [27]).

For instance, the monodromy of the folding $g : D_{\partial_m N}(M) \to N$ is a representation $\omega : \pi_1^m(N,*) \to \Sigma_2$ sending the boundary generators to the cycle (12) and the remaining generators to (1)(2).

If $\omega : \pi_1^m(N,*) \to \Sigma_F$ is the monodromy of the folding $g : M \to N$, the set

$$\mathcal{C} = \{\omega^{-1}(Stab_p \Sigma_F) : p \in F\},$$

where $Stab_p \Sigma_F$ is the set $\{\lambda \in \Sigma_F : \lambda(p) = p\}$, is a complete class of conjugation of subgroups of $\pi_1^m(N,*)$. The group $\omega^{-1}(Stab_p \Sigma_F)$ is the image of $\pi_1^m(M,p)$ under the injective map

$$g_\# : \pi_1^m(M,p) \to \pi_1^m(N,*).$$

The class $\mathcal{C}$ (or the monodromy ω) determines g (compare [27]).

The folding g is *regular* if the class $\mathcal{C}$ has only one member (a normal subgroup), called the *folding group*. In this case the liftings of loops to the points of F either all are loops or all are (open) paths (and conversely).

The *universal folding* of N (a manifold $\widetilde{N}$ without mirror boundary) can be constructed as in the theory of coverings. Its folding group is $\{0\}$. From this construction follows the existence of the folding corresponding to a given transitive representation $\omega : \pi_1^m(N,*) \to \Sigma_F$.

Theorem 2.12. *Let N be a manifold with mirror $\partial_m N$. The universal folding of N is the universal covering of $D_{\partial_m N} N$.*

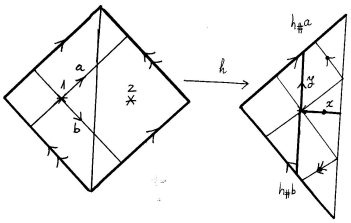


Figure 2: Folding the torus

Example 2.13. Let N be the torus $S^1 \times S^1$ minus an open 2-cell and let $\partial_m N$ be ∂N. The universal folding of N is the universal covering of the unbounded 2-manifold of genus 2. This universal covering is homeomorphic to R^2.

The group $Aut(g)$ of *automorphisms* (homeomorphism $f : M \to M$ such that $g \circ f = g$) is isomorphic to

$$\pi_1^m(N, *)/g_\#(\pi_1^m(M, p))$$

if g is regular. In general $Aut(g)$ is isomorphic to the quotient

$$N(g_\#(\pi_1^m(M, p))/g_\#(\pi_1^m(M, p),$$

where $N(g_\#(\pi_1^m(M, p))$is the normalizer $N(g_\#(\pi_1^m(M, p))$ of $g_\#(\pi_1^m(M, p)$ in $\pi_1^m(N, *)$. The action of the group $Aut(g)$ in M is proper and discontinuous and if g is regular the map g is just the quotient under this action. Of course if $\partial_m N$ is non-empty the action of g is not free.

Example 2.14. Let N be the 1-manifold $[0, 1]$ and let $\partial_m N$ be ∂N. Then $\pi_1^m(N, *)$ is the free product of two cyclic groups of order two: $C_2 * C_2$. The universal folding of N is R^1. The group of automorphisms is the group generated by the reflections through $\{0\}$ and $\{1\}$.

Exercise 2.15. *Deduce from the above example that if G is a subgroup of $C_2 * C_2$ then either $G = \{0\}$, or $G \approx C_\infty$ or $G \approx C_2 * C_2$. Moreover in the last two cases G has finite index.*

Exercise 2.16. *Let N be the 2-manifold $[0, 1] \times S^1$ (*annulus*) and let $\partial_m N$ be ∂N. Then $\pi_1^m(N, *)$ is $(C_2 * C_2) \times C_\infty$. The universal folding of N is $R \times R$. The group of automorphisms is the group generated by the reflections through $\{0\} \times R$ and $\{1\} \times R$.*

An interesting example is the regular 2-sheeted folding $h : M \to N$ of Example 2.4. The folding group is a normal subgroup of index two in

$$\pi_1^m(N, *) = |x, y : x^2 = 1, xy^2 = y^2x|$$

(see Example 2.10). Let us find it geometrically (see Figure 2). Here M is a torus and

$$\pi_1(M, 1) = |a, b : ab = ba|.$$

By inspection $g_\# a = xy$ and $g_\# b = xy^{-1}$. Therefore the folding group is the subgroup $\langle xy, xy^{-1} \rangle$ of $\pi_1^m(N, *)$ normally generated by xy and xy^{-1}. The monodromy ω :

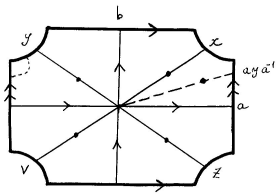


Figure 3: The punctured torus

$\pi_1^m(N,*) \to \Sigma_2$ sends x and y to the cycle (12). This can be seen directly. In fact, the lifting of x or y to the base point marked 1 finishes at 2.

Knowing the monodromy of the folding it is possible to construct it. Here is an example (Figure 3). The manifold N is a torus with a hole. Assume $\partial_m N = \partial N$. Then

$$\pi_1^m(N,*) = \left|a, b, x : x^2 = 1, [x,[a,b]] = 1\right|$$

where x is a boundary generator (marked with a point in Figure 3. Take the representation $\omega : \pi_1^m(N,*) \to \Sigma_4$ given by $\omega(a) = (123)$, $\omega(b) = (124)$ and $\omega(x) = (13)(24)$. By inspection (see Figure 3) $y = a^{-1}xa$, $z = b^{-1}xb$, $v = a^{-1}za$ and $\omega(y) = (12)(34)$, $\omega(z) = (14)(32)$, $\omega(v) = (13)(24)$. We want to construct the folding $g : M \to N$ with monodromyω. The folding is of degree 4 and the Euler characteristic $\chi(N)$ of N is -1. Therefore $\chi(M) = -4$. Since $\partial_m M$ is empty it follows that M is an unbounded 2-manifold of genus 3. To construct g effectively take four copies of the octogon depicted in Figure 3 and paste them together using the information given by ω (do this as an exercise).

3. Branched foldings

Before defining branched foldings we will need some preliminar definitions and results.

3.1. Fox´s spreads

A map $g : Y \to Z$ between T_1-spaces is a *spread* iff the connected components of inverse images of open sets of Z constitute a base for the topology of Y. That is, given a point $y \in Y$ and an open neighborhood ("nbd" for short) U of y in Y there exists an open set W in Z such that the connected component of $g^{-1}(W)$ containing y (the y-component of $g^{-1}(W)$, from now on) is an open set between y and U. It follows easily that, given a spread $g : Y \to Z$, the space Y is locally connected and that if Z_1 is an open subset of Z, then

$$g \mid g^{-1}(Z_1) : g^{-1}(Z_1) \to Z_1$$

is also a spread. If $g : Y \to Z$ is a spread and Z is a subspace of some T_1-space Z' then the natural map $i \circ g : Y \to Z'$ is a spread, where i is the inclusion.

If Z is a topological space denote by $\mathcal{E}(z)$ the set of open neighbourhoods of $z \in Z$. If $f : Y \to Z$ is a map, a *thread* y_z *over* z is a function $W \longmapsto y_z(W)$ where

$W \in \mathcal{E}(z)$ and $y_z(W)$ is a component of $f^{-1}(W)$ such that

$$y_z(W_2) \subset y_z(W_1) \text{ if } W_2 \subset W_1.$$

A spread $g : Y \to Z$ is *complete* iff, for every thread

$$y_z = \{y_z(W)\}$$

over z, and for every z, the intersection

$$\cap_{W \in \mathcal{E}(z)} y_z(W)$$

is non-empty (and consists of just one point).

Example 3.1. Coverings and foldings are complete spreads.

Lemma 3.2. *Let $g : Y \to Z$ be a complete surjective spread with discrete fibers. Assume also that Z satisfies the first axiom of numerability. Let b be an arbitrary member of Z and let $\{W_i\}_{i=1}^{\infty}$ be an arbitrary countable base of nbds of b such that $W_{i+1} \subset W_i$ for all i. Let $x \in g^{-1}(b)$ and let V_i be the connected component of $g^{-1}(W_i)$ containing x. Then there exists n such that, for all $j > i > n$, V_j is the only connected component of $g^{-1}(W_j)$ lying in V_i.*

Proof. The set $\{V_i\}_{i=1}^{\infty}$ is a base of nbds of x. Let us argue by contradiction. Then for an arbitrary V_i there is a $j > i$ such that $g^{-1}(W_j)$ contains at least two connected components, V_j and V_j', lying in V_i . Then there is a thread y_b over b such that $y_b(W_k) \subset V_j'$ for all $k \geq j$. Since g is complete, the intersection $\cap_{i=j}^{\infty} y_b(W_i)$ is a point $x' \in g^{-1}(b)$. Then $x \neq x'$ because $x' \in V_j'$ and $V_j \cap V_j'$ is empty. Moreover $x' \in V_j' \subset V_i$. Since this is true for every nbd V_i of x this point is a limit point and the fiber $g^{-1}(x)$ is not discrete. This completes the proof. □

A space X is locally connected in Y iff Y has a base whose members intersect X in connected sets [6].

A spread $g : Y \to Z$ is a *completion* of a spread

$$f : X \to Z$$

if

(i) X is a subspace dense and locally connected in Y; and

(ii) g is complete and extends f.

The main theorem of [6] is the following:

Theorem 3.3. *Every spread f has a unique completion (called* Fox completion*).*

Let $g : Y \to Z$ be a spread. An automorphism of g is a homeomorphism $\alpha : Y \to Y$ such that $g \circ \alpha = g$. The group of all automorphisms of g is denoted by $Aut(g)$.

Theorem 3.4 (see [24])**.** *Let Z_1 be an open subset of Z and let*

$$j : Z_1 \to Z$$

be the canonical inclusion. Let

$$f : X \to Z_1$$

be a complete surjective spread. If $g : Y \to Z$ is the Fox completion of the spread

$$j \circ f : X \to Z,$$

then the restriction to X of any automorphism of Y is an automorphism of X. The map so defined between $Aut(g)$ and $Aut(f)$ is an isomorphism.

Definition 3.5. A map $g : Y \to Z$, between T_1-spaces and where Z satisfies the first axiom of numerability, is a *branched folding* (resp. *branched covering*) iff there is a closed subset B of Z such that $Z \backslash B$ is dense and locally connected in Z, the map

$$f : Y \backslash g^{-1}(B) \to Z \backslash B$$

defined by $f(x) = g(x)$ is a folding (resp. covering), and g is the Fox completion of the spread

$$g|_{Y \backslash g^{-1}(B)} : Y \backslash g^{-1}(B) \to Z.$$

If the set B is minimal with respect to these conditions we say that B is the *branching set* of g. The map f is called the *associated folding* (resp. *associated covering*) and the spread

$$g|_{Y \backslash g^{-1}(B)} : Y \backslash g^{-1}(B) \to Z$$

is called the *associated unbranched folding* (resp. *associated unbranched covering*).

Remark 3.6. The first axiom of numerability is imposed to Z to ensure that a branched folding (resp. branched covering) $g : Y \to Z$ is surjective (see [3], and compare [24]).

The following results are preliminaries to prove that if W is an open connected subset of Z, and C is a component of $g^{-1}(W)$, then $g|_C : C \to W$ is a branched folding (resp. branched covering). This implies that branched folding and branched covering are open maps (see [3], and compare [24]).

Lemma 3.7 (see [6])**.** *If X is dense and locally connected in Y, the intersection of X with any open connected set of Y is connected.*

Proof. Let V be an open, connected subset of Y. Then $U = V \cap X$ is non-empty because X is dense in Y. Suppose that $U = V \cap X$ is not connected. Then, there are non-empty disjoint open subsets A_1 and A_2 of X, such that

$$A_1 \cup A_2 = U.$$

We will construct non-empty disjoint open subsets B_1 and B_2 of Y, such that $B_1 \cup B_2 = V$. Let $y \in V$ be an arbitrary point. Using the fact that X is locally connected in Y find a nbd $N(y)$ of y in V, whose intersection with X, denoted by $M(y)$, is connected. Since

$$M(y) \subset U = A_1 \cup A_2,$$

the set $M(y)$ will be contained either in A_1 or A_2. In the first case we define y to be a member of B_1; in the second, it will define a member of B_2. Clearly

(i) $A_i \subset B_i$, $i = 1, 2$;

(ii) B_i is open: if

$$y \in B_i \Longrightarrow N(y) \subset B_i;$$

(iii) $B_1 \cap B_2 = \emptyset$;

(iv) $B_1 \cup B_2 = V$.

Therefore V is not connected. This contradiction completes the proof □

Proposition 3.8. *Let $g : Y \to Z$ be a branched folding (resp. branched covering) with branching set B. Let W an open connected subset of Z, and let C be a component of $g^{-1}(W)$. Then $C\backslash g^{-1}(B)$ is a component of $g^{-1}(W\backslash B)$ and the restriction $g|_{C\backslash g^{-1}(B)}$ is a folding (resp. covering) over $W\backslash B$. If g is regular then $g|_{C\backslash g^{-1}(B)}$ is regular.*

Proof. Since Y is locally connected, C is open (and connected) in Y. Since $g^{-1}(Z\backslash B)$ is dense and locally connected in Y, $C\cap g^{-1}(Z\backslash B) = C\backslash g^{-1}(B)$ is connected (Lemma 3.7). Also

$$C \cap g^{-1}(Z\backslash B) \subset g^{-1}(W) \cap g^{-1}(Z\backslash B) = g^{-1}(W\backslash B).$$

Hence $C\backslash g^{-1}(B)$ lies in some component D of $g^{-1}(W\backslash B)$. Next we show that $C\backslash g^{-1}(B) = D$. The set $D \subset g^{-1}(W)$ is connected and cuts the component C of $g^{-1}(W)$ then $D \subset C$. Hence $C\backslash g^{-1}(B) = D$. We can apply Theorem 2.9 to the folding (resp. covering)

$$g|_{Y\backslash g^{-1}(B)} : Y\backslash g^{-1}(B) \to Z\backslash B,$$

and to the open connected set $W\backslash B$ (Lemma 3.7) and to the connected component $C\backslash g^{-1}(B)$ of $Y\backslash g^{-1}(B)$ concluding that the restriction $g|_{C\backslash g^{-1}(B)}$ is a folding (resp. covering) over $W\backslash B$. To prove that if g is regular then $g|_{C\backslash g^{-1}(B)}$ is regular take an arbitrary loop based at some point $* \in W\backslash B$ and lift the loop to the points $g^{-1}(*) \cap (C\backslash g^{-1}(B))$. Since g is regular all these liftings will lie in $C\backslash g^{-1}(B)$ and will be closed or open in $Y\backslash g^{-1}(B)$, hence in $C\backslash g^{-1}(B)$. Thus $g|_{C\backslash g^{-1}(B)}$ is also regular. □

Lemma 3.9. *Let A be a subspace of X and let $Y \subset X$ be an open subset. Then $Y \cap A$ is locally connected in Y if A is locally connected in X. Moreover $Y \cap A$ is dense in Y if A is dense in X.*

Proof. If there is a base of X whose members when intersected with A give connected sets, take the members of that base lying in Y. Their intersection with A coincides with their intersection with $Y \cap A$ and it is, therefore, connected. If A is dense in X, every open set in Y is open in X. Hence it cuts A, and a fortiori $Y \cap A$. □

Theorem 3.10. *Let $g : Y \to Z$ be a (regular) branched folding (resp. branched covering) with branching set B. Let W an open connected subset of Z, and let C be a component of $g^{-1}(W)$. Then $g|_C : C \to W$ is a (regular) branched folding (resp. branched covering).*

Proof. Let us prove that $h = g|_C : C \to W$ is a branched folding (resp. branched covering). Since W is open $g|_{g^{-1}(W)} : g^{-1}(W) \to W$ is a complete spread and W satisfies the first axiom of numerability. Since C is open in $g^{-1}(W)$, h is also a

complete spread. By Proposition 3.8 $C\backslash g^{-1}(B)$ is a component of $g^{-1}(W\backslash B)$ and the restriction $g|_{C\backslash g^{-1}(B)}$ is a folding (resp. covering) over $W\backslash B$. Then

$$h|_{C\backslash h^{-1}(B)} : C\backslash h^{-1}(B) \to W\backslash B$$

is a folding (resp. covering). Since W (resp. C) is open in Z (resp. Y) and $Z\backslash B$ (resp. $Y\backslash g^{-1}(B)$) is dense and locally connected in Z (resp. Y), Lemma 3.9 implies that $W\backslash B$ (resp. $C\backslash h^{-1}(B)$) is dense and locally connected in W (resp. C). □

Corollary 3.11. *Any branched folding (resp. branched covering) $g : Y \to Z$ is an open map.*

Proof. By Remark 3.6 any branched folding (resp. branched covering) is surjective. Therefore the map $g|_C : C \to W$ in the last Theorem is surjective. Since the components C form a base of the topology of Y then g is open. □

The fact that B is closed, and g is surjective imply (Theorem 3.4):

Theorem 3.12. *The group of automorphisms $Aut(g)$ of the branched folding (resp. branched covering) g is isomorphic (by restriction) to the group of automorphisms $Aut(f)$ of the associated folding (resp. associated covering) f.*

We say that the branched folding (resp. branched covering) $g : Y \to Z$ is *regular* iff its associated folding (resp. associated covering) f is regular.

Theorem 3.13. *If the branched folding (resp. branched covering) $g : Y \to Z$ is regular and has discrete fibers then it is topologically equivalent to the quotient of Y under the action of $Aut(g)$.*

Remark 3.14. If Y is compact the fibres of g are finite, and if Y is locally compact, the fibers are discrete [24]. We conjecture that there is an example of regular branched folding in which *Aut* fails to act transitively in the fibers.

Proof. By Remark 3.6 the map g is surjective and by Corollary 3.11 g is open. Then Z has the topology of the identification of the fibers of g to points. Since $Aut(f)$ acts transitively in the fibers of the associated folding f, we only need to show that $Aut(g)$ acts transitively in the fiber $g^{-1}(b)$, for each $b \in B$. Let $\{W_i\}_{i=1}^{\infty}$ a countable base of nbds of b in Z such that $W_{i+1} \subset W_i$. Take two points y, y' of $g^{-1}(b)$. Then $y = \cap_{i=1}^{\infty} y_b(W_i)$ (resp. $y' = \cap_{i=1}^{\infty} y'_b(W_i)$) where y_b (resp. y'_b) is a function $W_i \longmapsto y_b(W_i)$ where $y_b(W_i)$ is a component of $g^{-1}(W_i)$ such that

$$y_b(W_{i+1}) \subset y_b(W_i) \text{ if } W_{i+1} \subset W_i.$$

Since the fiber $g^{-1}(b)$ is discrete, by Lemma 3.2 there must exist N such that for all $j > i > N$ there is exactly one component (namely, $y_b(W_j)$) of $g^{-1}(W_j)$ lying in $y_b(W_i)$ and exactly one component (namely, $y'_b(W_j)$) of $g^{-1}(W_j)$ lying in $y'_b(W_i)$. Let $z \in W_{N+1}$ having an elementary nbd with respect to g. Let $x \in g^{-1}(z) \cap y_b(W_{N+1})$ (resp. $x' \in g^{-1}(z) \cap y'_b(W_{N+1})$). Let $h \in Aut(g)$ such that $h(x) = x'$. For all $j > N$ the restriction $h|_{g^{-1}(W_j)}$ acts in $g^{-1}(W_j)$ because $g \circ h = g$. Therefore h permutes the connected components of $g^{-1}(W_j)$. Then h sends the set $y_b(W_j)$ onto the set $y'_b(W_j)$ for all $j > N$ .Therefore $h(y) = \cap_{i=N+1}^{\infty} h(y_b(W_i)) = \cap_{i=N+1}^{\infty} y'_b(W_i) = y'$. This completes the proof. □

If $g : Y \to Z$ is a covering branched over B, the subset $f^{-1}(B)$ of Y is the disjoint union of the set $\widetilde{P}$ of points at which f is a local homeomorphism (*pseudo-branching cover)* and the set $\widetilde{B}$ of points at which f is not a local homeomorphism (*branching cover*).

4. Some examples of branched coverings

As we have indicated the interest of the above definition of branched folding (or covering) lies in the fact that, given the monodromy of the associated folding (or covering) f and the inclusion $j : Z\backslash B \to Z$ the branched folding (or covering) g is completely determined by the Fox completion of $j \circ f$. We illustrate this with some three dimensional examples.

Example 4.1. Let M and N orientable manifolds and let $g : M \to N$ be a folding with mirrors $\partial_m N$ and $\partial_m M$. Let

$$\varepsilon : M\backslash g^{-1}(\partial_m N) \to \{+, -\}$$

be the map granted by Theorem 2.8. Let M' (resp. N') be the quotient of $M \times [-1, 1]$ (resp. $N \times [-1, 1]$) under the equivalence relation $\equiv$ generated by $(z_1, t_1) \equiv (z_2, t_2)$ iff $z_1 = z_2$ lies in $\partial_m M$ (resp. $\partial_m N$) and $t_1 = -t_2$. The map $g' : M' \to N'$ defined by $g'(z, t) = (g(z), \varepsilon(z)t)$ is a branched covering. The branching set B is $\partial_m N \times \{0\} \subset N'$. Note that there is an epimorphism

$$f : \pi_1(N'\backslash B) \to \pi_1^m(N).$$

For instance the branched covering induced in this way by the 3-sheeted folding of Example 2.3 is a 3-sheeted branched covering of a 2-cell over a 2-cell Q with branching set two points inside Q. Crossing this branched covering with the identity $1 : B^n \to B^n$ we obtain a 3-sheeted covering of a $n + 2$-cell over a $n + 2$-cell $Q \times B^n$ with branching set two boundary parallel n-cells inside $Q \times B^n$ (see the ball of Figure 4 to understand the case $n = 1$).

Let (L, ω) be a *represented knot or link* in $X = S^3$ (resp. a *represented string or string-link* in $X = \mathbb{R}^3$), where ω is a simple representation (homomorphism) of $\pi_1(X\backslash L)$ onto the symmetric group S_3 of the indices $\{1, 2, 3\}$. Thus ω sends meridians of L to transpositions $(1, 2), (1, 3)$, or $(2, 3)$ of S_3, which, following a beautiful idea of Fox, will be represented by colors Red ($R = (1, 2)$), Green ($G = (1, 3)$) and Blue ($B = (2, 3)$). If the representation exists we can endow each overpass of a normal projection of L with one of the three colors R, G, B in such a way that the colors meeting in a crossing are all equal or all are different. Moreover, at least two colors are used. A knot or link L (resp. string or string-link L) in $X = S^3$ (resp. $X = \mathbb{R}^3$) with a coloration corresponding to some ω is a *colored knot or link* (resp. *colored string or string-link*).

A colored knot or link (resp. string or string-link) (L, ω) in $X = S^3$ (resp. $X = \mathbb{R}^3$) defines a complete conjugation class of subgroups of $\pi_1(X\backslash L)$. Namely the set $\{\omega^{-1}(Stab_i) : i \in \{1, 2, 3\}\}$ where $Stab_i$ is the subgroup of elements of S_3 fixing the index i. This class of subgroups determines a covering of three sheets

$$f' : Y \to X\backslash L$$

and an unbranched covering $f'' = j \circ f'$ where

$$j : X \backslash L \to X$$

is the inclusion map. A *construction* described by Neuwirth in [26] gives an extension of f'' to a branched covering $f : M(L,\omega) \to X$, branched over L, such that the associated unbranched covering of f turns out to be f''. We emphasize that f is uniquely determined by f'', not in general by f' [11]. The space $M(L,\omega)$ is a closed (resp. open), orientable 3-manifold.

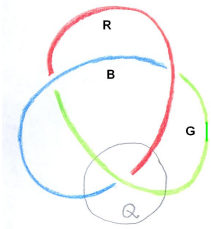


Figure 4: A colored knot

Example 4.2. Consider the colored knot (L,ω) of Figure 4. This colored knot was considered by R. H. Fox in [7]. We now prove that the closed manifold $M(L,\omega)$ is S^3 (see [17], [18] and [29]). Let $f : M(L,\omega) \to S^3$ denote the branched covering. Referring to Figure 4

$$f|_{f^{-1}(Q)} : f^{-1}(Q) \to Q$$

is a branched covering of a closed 3-cell branched over two boundary parallel arcs (and similarly $f|_{(S^3 \backslash f^{-1}(Q))}$). Now Example 4.1 shows that $f^{-1}(Q)$ is a closed 3-cell. Then $M(L,\omega)$ is the result of pasting together two closed 3-cells along their common boundary. Thus $M(L,\omega)$ is S^3.

Example 4.3. Consider the colored string (L,ω) in $\mathbb{R}^3$ of Figure 5. This colored string was first considered by R. H. Fox in the paper [5]; entitled *"A remarkable simple closed curve"*. We will call L *Fox string.*

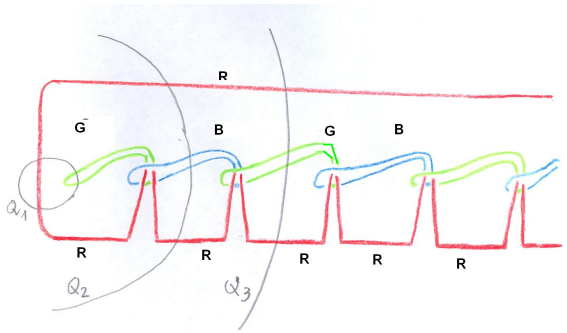


Figure 5: Fox string colored

We will prove that the space $M(L,\omega)$ is homeomorphic to $\mathbb{R}^3$. Thus *there exist a 3-fold simple covering* $\widehat{p}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ *branched over the Fox string* L. In fact, select a sequence of 3-cells $\{Q_i\}_{i=1}^{\infty}$ such that $Q_i\subset Int(Q_{i+1})$ and

$$\cup_{i=1}^{\infty}Q_i=\mathbb{R}^3=S^3\backslash\{\infty\},$$

as indicated in Figure 5. Let

$$p:M(L,\omega)\to\mathbb{R}^3$$

be the simple branched covering given by the representation ω. Then, for $i\geq 1$, $p^{-1}(Q_i)$ is a 3-cell Q_i'. In fact,

$$p|p^{-1}(Q_i):p^{-1}(Q_i)\to Q_i$$

is a 3-fold simple covering of the 3-cell Q_i, branched over two properly embedded arcs; these arcs are embedded exactly as in case $i=1$ (see Figure 4). By Example 1, $p^{-1}(Q_i)$ is a 3-cell Q_i'. Then

$$M(L,\omega)=\cup_{i=1}^{\infty}Q_i'.$$

And from this follows that $M(L,\omega)$ is homeomorphic to $\mathbb{R}^3$ [1] as we wanted to prove.

5. Some examples of branched foldings

An *n-simplex*

$$\sigma=(e_0,e_1,...,e_n)$$

is the convex hull of $n+1$ points

$$\{e_0,e_1,...,e_n\},$$

of some euclidean space R^N, in general position (that is, the n vectors $\{e_0-e_1,...,e_0-e_n\}$ are linearly independent). The number n is the *dimension* $dim(\sigma)$ of σ. The *faces* of σ are the simplexes generated by arbitrary subsets of its vertices. (Therefore, the empty set is face of every simplex.) If σ' is a face of σ we write $\sigma'<\sigma$.

A *locally finite simplicial complex* is a set K whose members are simplexes (of various dimensions) of some fixed euclidean space R^N possessing the following properties:

1. Every face of an arbitrary simplex of the set K is itself an element of the set K.

2. The intersection of two members of K is a face of both.

3. Each point in $|K|=\cup_{\sigma\in K}\sigma$ has a neighbourhood in R^N which intersects only a finite number of simplexes of K.

A complex K is called *k-dimensional* (or a *k-complex*) if k is the maximum dimension of the simplexes of K. A complex K is called *finite* if the set K is finite. The i-skeletton K^i of K denotes the i-complex which is the union of all the j-simplexes of K for $j\leq i$.

The subset $|K|$ of R^N with the relative topology is called a *polyhedron* and K is called a *triangulation* of $|K|$. A complex K' is a *subdivision* of K iff every simplex of K' lies in a simplex of K. Then K' triangulates $|K|$.

The above definitions can be easily generalized using polygons instead of simplexes. A polygon p is the convex hull of m points

$$\{e_0, e_1, ..., e_m\},$$

of some euclidean space R^N. Since the points are not in general position the polygon is not necessarily a simplex. But it has faces, dimension, etc. There are polygonizations and subdivisions, etc. We leave this generalization to the reader.

Assume an n-complex K triangulates an n-manifold M (bounded or unbounded). Assume K is $(n+1)$-colorable (an $(n+1)$-*coloration* of K is a map $c : K^0 \to \{0, 1, ..., n\}$ such that $c|_{\sigma^0}$ is surjective for every n simplex $\sigma \in K$). Let τ be some arbitrarily fixed n-simplex $(e_0, e_1, ..., e_n)$. Define a map $g : M \to \tau$ by extending linearly the map $g' : K^0 \to \tau$ given by $g'(v) = e_{c(v)}$ for all $v \in K^0$. The map g is a branched folding. The branching set B is contained in the $(n-2)$-skeletton τ^{n-2} of τ. The mirror of the associated folding is $\partial\tau\backslash\tau^{n-2}$. The monodromy of the associated folding is $\omega : \pi_1^m(\tau\backslash\tau^{n-2}) \to \Sigma_S$, where S is the set of n-simplexes of K. The representation ω is defined as follows. Let $[\rho]$ be the boundary generator of $\pi_1^m(\tau\backslash\tau^{n-2})$ corresponding to the $(n-1)$-face ρ of τ. Then $\omega([\rho]) : S \to S$ permutes the n-simplexes of K sharing an $(n-1)$-simplex belonging to $g^{-1}(\rho)$. Thus $\omega([\rho])$ is a product of transpositions.

Let K be a triangulation (or more generally, a polygonization) of some n-manifold M. To each simplex σ (or polygon) of K associate a point $b_\sigma \in Int\sigma$ (if σ is a 0-simplex then $b_\sigma = \sigma$). Define a new complex K' declaring that $(b_{\sigma_1}, ..., b_{\sigma_k})$ is a member of K' iff $\sigma_1 < ... < \sigma_k$. Then K' is a subdivision of K and therefore K' triangulates M. The map $c : K'^0 \to \{0, 1, ..., n\}$ defined by $c(b_\sigma) = dim(\sigma)$ is then an $(n+1)$-*coloration* of K'. Therefore:

Theorem 5.1. *Every triangulated n-manifold (bounded or unbounded, orientable or not, compact or not) is a branched folding over an n-simplex σ with branching set the $(n-2)$-skeletton of σ.*

Since Moise proved that every bounded or unbounded n-manifold $n \leq 3$ is triangulated by some K [13] we have:

Theorem 5.2. *Every n-manifold (bounded or unbounded, orientable or not, compact or not) is a branched folding over an n-simplex σ for $n \leq 3$ with branching set the $(n-2)$-skeletton of σ.*

Example 5.3. Consider the polygonization K of the 2-sphere S defined by the cube. Construct K' as above and define the 48-sheeted branched folding $g : S \to \tau = (e_0, e_1, e_2)$ by extending linearly the map $g' : K'^0 \to \tau$ given by $g'(b_p) = e_{dim(p)}$ for all $p \in K$. The branched folding is regular. Therefore g is the quotient of S under $Aut(g)$. This is easily seen to be the group of isometries C of R^3 fixing the cube. Since by Theorem 3.12 $Aut(g)$ is isomorphic to the group $Aut(f)$ of the associated folding $f : S\backslash\Sigma \to \tau\backslash\tau^0$ where Σ (resp. τ^0) is the set of vertexes of K' (resp. τ), we can obtained a presentation for C as follows. The group C is isomorphic to $Aut(f)$ which is isomorphic to the quotient

$$\pi_1^m(\tau\backslash\tau^0)/f_\#(\pi_1(S\backslash\Sigma)).$$

But $\pi_1(S\backslash\Sigma)$ is generated by the meridians of Σ because S is simply connected. The image of the meridian of some b_σ when $dim(\sigma) = 0, 1, 2$ is , respectively, some

conjugate of $(bc)^3$, $(ca)^2$, $(ab)^4$ in

$$\pi_1^m(\tau\backslash\tau^0) =\mid a,b,c : a^2=b^2=c^2=1 \mid$$

where a, b, c, are the boundary generators of $\tau\backslash\tau^0$. Thus

$$C =\mid a,b,c : a^2=b^2=c^2=1; (ab)^4=(bc)^3=(ca)^2=1 \mid$$

Every transitive representation ω from

$$\pi_1^m(\tau\backslash\tau^0) =\mid a,b,c : a^2=b^2=c^2=1 \mid$$

into Σ_n gives rise to a 3-colored triangulation of the total space $M(\omega)$ of the branched folding $g : M(\omega) \to \tau$ defined by the monodromy ω. The space $M(\omega)$ is an unbounded 2-manifold iff $\partial_m M(\omega)$ is empty and this happens iff the permutations $\omega(a)$, $\omega(b)$, $\omega(c)$ fail to fix any index. Hence $\omega(a)$, $\omega(b)$, $\omega(c)$ must be formed by m 2-cycles. Hence n must be even: $n = 2m$. As a geometric consequence each of $\omega(ab)$, $\omega(bc)$, $\omega(ca)$ must be the product of an even number of cycles, since powers of ab, bc, ca lift to meridians of vertexes of $M(\omega)$. Say that $\omega(ab)$, $\omega(bc)$, $\omega(ca)$ are, respectively, the product of 2α, 2β, 2γ cycles. Then the number of vertexes (edges, faces) of $M(\omega)$ is $\alpha+\beta+\gamma$ (resp. $3m$, $2m$) . Hence the Euler characteristic of $M(\omega)$ is

$$\chi(M(\omega)) = \alpha+\beta+\gamma-m.$$

Therefore $M(\omega)$ is S^2 iff $\alpha+\beta+\gamma = m+2$.

Example 5.4. $\omega(a) = (12)(34)$, $\omega(b) = (13)(24)$, $\omega(c) = (14)(23)$. Then $\omega(ab) = (14)(23)$, $\omega(bc) = (12)(34)$, $\omega(ca) = (13)(24)$. Thus $\chi(M(\omega)) = 1$. Therefore $M(\omega)$ is the projective plane RP^2 and ω gives rise to a 4-sheeted branched folding $g : RP^2 \to \tau$ and to a 3-colored triangulation of RP^2 having four 2-simplexes. The reader can found it easily.

6. Applications to 3-manifolds

It was proved in [9] and [16], independently, that every closed, oriented 3-manifold M^3 is a 3-fold covering of S^3 branched over a knot. More concretely, given such M^3 there exist a colored knot (L,ω) such that $M(L,\omega)$ is homeomorphic to M^3. In fact, there are infinitely many such colored knots providing the same 3-manifold M^3. Among them there are also infinitely many colored knots such that at every crossing the three colors are used (see, for instance, [10]). Call such a particular colored knot or link *special*. We now consider a move (see [14] or [15]) that projects the crossing at the ball Q in Figure 4 onto the plane Π in which the knot is depicted. In this way the crossing is converted in two segments lying upon Π and crossing themselves. This move, applied at every crossing of a special colored knot or link, produces a *colored tetravalent planar graph* such that at each crossing the three colors appear and the repeated color lies on opposite edges. Since this move does not change the covering manifold, we have proved:

Theorem 6.1. *Every closed, oriented 3-manifold M^3 is a 3-fold covering of S^3 branched over a colored tetravalent planar graph.*

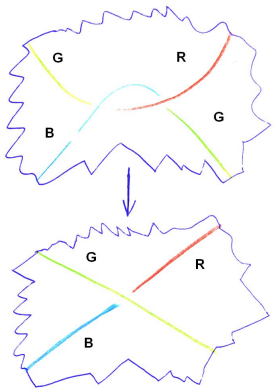


Figure 6: Move

Remark 6.2. Applying the move (see [14] or [15]) of Figure 6 we can even suppose that the regions of the tetravalent graph have three or more edges.

This can be generalized to every open orientable 3-manifold using [19]. The branching set is a colored tetravalent planar graph lying on $S^2\backslash E$ where E is a subset of a Cantor set $c \subset S^2$. As an example, take the Fox string and project it upon a plane converting it into a colored tetravalent planar graph lying on $S^2\backslash\{\infty\}$.

Folding S^3 along the sphere upon which lies the tetravalent graph we obtain:

Corollary 6.3. *For every closed, oriented* 3*-manifold* M^3 *there is a* 6 *to* 1 *folding* $f : M^3 \to B^3$ *over the* 3*-ball branched over a tetravalent planar graph on the boundary of* B^3*.*

Problem 6.4. *Generalize this to non-orientable* 3*-manifolds.*

References

[1] Morton Brown, The monotone union of open n-cells is an open n-cell. Proc. Amer. Math. Soc. 12 (1961) 812–814.

[2] Gerhard Burde and Heiner Zieschang, Knots. De Gruyter Studies in Mathematics, 5. Berlin - New York: Walter de Gruyter. XII, 399 p. (1985).

[3] A. F. Costa, Some properties of branched coverings of topological spaces. (Spanish) Mathematical contributions (Spanish), 77–81, Editorial Univ. Complutense Madrid, Madrid, 1986.

[4] H. S. M. Coxeter and W. O. J. Moser, Generators and relations for discrete groups. Third edition. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 14. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1972. ix+161 pp.

[5] R. H. Fox, A remarkable simple closed curve. Ann. of Math. (2) 50, (1949). 264–265.

[6] R. H. Fox, Covering spaces with singularities. In Algebraic Geometry and Topology. A Symposium in honor of S. Lefschetz. Editors: Fox et al. Princeton Univ. Press (1957) pp.243-257

[7] R. H. Fox, Construction of simply connected 3-manifolds. 1962 Topology of 3-manifolds and related topics (Proc. The Univ. of Georgia Institute, 1961) pp. 213–216 Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J.

[8] Hans Freudenthal, Über die Enden diskreter Räume und Gruppen. Comment. Math. Helv. 17 (1945)1–38.

[9] Hugh M. Hilden, Every closed orientable 3-manifold is a 3-fold branched covering space of S^3. Bull. Amer. Math. Soc. 80 (1974) 1243–1244.

[10] Hilden, H. M.; Lozano, M. T.; Montesinos Amilibia, José María. Whitten, W. C. On universal groups and three-manifolds. Invent. Math. 87 (1987), no. 3, 441–456.

[11] J.H.V. Hunt, Branched coverings as uniform completions of unbranched coverings (Resumé). Contemporary Mathematics 12 (1982) 141–155

[12] Yukio Matsumoto; José María Montesinos-Amilibia, A proof of Thurston's uniformization theorem of geometric orbifolds. Tokyo J. Math. 14 (1991), no. 1, 181–196.

[13] Edwin E. Moise, Geometric topology in dimensions 2 and 3. Graduate Texts in Mathematics, Vol. 47. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977. x+262 pp.

[14] J. M. Montesinos-Amilibia, Sobre la Conjetura de Poincaré y los recubridores ramificados sobre un nudo. Tesis Doctoral, Universidad Complutense, Madrid, 1971.

[15] J. M. Montesinos-Amilibia, A note on a theorem of Alexander. (Spanish) Rev. Mat. Hisp.-Amer. (4) 32 (1972), 167–187.

[16] J. M. Montesinos-Amilibia, A representation of closed orientable 3-manifolds as 3-fold branched coverings of S^3. Bull. Amer. Math. Soc. 80 (1974) 845–846.

[17] J. M. Montesinos-Amilibia, Some aspects of the theory of branched coverings. (Spanish) Proceedings of the seventh Spanish-Portuguese conference on mathematics, Part II (Sant Feliu de Guíxois, 1980). Publ. Sec. Mat. Univ. Autònoma Barcelona No. 21 (1980), 109–126.

[18] J. M. Montesinos-Amilibia, Lectures on 3-fold simple coverings and 3-manifolds. Combinatorial methods in topology and algebraic geometry (Rochester, N.Y., 1982), 157–177, Contemp. Math., 44, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1985.

[19] J. M. Montesinos-Amilibia, Representing open 3-manifolds as 3-fold branched coverings. Rev. Mat. Complut. 15 (2002), no. 2, 533–542.

[20] J. M. Montesinos-Amilibia, Open 3-manifolds, wild subsets of S^3 and branched coverings. Rev. Mat. Complut. 16 (2003), no. 2, 577–600.

[21] J. M. Montesinos-Amilibia, Uncountably many wild knots whose cyclic branched covering are S^3. Rev. Mat. Complut. 16 (2003), no. 1, 329–344.

[22] J. M. Montesinos-Amilibia, Embedding strings in the unknot. J. Math. Sci. Univ. Tokyo 10 (2003), no. 4, 631–660.

[23] J. M. Montesinos-Amilibia, On Cantor sets in 3-manifolds and branched coverings. Q. J. Math. 54 (2003), no. 2, 209–212.

[24] J. M. Montesinos-Amilibia, Branched coverings after Fox. Bol. Soc. Mat. Mexicana (3) 11 (2005), no. 1, 19–64.

[25] J. M. Montesinos-Amilibia, Open 3-manifolds and branched coverings: a quick exposition. Rev. Colombiana Mat. 41 (2007), no. 2, 287–302.

[26] L. P. Neuwirth, Knot groups. Annals of Mathematics Studies, No. 56 Princeton University Press, Princeton, N.J. 1965 vi+113 pp.

[27] Herbert Seifert and William Threlfall, Topologie. Naturforschung und Medizin in Deutschland 1939–1946, Band 2, pp. 239–252 Dieterich'sche Verlagsbuchhandlung, Wiesbaden, 1948.

[28] Edwin H. Spanier, Algebraic topology. Corrected reprint. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1981. xvi+528 pp.

[29] Débora María Tejada, Construction of 3-manifolds and branched coverings. (Spanish) Lect. Mat. 18 (1997), no. 1, 3–21.

An unexpected 3D geometric locus

Eugenio Roanes Macías and Eugenio Roanes Lozano

Departamento de Álgebra
Facultad de Educación
Universidad Complutense de Madrid
E-28040 Madrid, Spain
roanes@mat.ucm.es
eroanes@mat.ucm.es

Dedicated to Prof. Juan Tarrés, at the occasion of his retirement.

ABSTRACT

The nineteenth century geometer Jakob Steiner discovered the 2D geometric locus of a point which orthogonal projections on the side-lines of a given triangle are vertices of other triangle whose area is kept unchanged. It was extended in 1999 by Miguel de Guzmán to the case of projecting in arbitrary directions. The extension to 3D is considered here.

Key words: Elementary problems in Euclidean geometries; Surfaces in Euclidean space; Symbolic computation and algebraic computation

2010 Mathematics Subject Classification: 51M04, 53A05, 68W30

1. Introduction: antecedents and state of the art

The following result is well known: *Given a triangle $A_1A_2A_3$, the locus of all those points X (in the plane $A_1A_2A_3$) such that the orthogonal projections of X on the three side-lines of the triangle are collinear is the circumcircle of $A_1A_2A_3$.* It is usually attributed to Robert Simson (1687-1768), although it was really discovered by the Scottish mathematician Wallace in 1799. That is why it is usually called the *Simson-Wallace Theorem*. Its beauty has attracted many mathematicians.

The great geometer Jakob Steiner extended the result in the following way: *Given a triangle $A_1A_2A_3$, take an arbitrary point X in the plane of $A_1A_2A_3$ and draw the orthogonal projections of X on the lines A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2, obtaining points P_1, P_2, P_3, respectively. Then the locus of all points X such that the area of the triangle $P_1P_2P_3$ is kept unchanged is a circumference whose center is the circumcenter of the triangle $A_1A_2A_3$.* It is called the *Simson-Steiner Theorem*. Proofs of these theorems using Synthetic Geometry methods appear in classical Geometry books like [1, 2, 3].

The Simson-Steiner theorem was extended in 1999 by Miguel de Guzmán [4], substituting orthogonal projections by projections in arbitrary directions: *Given a*

This work was partially supported by the research project TIN2009-07901 (Government of Spain).

triangle $A_1A_2A_3$ and three arbitrary directions, $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ (not parallel to lines A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2, respectively), take an arbitrary point X in the plane of $A_1A_2A_3$ and project it on the lines A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2, along directions $\delta_1, \delta_2, \delta_3$, obtaining points P_1, P_2, P_3, respectively. Then the locus of all points X such that the area of the triangle $P_1P_2P_3$ is kept unchanged is a conic. It is called *Simson-Guzmán Theorem.* (See Figure 1).

On the other hand, about 1999 several articles appeared about the application of algebraic methods of mechanical proof in elementary geometry [5, 6, 7, 8]. Motivated by the discovery of the extension found by Miguel de Guzmán (that he had told us before appearing in the Mathematical Monthly), we got the idea to apply those algebraic methods to the posible extension to 3D of that theorem, substituting triangles by tetrahedrons and substituting area by volume. The results that we obtained using Ritt-Wu's method, based on pseudodivisions, were published in [9, 10, 11, 12] and the ones obtained by F. Botana, using similar techniques, were published in [13].

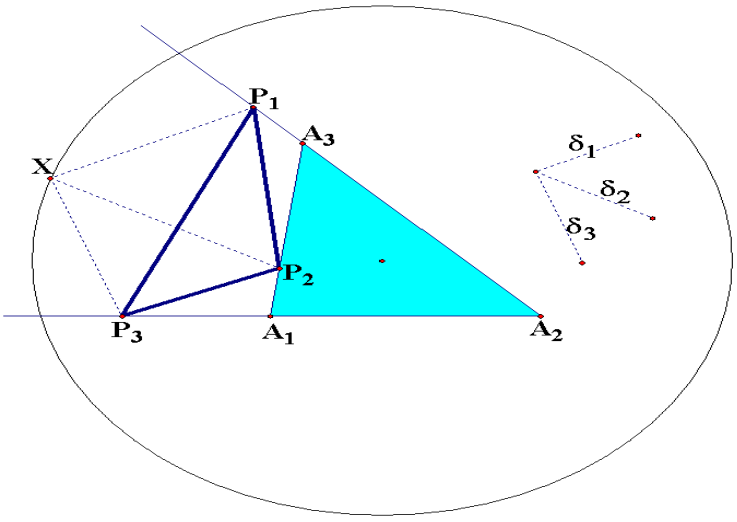


Figure 1: *Example of 2D Simson-Guzmán's locus*

The goal of this article is to extend to 3D these theorems (Simson-Steiner and Simson-Guzmán ones) using only simple usual techniques, although a computer algebra system (Maple) will be used to execute laborious calculations. It would seem natural to expect that the circumference or conic obtained as locus in 2D was replaced by a spherical or quadric surface locus when extending to 3D, respectively. However, the loci obtained are somewhat *unexpected*. We will end up making considerations on the extension of these theorems to dimension higher than 3.

2. Extension to 3D projecting in arbitrary direction

Problem: *Let us consider a tetrahedron $A_1A_2A_3A_4$ and four arbitrary directions $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4$ (not parallel to face-planes $A_2A_3A_4$, $A_3A_4A_1$, $A_4A_1A_2$, $A_1A_2A_3$ respec-*

tively) in the real Euclidean space $\mathbb{R}^3$. *Take an arbitrary point* X *and project it on those face-planes, along directions* $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4$, *obtaining points* P_1, P_2, P_3, P_4, *respectively. What is the locus of* X, *such that the volume of the tetrahedron* $P_1P_2P_3P_4$ *is kept unchanged (as a constant,* V*), that is, vol*$(P_1P_2P_3P_4)$*=*V ? (See Figure 2).

In the preceding problem, one can distinguish three types of points. Points A_1, A_2, A_3, A_4 are freely chosen in the space (except for exceptional positions in which they are coplanar) and they are consequently called *free points*. The indeterminate point X, which gives the geometric locus, is called *locus point*. Finally, points P_1, P_2, P_3, P_4, determined from locus and free points by geometric conditions, are called *linked points*.

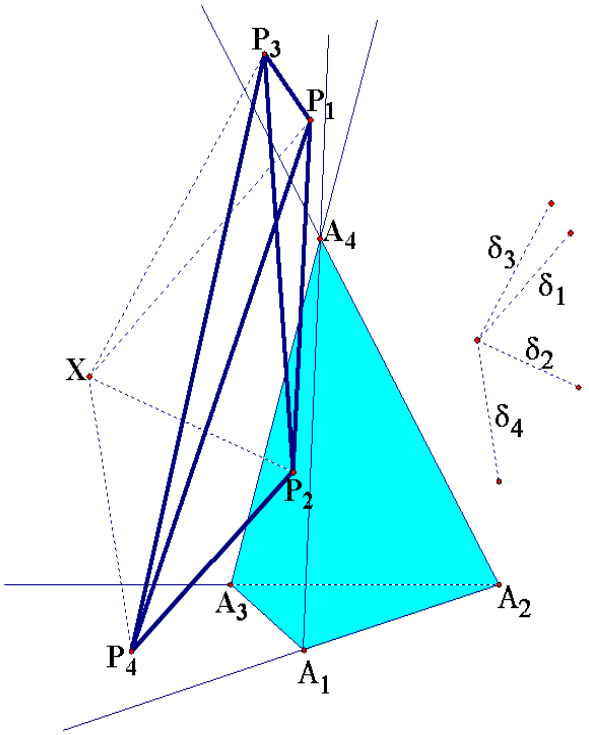


Figure 2: *Tetrahedron* $P_1P_2P_3P_4$ *of linked points*

As vectorial operation will be used, points will be determined by their position vectors. For the sake of simplicity of calculations, it is convenient to select a coordinate system such that most of the free points have coordinates as simple as possible.

Free points: $A_1(0,0,0), A_2(1,0,0), A_3(a,b,0), A_4(c,d,e)$, where $a,b,c,d,e \in \mathbb{R}$.

Locus point: $X(x,y,z)$.

Linked points: $P_1(p_{11},p_{12},p_{13})$, $P_2(p_{21},p_{22},p_{23})$, $P_3(p_{31},p_{32},p_{33})$, $P_4(p_{41},p_{42},p_{43})$.

Since the vertices A_1, A_2, A_3, A_4 are not coplanar points, the triple product of vectors $[\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_3}, \overrightarrow{A_1A_2}] = b \cdot e$ cannot vanish. Hence, the parameters b and e must verify the following inequality conditions

$$b \neq 0 \neq e \tag{1}$$

The projection direction δ_1 is defined by the vector $\overrightarrow{A_1D_1}$ of origin or initial-point A_1 and end-point or terminal-point a generic point D_1 in the face-plane $A_2A_3A_4$, opposite to the vertex A_1. The projection direction δ_2 is defined by the vector $\overrightarrow{A_2D_2}$ of origin A_2 and end-point a generic point D_2 in the face-plane $A_3A_4A_1$, opposite to the vertex A_2. The projection direction δ_3 is defined by the vector $\overrightarrow{A_3D_3}$ of origin A_3 and end-point a generic point D_3 in the face-plane $A_4A_1A_2$, opposite to the vertex A_3. Finally, the projection direction δ_4 is defined by the vector $\overrightarrow{A_4D_4}$ of origin A_4 and end-point a generic point D_4 in the face-plane $A_1A_2A_3$, opposite to the vertex A_4. Thus, points D_1, D_2, D_3, D_4 can be defined by the following expressions:

$D_1 = A_2 + \lambda \cdot (A_3 - A_2) + \mu \cdot (A_4 - A_2) = (1 + \lambda(a-1) + \mu(c-1), \lambda b + \mu d, \mu e)$
$D_2 = A_3 + \nu \cdot (A_4 - A_3) + \xi \cdot (A_1 - A_3) = (a + \nu(c-a) - \xi a, b + \nu(d-b) - \xi b, \nu e)$
$D_3 = A_4 + \rho \cdot (A_1 - A_4) + \sigma \cdot (A_2 - A_4) = (c - \rho c + \sigma(1-c), d - \rho d - \sigma d, e - \rho e - \sigma e)$
$D_4 = A_1 + \tau \cdot (A_2 - A_1) + \upsilon \cdot (A_3 - A_1) = (\tau + \upsilon a, \upsilon b, 0)$

where parameters $a, b, c, d, e, \lambda, \mu, \nu, \xi, \rho, \sigma, \tau, \upsilon \in \mathbb{R}$.

For each position of the locus point X, its projection point P_1 can be determined by two conditions: P_1 is in the face-plane $A_2A_3A_4$ and line XP_1 has direction δ_1. Those two conditions can, respectively, be expressed by the vanishing of the triple product

$$[\overrightarrow{A_2A_3}, \overrightarrow{A_2A_4}, \overrightarrow{A_2P_1}] = adp_{13} - aep_{12} - dp_{13} + ep_{12} + bep_{11} - be - bp_{13}c + bp_{13}$$

and the vanishing of the cross product

$$\overrightarrow{P_1X} \times \overrightarrow{A_1D_1} = ((y-p_{12})\mu e - (z-p_{13})(\lambda b + \mu d), (z-p_{13})(1+\lambda(a-1)+\mu(c-1)) - (x-p_{11})\mu e, (x-p_{11})(\lambda b + \mu d) - (y-p_{12})(1+\lambda(a-1)+\mu(c-1)))$$

Then, by solving the linear system of the four polynomial equations that result by expanding the two vectorial equations:

$$[\overrightarrow{A_2A_3}, \overrightarrow{A_2A_4}, \overrightarrow{A_2P_1}] = 0 \;\; ; \;\; \overrightarrow{P_1X} \times \overrightarrow{A_1D_1} = (0,0,0)$$

the following unique solution is obtained:

$p_{11} = (-a^2zd + ey + abzc - be - azb - dz + abe + a^2ey - abex - 2aey + 2dza + bz - bzc + bex)\lambda + (bz - be + czd - cey + bex - aey - dz + dza - 2bzc - cbex + ey + caey - cazd + c^2bz + cbe)\mu + bzc + be + aey - ey - bz - dza + dz)/(be)$

$p_{12} = ((b^2zc - zb^2 - b^2ex + bzd + b^2e + baey - bazd - eyb)\lambda + (dbzc - bzd - dbex + dbe + daey - d^2az - dey + d^2z)\mu + eyb)/(be)$

$p_{13} = ((-dza - ey + be + aey + bzc - bz + dz - bex)\mu + bz)/e$

For each position of locus point X, its projection point P_2 can be determined by two conditions: P_2 is in the face-plane $A_3A_4A_1$ and line XP_2 has direction δ_2. Those two conditions can, respectively, be expressed by the vanishing of the triple product

$$[\overrightarrow{A_3A_4}, \overrightarrow{A_3A_1}, \overrightarrow{A_3P_2}] = -bp_{23}c + ap_{23}d - eap_{22} + ebp_{21};$$

and the vanishing of the cross product

$$\overrightarrow{P_2X} \times \overrightarrow{A_2D_2} = ((y-p_{22})\nu e - (z-p_{23})(b + \nu(d-b) - \xi b), (z-p_{23})(a + \nu(c-a) - \xi a - 1) - (x-p_{21})\nu e, (x-p_{21})(b + \nu(d-b) - \xi b) - (y-p_{22})(a + \nu(c-a) - \xi a - 1))$$

Then, by solving the linear system of the four polynomial equations that result by expanding the two vectorial equations:

$$[\overrightarrow{A_3A_4}, \overrightarrow{A_3A_1}, \overrightarrow{A_3P_2}] = 0 \;\; ; \;\; \overrightarrow{P_2X} \times \overrightarrow{A_2D_2} = (0,0,0)$$

the following unique solution is obtained:

$p_{21} = ((-a^2zd + a^2ey - abex + cazd - c^2bz + abzc + cbex - caey)\nu + (-a^2zd - abex + a^2ey + abzc)\xi + aey - dza + bzc - a^2ey + a^2zd - abzc + abex)/(be)$

$p_{22} = ((b^2zc - b^2ex - dbzc - daey + baey - bazd + dbex + d^2az)\nu + (baey - bazd + b^2zc - b^2ex)\xi + eyb - b^2zc + b^2ex + bazd - baey)/(be)$

$p_{23} = ((-bzc + bex - aey + dza)\nu + bz)/e$

For each position of locus point X, its projection point P_3 can be determined by two conditions: P_3 is in the face-plane $A_4A_1A_2$ and line XP_3 has direction δ_3. Those two conditions can, respectively, be expressed by the vanishing of the triple product

$[\overrightarrow{A_4A_1}, \overrightarrow{A_4A_2}, \overrightarrow{A_4P_3}] = dp_{33} - ep_{32}$

and the vanishing of the cross product

$\overrightarrow{P_3X} \times \overrightarrow{A_3D_3} = ((y-p_{32})(e-\rho e-\sigma e)-(z-p_{33})(d-\rho d-\sigma d-b), (z-p_{33})(c-\rho c+\sigma(1-c)-a)-(x-p_{31})(e-\rho e-\sigma e), (x-p_{31})(d-\rho d-\sigma d-b)-(y-p_{32})(c-\rho c+\sigma(1-c)-a))$

Then, by solving the linear system of the four polynomial equations that result by expanding the two vectorial equations:

$$[\overrightarrow{A_4A_1}, \overrightarrow{A_4A_2}, \overrightarrow{A_4P_3}] = 0 \;\; ; \;\; \overrightarrow{P_3X} \times \overrightarrow{A_3D_3} = (0,0,0)$$

the following unique solution is obtained:

$p_{31} = ((dzc + ey - dz - cey)\sigma + (-cey + dzc)\rho + bex + dza - aey + cey - dzc)/(be)$

$p_{32} = (-d(-dz + ey)\sigma - d(-dz + ey)\rho - d(-ey - bz + dz))/(be)$

$p_{33} = ((dz - ey)\sigma + (dz - ey)\rho + ey + bz - dz)/e$

For each position of locus point X, its projection point P_4 can be determined by two conditions: P_4 is in the face-plane $A_1A_2A_3$ and line XP_4 has direction δ_4. Those two conditions can, respectively, be expressed by the vanishing of the triple product

$[\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_3}, \overrightarrow{A_1P_4}] = bp_{43}$;

and the vanishing of the cross product

$\overrightarrow{P_4X} \times \overrightarrow{A_4D_4} = (-(y-p_{42})e-(z-p_{43})(\upsilon b-d), (z-p_{43})(\tau+\upsilon a-c)+(x-p_{41})e, (x-p_{41})(\upsilon b-d)-(y-p_{42})(\tau+\upsilon a-c))$

Then, by solving the linear system of the four polynomial equations that result by expanding the two vectorial equations:

$$[\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_3}, \overrightarrow{A_1P_4}] = 0 \;\; ; \;\; \overrightarrow{P_4X} \times \overrightarrow{A_4D_4} = (0,0,0)$$

the following unique solution is obtained:

$p_{41} = (z\tau + z\upsilon a - zc + xe)/e$

$p_{42} = (ey + z\upsilon b - dz)/e$

$p_{43} = 0$

Since the volume of the tetrahedron $P_1P_2P_3P_4$ is given by

$$\frac{1}{6}\,[\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1P_3}, \overrightarrow{P_1P_4}] = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} p_{21}-p_{11} & p_{22}-p_{12} & p_{23}-p_{13} \\ p_{31}-p_{11} & p_{32}-p_{12} & p_{33}-p_{13} \\ p_{41}-p_{11} & p_{42}-p_{12} & p_{43}-p_{13} \end{vmatrix} \qquad (2)$$

by substituting the values of p_{ij} obtained above in (2), the volume of $P_1P_2P_3P_4$ is expressed as a rational expression depending on the variables x, y, z and the parameters $a, b, c, d, e, \lambda, \mu, \nu, \xi, \rho, \sigma, \tau, \upsilon$. Its numerator, denoted $\phi(x, y, z)$, is a polynomial expression too large to be expanded here (it occupies several pages) and its denominator, $6b^2e^2$, is always non null, in accordance with (1). Therefore, the points X such that the volume of the tetrahedron $P_1P_2P_3P_4$ is kept unchanged, as a constant V, can be expressed (to avoid non integer expression) as the points of coordinates (x, y, z) that verify the equation:

$$\phi(x, y, z) - 6\ b^2e^2 \cdot V = 0 \tag{3}$$

Since the expression obtained developing (2) is a polynomial of degree 3 in the p_{ij} and the p_{ij} are themselves polynomials of degree 1 in the variables x, y, z, then $\phi(x, y, z)$ is an homogeneous polynomial of degree 3 in the variables x, y, z with parameters $a, b, c, d, e, \lambda, \mu, \nu, \xi, \rho, \sigma, \tau, \upsilon$.

In particular, for $a = 0, b = 1, c = 1, d = 1, e = 1, \lambda = 1/2, \mu = 1/2, \nu = 1/2, \xi = 1/2, \rho = 1/2, \sigma = 1/2, \tau = 1/2, \upsilon = 1/2$, the polynomial locus is $-3xz^2+2x^2y-2xy+2x^2z-2xyz+4z^2-2xz+xy^2$ and its cubic surface is represented for $V = 0$ in Figure 3. It has been drawn using the program *Surfer* (a package specialized in representing algebraic surfaces [14]).

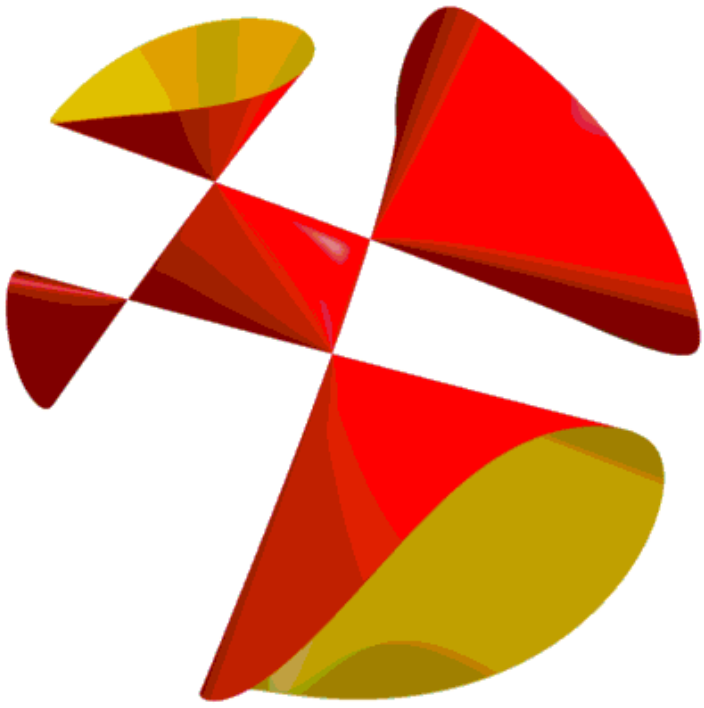


Figure 3: *Example of locus of a 3D extension of Simson-Guzmán's theorem*

In particular, for each one of the vertices $A_1(0, 0, 0), A_2(1, 0, 0), A_3(a, b, 0), A_4(c, d, e)$ of the tetrahedron and for any values of the parameters $a, b, c, d, e, \lambda, \mu, \nu, \xi, \rho, \sigma, \tau, \upsilon$

verifying the inequalities (1), we have: $\phi(0,0,0) = 0$, $\phi(1,0,0) = 0$, $\phi(a,b,0) = 0$, $\phi(c,d,e) = 0$. As a consequence, in case the points P_1, P_2, P_3, P_4 are coplanar (i.e., in case $V = 0$), the corresponding locus, defined by the cubic surface of equation (3), passes through each one of the four vertices of the tetrahedron A_1, A_2, A_3, A_4.

In such case (P_1, P_2, P_3, P_4 coplanar points), we have: $\frac{\partial\phi}{\partial x} = 0$; $\frac{\partial\phi}{\partial y} = 0$; $\frac{\partial\phi}{\partial z} = 0$, in each one of the vertices A_1, A_2, A_3, A_4 and for any values of the parameters $\lambda, \mu, \nu, \xi, \rho, \sigma, \tau, \upsilon$. As a consequence, the vertices A_1, A_2, A_3, A_4 are singular points of the cubic surface locus. Besides, in this case, substituting the parameter equations of each one of the border-lines of the tetrahedron:

$A_1A_2: \quad x = t, y = 0, z = 0$
$A_1A_3: \quad x = a \cdot t, y = bt, z = 0$
$A_1A_4: \quad x = c \cdot t, y = dt, z = et$
$A_2A_3: \quad x = 1 + (a-1) \cdot t, y = b \cdot t, z = 0$
$A_2A_4: \quad x = 1 + (c-1) \cdot t, y = d \cdot t, z = e \cdot t$
$A_3A_4: \quad x = a + (c-a) \cdot t, y = b + (d-b) \cdot t, z = e \cdot t$

in the polynomial expression $\phi(x, y, z)$, zero is always obtained. As a consequence, that cubic locus surface contains the six border-lines of the tetrahedron.

The properties mentioned above can be observed in the locus surface represented in Figure 3, but for $V \neq 0$ the singularities are smoothed.

All these results are condensed in the following extension to 3D of Simson-Guzmán theorem.

Theorem 2.1. *Let us consider a tetrahedron $A_1A_2A_3A_4$ and four arbitrary directions $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4$ (not parallel to face-planes $A_2A_3A_4$, $A_3A_4A_1$, $A_4A_1A_2$, $A_1A_2A_3$ respectively) in the real Euclidean space $\mathbb{R}^3$. Take an arbitrary point X and project it on those face-planes, along directions $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4$, obtaining points P_1, P_2, P_3, P_4, respectively. Then, the locus of X, such that the volume of the tetrahedron $P_1P_2P_3P_4$ is kept unchanged (as a constant V) is the cubic surface of equation (3). Besides, in case of P_1, P_2, P_3, P_4 being coplanar points (i.e., in case $V = 0$), the vertices A_1, A_2, A_3, A_4 are singular points of this locus surface and the six border-lines of the tetrahedron $A_1A_2A_3A_4$ are contained in that locus surface.*

3. Extension to 3D in case of orthogonal projections

Problem: *Let us consider a tetrahedron $A_1A_2A_3A_4$ and an arbitrary point X in the real Euclidean space $\mathbb{R}^3$. Let P_1, P_2, P_3, P_4 be the orthogonal projections of X on the face-planes $A_2A_3A_4$, $A_3A_4A_1$, $A_4A_1A_2$, $A_1A_2A_3$ of the tetrahedron, respectively. What is the locus of X, such that the volume of the tetrahedron $P_1P_2P_3P_4$ is kept unchanged (as a constant V), that is, $vol(P_1P_2P_3P_4) = V$?*

The free points (A_1, A_2, A_3, A_4), the locus point (X) and the linked points (P_1, P_2, P_3, P_4) are defined as in Section 2. The coordinates of these points are also denoted as in section 2. As there, parameters b and e must verify the inequality conditions (1).

For each position of X, the orthogonal projection point P_1 can be determined by two conditions: P_1 is in the face-plane $A_2A_3A_4$ and line XP_1 is orthogonal to this face-plane $A_2A_3A_4$. But, as A_2, A_3, A_4 are non-collinear points, this last condition

is equivalent to the two conditions $XP_1 \perp A_2A_3$ and $XP_1 \perp A_2A_4$. These conditions can, respectively, be expressed by the vanishing of the triple product

$$[\overrightarrow{A_2A_3}, \overrightarrow{A_2A_4}, \overrightarrow{A_2P_1}] = adp_{13} - aep_{12} - dp_{13} + ep_{12} + bep_{11} - be - bp_{13}c + bp_{13};$$

and the vanishing of the two dot products

$$\overrightarrow{XP_1} \cdot \overrightarrow{A_2A_3} = p_{11}a - p_{11} - xa + x + bp_{12} - by;$$

$$\overrightarrow{XP_1} \cdot \overrightarrow{A_2A_4} = p_{11}c - p_{11} - xc + x + dp_{12} - dy + ep_{13} - ez;$$

Then, by solving this linear system of three polynomial equations, the coordinates (p_{11}, p_{12}, p_{13}) of point P_1 are obtained as the unique solution, depending on the parameters a, b, c, d, e.

In the same way, the coordinates (p_{21}, p_{22}, p_{23}) of the point P_2 are obtained as the unique solution of the following linear system of three equations:

$$[\overrightarrow{A_3A_4}, \overrightarrow{A_3A_1}, \overrightarrow{A_3P_2}] = 0 \ , \ \overrightarrow{XP_2} \cdot \overrightarrow{A_3A_4} = 0 \ , \ \overrightarrow{XP_2} \cdot \overrightarrow{A_3A_1} = 0$$

Similarly, the coordinates (p_{31}, p_{32}, p_{33}) of the point P_3 are obtained as the solution of the system:

$$[\overrightarrow{A_4A_1}, \overrightarrow{A_4A_2}, \overrightarrow{A_4P_3}] = 0 \ , \ \overrightarrow{XP_3} \cdot \overrightarrow{A_4A_1} = 0 \ , \ \overrightarrow{XP_3} \cdot \overrightarrow{A_4A_2} = 0$$

and the coordinates (p_{41}, p_{42}, p_{43}) of the point P_4 are obtained as the solution of the system:

$$[\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_3}, \overrightarrow{A_1P_4}] = 0 \ , \ \overrightarrow{XP_4} \cdot \overrightarrow{A_1A_2} = 0 \ , \ \overrightarrow{XP_4} \cdot \overrightarrow{A_1A_3} = 0$$

Now, the volume of the tetrahedron $P_1P_2P_3P_4$, can be calculated by substituting the values of the p_{ij} in (2). After performing such substitution, a rational expression is obtained. Its numerator is the following polynomial, denoted $\psi(x, y, z)$:

$$\psi(x,y,z) = -(e^3xbz - e^2z^2ya^2 - e^3by^2z - e^2by^2a + e^2z^2ad + e^2z^2ya - e^3x^2bz + z^2ad^3 - e^3ayz + 2e^2xy^2ab - e^2xy^2b + e^2y^3a - e^2y^3a^2 - e^2xz^2b - e^2z^2yb^2 + e^2b^2yx + 2e^2xz^2cb - e^2yx^2b^2 - e^2z^2cb + ez^3b^2d + 2e^2z^2ybd + ez^3cb + ey^2za^2d + ez^3a^2d - z^2bcd^2 - a^2d^3z^2 - ey^2zad - ez^3bd^2 - ez^3ad - eyzad^2 + 2edzbay - 2ezxybad - ez^3bc^2 + ezx^2b^2d - ezx^2bd^2 - de^2z^2b^2 + exzbd^2 - eb^2ycz - edzb^2x + 2ezxydbc - ey^2zbc^2 + ey^2zcb - dz^2b^2c^2 - d^2z^2ba + dz^2b^2c + 2z^2ad^2cb - 2yadcebz + e^3b^2yz + b^2yc^2ez + e^3za^2y - e^2z^2a^2d + a^2d^2zey)e^3b^2$$

and its denominator is the polynomial:

$$6 \cdot (d^2+e^2)(a^2e^2 + b^2e^2 + a^2d^2 - 2adbc + b^2c^2)(b^2c^2 - 2ae^2 + a^2d^2 - 2ad^2 - 2bd - 2b^2c + b^2e^2 + 2bad + 2dbc + e^2 + a^2e^2 + d^2 + b^2 - 2adbc)$$

Now, let us proof that this denominator is always non null, in accordance with (1). Its second factor, $(d^2 + e^2)$, is always non null, because $e \neq 0$. Its third factor is also always non null, because it can be expressed as a sum of squares in the form:

$$(a^2e^2 + b^2e^2 + a^2d^2 - 2adbc + b^2c^2) = a^2e^2 + b^2e^2 + (ad - bc)^2$$

and $b \neq 0 \neq e$. Finally, its forth factor is also always non null, because it can be expressed as a sum of squares in the form

$$(b^2c^2 - 2ae^2 + a^2d^2 - 2ad^2 - 2bd - 2b^2c + b^2e^2 + 2bad + 2dbc + e^2 + a^2e^2 + d^2 + b^2 - 2adbc) =$$

$$= (be)^2 + (ae - e)^2 + (ad - bc + b - d)^2$$

and $b \neq 0 \neq e$. Hence, the points X such that the volume is kept unchanged (V) can be expressed (to avoid non integer expression) as the points $X(x, y, z)$ that verify

$$\psi(x,y,z) - 6\cdot(d^2+e^2)(a^2e^2+b^2e^2+(ad-bc)^2)((be)^2+(ae-e)^2+(ad-bc+b-d)^2)\cdot V = 0 \quad (4)$$

In particular, for $a = 0, b = 1, c = 1, d = -1, e = 1$, the polynomial locus is

$$y^2z + 3zx^2 + xy^2 - xy + 2z^3 + yx^2 - yz + z^2 - 72V + 3z^2y - 3xz + 2zxy - xz^2$$

Thus, the following extension to 3D of Simson-Steiner theorem has been obtained.

Theorem 3.1. *Let us consider a tetrahedron $A_1A_2A_3A_4$ in the real Euclidean space $\mathbb{R}^3$. Take an arbitrary point X and consider the orthogonal projections P_1, P_2, P_3, P_4 of X on the face-planes $A_2A_3A_4$, $A_3A_4A_1$, $A_4A_1A_2$, $A_1A_2A_3$ of the tetrahedron, respectively. Then, the locus of the points X such that the volume of the tetrahedron $P_1P_2P_3P_4$ is kept unchanged (as a constant V) is the cubic surface of equation (4).*

4. Extensions to dimensions greater than 3

One can intend to extend the theorems of Sections 2 and 3 to a n-hedron $A_1.....A_n$ (of dimension $n > 3$), in a similar way. In that process, the determinant (2) would be substituted by a determinant of order n and the coordinates of p_{ij} would be linear expressions in the coordinates of the locus point $X(x_1, ..., x_n)$.

Then, computing the geometric locus in a similar way, an homogeneous polynomial expression of degree n on the coordinates of X with parameters depending on the coordinates of the vertices of $A_1.....A_n$ and depending on the parameters which determine the projection directions $\delta_1, ..., \delta_n$ is obtained. As a consequence, the corresponding algebraic surface of the locus would be an algebraic hyper-surface of degree n in the coordinates $x_1, ..., x_n$.

5. Conclusions

Although the geometric loci corresponding to the $2D$ Simson-Seiner and Simson-Guzmán theorems are a circumference and a conic, respectively, when extending these theorems to $3D$, the corresponding loci are not a sphere and a quadric, as one could expect, but cubic algebraic surfaces.

Besides, if the projecting points are coplanar, the vertices of the tetrahedron are singular points of the locus surface and the six border-lines of the tetrahedron are contained in that locus surface. Although it is rather simple to obtain a direct proof of this last property by synthetic methods, the use of coordinates is necessary to determine the locus surface.

If these results are extended to dimension $n > 3$, an algebraic hyper-surface of degree n is obtained.

References

[1] F.G.-M. (Fr. Gabriel-Marie): *Exercises de Géométrie*. Maison, Paris (1912).

[2] H. S. M. Coxeter: *Introduction to Geometry*. John Wiley, New York (1969).

[3] H. S. M. Coxeter and S. L. Greitzer: *Geometry Revisited*. Mathematical Association of America (1967).

[4] M. de Guzmán: An Extension of the Wallace-Simson Theorem: Projecting in Arbitrary Directions. *Mathematical Monthly* 106/6 (1999) 574–580.

[5] D. Kapur: Automated Geometric Reasoning: Dixon Resultants, Groebner Bases and Characteristic Sets. In: D. Wang (ed.): *Proceedings International Workshop on Automated Deduction in Geometry*. Springer-Verlag, LNAI 1360, Berlin-Heidelberg (1997) 1–36.

[6] D. Kapur, J.L. Mundy: Wu's method and its application to perspective viewing. In: D. Kapur and J.L. Mundy (eds.): *Geometric Reasoning*. MIT Press, Cambridge, MA, USA (1989) 15–36.

[7] W. Koepf: Gröbner bases and triangles. *International Journal of Computer Algebra in Mathematics Education* 4/4 (1998) 371–386.

[8] T. Recio, M. P. Vélez: Automatic Discovery of Theorems in Elementary Geometry. *Journal of Automated Reasoning* 23 (1999) 63–82.

[9] E. Roanes Macías, E. Roanes Lozano: Búsqueda Automática de Lugares Geométricos. *Bol. Soc. Puig Adam de Profs. de Matemáticas* 53 (1999) 67–77.

[10] E. Roanes Macías, E. Roanes Lozano: Extensión a $\mathbb{R}^3$ con seudodivisiones de los teoremas de Simson-Steiner-Guzmán. In: *Proceedings of the* 6^{th} *Encuentros de Algebra Computacional y Aplicaciones EACA'2000*. Pub. Univ. Politécnica de Catalunya (2000) 331–340.

[11] E. Roanes Macías, E. Roanes Lozano: Automatic determination of geometric loci. $3D$-Extension of Simson-Steiner Theorem. In: J.A. Campbell, E. Roanes-Lozano(eds.): *Artificial Intelligence and Symbolic Computation. Procs. Intl. Conf. AISC 2000*. Springer LNCS 1930, Berlin-Heidelberg (2001) 157–173.

[12] E. Roanes Macías, E. Roanes Lozano: A Maple Package for Automatic Theorem Proving and Discovery in $3D$-Geometry. In: *Automated Deduction in Geometry, 6th International Workshop, ADG 2006*. Springer-Verlag, LNAI 4689. Berlin-Heidelberg-New York (2007) 171–188.

[13] F. Botana: Automatic Determination of Algebraic Surfaces as Loci of Points. In: *Proceedings of ICCS 2003*. Springer-Verlag LNCS 2657, Berlin-Heidelberg (2003) 879–886.

[14] Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach (MFO): *Surfer - Visualization of algebraic geometry*[1]. Available from URL: `http://www.imaginary-exhibition.com/surfer.php`

[1] *Surfer* is based on the program *Surf* and was developed for the exhibition IMAGINARY. This exhibition was brought to Spain by the RSME in 2011 at the ocassion of its centenary.

Dinámica de curvas cerradas sobre agujeros negros esféricos

José Rojo

Universidad CEU San Pablo
Campus de Montepríncipe (Boadilla)
E-28668-Madrid
jrojo.eps@ceu.es

Dedicado a Juan Tarrés, con gratitud y cariño.

ABSTRACT

Se pretende acercar al lector a algunas características de la teoría de agujeros negros en dimensión n, mostrando el papel central que juegan nociones topológicas (como la de homotopía entre caminos) en la descripción precisa de dichas propiedades y en la discusión rigurosa de su demostración.

Higher-dimensional black holes theory invites to investigate, in some new ways, new properties (hidden to the classical tetradimensional theory), and sometimes, to generalize old properties to the "more-than-four-dimensional" case. This exposition focusses on an interesting property, recently explored by Ida and collaborators: during their evolution, the topology of an spherical n-dimensional black hole cannot change by admitting any "perforation". The mathematical formulation and proof use elementary notions in semi-riemannian geometry and homotopy theory.

Key words: Dimensiones extra, homotopía entre curvas cerradas, topología de agujeros negros.

2010 Mathematics Subject Classification: 83C75, 54F45; 2010 PACS 04.50.Gh.

1. Introducción

Dos resultados clásicos obtenidos por Stephen Hawking [5] sobre la dinámica topológica de agujeros negros en relatividad general (en un espacio-tiempo lorentziano tetradimensional) son:

1. El horizonte de un agujero negro tiene la topología de una esfera.
2. Un agujero negro no puede escindirse en varios (es decir, durante su evolución, no puede bifurcarse en dos o más componentes conexas).

Ha resultado sorprendente descubrir en la última década, al explorar las características de una gravitación relativista sobre universos modelados en espacio-tiempos

de dimensión mayor o igual que 5, que la holgura adicional obtenida como efecto de estas dimensiones extra permite construir, además de los obviamente esperados agujeros negros "de horizonte esférico", varios de otros tipos topológicos (entre otros, de horizonte anular) [2].

La teoría de los agujeros negros con dimensiones extra está propiciando un escenario excitante entre los investigadores, que estimula el trabajo conjunto de físicos y matemáticos, entrelazando disciplinas muy variadas (astrofísica, cosmología, gravitación y relatividad general, geometría diferencial, sistemas dinámicos, simetrías e integrabilidad, mecánica hamiltoniana, topología, etc.).

Este artículo pretende explicar un bello resultado obtenido recientemente por Ida y Okamoto, usando simplemente nociones topológicas sobre homotopía de curvas cerradas: "durante la evolución futura de una región A de un agujero negro, homeomorfa a una n-bola B^n, no resulta posible que aparezca una anillo (homeomorfo a $S^1 \times B^{n-1}$)". La teoría añade, pues, a resultados como el ya citado teorema de no bifurcación de Hawking, una regla topológica más: queda prohibido perforar agujeros negros esféricos n-dimensionales.

Consideremos un agujero negro en un espacio-tiempo n-dimensional. Supongamos que una región A del agujero negro es homeomorfa a una n-bola; el horizonte es su frontera, homeomorfa a una $(n-1)$-esfera. Uno de los modos hipotéticos de obtener un anillo es penetrar en la región a lo largo de un eje, hasta llegar a perforarla. Lo que afirma este teorema de "no perforación" de Ida y Okamoto es que este proceso no puede darse: hay razones topológicas que lo descartan.

¿Cómo formalizar estas "razones"?: estudiando la dinámica de curvas cerradas simples en la región. Si C es una curva cerrada simple en la región A, que encierra en cierto instante inicial t_0 cierto 2-disco de A, diremos que esta región "ha sido perforada" si esta propiedad se pierde más adelante, en algún otro instante posterior a t_0.

En la sección 2 vamos a introducir las hipótesis, ideas intuitivas, notaciones, definiciones y resultados de partida de esta exposición: se recuerdan los rudimentos de la estructura de causalidad en relatividad en dimensión $n \geq 4$. En la sección tercera, enunciaremos y demostraremos este teorema.

2. Conceptos previos

Seguiremos las ideas introducidas en [3] y [5], con las notaciones que allí se usan.

Un espacio-tiempo M es una variedad orientable, Hausdorff, de dimensión mayor o igual que 4, dotada de una métrica lorentziana, orientada temporalmente. Supondremos en adelante que M es asintóticamente llana, dotada de una función-tiempo global.

Vamos a recordar en esta sección, por encima, algunas ideas presentes en la definición de agujero negro que usa Hawking en el ya citado artículo [5].

Si g es la métrica de un espacio-tiempo M, el signo "menos" de su signatura, $(-,+,\ldots,+)$, permite distinguir entre los siguientes tipos de vectores tangentes (distintos del vector cero):

- ν es *temporal* si $g(\nu,\nu) < 0$
- ν es *nulo* si $g(\nu,\nu) = 0$

- ν es *causal* si $g(\nu,\nu) \leq 0$
- ν es *espacial* si $g(\nu,\nu) > 0$.

Una trayectoria trazada sobre M es temporal (o bien nula/causal/espacial) si todos sus vectores tangentes son de ese mismo tipo.

En cada punto $p \in M$ existe un cono de luz, $\{\nu \in T_pM : g(\nu,\nu) = 0\}$, que consta del vector cero y dos semiconos. Que M se pueda orientar temporalmente significa que resulta posible elegir con continuidad a lo largo de todo M uno de estos dos semiconos. Un espacio-tiempo está orientado temporalmente si sobre él se ha realizado tal elección continua. Al interior del semicono elegido en el punto p se le denomina su futuro temporal.

Se dice que dos eventos $p, q \in M$ están relacionados causalmente, $p \leq q$, si existe una trayectoria causal que parte de p y llega a q.

Cuando una función diferenciable $T : M \to \mathbb{R}$ satisface $p < q \Longrightarrow T(p) < T(q)$, se dice que T representa una función tiempo sobre M. En tal caso, podemos dotar a las fibras de M de un orden total que respeta la precedencia causal. Se conocen condiciones suficientes que garantizan la existencia de tal T.

En relatividad se postula una velocidad máxima para las partículas del universo, la velocidad de la luz. Trayectorias nulas en un espacio-tiempo corresponden a movimientos a la velocidad de la luz. Trayectorias temporales, a movimientos de partículas materiales. Geodésicas temporales representan partículas en caída libre.

Las ecuaciones de Einstein,

$$Ric - \frac{1}{2}Rg = \mathcal{T}$$

(donde Ric es el tensor de curvatura de Ricci de g, $R = traza(Ric)$ es su correspondiente curvatura escalar, y $\mathcal{T}$ representa al tensor momento-energía de un modelo material sobre el par (M, g)), gobiernan como debe ser un espacio-tiempo en relatividad general.

El espacio de Minkowski,

$$M = \mathbb{R}^{n+1},\ g = -dx^0 \otimes dx^0 + dx^1 \otimes dx^1 + \cdots + dx^n \otimes dx^n,$$

ya considerado en 1907 (antes de que se formularan las ecuaciones de Einstein) es una de sus soluciones cuando $T = 0$ ("en el vacío"), y describe un universo sin gravitación.

Cualquier solución en el vacío que admita como grupo de isometrías a $O(n)$, es localmente isométrica a $M = \mathbb{R}^2 \times S^{n-1}$, con la métrica de Schwarzschild

$$g = -\left(1 - \left(\frac{r_0}{r}\right)^{n-2}\right) dt \otimes dt + \left(1 - \left(\frac{r_0}{r}\right)^{n-2}\right)^{-1} dr \otimes dr + r^2 h,$$

para algún $r_0 \in \mathbb{R}$, donde h es la métrica esférica usual en S^{n-1}.

Si $r_0 > 0$, entonces r varía sobre el intervalo $(0, r_0)$ (el "interior"), o sobre el intervalo $(r_0, +\infty)$. Añadiendo un "horizonte" (cuando $r = r_0$), podemos unir estas dos regiones, y lo que obtenemos es el modelo del "agujero negro de Schwarzschild". Obsérvese que en este modelo, las líneas integrales de $\frac{\partial}{\partial r}$ en el interior del agujero negro son geodésicas temporales incompletas, pues no pueden prolongarse con continuidad hasta llegar a pasar por la singularidad que aparece cuando $r = 0$.

Un espacio-tiempo que incluye un agujero negro posee, como se ha observado en el caso anterior, dos regiones distintas: el interior ("la región del agujero negro") y el exterior ("el resto del universo"). Se distinguen mediante esta propiedad: los observadores externos están desconectados causalmente de los eventos que suceden en el interior. Físicamente: una vez que ha entrado en el agujero negro, un observador ya no puede enviar señal alguna al mundo exterior.

Consideremos un evento $p \in M$ y el conjunto $J^+(p)$ de todos los eventos que se pueden alcanzar desde curvas causales dirigidas hacia el futuro. Llamaremos a $J^+(p)$ el futuro causal de p. De modo análogo cabe introducir el pasado causal de p, $J^-(p)$.

Si consideramos ahora toda una colección S de eventos de M, podemos extender estos futuros y pasados para definir $J^+(S)$ como la unión de los futuros causales de todos los eventos incluidos en S. De modo análogo, se introduce $J^-(S)$.

Cuando un espacio-tiempo llano no contiene un agujero negro, como ocurre en el espacio de Minkowski, las geodésicas nulas (como los rayos de luz) avanzan escapándose más y más ("hacia el infinito"): en el lenguaje de [5], alcanzan el "futuro nulo infinito", $\mathfrak{F}^+$. Pero si el espacio-tiempo sí incluye un agujero negro, como ocurre en el espacio de Schwarzschild, la región del agujero negro se caracteriza por que todas las curvas causales dirigidas hacia el futuro que parten de ella, fracasan en alcanzar $\mathfrak{F}^+$, pues no llegan al "universo exterior". Así que los eventos del interior del agujero negro no pueden estar en el pasado causal de $\mathfrak{F}^+$. La región A del agujero negro se puede caracterizar como el conjunto de los eventos de M que no están en el pasado causal de $\mathfrak{F}^+$:

$$A = M - \overline{J^-(\mathfrak{F}^+)}.$$

Se dice que un espacio-tiempo es causalmente estable si existe una función diferenciable $T : M \to \mathbb{R}$ tal que su gradiente es temporal (a T la llamaremos función tiempo global).

Una trayectoria $\alpha : (a, b) \to M$ dirigida hacia el futuro causal es "inextendible hacia el futuro" si no existe $\lim_{t \to b} \alpha(t)$.

El dominio de dependencia pasado de $S \subset M$, $D^-(S)$, es el conjunto de todos los $p \in M$ tales que cualquier trayectoria causal inextendible hacia el futuro que comienza en p corta a S. Reemplazando "futuro" por "pasado" podemos introducir $D^+(S)$: es la colección de todos los puntos que se pueden alcanzar desde S avanzando sobre trayectorias causales.

Se dice que el espacio-tiempo es globalmente hiperbólico si, además de ser causalmente estable, se puede construir una función tiempo global cuyas fibras temporales

$$S_t = T^{-1}(t)$$

satisfacen que $M = D^-(S_t) \cup D^+(S_t)$.

En adelante, supondremos que M es un espacio-tiempo globalmente hiperbólico, asintóticamente llano, que posee un agujero negro.

Con estas notaciones, para cada $t \in [0, +\infty)$ se define la región del agujero negro en el instante $T = t$, como

$$A_t = S_t - \overline{J^-(\mathfrak{F}^+)}.$$

Cada A_t es una hipersuperficie (parcial) de Cauchy: es cortada por cada curva causal a lo sumo una vez.

Supondremos, además, que cada S_t es una hipersuperficie diferenciable de M, y que el tiempo fluye diferenciablemente.

Para enunciar el teorema de no perforación, recurriremos a los siguientes términos:

■ Vamos a decir que una curva regular cerrada simple, parametrizada por

$$\alpha : S^1 \to A_t$$

es A-contractible si existe una homotopía

$$h : S^1 \times [0,1] \to A_t$$

entre esta curva y un punto, es decir:

a) $\forall s \in [0,1],\ h(s,0) = \alpha(s)$

b) $h(\cdot, 1) : S^1 \to A_t$ es constante.

■ Dada una curva regular simple cerrada, parametrizada por

$$\alpha : S^1 \to S_{t_i} \quad (t_i \in [0, +\infty)),$$

se dice de otra curva simple cerrada, parametrizada por

$$\alpha' : S^1 \to S_{t_f} \quad \text{donde } t_f > t_i,$$

que es una de sus "descendientes", si existe una superficie S, compacta, lorentziana, embebida en $D^+(S_{t_i})$, cuya frontera es la unión disjunta de $\alpha(S^1)$ y $\alpha'(S^1)$.

3. Discusión del teorema

Estamos ya en condiciones de enunciar y demostrar el "teorema de no perforación", que formularemos del siguiente modo:

"Cada descendiente de una curva regular cerrada simple y A-contractible, es también A-contractible".

En la demostración vamos a recurrir al siguiente bien conocido resultado en geometría lorentziana: todo campo vectorial diferenciable, no singular, definido sobre una subvariedad lorentziana cerrada de M, dirigido hacia el futuro temporal, se puede extender globalmente con diferenciabilidad a M.

Idea de la demostración del teorema:

Consideremos una curva regular simple cerrada, A-contractible, en la región A_{t_i}, parametrizada por

$$\alpha : S^1 \to A_{t_i};$$

existe una homotopía

$$h : S^1 \times [0,1] \to A_{t_i}$$

entre la curva trazada por α y el punto p, imagen de la trayectoria constante

$$S^1 \to \{p\},\ p \in A_{t_i}.$$

Sea, para $t_f > t_i$, $A_{[t_i,t_f]}$ la parte de la región $M - \overline{J^-(\mathfrak{F}^+)}$ del agujero negro situada entre A_{t_i} y A_{t_f}, es decir:

$$A_{[t_i,t_f]} = \{x \in M - \overline{J^-(\mathfrak{F}^+)} : T(x) \in [t_i, t_f]\}.$$

Sea N una superficie lorentziana cerrada, propiamente embebida en $A_{[t_i,t_f]}$, cuya frontera esté formada por $\alpha(S^1)$ y $\alpha'(S^1)$, donde α' parametriza regularmente a una curva regular cerrada simple en A_{t_f}.

Existe un campo vectorial diferenciable, no singular, X, sobre $A_{[t_i,t_f]}$, tangente a N.

Consideremos el difeomorfismo asociado

$$\varphi : A_{t_i} \times [0,1] \to A_{[t_i,t_f]}$$

para el que $\varphi(x,r)$ es el punto en el que la curva integral de X que parte de x, corta a $A_{(1-r)t_i+rt_f}$.

Así, podemos considerar la curva descendiente de la trazada por α, trazada por $\alpha' : S^1 \to A_{t_f}$, definida por

$$\alpha'(s) = \varphi(\alpha(s), 1)$$

Consideremos ahora la función continua

$$h' : S^1 \times [0,1] \to A_{t_f}$$

tal que

$$h'(s,u) = \varphi(h(s,u), 1).$$

Como se cumple

$$\begin{array}{lrcl} a) & h'(s,0) & = & \alpha'(s) \\ b) & h'(s,1) & = & \varphi(p,1) \end{array}$$

resulta que h' es una homotopía entre curvas cerradas en A_{t_f}, que deforma continuamente α' sobre la aplicación constante de imagen el punto $p' = \varphi(p,1)$.

Por lo tanto, la curva trazada por α', descendiente de la trazada por α, es también A-contractible.

References

[1] CARTER, B. Half Century of black hole theory: from physicists purgatory to mathematicians paradise. A century of relativity physics, American Institute of Physics, 2006.

[2] EMPARAN, R., REALL, H. Black holes in higher dimensions, Livings reviews in relativity 11, 2008.

[3] GALLOWAY, G.J., SCHOEN, R. A generalization of Hawking's black hole topology theorem to higher dimensions, Commun. Math. Phys. 571, 2006.

[4] GALLOWAY, G.J., Spacetime Geometry, Summer School Beijing International Mathematics Research Center, 2007.

[5] HAWKING, S.W., Black holes in general relativity, Commun. Math. Phys. 25, 1972.

[6] HAWKING, S.W., ELLIS, G.FR., The large scale structure of space-time, Cambridge University Press, 1973.

[7] IDA, D., SIINO, M., Topology change of black holes, Prog. Theor.Phys. 118, 2007.

[8] IDA, D., On the topology of black lenses, Prog. Theor. Phys. 122, 2010.

[9] ROBINSON, D.C., Four decades of black hole uniqueness theorems, The Kerr space time: rotating black holes in general relativity, pp 115-143, Cambridge University Press, 2009.

[10] ROJO, J. De Dido a Penrose, pasando por Minkowski, Divulgamat, 2009.

[11] ROJO, J. ¿Dimensiones extra?, aparecerá en Pensamiento matemático, vol.4, UPM.

Teodoro Ardemans, Benito Bails y Ramón Pignatelli, tres grandes matemáticos y arquitectos del siglo XVIII

Concepción Romo Santos

Departamento de Álgebra
Facultad de Ciencias Matemáticas
Universidad Complutense de Madrid
E-28040 Madrid, Spain
romosan@mat.ucm.es

Es para mí un honor colaborar en este entrañable homenaje organizado con motivo de la jubilación del excelente profesor D. Juan Tarrés. Él ha dejado una huella imborrable en sus alumnos y en sus compañeros que siempre le recordaremos con gran cariño y gratitud.

ABSTRACT

This work is a tribute to three famous mathematicians and architects of the 18^{th} century: Teodoro Ardemans, Benito Bails and Ramón de Pignatelli.

RESUMEN

Este trabajo es un homenaje a tres grandes matemáticos y arquitectos del siglo XVIII: Teodoro Ardemans, Benito Bails y Ramón de Pignatelli.

Key words: Ardemans, Bails, Pignatelli.

2010 Mathematics Subject Classification: 01A50.

1. Teodoro Ardemans, el gran arquitecto madrileño del siglo XVIII

Teodoro Ardemans, contemporáneo de Churriguera y Ribera, hombre de extensa cultura, consiguió elevarse a los empleos más importantes, siendo en pocos años Maestro Mayor de las Catedrales de Granada y de Toledo, Maestro Mayor de la Villa de Madrid, Maestro y Trazador Mayor de las Obras Reales, Fontanero Mayor de Madrid, Pintor de Cámara de Felipe V y su Arquitecto Real.

La publicación por parte de Teodoro Ardemans de su "Declaración y extensión sobre las Ordenanzas que escribió Juan de Torija"(Madrid, Francisco del Hierro 1.719) tuvo una gran acogida entre los profesionales del sector y hoy mismo las Ordenanzas Municipales son deudoras del esfuerzo acometido por Juan de Torija y por Teodoro Ardemans hace más de 200 años.

1.1. Breve historia de las Ordenanzas de Madrid.

La planificación del espacio urbano ha sido organizada desde los tiempos más remotos por las autoridades que representan y gobiernan la colectividad.

En el caso de las Ordenanzas de Madrid, que comienzan con Alfonso VIII, en el Fuero de Madrid, 1.202, con disposiciones para la limpieza de las calles y reconstrucción de las murallas, hay que esperar hasta mediados del siglo XVII para que Juan de Torija publique su libro "Tratado breve, sobre las ordenanzas de la villa de Madrid y policía de ella"(1 edición 1.661) , obra que fue reeditada cuatro veces más (1.664, 1.728, 1.754, 1.760). La impresión del volumen de Teodoro Ardemans, "Declaración y extensión, sobre las ordenanzas que escribió Juan de Torija, Aparejador de las Obras Reales y de las que se practican en las ciudades de Toledo y Sevilla ", 1 edición, 1.719, reeditada siete veces más en el siglo XVIII y cinco más en el siglo XIX, es muestra, de la necesidad que sentían los arquitectos, alarifes y propietarios de poseer una normativa. En 1.847 se elaboraron "Las Nuevas Ordenanzas de Madrid". En la segunda mitad del siglo XIX, se publicaron "Las Leyes de Ensanche"de 1.864, 1.876, 1.892 y "Mejora y Reforma interior de las grandes poblaciones"suponían toda una teoría de lo urbano y tenían un sentido sistemático de la planificación de la ciudad.

1.2. Las Ordenanzas de Madrid de Juan de Torija.

Torija decidió acometer la formación de unas ordenanzas de policía urbana para Madrid, dio a la imprenta su tratado en 1.661.

Torija se aplicó a recopilar, ordenar y sistematizar todas las noticias recabadas sobre la materia, adecuándolas a la situación del tiempo actual. Su obra no es un tratado fiel de las ordenanzas antiguas, pero su estructura denota que se sirvió de ellas para fundamentar su texto. De hecho, si comparamos las Ordenanzas de Alarifes de Sevilla y de Toledo en el Tratado Breve sobre las Ordenanzas de la Villa de Madrid, podemos observar que, en líneas generales, todas se articulan de la siguiente manera:

Primero.- Particularidades de los alarifes.

Segundo.- Servidumbres de aguas.

Tercero.- Servidumbres inmobiliarias y viales.

Cuarto.- Arreglos judiciales entre partes.

Quinto.- Servidumbres de seguridad.

Madrid en el siglo XVII

1.3. Las Ordenanzas de Madrid de Teodoro Ardemans.

Teodoro Ardemans escribió el siguiente tratado : "Declaración y Extensión sobre las Ordenanzas, que escribió Juan de Torija, Aparejador de Obras Reales, y de las que se practican en las ciudades de Toledo y Sevilla, con algunas advertencias a loa Alarifes y Particulares y otros capítulos añadidos a la perfecta inteligencia de la materia, que todo se cifra en el Gobierno Político de las Fábricas". Dedicado a la muy noble Leal y Coronada Villa de Madrid, por D. Teodoro Ardemans. Con Privilegio. En Madrid por Francisco del Hierro, año de 1.719.

Este proyecto de ordenanzas consta de 27 capítulos. Su objetivo era enmendar los errores cometidos por Torija, ampliando su texto y actualizándolo.

Su idea principal es "que la Arquitectura es un racional e intelectual orden de edificar, obra del entendimiento y no de la materialidad del ejercicio y el Arquitecto Príncipe de los Subalternos, a quienes instruye, da la regla de cómo han de fabricar, obrando en aquél la razón y en éste sólo la obediente operación de las manos".

Ardemans era versado en el dibujo, en las matemáticas, en la geometría y en la perspectiva. Estudió las matemáticas y arquitectura en el Colegio Imperial de los jesuitas siendo su profesor el padre José de Zaragoza y Vilanova, catedrático de Matemáticas (quien enseñó también Matemáticas a Carlos II).

Estudiaremos con detenimiento algunos de los capítulos del tratado de Ardemans.

Advertencias sobre la construcción de inmuebles.

Con más intención moral y especulativa que práctica, Ardemans inicia su camino de advertencias para la construcción de inmuebles con un breve discurso sobre la elección del sitio adecuado. Su afán primero por fundamentar sus noticias en la autoridad de los clásicos, le lleva a ampararse en los textos de Alberti y de Plinio.

Fueron de gran interés para los alarifes madrileños del siglo XVIII – y para la misma policía urbana – las normas que establece en el capítulo I de su tratado : "De lo que se ha de hacer antes de empezar una fábrica en Madrid".

Cualquier vecino que quisiera fabricar una casa debería formar "una planta y demostración de la fachada", redactar un informe explicativo y remitir ambos documentos al secretario más antiguo de la Villa.

Sobre la configuración vertical de la ciudad, Ardemans se refiere a los edificios de cuatro plantas como los apropiados para Madrid.

1.4. La seguridad ciudadana. El concepto de arrabal de Teodoro Ardemans

Una vez analizada la definición vertical de la ciudad en el tratado sobre Ordenanzas de Policía Urbana de Teodoro Ardemans y las prevenciones que estimaba necesarias para la construcción de inmuebles, es preciso que conozcamos sus ideas sobre la configuración horizontal de Madrid, ligada al concepto de seguridad pública.

En los capítulos XXV y XXVI Torija se ocupó de los hornos, chimeneas y hogares domésticos y no pudiendo prohibir su uso por razones obvias, enunció unas pautas elementales de fabricación destinadas a garantizar su disfrute en condiciones mínimas de seguridad.

De una forma todavía muy somera, el tratadista plantea la necesidad de alejar los oficios peligrosos del centro representacional de la ciudad, atendiendo a criterios urbanísticos que ampliará y renovará Teodoro Ardemans.

El fuego era el gran enemigo, no sólo de Madrid, sino de todas las ciudades españolas y europeas del momento. En la mente de todos está el incendio que destruyó Londres. Todo esto aconsejaba la segregación de oficios peligrosos. A ello dedicó Teodoro Ardemans el capítulo X de su Tratado: "Cómo se deben fabricar los hornos sin perjuicio del vecino".

Una actitud similar mantiene en el capítulo XVIII al tratar "De las fraguas, y diferentes oficios, y dónde convendrán fabricarse, sin que sirvan de perjuicio al vecino".

El arquitecto madrileño distinguió tres áreas urbanas bien contrastadas dentro de la Villa y Corte: la primera y principal abarcaba el Sitio del Alcázar Real y su entorno, la Plaza Mayor y las cinco arterias más importantes de Madrid (calles de Toledo, Fuencarral, Atocha, Segovia y Alcalá). Era el centro representacional de la ciudad, conformado por los mejores edificios públicos y privados, y en él sólo deberían instalarse, en consecuencia, las instituciones, casas, templos y comercios más relevantes. Una zona secundaria – comercial y de vivienda – se extendía por las barriadas intermedias comprendidas entre las cinco calles anchas, mientras que un último sector cerraba los confines del conjunto urbano sin exceder los límites impuestos por la cerca. Aquí es dónde tendrían que agruparse las industrias consideradas peligrosas o perjudiciales para la salud de la población, "por cuya razón - dice Ardemans -debieran todas vivir en un barrio destinado para ello, que la pasión de ser su mismo ejercicio, les hace sufrir con gusto lo que en otros es molestia; y ya que el uso tiene contraído el que viven sumamente divididos, debe ser en los Arrabales, dónde no haya casas altas, ni estrechas, y están menos sujetas a incendios"(Cap. XVIII).

1.5. Vigencia de las Ordenanzas de Teodoro Ardemans

De corte desgraciada calificaba a Madrid, en 1.746, un buen conocedor de sus problemas, el Marqués de Ustáriz. La razón no era otra que la carencia de unas Ordenanzas Municipales que reglaran los usos constructivos y el desarrollo urbano de una Villa tan señalada por la Historia. Debido a las circunstancias que ya conocemos, Madrid no contaba entonces con otro código para gobernar sus fábricas que las propuestas ordenancistas de Juan de Torija y de Teodoro Ardemans, cuya aplicación formal estuvo siempre rodeada de polémica, subsanando y agravando a la vez un problema viejo de difícil solución. Y decimos subsanando y agravando porque, de un lado, compendiaba los usos y costumbres de la edilicia madrileña, actualizando las normas dictadas al respecto por los organismos municipales y estatales competentes; pero, de otro, no pasaban de ser meras propuestas particulares a un asunto oficial y como tales carecían del respaldo jurídico necesario. Sólo tenían fuerza moral y, en función de ello, se invocó su existencia para dirimir los litigios planteados durante mucho tiempo. Mientras tanto, el Ayuntamiento y el Consejo de Castilla se enzarzaron en interminables discusiones jurisdiccionales que, a la postre, sólo restaban posibilidades de dignificación a la Villa y Corte y retrasaban la resolución del problema.

Sólo un año después de la aparición del tratado de Ardemans tuvieron que volver las planchas a la imprenta y luego volvió a hacerse periódicamente, con una frecuencia muy significativa, en 1.754, 1.760, 1.765, 1.768, 1.791, 1.796, 1.798, 1.820, 1.830, 1.844, 1.848, 1.866. Paralelamente a la reedición hubo varios intentos oficiales de formar unas Ordenanzas de Alarifes competentes y exentas de polémica. El primero data de 1.739, luego en 1.755, 1.786.

El tratado de Ardemans se fue desfasando y, en los últimos tiempos, ni siquiera su contenido técnico respondía a las necesidades de la nueva arquitectura pública y privada. En especial, porque, lógicamente no recogía las disposiciones del reinado de Carlos III sobre policía urbana y otras posteriores. No es extraño, por tanto, que el Consejo volviera a solicitar a la Academia la formación de unas Ordenanzas municipales competentes, a principios ya del siglo XIX. Hubo entonces ya varios intentos y es muy significativo, el de 1.813. Desde diciembre de dicho año hasta febrero de 1.819 se reunió periódicamente una "Junta de Comisión de Ordenanzas Facultativas", estudiaron uno a uno los capítulos del tratado de Ardemans, actualizando su contenido pero fracasó la iniciativa, también fracasaron otras posteriores de 1.828, 1.833 y 1.842, aunque esto no resta importancia a la labor de Ardemans, cuya valoración no debe hacerse desde presupuestos estáticos ó teóricos, sino desde otros más cercanos a la Historia del Derecho Urbanístico en Madrid.

Su escrito debe considerarse como un instrumento práctico que el autor puso al servicio de los profesionales de la arquitectura para facilitar el aspecto más servil de su tarea y para regular la condición política y social de esta disciplina, es decir, la derivada de la función que desempeña en el seno de una comunidad de vecinos. En su texto se encontraba la respuesta a muchos de los problemas rutinarios que entorpecían el ejercicio de esta profesión, problemas comunes sobre servidumbres humanas y otras cuestiones técnicas que todavía hoy se regulan en las Ordenanzas Municipales, deudoras en este sentido del esfuerzo acometido por Juan de Torija y por Teodoro Ardemans hace más de 200 años.

Teodoro Ardemans, una puerta con las Armas Reales de España

2. Benito Bails. EL introductor del Cálculo Infinitesimal en España

Benito Bails nació en 1.730 en San Adrián de Besós (Barcelona) y murió en Madrid en 1.797. Fue académico de número de las Reales Academias Españolas, de Historia y de Ciencias Naturales y Artes de Barcelona. Se caracterizó por su defensa del copernicanismo junto con Jorge Juan, Feijoo, Celestino Mutis y José Mendoza y Ríos. Aunque el motivo no está aclarado, es posible que esto influyera en su destierro a Granada al final de su vida, aunque luego fue indultado.

Bails introdujo didácticamente en España el cálculo infinitesimal, junto con la geometría analítica. Sus Elementos de Matemática fue una obra de gran importancia que sirvió de texto en numerosos centros y fue estudiada por casi todos los matemáticos españoles de fines del siglo XVIII.

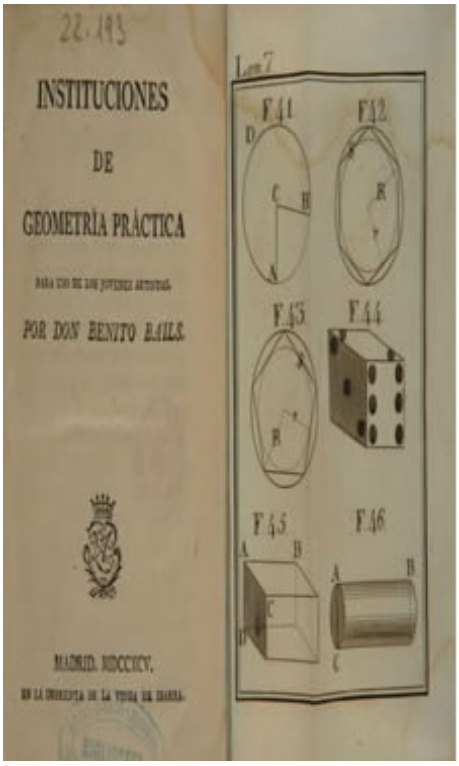
El tomo IX de esta obra es la Arquitectura Hidráulica, en ella habla de la navegación interior en España y elogia al Canal Imperial de Aragón y a su impulsor Pignatelli.

Un ejemplar de la obra "Elementos de Matemática. Arquitectura Hidráulica"de Benito Bails se encuentra en el Seminario Mayor Diocesano de Valladolid. Se imprimió en Madrid en 1.790 en la imprenta de la viuda de Joaquín Ibarra.

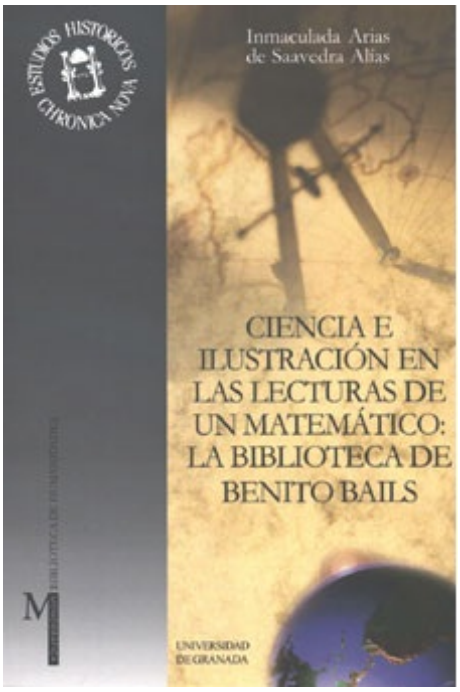
Benito Bails es uno de los científicos más importantes de la España del siglo XVIII. Amigo de Campomanes, Aranda, Roda y del secretario de Estado Ricardo Wall. Su actividad intelectual más importante la realizó en la Real Academia de Bellas Artes de San Fernando, de cuya cátedra de Matemáticas, destinada a los alumnos de Arquitectura, fue titular desde su fundación en 1.768 hasta su muerte.

Es autor de importantes obras entre las que destacan sus "Principios de Matemáticas"(1.776), en tres volúmenes y sobretodo sus "Elementos de Matemáticas "en 11 volúmenes que no sólo comprenden las matemáticas en sentido estricto (aritmética, geometría, trigonometría, álgebra, cálculo infinitesimal), sino que también comprende materias de física (dinámica, óptica, astronomía) y arquitectura. Se trata de una gran obra de recopilación que dio a conocer en España el estado de la ciencia europea del momento, a través de este enciclopédico tratado, que se convirtió en obra de referencia obligada durante bastantes años.

Pero Benito Bails, no se ocupó solamente de las materias propias de su actividad docente, sino que tradujo obras de música, editó obras de medicina e higiene pública. Su vida transcurrió dedicada al estudio y a la enseñanza y en sus últimos años, cuando sufría serios problemas de salud, fue acusado ante la Inquisición de poseer libros prohibidos y de sostener proposiciones materialistas y ateas en sus clases. Benito Bails sufrió prisión y destierro de la corte, pero finalmente en atención a su edad y salud y gracias a sus importantes valedores le fue conmutada parte de la pena y podría regresar a la corte, donde murió poco después .



Geometría práctica de Benito Bails



Libro sobre la biblioteca de Benito Bails

3. Ramón de Pignatelli. El gran aragonés del siglo XVIII

Ramón de Pignatelli (1.734-1.793) fue canónigo del cabildo catedralicio, Rector de la Universidad de Zaragoza en varias ocasiones, Protector del Canal Imperial de Aragón (1.772-1.793) que él llevó a cabo, fundador y director de la Real Sociedad Económica de Amigos del País (1.782), además de ser el autor de la construcción de la Plaza de Toros en 1.764, bautizada con el nombre de Coso de la Misericordia, pues su finalidad fue recaudar dinero para mantener la Real Casa de la Misericordia, el Hospicio de los niños cuyas mejoras apoyó el arzobispo Juan Sáenz de Buruaga (1.768-1.777) permitiendo trabajar a todos los que quisieran en dicha obra los días de fiestas de guardar "con tal de que no lleven estipendio alguno por su trabajo".

Ramón Pignatelli fue muy querido y elogiado por sus contemporáneos. En 1.796 se imprimieron en su honor los dos libros siguientes "Elogio de Ramón de Pignatelli por la Real Sociedad Económica Aragonesa de Amigos del País", escrito por el conde de Sástago y el "Elogio fúnebre del señor D. Ramón Pignatelli"escrito por Juan Agustín García. En el palacio arzobispal de Zaragoza se encuentran estos libros aunque proceden de la iglesia parroquial de S. Miguel.

Ramón de Pignatelli

Heráldica de Aragón

Referencias

[1] Ardemans, T., "Declaración y extensión sobre las Ordenanzas que escribió Juan de Torija, Aparejador de Obras Reales, y de las que se practican en Toledo, y en Sevilla, con algunas advertencias a los Alarifes, y Particulares, y otros capítulos añadidos a la perfecta inteligencia de la materia; que todo se cifra en el Gobierno Político de las Fábricas". Madrid. Francisco del Hierro. 1.719.

[2] Ardemans, T. "Fluencias de la Tierra, y Curso Subterráneo de las Aguas". Madrid. Francisco del Hierro. 1.724.

[3] Blasco Esquivias, Beatriz., "Arquitectura y Urbanismo en las Ordenanzas de Teodoro Ardemans para Madrid". Ayuntamiento de Madrid. 1.992.

[4] Romo Santos, C., "EL espejo de nuestra historia: los grandes matemáticos aragoneses". Revista Academia de Ciencias de Zaragoza 47 (1.992).

[5] Romo Santos, C., "Desarrollo de la actividad matemática en la diócesis cesaraugustana". Revista de la Academia Canaria de Ciencias V (n^o. 1). 1.993.

[6] Torija, J. de, "Tratado breve sobre las Ordenanzas de la Villa de Madrid, y Policía della". Madrid. Pablo del Val. 1.661.

Calibración euclídea a partir de longitudes de segmentos

José I. Ronda y Antonio Valdés

Grupo de Tratamiento de Imágenes
Universidad Politécnica de Madrid
E-28040 Madrid, Spain
jir@gti.ssr.upm.es

Departamento de Geometría y Topología
Universidad Complutense de Madrid
E-28040 Madrid, Sapin
avaldes@mat.ucm.es

En homenaje al Prof. Juan Tarrés Freixenet, con motivo de su jubilación.

ABSTRACT

En este trabajo se trata el problema de la recuperación de la estructura euclídea de un espacio n-dimensional distorsionado proyectivamente usando únicamente el conocimiento de las longitudes de una colección de segmentos. Este problema es de interés, en particular, para la reconstrucción euclídea con cámaras no calibradas, extendiendo resultados previos en el marco afín. La idea central se basa en que el conjunto de segmentos de una longitud fija está dado por una cuádrica de un espacio proyectivo de dimensión mayor, la cuádrica de los segmentos (QoS), a partir de la cual puede recuperarse la estructura euclídea mediante expresiones explícitas. Hemos intentado hacer un estudio detallado de las propiedades de la QoS, incluyendo el cálculo del mínimo número de segmentos de longitud arbitraria que la determinan y su relación con los objetos geométricos usuales asociados con la estructura euclídea del espacio. Se dan fórmulas explícitas para obtener la cuádrica dual del absoluto y el complejo cuadrático absoluto a partir de la QoS. Se incluyen experimentos con imágenes reales y sintéticas que evalúan el rendimiento de las técnicas propuestas.

We address the problem of the recovery of Euclidean structure of a projectively distorted n-dimensional space from the knowledge of the, possibly diverse, lengths of a set of segments. This problem is relevant, in particular, for Euclidean reconstruction with uncalibrated cameras, extending previously known results in the affine setting. The key concept is the Quadric of Segments (QoS), defined in a higher-dimensional space by the set of segments of a fixed length, from which Euclidean structure can be obtained in closed form. We have intended to make a thorough study of the properties of the QoS, including the determination of the minimum number of segments of arbitrary length that determine it and its relationship with the standard geometric objects associated to the Euclidean structure of space. Explicit formulas are given to obtain the dual absolute quadric and the absolute quadratic complex from the QoS. Experiments with real and synthetic images evaluate the performance of the techniques.

Key words: Calibración de cámaras, actualización euclídea, reconstrucción 3D; Camera calibration, Euclidean upgrading, 3D reconstruction.

2010 Mathematics Subject Classification: 68T45, 51N15.

1. Introducción

Una estrategia estándar para la reconstrucción tridimensional a partir de imágenes cuando los parámetros internos de la cámara son desconocidos comienza con el cálculo de una reconstrucción proyectiva de la escena, es decir, una reconstrucción tridimensional distorsionada mediante una homografía espacial desconocida. Este paso debe ser seguido de una actualización euclídea, para la cual es necesario tener algunos datos adicionales. Esto ha hecho que el problema de la recuperación de la estructura euclídea de un espacio proyectivamente distorsionado haya recibido una atención considerable [10, 22, 20, 11, 7, 12, 6, 2, 8].

La actualización euclídea puede ser obtenida a partir de las propiedades geométricas de objetos físicos o de entidades geométricas que se hayan podido identificar en la escena. Los métodos de autocalibración se basan en el uso de objetos geométricos que pueden ser determinados en el caso de que las cámaras satisfagan ciertas restricciones. Por ejemplo, cada cámara con punto principal y oblicuidad (skew) conocida proporciona tres planos ortogonales dos a dos que pueden usarse para calcular la estructura euclídea del espacio [19], o cada cámara con oblicuidad y razón de aspecto conocida proporciona dos rectas que pasan por el centro óptico que se intersecan en la cónica del absoluto y que pueden usarse para el mismo propósito [12].

Otras aproximaciones a la reconstrucción 3D a partir de imágenes hacen uso de diferentes objetos de calibración para calcular los parámetros extrínsecos e intrínsecos de las cámaras a fin de obtener la reconstrucción. El método más clásico para calibrar cámaras utiliza de un patrón de calibración [23] que consiste en un objeto del cual se conocen con precisión respecto a un sistema de referencia asociado al objeto las coordenadas 3D de ciertos puntos. Existen diferentes técnicas que intentan relajar las condiciones impuestas al objeto 3D, tales como el método de calibración de Zhang [28], en el cual solamente son necesarias dos vistas diferentes de un tablero de ajedrez para calcular los parámetros intrínsecos de la cámara. Otras alternativas hacen uso de una varilla móvil con tres puntos marcados en posiciones relativas conocidas, uno de ellos fijo [29], o de tres varillas ortogonales con marcas [14]. También se ha propuesto el uso de esferas [1, 27] o superficies de revolución [26].

En este artículo suponemos que son conocidas las longitudes de un conjunto de segmentos de la escena. Un ejemplo importante es el de un conjunto de cámaras que graban uno o más segmentos rígidos. Esta es una situación de interés práctico, por ejemplo en escenas en las que aparecen extremidades de cuerpos humanos [21].

Este problema ha sido considerado anteriormente en el marco afín [9], en el cual se supone conocida una reconstrucción afín de la escena. El caso proyectivo, más general, no ha sido considerado en la literatura de visión por ordenador. En este trabajo suponemos que existe una reconstrucción proyectiva y mostramos cómo la geometría euclídea puede ser completamente recuperada a partir del conocimiento de longitudes de segmentos. Este problema es más complicado, incluso en el caso bidimensional, dada la alta no linealidad de las ecuaciones que relacionan los puntos circulares del infinito con la métrica [15, Eq. 22].

Hemos optado por hacer un tratamiento n-dimensional más general, que unifica los casos plano y espacial. Primero introducimos un espacio geométrico adecuado para representar los segmentos, identificando un segmento con una cuádrica dual degenerada de rango ≤ 2. Por tanto, los segmentos resultan ser una variedad algebraica de

$\mathbf{P}^N$, $N = (n+1)(n+2)/2 - 1$. Veremos que los segmentos de longitud fija d están determinados por una única cuádrica $\mathtt{C}$ de $\mathbf{P}^N$, que llamaremos *cuádrica de segmentos* (QoS) la cual se descompone naturalmente como una suma $\mathtt{C} = \mathtt{C}_1 + \frac{d^2}{2}\mathtt{C}_2$, en la cual la cuádrica $\mathtt{C}_2$ codifica la geometría afín del espacio, mientras que $\mathtt{C}_1$ determina la geometría euclídea, salvo un factor de escala. El par $(\mathtt{C}_1, \mathtt{C}_2)$ determina también la escala, salvo un signo, es decir, la geometría euclídea salvo una simetría especular.

El espacio de cuádricas de $\mathbf{P}^N$ veremos que se descompone en dos subespacios ortogonales, uno generado por las posibles matrices $\mathtt{C}_1$ y el otro por las posibles $\mathtt{C}_2$. Esta descomposición permite optimizar el número de segmentos necesarios para calcular la QoA en el algoritmo lineal que proponemos, de forma que

$$(N+1)(N+2)/2 - 1$$

segmentos de longitud conocida serán suficientes.

Proporcionamos fórmulas explícitas para recuperar el hiperplano del infinito a partir de $\mathtt{C}_2$ y para recuperar al cuádrica absoluta dual $\mathtt{Q}^*_\infty$ a partir de $\mathtt{C}_1$. Finalizamos las contribuciones teóricas del artículo estudiando la relación entre la QoS y la cuádrica absoluta dual (AQC)) [13, 16, 24], mostrando que $\mathtt{C}_1$ y la AQC son objetos esencialmente equivalentes.

El trabajo concluye con los resultados experimentales, tanto para imágenes reales como sintéticas, evaluando el rendimiento de las técnicas propuestas y mostrando la viabilidad de este enfoque. Este artículo es una versión en castellano de [18].

2. Preliminares y notaciones

Suponemos que las cámaras están modeladas [4] mediante la ecuación $\mathbf{q} \sim P\mathbf{Q}$, donde $\mathbf{Q} = (x, y, z, t)^T$ denota las coordenadas euclídeas homogéneas de un punto espacial, $\mathbf{q} = (u, v, w)^T$ denota las coordenadas homogéneas de un punto en la imagen, y P es una matriz 3×4. Recordemos que es posible obtener una calibración proyectiva con tan solo correspondencias entre puntos de las imágenes (véase [4]). Esto significa que, dado un conjunto de puntos proyectados $\mathbf{q}_{ij}$ obtenidos con N cámaras, $N \geq 2$, podemos obtener un conjunto de matrices $\hat{P}_i$ y un conjunto de coordenadas de puntos $\hat{\mathbf{Q}}_j$ tales que $\mathbf{q}_{ij} \sim \hat{P}_i\hat{\mathbf{Q}}_j$, donde $\hat{P}_i = P_iH^{-1}$ y $\hat{\mathbf{Q}}_j = H\mathbf{Q}_j$ para cierta matriz no singular 4×4, H.

La *calibración euclídea* puede ser definida como la obtención de una matriz H que cambia las coordenadas proyectivas de una calibración proyectiva a algún sistema de coordenadas euclídeo. El objetivo de este trabajo es obtener una calibración euclídea a partir del conocimiento de longitudes de segmentos. Es bien conocido que la calibración euclídea, salvo un factor de escala, es equivalente a la recuperación de la cónica absoluta del infinito Ω_∞ o cualquiera de los objetos geométricos equivalentes, tales como la cuádrica absoluta dual $\mathtt{Q}_\infty$ [22] o el complejo cuadrático absoluto Σ [13, 16, 24].

Análoga a la calibración euclídea es la noción de *calibración afín*. En el caso de que la estructura de la escena es conocida salvo una transformación afín. Las calibraciones afines se obtiene, en particular, cuando tenemos *cámaras afines* [4, p. 173].

Supongamos que conocemos las longitudes d_i de un conjunto de segmentos $\{\mathbf{X}_i, \mathbf{Y}_i\}$ en una reconstrucción proyectiva del espacio sin otra estructura particular. Deseamos

determinar una actualización euclídea a partir de este conocimiento. Este problema ha sido resuelto en el caso afín mediante el cálculo de un *ajuste afín*, consistente en la determinación que transforma el conjunto de segmentos de forma que sus longitudes son tan cercanas como sea posible, en el sentido de mínimos cuadrados, a los valores dados [9]. La matriz de una afinidad $\mathtt{U}$ es obtenida a partir de la matriz $\mathtt{U}^\top\mathtt{U}$ resolviendo el problema mínimos cuadrados mediante factorización de Cholesky.

3. Representación geométrica de segmentos

Dado un segmento $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}$ definimos la matriz simétrica

$$\mathtt{S} = \mathtt{S}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}\mathbf{y}^\top + \mathbf{y}\mathbf{x}^\top = (x_i y_j + x_j y_i) = (z_{ij}). \tag{1}$$

La matriz $\mathtt{S}$ puede ser interpretada como la cuádrica dual dada por todos los hiperplanos que pasan por $\mathbf{x}$ o por $\mathbf{y}$. Su rango es dos en tanto que $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ sean puntos diferentes, siendo uno en otro caso. Nótese que esta construcción es la contrapartida simétrica de la inmersión de Segre para la representación de pares ordenados [3, p. 25].

Teorema 3.1. *La aplicación* $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} \mapsto \mathtt{S}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ *identifica los segmentos no orientados con matrices simétricas* $(n+1) \times (n+1)$ *de rango* ≤ 2.

Demostración. Es suficiente con definir la aplicación inversa de $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} \mapsto \mathtt{S}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, así que sea $\mathtt{S}$ una matriz simétrica de rango dos y comprobemos que existen $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ únicos tales que $\mathtt{S} = \mathtt{S}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. Suponemos que $\operatorname{rango} \mathtt{S}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 2$, siendo el caso de rango uno trivial. Como $\mathtt{S}$ es de rango dos y simétrica, existe un cambio de coordenadas $\mathtt{H}$ tal que $\mathtt{H}^\top \mathtt{S} \mathtt{H} = \operatorname{diag}(1, 1, 0, \ldots, 0)$. Definamos $\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0 = (1, \pm i, 0, \ldots, 0)^\top$. Es inmediato comprobar que $\mathbf{x} = \mathtt{H}\mathbf{x}_0$, $\mathbf{y} = \mathtt{H}\mathbf{y}_0$ son los vectores buscados. Respecto a su unicidad, notemos primero que $\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0$ son, salvo escala, los únicos vectores tales que $\mathbf{x}^0 {\mathbf{y}^0}^\top + \mathbf{y}^0 {\mathbf{x}^0}^\top \sim \operatorname{diag}(1, 1, 0, \ldots, 0)$, como puede probarse fácilmente. Por tanto $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ son también únicos, dado que la existencia de otro par $\mathbf{x}', \mathbf{y}'$ con $\mathtt{S}(\mathbf{x}', \mathbf{y}') = \mathtt{S}$ nos llevaría a la existencia de $\mathbf{x}'_0 = \mathtt{H}^{-1}\mathbf{x}'$ y $\mathbf{y}'_0 = \mathtt{H}^{-1}\mathbf{y}'$ con $\mathtt{S}(\mathbf{x}'_0, \mathbf{y}'_0) = \mathtt{S}_0$. □

Será útil dotar al espacio de matrices simétricas con el producto dado por

$$\langle \mathtt{A}, \mathtt{B} \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{trace}(\mathtt{A}\mathtt{B}). \tag{2}$$

Usando la definición de $\mathtt{S}$ y la igualdad $\operatorname{trace}(\mathtt{A}\mathtt{B}) = \operatorname{trace}(\mathtt{B}\mathtt{A})$ puede ser comprobado fácilmente que este producto escalar satisface

$$\langle \mathtt{S}(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \mathtt{S}(\mathbf{w}, \mathbf{z}) \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle \langle \mathbf{v}, \mathbf{z} \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{z} \rangle \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle . \tag{3}$$

Dada una matriz simétrica $\mathtt{A} = (z_{ij})$ definimos

$$\nu(\mathtt{A}) = \left(\frac{z_{00}}{\sqrt{2}}, \frac{z_{11}}{\sqrt{2}}, \ldots, \frac{z_{nn}}{\sqrt{2}}, z_{01}, z_{02}, \ldots, z_{0n}, z_{12}, \ldots, z_{1n}, z_{23}, \ldots, z_{2n}, \ldots, z_{n-1,n} \right). \tag{4}$$

Por ejemplo, si $n = 2, 3$,

$$\nu(\mathtt{A}) = \left(\frac{z_{00}}{\sqrt{2}}, \frac{z_{11}}{\sqrt{2}}, \frac{z_{22}}{\sqrt{2}}, z_{01}, z_{02}, z_{12}\right),$$
$$\nu(\mathtt{A}) = \left(\frac{z_{00}}{\sqrt{2}}, \frac{z_{11}}{\sqrt{2}}, \frac{z_{22}}{\sqrt{2}}, \frac{z_{33}}{\sqrt{2}}, z_{01}, z_{02}, z_{03}, z_{12}, z_{13}, z_{23}\right),$$

respectivamente. Por tanto, tenemos un sistema de coordenadas euclídeo en el espacio de las matrices simétricas, ya que satisface

$$\langle \mathtt{A}, \mathtt{B}\rangle = \nu(\mathtt{A})^\top \nu(\mathtt{B}) = \langle \nu(\mathtt{A}), \nu(\mathtt{B})\rangle\,. \tag{5}$$

Finalmente, definimos

$$\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \nu(\mathtt{S}(\mathbf{x}, \mathbf{y})), \tag{6}$$

asociando así un punto de $\mathbf{P}^N$ a un segmento $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}$, donde

$$N = \binom{n+2}{2} - 1. \tag{7}$$

Por ejemplo, si $n = 2$ entonces $N = 5$ y si $n = 3$ entonces $N = 9$.

4. La cuádrica de segmentos de longitud d.

La ecuación de una esfera de centro $\mathbf{Y}$ y radio $d \geq 0$

$$\sum_{i=1}^{n} (X_i - Y_i)^2 - d^2 = 0 \tag{8}$$

puede ser interpretada como la del conjunto de segmentos no orientados $\{\mathbf{X}, \mathbf{Y}\}$ de longitud d. De ahora en adelante, usaremos el sistema de coordenadas homogéneas (x_i), (y_i), de forma que con $X_i = x_i/x_0$, $Y_j = y_j/y_0$ la ecuación previa se convierte en

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i y_0 - y_i x_0)^2 - d^2 x_0^2 y_0^2 = 0. \tag{9}$$

Observación 4.1. *La homogeneización de la ecuación (8) introduce nuevas soluciones. Denotemos por $\mathcal{V}_d \subset \mathbf{P}^n \times \mathbf{P}^n$ la variedad dada por los pares $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ que satisfacen la ecuacion (9). Si $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathcal{V}_d$ y, digamos $\mathbf{x}$, yace en el hiperplano del infinito $x_0 = 0$, entonces o bien $\mathbf{x}$ yace en la cuádrica del absoluto*[1] *Ω_∞*

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0, x_0 = 0, \tag{10}$$

o ambos $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ yacen en el plano del infinito.

[1] En dimensión tres la cuádrica del absoluto es llamada normalmente "cónica del absoluto en el infinito"

Observación 4.2. *Puesto que estamos considerando coordenadas complejas, las esferas de radio* 0 *no son simplemente puntos, sino conos complejos. De hecho, supongamos que* $d = 0$ *y sea* $\mathbf{x}$ *un punto que satisface la ecuación (9). Entonces, es fácil comprobar que todos los puntos de la recta a través de* $\mathbf{x}$ *e* $\mathbf{y}$ *también satisfacen dicha ecuación, de forma que representa un cono a través del vértice* $\mathbf{y}$*. La intersección de este cono con el hiperplano del infinito es la cuádrica del absoluto.*

Puesto que $\mathcal{V}_d$ es una variedad simétrica de bigrado $(2,2)$, su ecuación es de la forma

$$\sum a_{ijkl}\, x_i x_j\, y_k y_l = 0 \tag{11}$$

donde los coeficientes a_{ijkl} satisfacen las simetrías $a_{ijkl} = a_{jikl} = a_{klij}$. Puesto que hay $\binom{n+1}{2}$ productos no ordenados $x_i x_j$ (o $y_k y_l$), hay un total de $\binom{N+1}{2}$ coeficientes independientes, salvo un factor común de escala, donde N está dado por (7).

Un marco más adecuado para tratar variedades de este tipo permitirá tratar el problema de forma más compacta y extraer eficientemente la información codificada por $\mathcal{V}_d$. Para este propósito, introducimos las $N+1$ variables

$$z_{ij} = x_i y_j + x_j y_i,\ i \le j, \tag{12}$$

de forma que la ecuación (9) se transforma en

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} (x_i y_0 - y_i x_0)^2 - d^2 x_0^2 y_0^2 \\ =&\sum_{i=1}^{n} \left((x_i y_0 + y_i x_0)^2 - 4 x_i y_0 y_i x_0 \right) - d^2 x_0^2 y_0^2 \\ =&\sum_{i=1}^{n} (z_{0i}^2 - z_{ii} z_{00}) - d^2 z_{00}^2/4 = 0. \end{aligned} \tag{13}$$

De esta forma, $\mathcal{V}_d$ se puede ver como una cuádrica de $\mathbf{P}^N$ la cual se llamará *cuádrica de los segmentos* (QoS) de longitud d.

5. Propiedades básicas de la QoS

La QoS definida en (13) puede escribirse en forma matricial como

$$\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{y})^\top \mathtt{C}^{\mathtt{euc}} \sigma(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \tag{14}$$

para una cierta matriz

$$\mathtt{C}^{\mathtt{euc}} = \mathtt{C}_1^{\mathtt{euc}} + \frac{d^2}{2} \mathtt{C}_2^{\mathtt{euc}}, \tag{15}$$

donde

$$\mathtt{C}_1^{\mathtt{euc}} = \begin{pmatrix} \mathtt{A} & & \\ & \mathtt{I}_n & \\ & & \mathtt{0} \end{pmatrix}, \tag{16}$$

la matriz $\mathtt{A}$, de orden $n+1$, está dada por

$$\mathtt{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & 0 & & 0 \\ \vdots & & & \\ -1 & 0 & & 0 \end{pmatrix}, \tag{17}$$

y la única coordenada no nula de $\mathtt{C}_2^{\mathtt{euc}}$ es la de la esquina superior izquierda, que toma el valor -1. Obsérvese que rango $\mathtt{C}^{\mathtt{euc}}$ = rango $\mathtt{C}_1^{\mathtt{euc}} = n+2$, mientras que rango $\mathtt{C}_2^{\mathtt{euc}} = 1$. En particular, en dimensión $n = 2$ tenemos que

$$\mathtt{C}^{\mathtt{euc}} = \begin{pmatrix} -d^2/2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{18}$$

y en dimensión $n = 3$

$$\mathtt{C}^{\mathtt{euc}} = \begin{pmatrix} -d^2/2 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{19}$$

Un cambio de coordenadas $\mathbf{x}' = \mathtt{H}\mathbf{x}$ induce un cambio en $\mathbf{P}^N$

$$\mathbf{s}' = \tilde{\mathtt{H}}\,\mathbf{s}$$

donde $\tilde{\mathtt{H}}$ está definido mediante la ecuación

$$\sigma(\mathbf{x}', \mathbf{y}') = \tilde{\mathtt{H}}\,\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \tag{20}$$

Denotando por $\mathbf{e}_i$ los elementos de la base canónica de $\mathbf{C}^{n+1}$ y por $\mathbf{E}_k$ los de la base canónica de $\mathbf{C}^{N+1}$, tenemos que $\sigma(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \sqrt{1+\delta_{ij}}\mathbf{E}_{k(i,j)}$, siendo δ_{ij} los símbolos de Kronecker y $k(i,j)$ es la posición de z_{ij} en el vector $\nu(\mathtt{A})$ en (4) si $i \leq j$, y en otro caso $k(i,j) = k(j,i)$. ν. Substituyendo en (20) $\mathbf{x} = \mathbf{e}_i$, $\mathbf{y} = \mathbf{e}_j$ obtenemos la expresión explícita

$$\tilde{\mathtt{H}} = \left(\frac{\sigma(\mathbf{h}_0, \mathbf{h}_0)}{\sqrt{2}}, \ldots, \frac{\sigma(\mathbf{h}_n, \mathbf{h}_n)}{\sqrt{2}}, \sigma(\mathbf{h}_0, \mathbf{h}_1), \sigma(\mathbf{h}_0, \mathbf{h}_2), \ldots, \sigma(\mathbf{h}_{n-1}, \mathbf{h}_n) \right)$$

(cf. equación (4)). Por tanto, en los casos $n = 2, 3$ tenemos que

$$\tilde{\mathtt{H}} = \left(\frac{\sigma(\mathbf{h}_0, \mathbf{h}_0)}{\sqrt{2}}, \frac{\sigma(\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_1)}{\sqrt{2}}, \frac{\sigma(\mathbf{h}_2, \mathbf{h}_2)}{\sqrt{2}}, \sigma(\mathbf{h}_0, \mathbf{h}_1), \sigma(\mathbf{h}_0, \mathbf{h}_2), \sigma(\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2) \right)$$

y

$$\tilde{\mathtt{H}} = \Big(\frac{\sigma(\mathbf{h}_0,\mathbf{h}_0)}{\sqrt{2}}, \frac{\sigma(\mathbf{h}_1,\mathbf{h}_1)}{\sqrt{2}}, \frac{\sigma(\mathbf{h}_2,\mathbf{h}_2)}{\sqrt{2}}, \frac{\sigma(\mathbf{h}_3,\mathbf{h}_3)}{\sqrt{2}}, \\ \sigma(\mathbf{h}_0,\mathbf{h}_1), \sigma(\mathbf{h}_0,\mathbf{h}_2), \sigma(\mathbf{h}_0,\mathbf{h}_3), \sigma(\mathbf{h}_1,\mathbf{h}_2), \sigma(\mathbf{h}_1,\mathbf{h}_3), \sigma(\mathbf{h}_2,\mathbf{h}_3)\Big),$$

respectivamente.

La siguiente propiedad de $\tilde{\mathtt{H}}$ tendrá importancia más adelante.

Teorema 5.1. *Para cualquier matriz* $\mathtt{H}$ *tenemos que*

$$\widetilde{\mathtt{H}^\top} = \tilde{\mathtt{H}}^\top. \tag{21}$$

Demostración. Por definición de $\tilde{\mathtt{H}}$ tenemos que

$$\begin{aligned} &\left\langle \sigma(\mathbf{u},\mathbf{v}), \tilde{\mathtt{H}}^\top \sigma(\mathbf{w},\mathbf{z}) \right\rangle = \left\langle \tilde{\mathtt{H}}\sigma(\mathbf{u},\mathbf{v}), \sigma(\mathbf{w},\mathbf{z}) \right\rangle = \left\langle \sigma(\mathtt{H}\mathbf{u},\mathtt{H}\mathbf{v}), \sigma(\mathbf{w},\mathbf{z}) \right\rangle \\ &= \langle \mathtt{S}(\mathtt{H}\mathbf{u},\mathtt{H}\mathbf{v}), \mathtt{S}(\mathbf{w},\mathbf{z}) \rangle = \langle \mathtt{H}\mathbf{u},\mathbf{w}\rangle \langle \mathtt{H}\mathbf{v},\mathbf{z}\rangle + \langle \mathtt{H}\mathbf{u},\mathbf{z}\rangle \langle \mathtt{H}\mathbf{v},\mathbf{w}\rangle \\ &= \left\langle \mathbf{u},\mathtt{H}^\top\mathbf{w}\right\rangle \left\langle \mathbf{v},\mathtt{H}^\top\mathbf{z}\right\rangle + \left\langle \mathbf{u},\mathtt{H}^\top\mathbf{z}\right\rangle \left\langle \mathbf{v},\mathtt{H}^\top\mathbf{w}\right\rangle = \left\langle \mathtt{S}(\mathbf{u},\mathbf{v}), \mathtt{S}(\mathtt{H}^\top\mathbf{w},\mathtt{H}^\top\mathbf{z})\right\rangle \\ &= \left\langle \sigma(\mathbf{u},\mathbf{v}), \sigma(\mathtt{H}^\top\mathbf{w},\mathtt{H}^\top\mathbf{z})\right\rangle = \left\langle \sigma(\mathbf{u},\mathbf{v}), \widetilde{\mathtt{H}^\top}\sigma(\mathbf{w},\mathbf{z})\right\rangle. \end{aligned} \tag{22}$$

Puesto que la imagen de σ genera el espacio total, tenemos el resultado deseado. □

Si $\mathbf{x}^{\mathtt{euc}} = \mathtt{H}\,\mathbf{x}$ es el cambio de coordenadas entre un sistema euclídeo y un sistema proyectivo arbitrario, la matriz de la QoS en este último sistema es

$$\mathtt{C} = \tilde{\mathtt{H}}^\top \mathtt{C}^{\mathtt{euc}} \tilde{\mathtt{H}} \tag{23}$$

y

$$\mathtt{C}_i = \tilde{\mathtt{H}}^\top \mathtt{C}_i^{\mathtt{euc}} \tilde{\mathtt{H}}. \tag{24}$$

Teorema 5.2 (Interpretación geométrica de $\mathtt{C}_1$ y $\mathtt{C}_2$)**.**

1. $\sigma(\mathbf{x},\mathbf{y})^\top \mathtt{C}_1 \sigma(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 0$ *si y sólo si la recta* $\mathbf{xy}$ *interseca la cuádrica del absoluto* Ω_∞.
2. $\sigma(\mathbf{x},\mathbf{y})^\top \mathtt{C}_2 \sigma(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 0$ *si y sólo si o bien* $\mathbf{x}$ *o bien* $\mathbf{y}$ *están en el hiperplano del infinito* $\boldsymbol{\pi}_\infty$.

Demostración. Para demostrar el primer enunciado, usemos un sistema de coordenadas euclídeo y notemos que la intersección de la recta $\mathbf{xy}$ con el hiperplano del infinito (y no contenida en el mismo) es el punto $y_0\mathbf{x} - x_0\mathbf{y}$, que yace en la cuádrica del absoluto Ω_∞ si y sólo si

$$0 = \sum_{i=1}^{n} (x_i y_0 - y_i x_0)^2 = \sigma(\mathbf{x},\mathbf{y})^\top \mathtt{C}_1 \sigma(\mathbf{x},\mathbf{y}).$$

El segundo enunciado se prueba fácilmente en un sistema de coordenadas euclídeo, puesto que

$$\sigma(\mathbf{x},\mathbf{y})^\top \mathtt{C}_2 \sigma(\mathbf{x},\mathbf{y}) = -x_0^2 y_0^2.$$

□

Estamos ahora en condiciones de ver cómo $\mathtt{C}_2$ está relacionado con el plano del infinito:

Teorema 5.3. *Sean $\boldsymbol{\pi}_\infty$ las coordenadas del plano del infinito. Entonces*

$$\mathtt{C}_2 \sim \sigma(\boldsymbol{\pi}_\infty, \boldsymbol{\pi}_\infty)\sigma(\boldsymbol{\pi}_\infty, \boldsymbol{\pi}_\infty)^\top. \tag{25}$$

Demostración. Denotemos por $\mathbf{k}_i$, $i = 0, 1, 2, 3$, las filas de $\mathtt{H}$. Puesto que

$$\mathtt{C}_2 = \tilde{\mathtt{H}}^\top \mathtt{C}_2^{\mathtt{euc}} \tilde{\mathtt{H}},$$

usando (21) y la expresión de $\mathtt{C}_2^{\mathtt{euc}}$ tenemos que

$$\mathtt{C}_2 = -(\sigma(\mathbf{k}_0, \mathbf{k}_0)/\sqrt{2})(\sigma(\mathbf{k}_0, \mathbf{k}_0)/\sqrt{2})^\top = -\frac{1}{2}\sigma(\mathbf{k}_0, \mathbf{k}_0)\sigma(\mathbf{k}_0, \mathbf{k}_0)^\top. \tag{26}$$

Siendo $\mathbf{k}_0 \sim \boldsymbol{\pi}_\infty$, se sigue el resultado. □

Observación 5.4. *Usando el resultado 5.3 vemos que la expresión*

$$\mathtt{C}_2(\mathbf{x}) = \sigma(\mathbf{x}, \mathbf{x})\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{x})^\top$$

parametriza todas las posibles matrices $\mathtt{C}_2$ según variamos el sistema de coordenadas proyectivo.

Parece natural preguntase si el conocimiento de los ceros de la QoS a lo largo de la variedad de segmentos

$$\operatorname{im}\sigma = \{\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \colon \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{P}^n\} \subset \mathbf{P}^N,$$

determina la QoS completamente, puesto que podría existir una cuádrica diferente en $\mathbf{P}^N$ que intersecase $\operatorname{im}\sigma$ en el mismo lugar geométrico. En esta sección, veremos que este no es el caso, lo cual es relevante para nosotros ya que nos permitirá obtener la QoS simplemente por observaciones de segmentos de longitud d.

Teorema 5.5. *Sean $\mathtt{C}$ y $\mathtt{C}'$ dos cuádricas de $\mathbf{P}^N$ teniendo los mismos ceros a lo largo de* $\operatorname{im}\sigma$*, i.e.,*

$$\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{y})^\top \mathtt{C}\, \sigma(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \iff \sigma(\mathbf{x}, \mathbf{y})^\top \mathtt{C}' \sigma(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0.$$

Entonces $\mathtt{C} = \lambda \cdot \mathtt{C}'$ para algún $\lambda \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$.

La demostración de este resultado será dada en el apéndice.

6. Espacios lineales generados por las matrices $\mathtt{C}_1$ y $\mathtt{C}_2$

Con el objetivo de obtener parametrizaciones lineales de las matrices $\mathtt{C}_1$ y $\mathtt{C}_2$, en esta sección estudiamos los espacios lineales que dichas matrices generan. El siguiente resultado será una de las claves para el cálculo lineal de la QoS que enfrentaremos en la sección 9.

Teorema 6.1. *El espacio de matrices simétricas de orden $N+1$ puede ser descompuesto como*

$$\mathrm{Sym}(N+1) = S_1 \oplus S_2 \tag{27}$$

en donde cada S_i está definido como el subespacio vectorial $\mathrm{Sym}(N+1)$ *generado por todas las posibles matrices $\mathtt{C}_i$ obtenidas de $\mathtt{C}_i^{\mathtt{euc}}$ usando cambios admisibles de coordenadas (24). Además, S_1 y S_2 son ortogonales con respecto de la métrica natural definida en (2) y sus dimensiones son*

$$\begin{aligned} \dim S_1 &= \frac{1}{12}\, n\,(n+1)^2(n+2), \\ \dim S_2 &= \binom{n+4}{4}. \end{aligned} \tag{28}$$

Finalmente, dada una longitud d el espacio que generan linealmente todas las posibles matrices $\mathtt{C}$ es el espacio total $\mathrm{Sym}(N+1)$.

La demostración del resultado será dada en el apéndice.

7. Extrayendo la estructura afín y euclídea de la cuádrica de los segmentos.

La QoS está determinada por el par de matrices $(\mathtt{C}_1, \mathtt{C}_2)$ definidas salvo un factor de escala común. Cambiando el par $(\mathtt{C}_1, \mathtt{C}_2)$ por $(\mathtt{C}_1, \lambda\,\mathtt{C}_2)$ supone cambiar la unidad de longitud, dado que de (14,15) se tiene que

$$d^2 = -2\frac{\sigma(\mathbf{x},\mathbf{y})^\top \mathtt{C}_1 \sigma(\mathbf{x},\mathbf{y})}{\sigma(\mathbf{x},\mathbf{y})^\top \mathtt{C}_2 \sigma(\mathbf{x},\mathbf{y})}. \tag{29}$$

Por tanto, la QoS determina no solamente el grupo de semejanzas, tal y como hace la cuádrica del absoluto, sino también el grupo de isometrías del espacio. El siguiente resultado describe la relación entre la QoS y la geometría estratificada del espacio usual.

Teorema 7.1. *Una matriz regular $\mathtt{H}$ de dimensiones $(n+1)\times(n+1)$ representa*

1. *una semejanza si y sólo si $\tilde{\mathtt{H}}^\top \mathtt{C}_1 \tilde{\mathtt{H}} \sim \mathtt{C}_1$.*
2. *una afinidad si y sólo si $\tilde{\mathtt{H}}^\top \mathtt{C}_2 \tilde{\mathtt{H}} \sim \mathtt{C}_2$.*
3. *una isometría si y sólo si $(\tilde{\mathtt{H}}^\top \mathtt{C}_1 \tilde{\mathtt{H}}, \tilde{\mathtt{H}}^\top \mathtt{C}_2 \tilde{\mathtt{H}}) \sim (\mathtt{C}_1, \mathtt{C}_2)$ o, equivalentemente, si y sólo si $\tilde{\mathtt{H}}^\top \mathtt{C} \tilde{\mathtt{H}} \sim \mathtt{C}$.*

Demostración. El hecho de que $\tilde{\mathtt{H}}$ deja invariante $\mathtt{C}_1$ (resp. $\mathtt{C}_2$, $\mathtt{C}$) es, debido al resultado 5.5, equivalente al hecho de que el conjunto de segmentos $\{\mathbf{x},\mathbf{y}\}$ tales que $\mathrm{dist}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 0$ (resp. $\mathrm{dist}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \infty$, $\mathrm{dist}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = d$), es $\mathtt{H}$-invariante. En el primer caso, esto es equivalente a la $\mathtt{H}$-invariancia del conjunto de conos que pasan a través de la cuádrica del absoluto Ω_∞, lo cual es a su vez equivalente a la invariancia de Ω_∞ misma.

La $\mathtt{H}$-invariancia de $\mathrm{dist}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \infty$ es equivalente a la $\mathtt{H}$-invariancia del hiperplano del infinito, es decir, a que $\mathtt{H}$ sea una afinidad. Finalmente, la invariancia de los segmentos de longitud d caracteriza las isometrías, lo que es equivalente a $(\tilde{\mathtt{H}}^\top \mathtt{C}_1 \tilde{\mathtt{H}}, \tilde{\mathtt{H}}^\top \mathtt{C}_2 \tilde{\mathtt{H}}) \sim (\mathtt{C}_1, \mathtt{C}_2)$. □

Veamos ahora varias técnicas para extraer la geometría afín y euclídea de la QoS. Primero, escribamos

$$\sigma(\mathbf{x},\mathbf{y})^\top \mathtt{C}\,\sigma(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \mathbf{x}^\top \mathtt{A}_\mathbf{y}\mathbf{x}.$$

Siendo $\mathtt{A}_\mathbf{y}$ la matriz de la esfera de radio d centrada en $\mathbf{y}$. Las coordenadas de $\mathtt{A}_\mathbf{y}$ son polinomios de grado dos en las coordenadas de $\mathbf{y}$:

$$(\mathtt{A}_\mathbf{y})_{ij} = \sum_{k,l=0}^{n} \mathtt{C}_{ik}^{jl} y_k y_l$$

donde los coeficientes $\mathtt{C}_{ik}^{jl}$ fueron definidos mediante (48).

El plano del infinito puede ser recuperado como el hiperplano polar del centro de la esfera, es decir,

$$\boldsymbol{\pi}_\infty = \mathtt{A}_\mathbf{y}\mathbf{y}. \tag{30}$$

La geometría euclídea puede ser recuperada también, por ejemplo obteniendo la cuádrica absoluta dual (DAQ). Como es bien conocido, la DAQ puede ser definida como la aplicación que asigna a cada hiperplano $\boldsymbol{\pi}$ su punto ortogonal en el infinito $\mathtt{Q}_\infty^*\boldsymbol{\pi}$. Teniendo en cuenta que el punto ortogonal del infinito de $\boldsymbol{\pi}$ puede ser obtenido como la intersección de $\boldsymbol{\pi}_\infty$ con la recta definida por $\mathbf{y}$ y el polo del hiperplano $\boldsymbol{\pi}$ con respecto a la esfera centrada en $\mathbf{y}$ y con radio d, no es difícil llegar a la siguiente expresión para la DAQ:

$$\mathtt{Q}_\infty^* = (\mathbf{y}^\top \mathtt{A}_\mathbf{y}\mathbf{y})\mathtt{A}_\mathbf{y}^* - \det(\mathtt{A}_\mathbf{y})\mathbf{y}\mathbf{y}^\top. \tag{31}$$

Tanto (30) como (31) no son completamente satisfactorias, debido a su dependencia en $\mathbf{y}$; de hecho (30) tiene grado 3 y (31) tiene grado $2(n+2)$. En esta sección proporcionamos soluciones alternativas sin esta desventaja.

7.1. Extrayendo el plano del infinito a partir de $\mathtt{C}_2$

Expresiones cerradas del plano del infinito a partir de los coeficiente de $\mathtt{C}_2$ pueden ser obtenidas mediante el siguiente resultado:

Teorema 7.2. *El plano del infinito puede ser obtenido a partir de* $\mathtt{C}_2$ *como sigue: tómense cualesquiera* $\alpha,\beta,\gamma \in \{0,\ldots,n\}$*, entonces*

$$\pi_\infty \sim \begin{pmatrix} \sigma(\mathbf{e}_0,\mathbf{e}_\alpha)^\top \mathtt{C}_2\,\sigma(\mathbf{e}_\beta,\mathbf{e}_\gamma) \\ \vdots \\ \sigma(\mathbf{e}_n,\mathbf{e}_\alpha)^\top \mathtt{C}_2\,\sigma(\mathbf{e}_\beta,\mathbf{e}_\gamma) \end{pmatrix}.$$

Demostración. Sean $\mathbf{x}$ las coordenadas del plano del infinito. Usando de nuevo el resultado 5.3 tenemos que

$$\mathtt{C}_2(\mathbf{x}) = \sigma(\mathbf{x},\mathbf{x})\sigma(\mathbf{x},\mathbf{x})^\top.$$

Entonces

$$\sigma(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_\alpha)^\top \mathtt{C}_2\,\sigma(\mathbf{e}_\beta,\mathbf{e}_\gamma) = \sigma(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_\alpha)^\top \sigma(\mathbf{x},\mathbf{x})\sigma(\mathbf{x},\mathbf{x})^\top\,\sigma(\mathbf{e}_\beta,\mathbf{e}_\gamma),$$

y usando (2,5,6)

$$\begin{aligned}\sigma(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_\alpha)^\top\sigma(\mathbf{x},\mathbf{x}) &= \langle\sigma(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_\alpha),\sigma(\mathbf{x},\mathbf{x})\rangle\\ &= \langle\mathtt{S}(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_\alpha),\mathtt{S}(\mathbf{x},\mathbf{x})\rangle\\ &= \frac{1}{2}\operatorname{trace}((\mathbf{e}_i\mathbf{e}_\alpha^\top+\mathbf{e}_\alpha\mathbf{e}_i^\top)(2\mathbf{x}\mathbf{x}^\top))\\ &= 2x_ix_\alpha,\end{aligned}$$

luego

$$\sigma(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_\alpha)^\top\mathtt{C}_2\,\sigma(\mathbf{e}_\beta,\mathbf{e}_\gamma) = 4x_ix_\alpha x_\beta x_\gamma,$$

y se sigue el resultado deseado. □

7.2. Extrayendo la DAQ a partir de $\mathtt{C}_1$

Puesto que $\mathtt{C}_1$ proporciona todos los conos con base la cuádrica del absoluto, debería ser posible recuperar la DAQ a partir de ella. El siguiente resultado y la discusión subsiguiente muestra que esta tarea puede ser llevada a cabo de una forma algebraicamente eficiente.

Teorema 7.3. *Supongamos que el punto coordenado* $\mathbf{e}_\alpha$ *no yace en* $\boldsymbol{\pi}_\infty$*. Entonces los planos de la cuádrica absoluta dual* $\mathtt{Q}_\infty^*$ *que pasan por el punto de coordenadas* $\mathbf{e}_\alpha$ *están definidos por la matriz*

$$\mathtt{Q}_\alpha^* = \left(\left(\sigma(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_\alpha)^\top\mathtt{C}_1\sigma(\mathbf{e}_j,\mathbf{e}_\alpha)\right)_{\substack{0\le i,j\le n\\ i,j\neq\alpha}}\right)^*$$

en el siguiente sentido: un hiperplano $\boldsymbol{\pi}$ *pertenece a* $\mathtt{Q}_\infty^*\cap\{\pi_\alpha=0\}$ *si y sólo si*

$$\pi_\alpha = 0,\ \text{y}\ \boldsymbol{\pi}_\alpha^\top\mathtt{Q}_\alpha^*\boldsymbol{\pi}_\alpha = 0$$

donde $\boldsymbol{\pi}_\alpha = (\pi_0,\dots,\pi_{\alpha-1},\pi_{\alpha+1},\dots,\pi_n)^\top$.

Demostración. La ecuación del cono $V_{\mathbf{y}}$ de vértice $\mathbf{y}$ que contiene a la cuádrica del absoluto es $\sigma(\mathbf{x},\mathbf{y})^\top\mathtt{C}_1\sigma(\mathbf{x},\mathbf{y})=0$. Por tanto la intersección $V_{\mathbf{e}_\alpha}\cap\{x_\alpha=0\}$ está dada por las ecuaciones

$$\begin{aligned}x_\alpha &= 0,\\ \sigma(\mathbf{x},\mathbf{e}_\alpha)^\top\mathtt{C}_1\sigma(\mathbf{x},\mathbf{e}_\alpha) &= \sum_{\substack{i,j=0\\ i,j\neq\alpha}}^{n} x_ix_j\sigma(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_\alpha)^\top\mathtt{C}_1\sigma(\mathbf{e}_j,\mathbf{e}_\alpha)=0\end{aligned}$$

Usando $(x_0,\dots,x_{\alpha-1},x_{\alpha+1},\dots,x_n)^\top$ como coordenadas en el hiperplano $x_\alpha=0$ vemos que la matriz

$$\mathtt{Q}_\alpha = \left(\sigma(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_\alpha)^\top\mathtt{C}_1\sigma(\mathbf{e}_j,\mathbf{e}_\alpha)\right)_{\substack{0\le i,j\le n\\ i,j\neq\alpha}}$$

define una cuádrica $V_{\mathbf{e}_\alpha}\cap\{x_\alpha=0\}$ la cual, puesto que suponemos $\mathbf{e}_\alpha\notin\boldsymbol{\pi}_\infty$, resulta ser no degenerada. En consecuencia su matriz adjunta $\mathtt{Q}_\alpha^*$ determina sus espacios tangentes $\boldsymbol{\pi}_\alpha=(\pi_0,\dots,\pi_{\alpha-1},\pi_{\alpha+1},\dots,\pi_n)^\top$. Los hiperplanos definidos por dichos

espacios tangentes y $\mathbf{e}_\alpha$ son hiperplanos de $\mathtt{Q}^*_\infty$ pasando a través de $\mathbf{e}_\alpha$, i.e., aquellos $\boldsymbol{\pi} = (\pi_0, \ldots, \pi_{\alpha-1}, 0, \pi_{\alpha+1}, \ldots, \pi_n)^\top$ tales que

$$\boldsymbol{\pi}_\alpha^\top \mathtt{Q}^*_\alpha \boldsymbol{\pi}_\alpha = 0.$$

□

Sea M una matriz y denotemos por $\Lambda_\alpha(M)$ la submatriz resultante de suprimir su fila y columna α. Como consecuencia del último resultado, vemos que si ninguno de los puntos $\mathbf{e}_\alpha \notin \boldsymbol{\pi}_\infty$ entonces existen constantes no nulas λ_α tales que

$$\Lambda_\alpha(\mathtt{Q}^*_\infty) = \lambda_\alpha \mathtt{Q}^*_\alpha,\ \alpha = 0, \ldots, n.$$

Es inmediato recuperar la DAQ a partir de estos sistemas sobredeterminados obtenidos a partir de $\mathtt{C}_1$. Nótese que si cualquiera de los $\mathbf{e}_\alpha \in \boldsymbol{\pi}_\infty$, lo cual puede ser detectado mediante el menor rango de $\mathtt{Q}_\alpha$, un cambio de coordenadas proyectivo llevaría todo a una posición no singular genérica.

En el caso tridimensional, tendríamos cuatro matrices $\mathtt{Q}^*_\alpha$. Denotando por

$$\mathtt{C}^{kl}_{ij} = \sigma(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_\alpha)^\top \mathtt{C}_1 \sigma(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_\alpha),$$

resultan explícitamente dadas por:

$$\mathtt{Q}^*_0 = \begin{pmatrix} \mathtt{C}^{10}_{10} & \mathtt{C}^{20}_{10} & \mathtt{C}^{30}_{10} \\ \mathtt{C}^{10}_{20} & \mathtt{C}^{20}_{20} & \mathtt{C}^{30}_{20} \\ \mathtt{C}^{10}_{30} & \mathtt{C}^{20}_{30} & \mathtt{C}^{30}_{30} \end{pmatrix}^*, \mathtt{Q}^*_1 = \begin{pmatrix} \mathtt{C}^{01}_{01} & \mathtt{C}^{21}_{01} & \mathtt{C}^{31}_{01} \\ \mathtt{C}^{01}_{21} & \mathtt{C}^{21}_{21} & \mathtt{C}^{31}_{21} \\ \mathtt{C}^{01}_{31} & \mathtt{C}^{21}_{31} & \mathtt{C}^{31}_{31} \end{pmatrix}^*$$

$$\mathtt{Q}^*_2 = \begin{pmatrix} \mathtt{C}^{02}_{02} & \mathtt{C}^{12}_{02} & \mathtt{C}^{32}_{02} \\ \mathtt{C}^{02}_{12} & \mathtt{C}^{12}_{12} & \mathtt{C}^{32}_{12} \\ \mathtt{C}^{02}_{32} & \mathtt{C}^{12}_{32} & \mathtt{C}^{32}_{32} \end{pmatrix}^*, \mathtt{Q}^*_3 = \begin{pmatrix} \mathtt{C}^{03}_{03} & \mathtt{C}^{13}_{03} & \mathtt{C}^{23}_{03} \\ \mathtt{C}^{03}_{13} & \mathtt{C}^{13}_{13} & \mathtt{C}^{23}_{13} \\ \mathtt{C}^{03}_{23} & \mathtt{C}^{13}_{23} & \mathtt{C}^{23}_{23} \end{pmatrix}^*$$

7.3. Núcleos de $\mathtt{C}$, $\mathtt{C}_1$ *y* $\mathtt{C}_2$

El núcleo de una cuádrica es un invariante proyectivo de la misma que es fácil de calcular. A continuación, proporcionamos una interpretación geométrica de los núcleos de $\mathtt{C}, \mathtt{C}_1$ y $\mathtt{C}_2$.

Teorema 7.4. *Los segmentos del núcleo de la cuádrica* $\mathtt{C}_1$ *son aquellos cuyos extremos son puntos del infinito correspondientes a direcciones ortogonales, mientras que los segmentos del núcleo de* $\mathtt{C}_2$ *son aquellos que tienen al menos uno de sus extremos en el plano del infinito. Finalmente, en núcleo de* $\mathtt{C}$ *coincide con el de* $\mathtt{C}_1$*.*

Demostración. Usando coordenadas euclídeas, es inmediato comprobar que

$$\mathtt{C}_1^{\text{euc}} \sigma(\mathbf{x}^{\text{euc}}, \mathbf{y}^{\text{euc}}) = 0$$

es equivalente al conjunto de ecuaciones

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} x_i^{\text{euc}} y_i^{\text{euc}} &= 0, \\ x_0^{\text{euc}} y_0^{\text{euc}} &= 0, \\ x_0^{\text{euc}} y_j^{\text{euc}} + y_0^{\text{euc}} x_j^{\text{euc}} &= 0,\ j = 1, \ldots, n, \end{aligned}$$

del cual se desprende fácilmente el primer enunciado. La demostración del segundo se sigue inmediatamente, puesto que $\mathtt{C}_2^{\text{euc}}\sigma(\mathbf{x}^{\text{euc}}, \mathbf{y}^{\text{euc}}) = 0$ si y sólo si $x_0 y_0 = 0$. Finalmente, es inmediato comprobar que el núcleo de $\mathtt{C}$ tiene las mismas ecuaciones que el de $\mathtt{C}_1$. □

Nótese que una consecuencia particular de el último resultado es que las ecuaciones

$$\mathtt{C}_1\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$$

son las de la cuádrica del absoluto.

8. La cuádrica de círculos y el complejo cuadrático del absoluto

De acuerdo con el resultado 5.2, es equivalente para que dos puntos definan un segmento de longitud cero y que se encuentren en una recta que interseca la cónica del absoluto. En el caso bidimensional, esto proporciona un método directo de recuperar los puntos cíclicos conjugados del infinito $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$ a partir de $\mathtt{C}_1$. De hecho, la mencionada equivalencia puede ser escrita como

$$(\mathbf{x} \times \mathbf{y})^\top (\mathbf{i}\mathbf{j}^\top + \mathbf{j}\mathbf{i}^\top)(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) = 0 \Leftrightarrow \sigma(\mathbf{x}, \mathbf{y})^\top \mathtt{C}_1 \sigma(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0.$$

Suponiendo sin pérdida de generalidad que ambas expresiones son idénticas e igualando los coeficientes, obtenemos un conjunto de ecuaciones lineales que dan lugar a la expresión de $\mathtt{Q}_\infty^* = \mathbf{i}\mathbf{j}^\top + \mathbf{j}\mathbf{i}^\top$ en términos de los coeficientes de la matriz de la cónica dual degenerada $\mathtt{C}_1 = (c_{i,j})$ como

$$\mathtt{Q}_\infty^* = \begin{pmatrix} -2\,c_{1,2} - c_{5,5} & \sqrt{2}c_{2,3} + c_{4,5} & \sqrt{2}c_{1,4} + c_{3,5} \\ \sqrt{2}c_{2,3} + c_{4,5} & -2\,c_{0,2} - c_{4,4} & \sqrt{2}c_{0,5} + c_{3,4} \\ \sqrt{2}c_{1,4} + c_{3,5} & \sqrt{2}c_{0,5} + c_{3,4} & -2\,c_{0,1} - c_{3,3} \end{pmatrix}.$$

El caso tridimensional no es tan sencillo. Recordemos la representación de rectas mediante coordenadas de Plücker[4, p. 70]. La recta definida por $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ proporciona los números p_{ij} dados por

$$p_{ij} = x_i y_j - x_j y_i.$$

La identidad

$$p_{ij}p_{kl} = z_{il}z_{jk} - z_{ik}z_{jl}$$

muestra que cualquier cuádrica en las coordenadas de Plücker puede ser escrita en términos de las coordenadas simétricas z_{ij}, i.e., una cuádrica en el espacio de segmentos. Un cuádrica en coordenadas de Plücker relevante para la reconstrucción euclídea es el complejo cuadrático absoluto (AQC) [12, 17], dado por las rectas que intersecan la cuádrica del infinito. El siguiente resultado muestra que la AQC puede ser escrita en términos de $\mathtt{C}_1$ de forma particularmente satisfactoria. Nótese que, dado que la teoría de la AQC ha sido desarrollada solo en dimensión 3, algunos resultados se restringirán a este caso particular.

Teorema 8.1. *La cuádrica* $\mathtt{C}_1$ *coincide con el complejo cuadrático absoluto* Σ *en el siguiente sentido: dados vectores cualesquiera* $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ *tenemos que*

$$(\mathbf{x} \wedge \mathbf{y})^\top \Sigma\, (\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}) = \sigma(\mathbf{x}, \mathbf{y})^\top \mathtt{C}_1\, \sigma(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \tag{32}$$

Además, los coeficientes de $\mathtt{C}_1$ *pueden ser obtenidos a partir de los coeficientes de* Σ *de acuerdo con la ecuación*

$$\mathtt{C}_{ij}^{kl} = \Sigma_{ik}^{lj} + \Sigma_{il}^{kj}, \tag{33}$$

donde $\mathtt{C}_{ij}^{kl}$ *está definido por la ecuación (48) y, análogamente,*

$$\Sigma_{ij}^{kl} = (\mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j)^\top \Sigma (\mathbf{e}_k \wedge \mathbf{e}_l).$$

Recíprocamente, suponiendo $n = 3$*, la AQC puede ser recuperada a partir de la QoS como sigue:*

$$\Sigma_{ij}^{kl} = \frac{1}{3}(\mathtt{C}_{il}^{jk} - \mathtt{C}_{ik}^{jl}). \tag{34}$$

Demostración. Puesto que la identidad que queremos probar es geométrica, es decir, invariante bajo cambios lineales del sistema de coordenadas, es suficiente con comprobarla para un sistema de coordenadas euclídeo:

$$\begin{aligned}
\sigma(\mathbf{x}^{\mathrm{euc}}, \mathbf{y}^{\mathrm{euc}})^\top \mathtt{C}_1^{\mathtt{euc}}\, \sigma(\mathbf{x}^{\mathrm{euc}}, \mathbf{y}^{\mathrm{euc}}) &= \sum_{i=1}^{n} (x_i^{\mathrm{euc}} y_0^{\mathrm{euc}} - y_i^{\mathrm{euc}} x_0^{\mathrm{euc}})^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n} p_{i0}^2 \\
&= (\mathbf{x}^{\mathrm{euc}} \wedge \mathbf{y}^{\mathrm{euc}})^\top \Sigma^{\mathrm{euc}}\, (\mathbf{x}^{\mathrm{euc}} \wedge \mathbf{y}^{\mathrm{euc}})
\end{aligned}$$

La ecuación (33) puede ser demostrada calculando la derivada $\frac{\partial^4}{\partial x_i \partial y_j \partial x_k \partial y_l}$ de ambos lados de (32), lo cual da lugar a la relación

$$\mathtt{C}_{ij}^{kl} + \mathtt{C}_{il}^{kj} = \Sigma_{ij}^{kl} + \Sigma_{il}^{kj}. \tag{35}$$

Permutando cíclicamente los índices j, k, l en esta ecuación, resulta que

$$\mathtt{C}_{ik}^{lj} + \mathtt{C}_{ij}^{lk} = \Sigma_{ik}^{lj} + \Sigma_{ij}^{lk}, \tag{36}$$

$$\mathtt{C}_{il}^{jk} + \mathtt{C}_{ik}^{jl} = \Sigma_{il}^{jk} + \Sigma_{ik}^{jl}, \tag{37}$$

y calculando (35) − (36) + (37), teniendo en cuenta las simetrías de $\mathtt{C}_{ij}^{kl}$ y Σ_{ij}^{kl}, se obtiene la identidad (33).

Para demostrar la identidad (34), recordamos primero que la AQC satisface la condición lineal adicional dada por [25, teorema 5.3]. No es difícil ver que esta restricción es equivalente a

$$\Sigma_{ij}^{kl} + \Sigma_{il}^{jk} + \Sigma_{ik}^{lj} = 0 \tag{38}$$

para cualesquiera $i, j, k, l = 0, \ldots, 3$. Ahora definimos el espacio lineal Σ dado por todos los tensores (Σ_{ij}^{kl}) que satisfacen (38) junto con las simetrías

$$\Sigma_{ij}^{kl} = -\Sigma_{ji}^{kl} = -\Sigma_{ij}^{lk} = \Sigma_{kl}^{ij}. \tag{39}$$

Nótese que estos tensores constituyen un espacio vectorial de dimensión $21 - 1 = 20$, el cual coincide con la dimensión de S_1 dada por (6.1). Por tanto tenemos que comprobar que (33) define un isomorfismo lineal $\phi : \Sigma \to S_1$. Primero demostremos que ϕ está bien definido, i.e., $\mathtt{C} = \phi(\Sigma) \in S_1$ para cualquier $\Sigma \in \Sigma$. Usando el resultado (6.1) es suficiente con ver que $\mathtt{C}$ definida por (33) satisface $\left\langle \sigma(\mathbf{x},\mathbf{x})^\top \sigma(\mathbf{x},\mathbf{x}), \mathtt{C} \right\rangle = 0$ para cualesquiera $\mathbf{x}$. Pero tenemos que

$$\begin{aligned} &\left\langle \sigma(\mathbf{x},\mathbf{x})^\top \sigma(\mathbf{x},\mathbf{x}), \mathtt{C} \right\rangle = \sigma(\mathbf{x},\mathbf{x})^\top \mathtt{C}\, \sigma(\mathbf{x},\mathbf{x}) = \\ &\sum_{i,j,k,l=0}^{3} x_i x_j x_k x_l \mathtt{C}_{ij}^{kl} = \sum_{i,j,k,l=0}^{3} x_i x_j x_k x_l (\Sigma_{ik}^{lj} + \Sigma_{il}^{kj}) = 2(\mathbf{x} \wedge \mathbf{x})\Sigma(\mathbf{x} \wedge \mathbf{x}) = 0 \end{aligned} \tag{40}$$

y por tanto ϕ está efectivamente bien definida.

Definamos ahora la inversa de ϕ, $\varphi : S_1 \to \Sigma$, usando la relación (34). Para demostrar que φ está bien definida, observemos primero que la relación (38) fuerza a $\mathtt{C}$ a satisfacer la ecuación

$$\mathtt{C}_{ij}^{kl} + \mathtt{C}_{il}^{jk} + \mathtt{C}_{ik}^{lj} = 0, \tag{41}$$

(la cual es una consecuencia de (40)). Usando (41) y las simetrías previamente mencionadas es inmediato comprobar que φ está realmente bien definida, es decir, $\Sigma = \varphi(\mathtt{C}) \in \Sigma$. Finalmente probemos que $\phi(\varphi(\mathtt{C})) = \mathtt{C}$. De hecho, puesto que $\mathtt{C}_{ij}^{kl} = \Sigma_{ik}^{lj} + \Sigma_{il}^{kj}$ tenemos que

$$\Sigma_{ik}^{lj} + \Sigma_{il}^{kj} = \frac{1}{3}(\mathtt{C}_{ij}^{kl} - \mathtt{C}_{il}^{kj} + \mathtt{C}_{ij}^{lk} - \mathtt{C}_{ik}^{lj}) = \frac{1}{3}(2\mathtt{C}_{ij}^{kl} + \mathtt{C}_{ij}^{kl}) = \mathtt{C}_{ij}^{kl}, \tag{42}$$

en donde la ecuación (41) ha sido usada de nuevo. Por tanto $\phi \circ \varphi = \mathrm{Id}_\Sigma$ y, siendo ambos espacios vectoriales de la misma dimensión, resulta que ϕ y φ son isomorfismos y $\phi = \varphi^{-1}$, luego la ecuación (34) queda probada. □

9. Cálculo lineal de la QoS

Cada segmento $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}$ de longitud d proporciona una ecuación lineal en $\mathtt{C}$

$$\sigma(\mathbf{x},\mathbf{y})^\top \mathtt{C}\, \sigma(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 0. \tag{43}$$

Mediante el resultado (28), sabemos que son necesarias

$$L \stackrel{\text{def}}{=} \dim \mathrm{Sym}(N+1) - 1 = (N+1)(N+2)/2 - 1$$

ecuaciones para determinar $\mathtt{C}$, dado que no hay ningún subespacio lineal de dimensión menor que pueda contener las cuádricas $\mathtt{C}$. Además, el resultado 5.5 asegura que una única solución $\mathtt{C}$ será obtenida usando L segmentos de longitud d en posición general.

Ocupémonos ahora del problema de la recuperación de la geometría euclídea a partir del conocimiento de longitudes arbitrarias d_i de un conjunto de segmentos $\{\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i\}$. Puesto que las correspondientes cuádricas $\mathtt{C}_{d_i}$ se escriben como

$$\mathtt{C}_{d_i} = \mathtt{C}_1 + \frac{d_i^2}{2}\mathtt{C}_2,$$

es suficiente con obtener $\mathtt{C}_1$ y $\mathtt{C}_2$ a partir de las ecuaciones lineales

$$\sigma(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i)^\top \left(\mathtt{C}_1 + \frac{d_i^2}{2} \mathtt{C}_2 \right) \sigma(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i) = 0 \tag{44}$$

lo cual, en principio, supone calcular $2L+1$ parámetros salvo un factor común de escala. Sin embargo, ahora veremos como, debido al resultado 6.1, L ecuaciones lineales bastan.

De los resultados 5.3 y 6.1 sabemos ya que S_2 es el espacio lineal generado por las matrices de la forma $\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{x})\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{x})^\top$. Por tanto una base $\{\mathtt{M}_\beta^{(2)}\}_{\beta=1}^{\dim S_2}$ de S_2 puede ser fácilmente obtenida a partir de esta parametrización. Nuevamente, usando 6.1, vemos que $S_1 = S_2^\perp$, y por tanto una base $\{\mathtt{M}_\alpha^{(1)}\}_{\alpha=1}^{\dim S_1}$ de S_1 puede ser obtenida despejando $\mathtt{C}_1$ del sistema de $\dim S_2$ ecuaciones lineales

$$\left\langle \mathtt{M}_\beta^{(2)}, \mathtt{C}_1 \right\rangle = 0.$$

Una vez obtenidas dichas bases, podemos parametrizar $\mathtt{C}_1$ y $\mathtt{C}_2$ linealmente como sigue

$$\begin{aligned} \mathtt{C}_1 &= \sum_{\alpha=1}^{\dim S_1} a_\alpha^{(1)} \mathtt{M}_\alpha^{(1)} \\ \mathtt{C}_2 &= \sum_{\beta=1}^{\dim S_2} a_\beta^{(2)} \mathtt{M}_\beta^{(2)} \end{aligned} \tag{45}$$

para ciertos coeficientes desconocidos $a_\alpha^{(1)}$, $a_\beta^{(2)}$. Ahora las ecuaciones (44) pueden ser escritas como

$$\sum_{\alpha=1}^{\dim S_1} \mu_\alpha^i a_\alpha^{(1)} + \frac{d_i^2}{2} \sum_{k=1}^{\dim S_2} \nu_\beta^i a_\beta^{(2)} = 0 \tag{46}$$

donde

$$\begin{aligned} \mu_\alpha^i &= \sigma(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i)^\top \mathtt{M}_\alpha^{(1)} \sigma(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i), \\ \nu_\beta^i &= \sigma(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i)^\top \mathtt{M}_\beta^{(2)} \sigma(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i). \end{aligned} \tag{47}$$

Por tanto, a partir de estas $\dim S_1 + \dim S_2 - 1 = L$ ecuaciones, las $L+1$ incógnitas $a_j^{(1)}, a_k^{(2)}$ se pueden recuperar salvo un factor común de escala, y por tanto se recupera la QoS.

Objectivo
Dado un conjunto de imágenes de una escena tridimensional conteniendo un conjunto de segmentos $\{\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i\}$ de longitudes conocidas d_i (posiblemente salvo un factor de escala común), obtener una reconstrucción 3D euclídea.
Suponemos que las bases $\mathtt{M}_\alpha^{(1)}$ y $\mathtt{M}_\beta^{(2)}$ han sido pre-calculadas usando la técnica sugerida bajo la fórmula (44).
Algoritmo
(i) Obténgase una reconstrucción proyectiva de la escena.
(ii) Calcúlense los coeficientes $\{\mu_\alpha^i, \nu_\beta^i\}$ de acuerdo con las fórmulas (47).
(iii) Resuélvase el sistema lineal homogéneo (46), obteniéndose así los coeficientes $\{a_\alpha^{(1)}, a_\beta^{(2)}\}$.
(iv) Constrúyase el par de matrices $(\mathtt{C}_1, \mathtt{C}_2)$ de acuerdo con las ecuaciones (45).
(v) Calcúlese una homografía rectificante $\mathtt{H}$ usando una de las técnicas siguientes:
a. Primeramente, obténgase el plano del infinito $\boldsymbol{\pi}_\infty$ a partir de $\mathtt{C}_2$ usando el resultado 7.2. Una vez obtenido, calcúlese una reconstrucción afín. Entonces calcúlese la reconstrucción euclídea usando la técnica de ajuste afín recordada en la sección 2.
b. Calcúlese la DAQ a partir de $\mathtt{C}_1$ según se indicó en la subsección 7.2 y obténgase $\mathtt{H}$ de la misma o calcúlese la AQC según se describe en 8.1, y obténgase $\mathtt{H}$ usando [25].

10. Resultados experimentales

10.1. Marco general

El rendimiento de los algoritmos que la teoría expuesta sugiere ha sido evaluado en diferentes marcos experimentales. Algunas de las implementaciones hacen uso de un ajuste afín. Se han considerado cuatro algoritmos:

- Extracción de la homografía rectificante a partir de $\mathtt{C}_1$ (C1).
- Extracción de la homografía rectificante a partir de $\mathtt{C}_1$ seguido de un ajuste afín (C1A).
- Calibración afín usando el plano del infinito extraído de $\mathtt{C}_2$ seguido de un ajuste afín (C2A).
- Ajuste afín puro (A) (incluido simplemente por comparación).

Los experimentos están basados en conjuntos de segmentos de igual longitud, de forma que el principal parámetro de la calidad de cada reconstrucción es la desviación típica de las longitudes de los segmentos corregidas, dividida por su media (parámetro σ/μ). La probabilidades de fallo de los algoritmos también han sido estudiadas: aparte del posible fallo del ajuste afín (si la aproximación calculada de $\mathtt{U}^\top\mathtt{U}$ no es definida (2)) la extracción de la homografía rectificante a partir de $\mathtt{C}_1$ falla y la matriz AQC de rango tres no es semidefinida.

10.2. Experimentos con datos sintéticos

El primer conjunto de experimentos trata con datos bidimensionales. Se obtienen segmentos aleatorios de longitud uno dentro de un cuadrado con esquinas $\mathbf{v}_i, i = 1, 2, 3, 4$, y una homografía aleatoria se les aplica. La homografía se define como aquella que transforma cada punto $\mathbf{v}_i$ en $\mathbf{v}_i + \mathbf{n}_i$, donde $\mathbf{n}_i$ es un vector aleatorio de componentes de media nula y desviación típica σ=1/8 del lado del cuadrado. Se añade entonces ruido gaussiano de media nula y componentes independientes a los puntos distorsionados y los algoritmos se aplican a la obtención de la homografía rectificante usando las longitudes originales de los segmentos como dato de entrada. En la figura Figure 1 se muestra un conjunto típico de datos de entrada.

Los algoritmos han sido comprobados de forma similar en el caso tridimensional, empleando segmentos aleatorios de longitud unidad en coordenadas euclídeas que se encuentran dentro de un cubo de vértices $\mathbf{v}_i, i = 1, \ldots, 8$. La homografía aleatoria se define como aquella que transforma cinco vértices seleccionados del cubo en los puntos correspondientes $\mathbf{v}_i + \mathbf{n}_i$ con $\mathbf{n}_i$ definidos como en el caso bidimensional La figura 2 muestra un conjunto de datos de entrada.

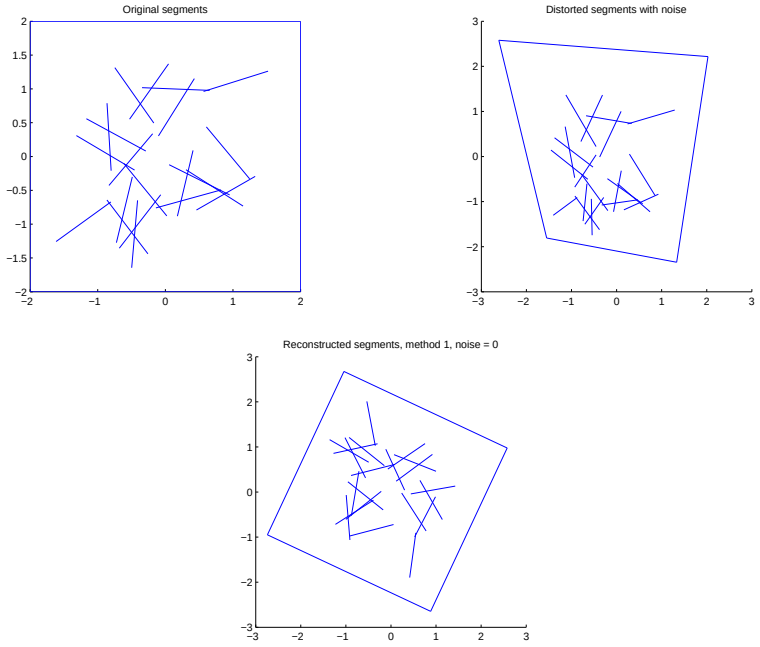


Figura 1: Datos sintéticos bidimensionales

La figura 3 muestra en los casos 2D y 3D el rendimiento de los diferentes algoritmos como una función de la variancia del ruido. La dependencia del rendimiento de los algoritmos en el número de segmentos se ilustra en la figura 4. El algoritmo C1A tiene un rendimiento muy cercano al mejor en términos del parámetro de calidad σ/μ, mientras que la ventaja del algoritmo C2A sobre el C1A en el caso bidimensional se invierte en el caso 3D. El algoritmo C1A tiene también un buen rendimiento en térmi-

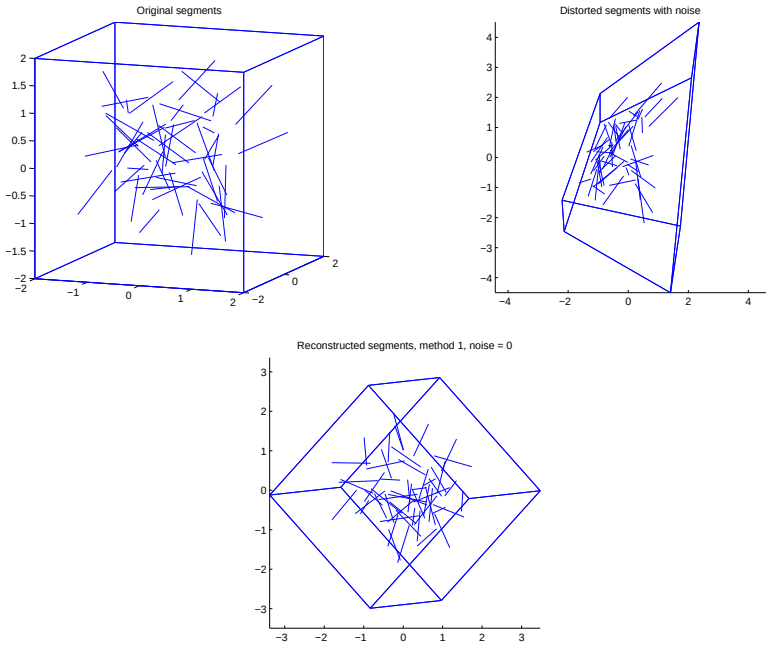


Figura 2: Datos sintéticos tridimensionales

nos de la ratio de fracasos, mientras que el C2A es, en términos de este parámetro, el que se comporta peor.

En la figura 4 la comparación de los tres primeros algoritmos con el algoritmo de referencia C2A revela que su rendimiento es muy pobre en cuando el número de segmentos es el mínimo necesario. Sin embargo, los rendimientos mejoran considerablemente cuando el número de segmentos se dobla, mejorando a partir de entonces lentamente los rendimientos.

El segundo experimento con datos sintéticos trata la actualización euclídea de las reconstrucciones proyectivas obtenidas a partir de imágenes. Para cada instancia del experimento, se genera un conjunto aleatorio de segmentos 3D de igual longitud y situados dentro de un cubo, junto con parámetros intrínsecos y extrínsecos aleatorios de un par de cámaras, orientadas de forma que el cubo se sitúa aproximadamente en el centro de la imagen, con puntos que se proyectan a una distancia máxima de 1000 píxeles del centro de la imagen. Se añade ruido gaussiano de media nula a las proyecciones. Una de estas configuraciones aleatorias se muestra en la figura 5. Una reconstrucción proyectiva de la escena se obtiene a partir de las dos imágenes usando los algoritmos 10.1 (cálculo de la matriz fundamental con ocho puntos) y 11.1 (triangulación óptima) de [5], la cual es hecha posteriormente cuasi-afín usando el algoritmo 20.1 de [5]. Las cuatro técnicas comprobadas previamente se aplican de nuevo. Los resultados, que se encuentran en la figura 6, son semejantes a los de los conjuntos previos de experimentos.

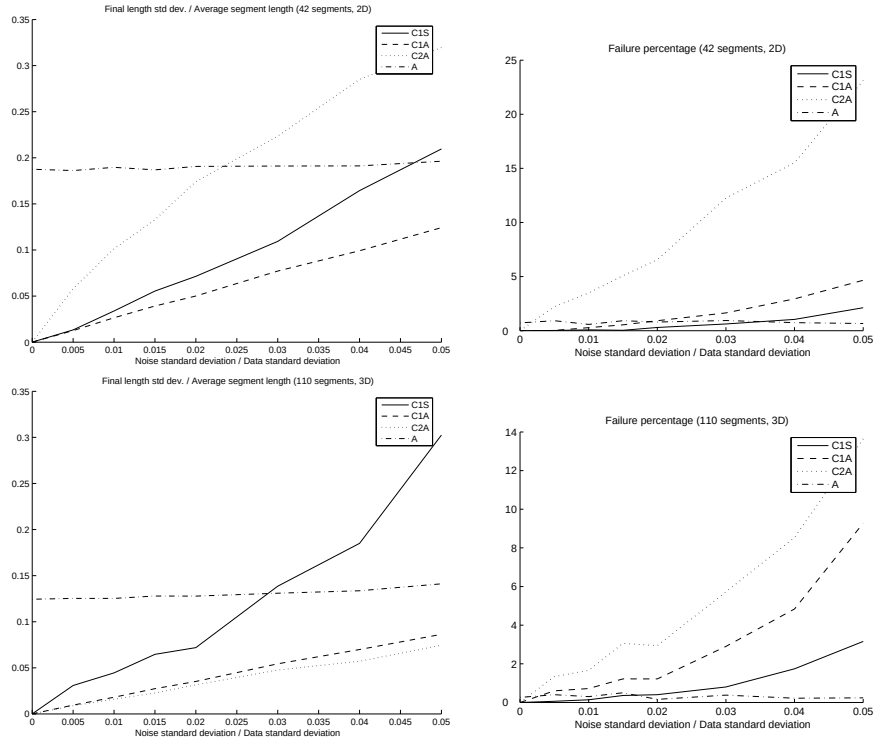


Figura 3: Datos sintéticos: dependencia del rendimiento en la variancia del ruido en 2D (arriba) y 3D (abajo) para 42 y 110 segmentos, respectivamente.

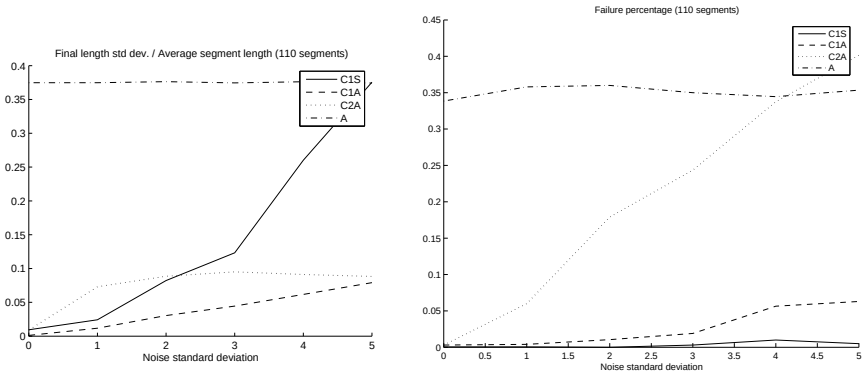


Figura 6: Datos sintéticos: reconstrucción a partir de imágenes. El rendimiento de los algoritmos como función del ruido de la imagen.

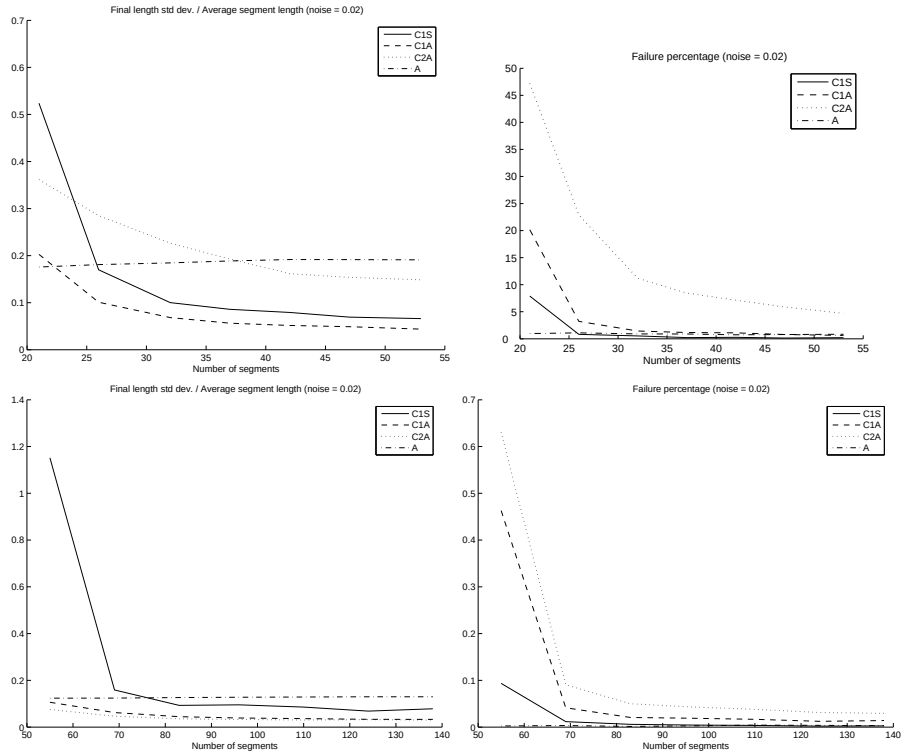


Figura 4: Datos sintéticos: dependencia del rendimiento en el número de segmentos en los casos 2D (arriba) y 3D (abajo) para una desviación típica del ruido 2 % de la desviación tipica de los datos.

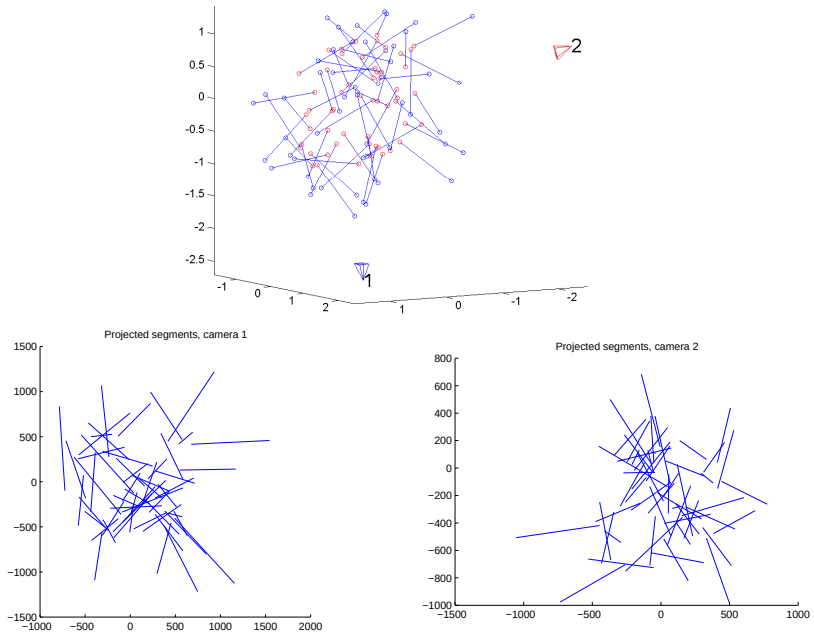


Figura 5: Datos sintéticos: reconstrucción a partir de imágenes. Arriba: un ejemplo de la escena sintética original. Abajo: las vistas correspondientes de los segmentos.

10.3. Experimentos con imágenes reales

Para comprobar el rendimiento de los algoritmos en el caso 2D usando datos reales, se tomó una foto de una hoja de papel en la que se mostraban segmentos aleatorios de la misma longitud. Después de detectar los extremos de los segmentos, se obtuvieron homografías rectificantes usando los cuatro algoritmos comprobados. Los resultados se muestran en la figura 7. Es particularmente satisfactorio el valor σ/μ, igual a 0,014, que se obtiene usando el algoritmo C2A.

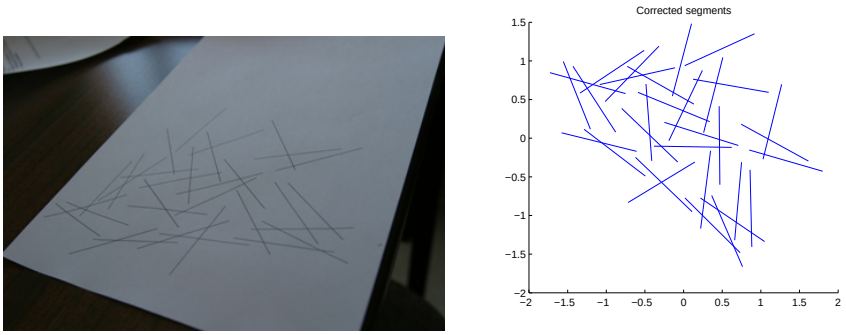


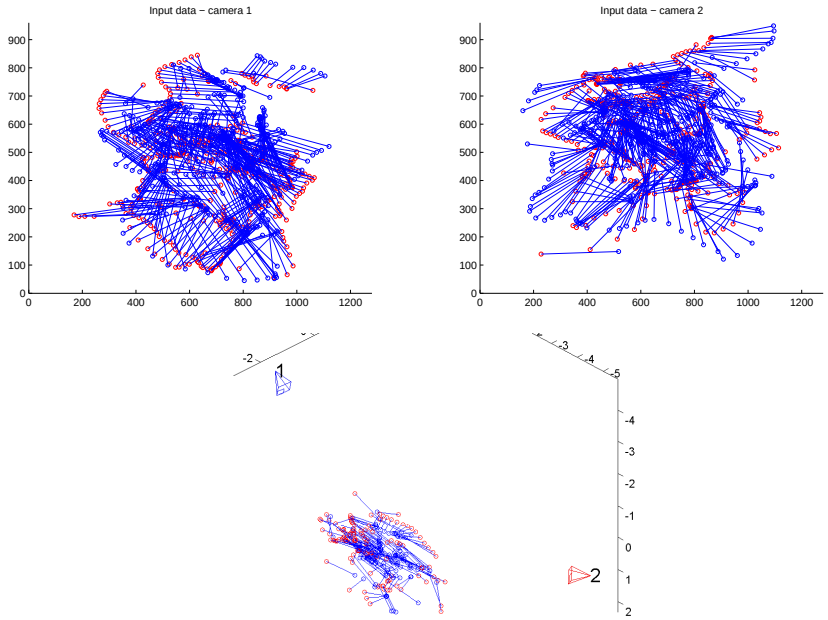
Figura 7: Experimentos con datos reales bidimensionales. A la izquierda, la imagen original. A la derecha, la versión corregida.

Los experimentos de reconstrucciones 3D basadas en imágenes reales se realizaron usando una varilla con tres LEDs equidistantes, cuyo movimiento se grabó usando dos cámaras de vídeo sincronizadas con una resolución de 1280×960 píxeles. La detección de los LEDs se llevó a cabo automáticamente y se obtuvo una reconstrucción proyectiva que después se mejoró a una cuasi-afín. El mejoramiento euclídeo se llevó a cabo usando los algoritmos propuestos, empleando exclusivamente el conocimiento de la distancia entre los dos LEDs en los extremos de la varilla. El LED medio se usó para poder tener una medida adicional de la precisión de la reconstrucción.

La figura 8 muestra los puntos detectados en 131 fotogramas válidos y la reconstrucción 3D resultante, calculada con el método C2A a partir de una calibración proyectiva con error de reproyección medio de 0.41 píxeles. En esta reconstrucción las longitudes de los segmentos satisfacen que $\sigma/\mu = 6{,}6\,10^{-3}$ y la máxima longitud es 4 % mayor que la longitud mínima. Las ratios de las distancias entre el LED medio y los extremos de la varilla tienen un valor medio de 0.992 y un valor máximo un 8 % mayor que el mínimo. Los parámetros intrínsecos calculados incluyen los ángulos de oblicuidad de los píxeles y las razones de aspecto: $\theta_1 = 0{,}96\frac{\pi}{2}$, $\tau_1 = 0{,}99$, $\theta_2 = 0{,}96\frac{\pi}{2}$, $\tau_2 = 1{,}02$, que aproximan los valores exactos de las cámaras de píxeles cuadrados que fueron empleadas en el experimento.

Los resultados fueron refinados usando un ajuste de haces (BA) que forzaba que las cámaras tuvieran píxeles cuadrados y usando una función de coste dada por una combinación lineal del error de reproyección y la desviación típica normalizada de las longitudes de los segmentos σ/μ. Forzar cámaras de píxeles cuadrados implica un incremento inicial del error de reproyección, pero después del ajuste de haces este parámetro se reduce de nuevo a 0,50, y las longitudes de los segmentos 3D recons-

truidos satisfacen $\sigma/\mu = 6{,}06\,10^{-5}$, con longitud máxima 1,0003 veces mayor que la mínima. El desplazamiento medio de los puntos 3D de la reconstrucción inicial respecto de la optimizada es 0.084. Los parámetros intrínsecos de la cámara, antes y después el ajuste de haces, se muestran en la figura 8, mostrando la eficacia del algoritmo para la obtención de reconstrucciones 3D.



	Antes BA	Después BA
Longitudes focales	1379.92	1378.50
	1375.81	1385.77
Puntos principales (hor.)	605.01	647.42
	707.00	656.07
Puntos principales (vert.)	448.75	444.79
	434.93	421.15

Figura 8: Experimentos de reconstrucción 3D con datos reales. Arriba: vistas de la varilla con ambas cámaras. Medio: escena 3D reconstruida. Abajo: cálculo de los parámetros intrínsecos de las dos cámaras, antes y después del ajuste de haces (BA).

Apéndice

A. Detalles técnicos

A.1. Demostración del resultado 5.5

Para demostrat 5.5 necesitamos los dos lemas siguientes:

Lema A.1. *Sean* $\mathtt{C}$ *y* $\mathtt{C}'$ *dos cuádricas de* $\mathbf{P}^N$ *que toman los mismos valores a lo largo de* $\operatorname{im}\sigma$*, i.e.,*

$$\sigma(\mathbf{x},\mathbf{y})^\top \mathtt{C}\,\sigma(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sigma(\mathbf{x},\mathbf{y})^\top \mathtt{C}'\sigma(\mathbf{x},\mathbf{y})$$

para cualesquiera $\mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbf{P}^N$*. Entonces* $\mathtt{C} = \mathtt{C}'$*.*

Demostración. Escribiendo nuestra hipótesis como

$$\sigma(\mathbf{x},\mathbf{y})^\top (\mathtt{C} - \mathtt{C}')\,\sigma(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 0$$

vemos que es suficiente con demostrar que $\sigma(\mathbf{x},\mathbf{y})^\top \mathtt{C}\,\sigma(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 0$ para cualesquiera $\mathbf{x},\mathbf{y}$ implica que $\mathtt{C} = 0$. Denotemos

$$E = \sigma(\mathbf{x},\mathbf{y})^\top \mathtt{C}\,\sigma(\mathbf{x},\mathbf{y}).$$

Denotemos también como $\{\mathbf{e}_i\}$ la base canónica de $\mathbf{C}^{n+1}$ y definamos

$$\mathtt{C}_{ij}^{kl} = \sigma(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j)^\top \mathtt{C}\,\sigma(\mathbf{e}_k,\mathbf{e}_l). \tag{48}$$

Los coeficientes $\mathtt{C}_{ij}^{kl}$ cumplen las simetrías

$$\mathtt{C}_{ij}^{kl} = \mathtt{C}_{kl}^{ij} = \mathtt{C}_{ij}^{lk} = \mathtt{C}_{ji}^{kl},$$

y, con un sencillo cálculo de la 4ta derivada de E, vemos que

$$\frac{\partial^4 E}{\partial x_i \partial y_j \partial x_k \partial y_l} = 2(\sigma(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j)^\top \mathtt{C}\,\sigma(\mathbf{e}_k,\mathbf{e}_l) + \sigma(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_l)^\top \mathtt{C}\,\sigma(\mathbf{e}_k,\mathbf{e}_j)) = 0,$$

puesto que $E = 0$, y en consecuencia tenemos la simetría adicional

$$\mathtt{C}_{ij}^{kl} = -\mathtt{C}_{il}^{kj},$$

de forma que

$$\mathtt{C}_{ij}^{kl} = -\mathtt{C}_{il}^{jk} = \mathtt{C}_{ik}^{jl} = -\mathtt{C}_{ij}^{lk} = -\mathtt{C}_{ij}^{kl},$$

y entonces $\sigma(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j)^\top \mathtt{C}\,\sigma(\mathbf{e}_k,\mathbf{e}_l) = \mathtt{C}_{ij}^{kl} = 0$ para cualesquiera i,j,k y l. Puesto que $\{\sigma(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j)\colon i \le j\}$ es una base de $\mathbf{C}^{N+1}$, concluímos que $\mathtt{C} = 0$. □

Lema A.2. *Si todos los factores irreducibles de*

$$E = \sigma(\mathbf{x},\mathbf{y})^\top \mathtt{C}\,\sigma(\mathbf{x},\mathbf{y}).$$

son de grado uno, entonces E *es de la forma*

$$E(\mathbf{x},\mathbf{y}) = (\mathbf{a}^\top\mathbf{x})(\mathbf{a}^\top\mathbf{y})(\mathbf{b}^\top\mathbf{x})(\mathbf{b}^\top\mathbf{y})$$

para ciertos $\mathbf{a},\mathbf{b} \in \mathbf{C}^{n+1}$*.*

Demostración. Sea $E(\mathbf{x},\mathbf{y}) = (\mathbf{a}^\top\mathbf{x} + \mathbf{a}'^\top\mathbf{y})(\mathbf{b}^\top\mathbf{x} + \mathbf{b}'^\top\mathbf{y})(\mathbf{c}^\top\mathbf{x} + \mathbf{c}'^\top\mathbf{y})(\mathbf{d}^\top\mathbf{x} + \mathbf{d}'^\top\mathbf{y})$. Del hecho de que todos los monomios de E son de grado dos tanto en las variables x_i como y_i, deducimos que E debe ser de la forma $E(\mathbf{x},\mathbf{y}) = (\mathbf{a}^\top\mathbf{x})(\mathbf{b}^\top\mathbf{x})(\mathbf{c}^\top\mathbf{y})(\mathbf{d}^\top\mathbf{y})$ y, teniendo en cuenta la simetría $E(\mathbf{x},\mathbf{y}) = E(\mathbf{y},\mathbf{x})$, se sigue que E debe tener la forma requerida. □

Estamos ahora en condiciones de demostrar el resultado 5.5.

Demostración. Denotemos

$$E(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sigma(\mathbf{x},\mathbf{y})^\top \mathtt{C}\, \sigma(\mathbf{x},\mathbf{y})$$

y

$$E'(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sigma(\mathbf{x},\mathbf{y})^\top \mathtt{C}'\sigma(\mathbf{x},\mathbf{y}),$$

y sea

$$E = (E_1)^{a_1} \cdots (E_s)^{a_s},$$
$$E' = (E'_1)^{a'_1} \cdots (E'_{s'})^{a'_{s'}},$$

su descomposición en factores irreducibles. Puesto que $E(\mathbf{x},\mathbf{y})$ y $E'(\mathbf{x},\mathbf{y})$ tienen los mismos ceros, tienen el mismo polinomio reducido R como consecuencia del teorema de los ceros de Hilbert [3, p.49], i.e.,

$$R = E_1 \cdots E_s = E'_1 \cdots E'_{s'}$$

salvo un factor de escala constante λ que suponemos, sin pérdida de generalidad, ser $\lambda = 1$. Reordenando factores si es preciso, obtenemos que $s = s'$ y $E_i = E'_i$ para todo $i = 1, \ldots, s$. Tenemos varias posibilidades de acuerdo con que E sea o no reducido:

- Primero, si E es reducido, i.e., $E = R$ entonces se sigue que también $E' = R$, puesto que si algún $a'_i > 1$ entonces $\deg E' > \deg E$, lo que es imposible. Ahora, siendo $E = E'$ el resultado se sigue del lema A.1.

- Si E no es reducido es entonces fácil comprobar que las siguientes son las únicas posibilidades (teniendo en cuenta que $\deg E = \deg E' = 4$). Denotemos $E_i = E_i^{(d)}$ siendo $\deg E_i = d$:

  1. Si $E = (E_1^{(2)})^2$ la comparación de factores irreducibles lleva inmediatamente a que $E' = (E_1^{(2)})^2$ y por tanto $E = E'$ y se sigue el resultado.
  2. De forma similar, si $E = E_1^{(2)}(E_2^{(1)})^2$ entonces necesariamente también $E = E'$.
  3. Si todas las componentes irreducibles son de grado uno entonces, teniendo en cuenta el lema A.2, dado que E no es reducido la única posibilidad es que $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ y por tanto

     $$E(\mathbf{x},\mathbf{y}) = (\mathbf{a}^\top\mathbf{x})^2(\mathbf{a}^\top\mathbf{y})^2.$$

     Pero en este caso el emparejamiento de las componentes irreducibles fuerza que también $E = E'$ y el resultado queda demostrado.

□

A.2. Demostración del resultado 6.1

Demostración. Usando el resultado 5.3 podemos parametrizar las posibles matrices $\mathtt{C}_2$ como

$$\mathtt{C}_2(\mathbf{x}) \sim \sigma(\mathbf{x},\mathbf{x})\sigma(\mathbf{x},\mathbf{x})^\top.$$

Se sigue inmediatamente de la definición de $\sigma(\mathbf{x},\mathbf{y})$ que cada coordenada de

$$\sigma(\mathbf{x},\mathbf{x})\sigma(\mathbf{x},\mathbf{x})^\top$$

es proporcional a un monomio de grado cuatro en las variables $x_0,\ldots,x_n$ y que ninguno de dichos monomios falta, de forma que S_2 tiene la misma dimensión que el espacio vectorial de polinomios homogéneos de grado cuatro, es decir, $\binom{n+4}{4}$.

Veamos que S_1 es ortogonal a S_2. Puesto que la distancia de un punto a sí mismo es cero, tenemos la identidad

$$\sigma(\mathbf{x},\mathbf{x})^\top(\mathtt{C}_1 + 0\,\mathtt{C}_2)\sigma(\mathbf{x},\mathbf{x}) = \sigma(\mathbf{x},\mathbf{x})^\top\mathtt{C}_1\sigma(\mathbf{x},\mathbf{x}) = 0, \tag{49}$$

que da lugar a un conjunto de ecuaciones lineales que satisfacen las matrices $\mathtt{C}_1$ y por tanto por cualquier elemento de S_1. Usando (25) y el producto (2) para escribir la ecuación (49) como

$$0 = \operatorname{trace}(\sigma(\mathbf{x},\mathbf{x})^\top\mathtt{C}_1\sigma(\mathbf{x},\mathbf{x})) = \operatorname{trace}(\sigma(\mathbf{x},\mathbf{x})\sigma(\mathbf{x},\mathbf{x})^\top\mathtt{C}_1) \sim \langle \mathtt{C}_2(\mathbf{x}), \mathtt{C}_1\rangle, \tag{50}$$

concluimos que $S_1 \perp S_2$. De aquí se deduce una cota superior para $\dim S_1$:

$$\dim S_1 \le \dim \operatorname{Sym}(N{+}1) - \dim S_2 = \frac{(N+1)(N+2)}{2} - \binom{n+4}{4} = \frac{1}{12}\,n\,(n{+}1)^2(n{+}2). \tag{51}$$

Veamos que, de hecho $\dim S_1$ coincide con esta cota. Usando (21) y (16) podemos escribir $\mathtt{C}_1$ como sigue:

$$\begin{aligned}\mathtt{C}_1 =& \tilde{\mathtt{H}}^\top\mathtt{C}_1^{\mathtt{euc}}\tilde{\mathtt{H}} = \widetilde{\mathtt{H}^\top}\mathtt{C}_1^{\mathtt{euc}}\widetilde{\mathtt{H}^\top}^\top = \\ &\sum_{i=1}^{n}\left(\sigma(\mathbf{k}_0,\mathbf{k}_i)\sigma(\mathbf{k}_0,\mathbf{k}_i)^\top - \sigma(\mathbf{k}_0,\mathbf{k}_0)\sigma(\mathbf{k}_i,\mathbf{k}_i)^\top - \sigma(\mathbf{k}_i,\mathbf{k}_i)\sigma(\mathbf{k}_0,\mathbf{k}_0)^\top\right),\end{aligned}$$

donde $\mathbf{k}_i$ denota las filas de $\mathtt{H} = (h_{ij})$. Veamos que los monomios que involucran solo $\mathbf{k}_0$ y $\mathbf{k}_1$ son bastantes para alcanzar la dimensión requerida de S_2. Denotemos

$$\mathtt{E}^i = \sigma(\mathbf{k}_0,\mathbf{k}_i)\sigma(\mathbf{k}_0,\mathbf{k}_i)^\top - \sigma(\mathbf{k}_0,\mathbf{k}_0)\sigma(\mathbf{k}_i,\mathbf{k}_i)^\top - \sigma(\mathbf{k}_i,\mathbf{k}_i)\sigma(\mathbf{k}_0,\mathbf{k}_0)^\top$$

de forma que

$$\mathtt{C}_1 = \sum_{i=1}^{n}\mathtt{E}^i.$$

Observemos que, puesto que el cierre topológico de $\mathrm{GL}(n+1)$ es el conjunto $\mathbf{M}_{n+1}$ de todas las matrices de orden $n+1$, tenemos que

$$\dim \operatorname{Span}\{\mathtt{C}_1(\mathtt{H})\colon \mathtt{H}\in \mathrm{GL}(n+1)\} = \dim \operatorname{Span}\{\mathtt{C}_1(\mathtt{H})\colon \mathtt{H}\in \mathbf{M}_{n+1}\}.$$

Dado que

$$\{\mathtt{C}_1(\mathtt{H})\colon \mathtt{H} \in \mathbf{M}_{n+1}\} \supset \{\mathtt{E}^1(\mathtt{H})\colon \mathtt{H} \in \mathbf{M}_{n+1}\},$$

se tiene que

$$\dim \operatorname{Span}\{\mathtt{C}_1(\mathtt{H})\colon \mathtt{H} \in \mathbf{M}_{n+1}\} \geq \dim \operatorname{Span}\{\mathtt{E}^1(\mathtt{H})\colon \mathtt{H} \in \mathbf{M}_{n+1}\} \geq \frac{1}{12}\, n\,(n+1)^2(n+2),$$

donde la última desigualdad es el contenido del lema A.3.

Finalmente, la demostración de que

$$\operatorname{Span}\{\mathtt{C}(\mathtt{H})\colon \mathtt{H} \in \mathrm{GL}(n+1)\} = \mathrm{Sym}(N+1)$$

es enteramente similar al resultado que acabamos de demostrar para $\mathtt{C}_1$ usando que

$$\mathtt{C} = -\frac{d^2}{4}\mathtt{E}^0 + \sum_{i=1}^{n} \mathtt{E}^i.$$

donde

$$\mathtt{E}^0 = \sigma(\mathbf{k}_0, \mathbf{k}_0)\sigma(\mathbf{k}_0, \mathbf{k}_0)^\top$$

y comprobando que las $\binom{n+4}{4}$ derivadas

$$\mathtt{E}^0_{ijkl} = \frac{\partial^4 \mathtt{E}^0}{\partial h_{i0}\partial h_{j0}\partial h_{k0}\partial h_{l0}}$$

son linealmente independientes de las derivadas (52). □

A.3. Lemas necesarios para la demostración del resultado 6.1

Lema A.3.

$$\dim \operatorname{Span}\{\mathtt{E}^1(\mathtt{H})\colon \mathtt{H} \in \mathbf{M}_{n+1}\} \geq \frac{1}{12}\, n\,(n+1)^2(n+2).$$

Demostración. Definamos

$$\mathtt{E}^1_{ijkl} = \frac{\partial^4 \mathtt{E}^1}{\partial h_{i0}\partial h_{j0}\partial h_{k1}\partial h_{l1}}. \tag{52}$$

Como todas las derivadas $\mathtt{E}^1_{ijkl} \in \operatorname{Span}\{\mathtt{E}^1(\mathtt{H})\colon \mathtt{H} \in \mathbf{M}_{n+1}\}$, tenemos que

$$\dim \operatorname{Span}\{\mathtt{E}^1(\mathtt{H})\colon \mathtt{H} \in \mathbf{M}_{n+1}\} \geq \dim \operatorname{Span}\{\mathtt{E}^1_{ijkl}(\mathtt{H})\colon \mathtt{H} \in \mathbf{M}_{n+1}, 0 \leq i,j,k,l \leq n+1\}.$$

No es difícil comprobar que

$$\mathtt{E}^1_{ijkl} = -2\mathtt{S}(\sigma(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j),\sigma(\mathbf{e}_k,\mathbf{e}_l)) + \mathtt{S}(\sigma(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_k),\sigma(\mathbf{e}_j,\mathbf{e}_l)) + \mathtt{S}(\sigma(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_l),\sigma(\mathbf{e}_j,\mathbf{e}_k)),$$

donde $\mathtt{S}$ está definido como en (1). El siguiente lema asegura que las matrices $\mathtt{E}^1_{ijkl}$ son linealmente independientes:

Lema A.4. *Dos matrices $\mathtt{E}^1_{ijkl}$ and $\mathtt{E}^1_{i'j'k'l'}$ son ortogonales en tanto que $\{i,j,k,l\} \neq \{i',j',k',l'\}$.*

Demostración. Es una consecuencia directa de que los productos

$$\langle \mathtt{S}(\sigma(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j), \sigma(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_l), \mathtt{S}(\sigma(\mathbf{e}_{i'}, \mathbf{e}_{j'}), \sigma(\mathbf{e}_{k'}, \mathbf{e}_{l'}) \rangle$$

se anulan siempre que $\{i, j, k, l\} \neq \{i', j', k', l'\}$. □

Denotemos por $\mathcal{P}_r(n+1)$ el subconjunto del conjunto potencia de $\{0, \ldots, n\}$ dado por los subconjuntos de cardinal r. Para cada elemento $\alpha \in \mathcal{P}_r(n+1)$, que es un conjunto no ordenado, escojamos un orden dado por una sucesión de orden r concreta. Denotemos tal sucesión como $s^\alpha = (s_1^\alpha, \ldots, s_r^\alpha)$, y tenemos que $\{s_1^\alpha, \ldots, s_r^\alpha\} = \alpha$. Sea $\mathcal{S}_r$ el conjunto de todas estas sucesiones, una para cada α.

Para cada $s = (i, j, k, l) \in \mathcal{S}_4$ definimos el subespacio vectorial $V_s^{(2)}$ engendrado por $\mathtt{E}^1_{ijkl}$ y $\mathtt{E}^1_{ikjl}$. Además definimos para cada $s = (i, j, k) \in \mathcal{S}_3$ el subespacio vectorial $V_s^{(3)}$ generado por $\mathtt{E}^1_{iijk}, \mathtt{E}^1_{ijjk}$ y $\mathtt{E}^1_{ijkk}$. Finalmente, si $s = (i, j) \in \mathcal{S}_2$ definimos $V_s^{(1)}$ como el subespacio vectorial engendrado por $\mathtt{E}^1_{iijj}$.

Lema A.5. *La dimensión de cada $V_s^{(h)}$ es h.*

Demostración. Comprobemos que $\dim V_s^{(2)} = 2$, siendo tratados los otros casos de forma similar. Denotando $s = (i, j, k, l)$,

$$\mathtt{E}^1_{ijkl} = -2\mathtt{S}(\sigma(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j), \sigma(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_l)) + \mathtt{S}(\sigma(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_k), \sigma(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_l)) + \mathtt{S}(\sigma(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_l), \sigma(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k)),$$
$$\mathtt{E}^1_{ikjl} = -2\mathtt{S}(\sigma(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_k), \sigma(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_l)) + \mathtt{S}(\sigma(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j), \sigma(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_l)) + \mathtt{S}(\sigma(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_l), \sigma(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_j)),$$

Siendo $\sigma(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j), \sigma(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_l), \sigma(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_k), \sigma(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_l), \sigma(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_l), \sigma(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k)$ seis vectores independientes, dado que son proporcionales a vectores distintos de la base canónica de $\mathbf{C}^{N+1}$, las matrices simetrizadas $\mathtt{S}(\sigma(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j), \sigma(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_l))$, $\mathtt{S}(\sigma(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_k), \sigma(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_l))$, $\mathtt{S}(\sigma(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_l), \sigma(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k))$ son también independientes. Dado que las coordenadas de $\mathtt{E}^1_{ijkl}$ y $\mathtt{E}^1_{ikjl}$ en términos de la base formada por estas matrices $(-2, 1, 1)$ y $(1, -2, 1)$, son linealmente independientes, i.e., $\dim V_s^{(2)} = 2$. □

Consideremos ahora la suma de subespacios vectoriales

$$\bigoplus_{s \in \mathcal{S}_4} V_s^{(2)} \oplus \bigoplus_{s \in \mathcal{S}_3} V_s^{(3)} \oplus \bigoplus_{s \in \mathcal{S}_2} V_s^{(1)}.$$

Debido al lema A.4 ésta es una suma ortogonal y su dimensión es, debido al lema A.5

$$2\binom{n+1}{4} + 3\binom{n+1}{3} + \binom{n+1}{2} = \frac{1}{12}\, n\,(n+1)^2(n+2).$$

Esto prueba que

$$\dim \operatorname{Span}\{\mathtt{E}^1(\mathtt{H}) \colon \mathtt{H} \in \mathbf{M}_{n+1}\} \geq \frac{1}{12}\, n\,(n+1)^2(n+2).$$

□

Referencias

[1] M. Agrawal and L. S. Davis. Camera calibration using spheres: A semi-definite programming approach. In *ICCV '03: Proceedings of the Ninth IEEE International Conference on Computer Vision*, page 782, Washington, DC, USA, 2003. IEEE Computer Society.

[2] E. Bayro-Corrochano and B. Rosenhahn. A geometric approach for the analysis and computation of the intrinsic camera parameters. *Pattern Recognition*, 35(1):169 – 186, 2002.

[3] J. Harris. *Algebraic Geometry, A First Course*. Springer, 1995.

[4] R. Hartley and A. Zisserman. *Multiple View Geometry in Computer Vision*. Cambridge University Press, second edition, 2003.

[5] R. I. Hartley. Estimation of relative camera positions for uncalibrated cameras. In *Proc. European Conference on Computer Vision*, pages 579–587, London, UK, 1992. Springer-Verlag.

[6] R. I. Hartley, E. Hayman, L. de Agapito, and I. Reid. Camera calibration and the search for infinity. *Computer Vision, IEEE International Conference on*, 1:510, 1999.

[7] A. Heyden and K. Åström. Euclidean reconstruction from image sequences with varying and unknown focal length and principal point. In *Proc. IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, New York, USA, 1997.

[8] F. Kahl, B. Triggs, and K. Åström. Critical motions for auto-calibration when some intrinsic parameters can vary. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 13(2):131–146, 2000.

[9] D. Liebowitz and S. Carlsson. Uncalibrated motion capture exploiting articulated structure constraints. *Int. J. Comput. Vision*, 51(3):171–187, 2003.

[10] S. J. Maybank and O. D. Faugeras. A theory of self-calibration of a moving camera. *Int. J. Comput. Vision*, 8(2):123–151, 1992.

[11] M. Pollefeys and L. V. Gool. A stratified approach to metric self-calibration. In *Proc. of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, pages 407–412, June 1997.

[12] J. Ponce. On computing metric upgrades of projective reconstructions under the rectangular pixel assumption. In *Second European Workshop on 3D Structure from Multiple Images of Large-Scale Environments*, pages 52–67, London, UK, 2001. Springer-Verlag.

[13] J. Ponce, K. McHenry, T. Papadopoulo, M. Teillaud, and B. Triggs. On the absolute quadratic complex and its application to autocalibration. In *Proc. IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, volume 1, pages 780–787, Washington, DC, USA, 2005.

[14] T. Pribanic, P. Sturm, and S. Peharec. Wand-based calibration of 3d kinematic system. *IET-CV*, 3(3):124–129, September 2009.

[15] E. D. Roe, Jr. On the circular points at infinity. *The American Mathematical Monthly*, 4(5):132–145, May 1897.

[16] J. I. Ronda, G. Gallego, and A. Valdés. Camera autocalibration using Plücker coordinates. In *International Conference on Image Processing*, volume 3, pages 800–803, Genoa, Italy, 2005.

[17] J. I. Ronda, A. Valdés, and G. Gallego. Line geometry and camera autocalibration. *J. Math. Imaging Vis.*, 32(2):193–214, 2008.

[18] Ronda, José I. and Valdés, Antonio. Euclidean Upgrading from Segment Lengths *Int. J. Comput. Vision*, 90(3):350–368, 2010.

[19] Y. Seo and A. Heyden. Auto-calibration from the orthogonality constraints. In *Proc. International Conference on Pattern Recognition*, volume 01, pages 1067–1071, Los Alamitos, CA, USA, 2000.

[20] P. Sturm. Critical motion sequences for monocular self-calibration and uncalibrated euclidean reconstruction. *Computer Vision and Pattern Recognition, IEEE Computer Society Conference on*, 0:1100, 1997.

[21] P. A. Tresadern and I. D. Reid. Camera calibration from human motion. *Image Vision Comput.*, 26(6):851–862, 2008.

[22] B. Triggs. Autocalibration and the absolute quadric. In *Proc. of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, pages 609–614, Puerto Rico, USA, June 1997.

[23] R. Y. Tsai. A versatile camera calibration technique for high-accuracy 3d machine vision metrology using off-the-shelf tv cameras and lenses. In *Radiometry*, pages 221–244, USA, 1992. Jones and Bartlett Publishers, Inc.

[24] A. Valdés and J. I. Ronda. Camera autocalibration and the calibration pencil. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 23(2):167–174, 2005.

[25] A. Valdés, J. I. Ronda, and G. Gallego. The absolute line quadric and camera autocalibration. *International Journal of Computer Vision*, 66(3):283–303, 2006.

[26] K.-Y. K. Wong, P. R. Mendonça, and R. Cipolla. Camera calibration from surfaces of revolution. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 25:147–161, 2003.

[27] H. Zhang, K.-Y. K. Wong, and G. Zhang. Camera calibration from images of spheres. *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, 29(3):499–502, 2007.

[28] Z. Zhang. A flexible new technique for camera calibration. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 22:1330–1334, 2000.

[29] Z. Zhang. Camera calibration with one-dimensional objects. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 26:892–899, 2004.