

## MECÁNICA DE FLUIDOS. COORDENADAS DE LAGRANGE

S. SHMAREV

- Definiciones y conceptos básicos.
- Axiomas de la mecánica de medios continuos.
- Descripciones de Euler y Lagrange
- Derivación de ecuaciones básicas: conservación de la masa
- Ecuaciones básicas en los casos sin conservación de la masa
- Problemas de filtración
- Coordenadas de Lagrange en problemas con fronteras libres

### 1. DEFINICIONES

- Un medio continuo es un agregado que se mueve o deforma de forma continua en el tiempo  $t$  y forma un continuo en el espacio  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  (los casos físicos son  $n = 1, 2, 3$ ).

El medio esta compuesto de partículas puntuales  $\implies$  el concepto de medio continuo es una **abstracción**. La teoría falla a niveles microscópicos, sino viene confirmada experimentalmente a niveles macroscópicos.

- Trabajaremos con las distancias superiores al recorrido de una partícula individual pero inferiores al recorrido medio de un agregado de partículas. En vez de manejar las partículas, consideraremos **volumenes elementales**,  $\delta V$  (volumen infinitesimal), que se denomina **partícula fluida**. Cada volumen elemental se considera como un medio continuo y homogéneo. La velocidad de la partícula fluida – la velocidad media de  $\delta V$  – velocidad en el punto e instante dados. Así se definen todas las características del movimiento del volumen elemental (densidad, temperatura, energía, viscosidad, etc.)

La “partícula individual” en un medio continuo es una partícula “ideal” cuyas características promedian las características de cada partícula fluida que la rodean. De acuerdo con ello podemos definir las magnitudes que caracterizan la partícula individual como los límites de las magnitudes calculadas para las partículas fluidas. Por ejemplo, sean  $\mathbf{x}$  un punto fijo,  $V(\mathbf{x})$  - un entorno de  $\mathbf{x}$ ,  $|V(\mathbf{x})|$  - el volumen de  $V(\mathbf{x})$ , entonces

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \lim_{|V(\mathbf{x})| \rightarrow 0} \frac{m(V(\mathbf{x}))}{|V(\mathbf{x})|}.$$

- Magnitudes básicas: **velocidad, densidad, presión**.

---

<sup>1</sup>Universidad Complutense de Madrid, 26-27 de Febrero de 2007

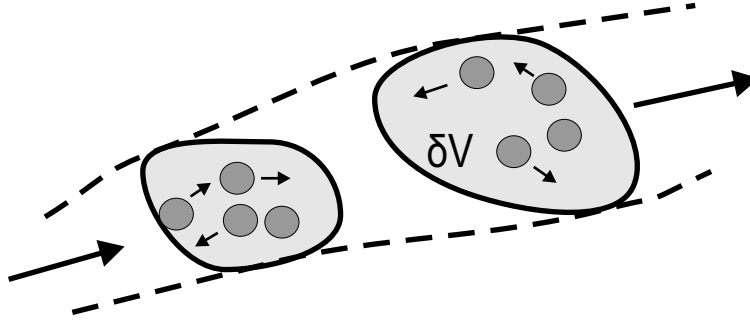


FIGURE 1. Movimiento de una partícula fluida

## 2. AXIOMAS BASICOS. DESCRIPCIÓN MATEMÁTICA

Se supone que están definidas

- (1) un dominio  $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^n$ ,
- (2) una familia de transformaciones  $\Phi_t : \Omega_0 \mapsto \Omega_t \subset \mathbb{R}^n$ ,  $t \in I \equiv [0, T]$

**Hipótesis:**

$$(\mathbf{H}_1) \begin{cases} \Phi(\mathbf{x}, t) = \Phi_t(\mathbf{x}), \\ \Phi : \Omega_0 \times [0, T] \mapsto \mathbb{R}^n \text{ es } C^k \text{ (} k \text{ veces diferenciable)} \end{cases}$$

( $\mathbf{H}_2$ )  $\forall t \in I$  la transformación  $\Phi_t$  es un difeomorfismo  
(una biyección con la inversa diferenciable)

( $\mathbf{H}_3$ )  $\Phi_0 \equiv \mathbf{I}$  (la transformación identidad)

Las posiciones de la misma partícula en el momento inicial y en el momento  $t \in I$ ,  $\mathbf{y} \in \Omega_0$ ,  $\mathbf{x} \in \Omega_t$ , definen la aplicación

$$\mathbf{x} = \Phi(\mathbf{y}, t) \iff \mathbf{x} = \Phi_t(\mathbf{y}) \iff \mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{y}, t).$$

**Desplazamientos:** (para la misma partícula)

$$\mathbf{z} = \mathbf{x} - \mathbf{y} = \Phi(\mathbf{y}, t) - \mathbf{y}, \quad \mathbf{y} \in \Omega_0, \mathbf{x} \in \Omega_t.$$

Para  $t$  fijo existe la matriz de Jacobi (véase  $\mathbf{H}_2$ )

$$M = \frac{\partial(x_1, \dots, x_n)}{\partial(y_1, \dots, y_n)} \equiv \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{y}} = D(\Phi_t), \quad |\text{Det}(\Phi_t)| \neq 0,$$

y

$$M^{-1} = \frac{\partial(y_1, \dots, y_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} \equiv \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} = D(\Phi_t^{-1}) \neq 0, \quad |\text{Det}(\Phi_0)| = 1.$$

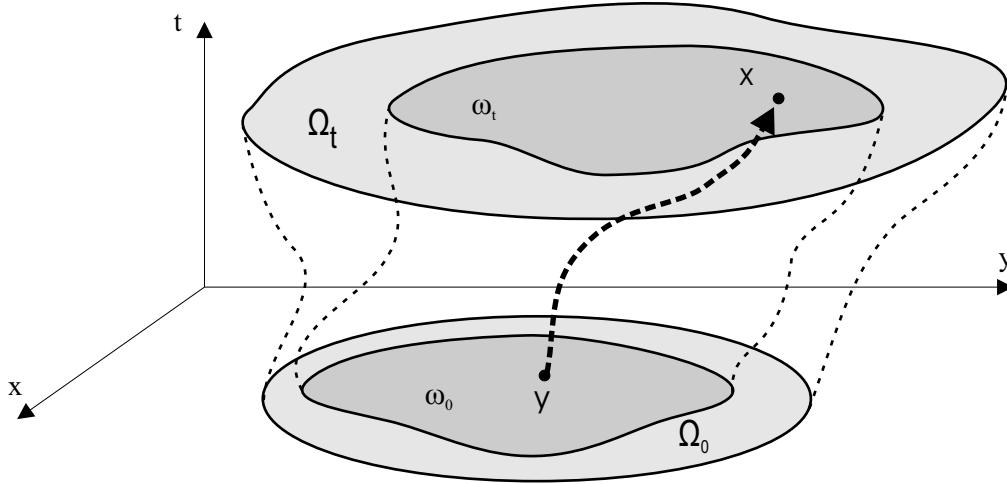


FIGURE 2. Transformación continua  $\mathbf{x} = \Phi_t(\mathbf{y})$

### 3. LAS LEYES DE MOVIMIENTO

Fijamos la posición inicial de una partícula  $\mathbf{y} \in \Omega_0$ . La trayectoria es el conjunto de los puntos que la partícula ocupa cuando  $t$  (tiempo) recorre todo el intervalo  $I$ :  $\mathbf{x}(\mathbf{y}, t) = \mathbf{x}(t) = \Phi(\mathbf{y}, t)$ . La velocidad

$$\mathbf{u} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \Phi(\mathbf{y}, t) = \left. \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right|_{\mathbf{y}} \quad (\text{con } \mathbf{y} \text{ fijo}).$$

La aceleración

$$\mathbf{a} = \frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = \left. \frac{d^2\Phi}{dt^2} \right|_{\mathbf{y}}$$

La partícula se mueve en dirección tangente a su trayectoria:

$$\mathbf{u} = |\mathbf{u}| \boldsymbol{\tau}, \quad \boldsymbol{\tau} \text{ - vector-tangente}$$

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{d|\mathbf{u}|}{dt} \boldsymbol{\tau} + |\mathbf{u}| \frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt} = a_\tau \boldsymbol{\tau} + a_n \mathbf{n}$$

aceleración tangencial y normal, las direcciones de la normal  $\mathbf{n}$  y  $\frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt}$  coinciden.

### 4. FORMULACIÓN EULERIANA Y LAGRANGIANA

- **Formulación lagrangiana** (alias formulación material). Las variables independientes:  $\mathbf{y} \in \Omega_0$  (la posición inicial) y  $t$  (tiempo).
- **Formulación euleriana**: las variables independientes  $\mathbf{x} \in \Omega_t$  (la posición de la partícula en el momento  $t$  en un sistema de coordenadas no vinculado con el medio) y  $t$  (tiempo):

$$\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n), \quad u_i \equiv u_i(x, t), \quad i = \overline{1, n}.$$

Si la velocidad  $\mathbf{u}$  es conocida como una función de  $\mathbf{x}$  y  $t$ , las trayectorias  $\mathbf{x} \equiv \mathbf{x}(\mathbf{y}, t)$  se definen como las soluciones del problema

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t), \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{y}. \end{cases}$$

La existencia (local) de una solución  $x = \Phi(y, t)$  es la consecuencia del teorema de Peano.

- La ecuación de trayectorias en forma escalar,

$$(4.1) \quad \begin{cases} x'_i(t) = u_i(\mathbf{x}, t), & i = \overline{1, n}, \\ x_i(0) = y_i. \end{cases}$$

- **Lineas materiales:** el sistema (4.1) en forma coordenada

$$\frac{dx_1}{u_1} = \dots = \frac{dx_n}{u_n} = dt, \quad i = \overline{1, n}$$

- **Lineas de corriente:** el sistema (4.1) con el valor de  $t$  congelado en el instante  $t_0$

$$\begin{cases} x'_i(t) = u_i(\mathbf{x}, t_0), & i = \overline{1, n}, \\ x_i(0) = y_i. \end{cases}$$

Un sistema dinámico.

- **Lineas de emisión:** trayectorias de todas las partículas que en un momento anterior pasaron por el punto  $\mathbf{y}_0 \in \Omega_0$

$$\mathbf{x} = \Phi_t \circ \Phi_s^{-1}(\mathbf{y}_0), \quad s \in (0, t).$$

**4.1. Derivada material.** Las derivadas se calculan de forma diferente según el método de descripción elegido (lagrangiano o euleriano). Cualquier función  $f$  definida en el plano de eulerianas obtiene su duplicado en el plano de lagrangianas:

$$f(\mathbf{x}, t) = f[\Phi(\mathbf{y}, t), t] \equiv F(\mathbf{y}, t).$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \lim_{|h| \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x}, t+h) - f(\mathbf{x}, t)}{h} \quad (\text{definición estándar en eulerianas})$$

La derivada de la misma función considerada como una función del sistema de coordenadas lagrangianas:

$$\left. \frac{\partial F}{\partial t} \right|_{\mathbf{y} \text{ fijo}} = \left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{\mathbf{x} \text{ fijo}} + \sum_i \left. \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_{t \text{ fijo}} \left. \frac{\partial x_i}{\partial t} \right|_{\mathbf{y} \text{ fijo}} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i u_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla f \quad \text{Derivada material}$$

Para la misma función  $f(\mathbf{x}, t) \equiv F(\mathbf{y}, t)$

$\frac{\partial f}{\partial t}$  – la tasa de variación temporal a espacio fijo,  
 $\frac{\partial F}{\partial t}$  – la tasa de variación temporal a partícula fija

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla f.$$

- Relación entre las derivadas espaciales: sean  $f(\mathbf{x}, t) \equiv F(\mathbf{y}, t)$ ,  $\mathbf{x} = \Phi(\mathbf{y}, t)$ , entonces

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial y_i} &= \sum_j \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial y_i} = \sum_j \frac{\partial f}{\partial x_j} M_{ji} = (\nabla_{\mathbf{x}} f \cdot M)_i, \quad i = \overline{1, n}, \\ \nabla_{\mathbf{y}} F &= \nabla_{\mathbf{x}} f \cdot M, \\ M &= \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{y}} \end{aligned}$$

## 5. LA LEY DE CONSERVACIÓN DE LA MASA

**Formulación matemática:** existe una familia de medidas  $m_t \geq 0$  sobre  $\Omega_t = \Phi_t(\Omega_0)$  t.q. para todo  $\omega_0 \subset \Omega_0$  medible y  $\omega_t = \Phi_t(\omega_0)$  se verifica

$$m_t(\omega_t) = m_0(\omega_0) \iff \text{la masa no se crea ni se destruye}$$

Otra **Hipótesis:**

$$(\mathbf{H}_4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{existe una función } \rho(\mathbf{x}, t) \text{ (densidad) t.q.} \\ dm_t = \rho(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}. \end{array} \right.$$

- Consideremos el volumen que se desplaza con el medio continuo

$$\omega_0 \subset \Omega_0, \quad \{\omega_t = \Phi_t(\omega_0)\}_t$$

Interpretación:  $\omega_t$  esta constituido por las partículas que en el momento inicial ocupan el dominio  $\omega_0$ . La masa contenida en  $\omega_t$  es constante:

$$\forall t \in I \quad \int_{\omega_t} \rho(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} = \int_{\omega_0} \rho(\mathbf{x}, 0) d\mathbf{x}.$$

La forma equivalente: efectuando el cambio de la variable  $\mathbf{x} \mapsto \Phi(\mathbf{y}, t)$

$$\begin{aligned} \int_{\omega_t} \rho(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} &= \int_{\omega_0} \rho[\Phi(\mathbf{y}, t), t] J d\mathbf{y}, \quad J = \text{Det}[M], \\ \forall \omega_0 \subset \Omega_0 \quad \int_{\omega_0} [\rho[\Phi(\mathbf{y}, t), t] J - \rho(\mathbf{y}, 0)] d\mathbf{y} &= 0. \end{aligned}$$

Arbitrariedad de  $\omega_0$  implica

$$\rho[\Phi(\mathbf{y}, t), t] J = \rho(\mathbf{y}, 0) \quad \text{– la ley de conservación de masa según Lagrange}$$

La forma alternativa

$$\frac{d}{dt} \left( \int_{\omega_t} \rho(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} \right) = 0,$$

de donde

$$0 = \frac{d}{dt} \left( \int_{\omega_t} \rho(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} \right) = \int_{\omega_0} \frac{d}{dt} (\rho(\Phi(\mathbf{y}, t), t) J) d\mathbf{y} \implies \frac{d}{dt} (\rho(\Phi(\mathbf{y}, t), t) J) = 0.$$

**Lemma 5.1** (Formula de Euler).

$$\frac{dJ}{dt} = J \operatorname{div} \mathbf{u}.$$

*Proof.* Utilizamos la formula de diferenciación del determinante.

$$J = \operatorname{Det} [\partial \mathbf{x} / \partial \mathbf{y}] \quad \forall i = \overline{1, n} \quad J = \sum_j \frac{\partial x_i}{\partial y_j} A_{ij},$$

donde  $A_{ij}$  es el cofactor del elemento  $\partial x_i / \partial y_j$ . Entonces

$$\begin{aligned} \frac{dJ}{dt} &= \sum_{ij} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial x_i}{\partial y_j} \right) A_{ij} = \sum_{ij} \frac{\partial}{\partial y_j} \left( \frac{dx_i}{dt} \right) A_{ij} \\ &= \sum_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial y_j} A_{ij} = \sum_{i,j,k} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial y_j} A_{ij} \\ &= \sum_{i,j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \delta_{ij} J = \sum_i \frac{\partial u_i}{\partial x_i} J. \end{aligned}$$

□

**Ejemplo:**  $n = 1$ ,  $J = \partial x / \partial y$ .

$$\frac{dJ}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial x}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{dx}{dt} \right) = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial y} = J \operatorname{div} u.$$

**Lemma 5.2.**

$\rho_t + \operatorname{div} (\rho \mathbf{u}) = 0$     **la ley de conservación de la masa según Euler**

*Proof.* Sea  $\omega_0 \subset \Omega_0$  un volumen arbitrario y  $\omega_t = \Phi_t(\omega)$ . Se supone que la masa del volumen  $\omega_t$  se conserva. Entonces

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{d}{dt} \left( \int_{\omega_t} \rho(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} \right) = \frac{d}{dt} \left( \int_{\omega_0} \rho[\Phi(\mathbf{y}, t), t] J d\mathbf{y} \right) = \\
&= \int_{\omega_0} \frac{d}{dt} (\rho[\Phi(\mathbf{y}, t), t] J) d\mathbf{y} \\
&= \int_{\omega_0} \left[ \rho_t J + \nabla_{\mathbf{x}} \rho[\Phi(\mathbf{y}, t), t] \cdot \frac{d\mathbf{x}}{dt} J + \rho \frac{dJ}{dt} \right] d\mathbf{y}.
\end{aligned}$$

En virtud del Lema 5.1

$$\begin{aligned}
\rho_t J + \nabla_{\mathbf{x}} \rho[\Phi(\mathbf{y}, t), t] \cdot \frac{d\mathbf{x}}{dt} J + \rho \frac{dJ}{dt} &= \rho_t J + \nabla_{\mathbf{x}} \rho \cdot \mathbf{u} J + \rho J \operatorname{div} \mathbf{u} \\
&= (\rho_t + \nabla_{\mathbf{x}} \rho \cdot \mathbf{u} + \rho \operatorname{div} \mathbf{u}) J \\
&= [\rho_t + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u})] J
\end{aligned}$$

Volviendo al sistema de variables  $\mathbf{x}$ :

$$0 = \frac{d}{dt} \left( \int_{\omega_t} \rho(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} \right) = \int_{\omega_0} [\rho_t + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u})] J d\mathbf{y} = \int_{\omega_t} [\rho_t + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u})] d\mathbf{x}$$

La conclusión sigue ahora de la arbitrariedad de  $\omega_t$ . □

## 6. FLUJOS SIN CONSERVACIÓN DE LA MASA

Supongamos ahora que la masa de cualquier volumen  $\omega_t$  no es constante sino una función de la posición del volumen:

$$\frac{d}{dt} \left( \int_{\omega_t} \rho(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} \right) = \int_{\omega_t} f(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x},$$

donde  $f(\mathbf{x}, t)$  representa la fuente de la masa. En coordenadas lagrangianas esta relación de balance toma la forma

$$\forall \omega_0 \subset \Omega_0 \quad \int_{\omega_0} \left[ \frac{d}{dt} (\rho[\Phi(\mathbf{y}, t), t] J) - f[\Phi(\mathbf{y}, t)] J \right] d\mathbf{y} = 0.$$

### • La ley del balance de la masa en variables de Lagrange

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} (\rho[\Phi(\mathbf{y}, t), t] J) - f[\Phi(\mathbf{y}, t)] J = 0, & t > 0, \\ \rho[\Phi(\mathbf{y}, 0), 0] = \rho_0(\mathbf{y}). \end{cases}$$

Desarrollamos más: cuando  $\rho \neq 0$  ( $J \neq 0$  por hipótesis)

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{d}{dt}(\rho[\Phi(\mathbf{y}, t), t] J) - f[\Phi(\mathbf{y}, t)] J \\
&= \rho[\Phi(\mathbf{y}, t), t] J \left( \frac{d}{dt} \frac{\rho[\Phi(\mathbf{y}, t), t] J}{\rho[\Phi(\mathbf{y}, t), t] J} - \frac{f[\Phi(\mathbf{y}, t)]}{\rho[\Phi(\mathbf{y}, t), t]} \right) \\
&= \rho[\Phi(\mathbf{y}, t), t] J \left( \frac{d}{dt} \ln(\rho[\Phi(\mathbf{y}, t), t] J) - \frac{f[\Phi(\mathbf{y}, t), t]}{\rho[\Phi(\mathbf{y}, t), t]} \right).
\end{aligned}$$

Integrando y tomando en cuenta la condición inicial, tenemos:

$$(6.1) \quad \rho[\Phi(\mathbf{y}, t), t] J = \rho_0(\mathbf{y}) \exp \left\{ \int_0^t \frac{f[\Phi(\mathbf{y}, \tau), \tau]}{\rho[\Phi(\mathbf{y}, \tau), \tau]} d\tau \right\}$$

La fuente  $f$  puede depender de  $(\mathbf{x}, t)$  implícitamente, e.g.,  $f(\mathbf{x}, t) \equiv \mathcal{F}(\rho(\mathbf{x}, t), \mathbf{u}(\mathbf{x}, t))$  donde  $\mathcal{F}$  es una función dada.

• **La ley del balance de la masa en variables de Euler**

$$(6.2) \quad \rho_t + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = f(\mathbf{x}, t)$$

La demostración sigue la demostración del Lema 5.2.

## 7. PLANTEAMIENTOS ALTERNATIVOS DEL PROBLEMA

El movimiento de un medio continuo que verifica las Hipótesis 1–4.

• **Formulación Lagrangiana.** Dado el campo de velocidades  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ , buscamos las trayectorias de las partículas fluidas  $\mathbf{x}(\mathbf{y}, t)$  y la densidad  $\rho(\mathbf{x}, t)$  y según las condiciones

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t), \quad t > 0, \\ \mathbf{x}(\mathbf{y}, 0) = \mathbf{y} \in \Omega_0 \end{array} \right. \quad \text{ecuación de trayectorias}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho[\mathbf{x}(\mathbf{y}, t), t] \operatorname{Det} M = \rho(\mathbf{y}, 0), \\ M = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{y}}. \end{array} \right. \quad \text{la ley de conservación de la masa}$$

• **Formulación Euleriana.** Buscamos la densidad  $\rho(\mathbf{x}, t)$

$$\rho_t + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0 \quad \text{la ley de conservación de la masa.}$$

En la presencia de fuentes de masa las leyes de conservación se sustituyen por las leyes de balance (6.1) o (6.2).



## 8. VARIABLE DE MASA

Se considera el flujo unidimensional

$$\mathbf{u} = (u_1, 0, \dots, 0), \quad \mathbf{x}(\mathbf{y}, t) = (x_1(\mathbf{y}, t), 0, \dots, 0), \quad \mathbf{y} = (y_1, 0, \dots, 0), \quad \Omega_0 = I \subseteq \mathbb{R}.$$

$$\mathbf{x} \equiv x \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{y} \equiv y \in \mathbb{R}.$$

- La nueva variable independiente en la descripción de Lagrange:

$$\eta = \int_{-\infty}^y \rho(s, 0) ds : \Omega_0 = I \mapsto I' \subseteq \mathbb{R},$$

La variable  $\eta$  representa la masa de la sustancia contenida en el dominio (intervalo)  $(-\infty, y)$ . Cambiamos la variable según las formulas

$$x(y, t) \equiv X(\eta, t), \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{1}{\frac{dy}{d\eta}} = \rho[y(\eta), 0] \frac{\partial}{\partial \eta} \equiv \rho_0 \frac{\partial}{\partial \eta}.$$

La ley de conservación de masa en las coordenadas lagrangianas toma la forma

$$\rho[x(y, t), t] x_y(y, t) = \rho(y, 0) \iff \rho[X(\eta, t), t] X_\eta(\eta, t) = 1.$$

- Descripción del flujo en el plano de coordenadas de masa  $(\eta, t)$ :

$$x(y, t) \equiv X(\eta, t), \quad R(\eta, t) \equiv \rho(\eta, t),$$

$$(8.1) \quad \begin{cases} \frac{dX}{dt} = u[X(\eta, t), t], & t > 0, \\ X(\eta, 0) = y(\eta), \end{cases} \quad R X_\eta = 1.$$

## 9. TRANSFORMACIONES DE EQUIVALENCIA

Se considera el flujo unidimensional de un medio continuo de densidad  $\rho(x, t)$  y con la velocidad  $u(x, t)$ . Se supone que se verifica la ley de conservación de masa. En la descripción euleriana tenemos la ecuación de continuidad del flujo

$$(9.1) \quad \rho_t + \operatorname{div}(\rho u) = 0$$

y en el sistema de coordenadas lagrangianas de masa el mismo flujo se describe mediante el sistema de ecuaciones (8.1). Derivamos la primera ecuación de (8.1) en  $\eta$ , la segunda en  $t$  y comparamos los resultados:

$$\frac{\partial u}{\partial \eta}[X(\eta, t), t] = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial X}{\partial \eta} \right), \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial X}{\partial \eta} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{R(\eta, t)} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{R(\eta, t)} \right)$$

lo que implica

$$(9.2) \quad \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{R(\eta, t)} \right) = \frac{\partial u}{\partial \eta} [X(\eta, t), t].$$

Supongamos ahora que la velocidad  $u(x, t)$  no depende de la variable  $x$  explícitamente sino de forma implícita, a través de  $\rho(x, t)$  y  $\rho_x(x, t)$ :  $u = -\phi(\rho, \rho_x)$ . En este caso la ecuación (9.2) se transforma en

$$(9.3) \quad \left( \frac{1}{R} \right)_t + (R \phi(R, R R_\eta))_\eta = 0.$$

Correspondencia entre las soluciones. La relación entre las ecuaciones (9.1) y (9.3) viene dada por las formulas

$$(9.4) \quad \rho_t = [\phi(\rho, \rho_x)]_x \iff \begin{cases} \rho(x, t) = \frac{1}{\omega(\eta, t)}, \\ \omega_t = \left[ -\omega \phi \left( \frac{1}{\omega}, -\frac{1}{\omega^3} \omega_\eta \right) \right]_\eta. \end{cases}$$

La ecuación original (9.1) y la ecuación resultante (9.3) son de la misma estructura, lo que permite considerar la introducción del sistema de coordenadas de Lagrange de masa como una **transformación de equivalencia** entre las EDPs de un tipo determinado. Llamaremos esta transformación **L-Transformación**. Notemos especialmente que  $L$ -transformación **no es local** pues cambia la estructura de la EDP de forma global sin referencia al punto donde se realiza.

Integrando el sistema de las relaciones

$$x_\eta = \omega, \quad x_t = -\omega \phi \left( \frac{1}{\omega}, -\omega^{-3} \omega_\eta \right)$$

llegamos a la representación explícita de  $L$ -transformación:

$$(9.5) \quad \begin{cases} \rho(x, t) = \frac{1}{\omega(\eta, t)}, \\ x = \int_0^\eta \omega(\sigma, t) d\sigma - \int_0^t \omega(0, s) \phi \left[ \frac{1}{\omega(s, 0)}, -\frac{\phi_\eta(0, s)}{\omega^3(0, s)} \right] ds. \end{cases}$$

Formulas (9.5) aparecen de forma natural en el resultado de introducción del sistema de coordenadas lagrangianas de masa en una EDP de evolución que **se interpreta** como la ley de conservación de masa en un movimiento del medio continuo. Al mismo tiempo, formulas (9.5) expresan **la transformación de Bäcklund** (o de Lie-Bäcklund). Dicha transformación establece la relación de equivalencia entre las EDPs aparentemente distintas. Fue descubierta por W. Strampp (1982), J. G. Kingston, C. Rogers (1982). La transformación de Bäcklund es aplicable a las ecuaciones de evolución con una variable espacial. Interpretando una ecuación de evolución como la ecuación de continuidad de flujo según Euler y describiendo el mismo proceso en coordenadas de Lagrange de masa llegamos al mismo resultado. Además, el

sistema de coordenadas Lagrangianas se introduce de forma natural en una EDP con varias variables espaciales mientras que la transformación de Bäcklund aparentemente no se extiende al caso multidimensional.

La transformación inversa a (9.5) viene dada por las fórmulas

$$\begin{cases} \omega(\eta, t) = \frac{1}{\rho(x, t)}, \\ \eta = \int_0^x \rho(y, t) dy + \int_0^t \phi[\rho(s, 0), \phi_x(0, s)] ds. \end{cases}$$

• L-transformación es **involutiva** ( $L^2 = I$ ):

$$\begin{aligned} \phi(\rho, p) &\stackrel{L}{\mapsto} \psi(\rho, p) \equiv -\rho\phi\left(\frac{1}{\rho}, -\frac{p}{\rho^3}\right), \\ -\rho\psi\left(\frac{1}{\rho}, -\frac{p}{\rho^3}\right) &= \phi(\rho, p), \end{aligned}$$

• **Análisis del grupo de simetrías** admitidas por una EDP: permite reducirla a una ecuación con menor número de variables independientes, e incluso a una ecuación ordinaria, lo que pueda facilitar su resolución. Este método no proporciona todas las soluciones de la EDP original, sino aquellas que son invariantes respecto de un determinado grupo de transformaciones continuas. El método forma parte de la teoría de grupos continuos de Sophus Lie (1842–1899). El problema primario del análisis de grupo - la cuestión sobre la posibilidad de integrar explícitamente una ODE - fue prácticamente resuelto por el mismo S. Lie. Véase [2, 4], [3, Cap. 2] para más información sobre el método y sus aplicaciones.

La introducción del sistema de coordenadas de Lagrange de masa, transforma la ecuación (9.1) en una EDP cuyo grupo de transformaciones continuas es más amplio. Combinando las coordenadas de Lagrange con el análisis de grupo se puede encontrar nuevas simetrías y, por lo tanto, nuevas soluciones particulares de la EDP original. He aquí algunos ejemplos de las EDPs que se transforman una a otra via la intraducción de las coordenadas de Lagrange pero admiten diferentes grupos de simetrías ([3, Cap. 2]):

$$\begin{aligned} u_t = u^{-2} [\exp(u^{-1}u_x)]_x &\stackrel{L}{\iff} \omega_\tau = (e^\omega \omega_\eta)_\eta \\ u_t = (u^{-2/3}u_x)_x &\stackrel{L}{\iff} \omega_\tau = (\omega^{-4/3}\omega_\eta)_\eta \\ u_t = u_{xx} &\stackrel{L}{\iff} \omega_\tau = (\omega^{-2}\omega_\eta)_\eta \end{aligned}$$

## 10. FLUIDOS EN MEDIOS POROSOS. LEY DE DARCY

La velocidad del fluido en el medio poroso viene dada por la ley de Darcy

$$\mathbf{u} = -\frac{k}{\mu} \nabla (p + \rho g z)$$

$\mathbf{x}(x, y, z)$ ,  $\rho$  - densidad,  $g$  - aceleración de la caída libre,  $\mu$  - viscosidad dinámica (típico de cada fluido),  $k$  - coeficiente de permeabilidad. La ley de Darcy es una relación empírica. Los parámetros  $k$ ,  $\mu$  son unas características del medio.

• La nueva magnitud **porosidad**  $m \in (0, 1)$  - el cociente del volumen ocupado por los poros  $V_p$  por el volumen total  $V$  en el torno del punto  $x$ . Definición:

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \frac{M_p}{V_p} = \frac{\int_{\Omega_{p,t}} \rho'(\mathbf{z}, t) d\mathbf{z}}{\int_{\Omega_{p,t}} d\mathbf{z}} \quad \text{densidad}$$

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{\rho(\mathbf{x})A} \int_S \rho(\mathbf{z}, t) \mathbf{u}(\mathbf{z}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{z}) dS(\mathbf{z}) \quad \text{velocidad de filtración}$$

Velocidad es el promedio en el volumen que podemos definir mediante el flujo de la masa a través de una superficie  $S$  con  $A = |S|$

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{\rho(\mathbf{x})A_p} \int_S \rho(\mathbf{z}, t) \mathbf{u}(\mathbf{z}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{z}) dS(\mathbf{z}) \quad \text{velocidad intrínseca}$$

$A_p$  - el área ocupada por los poros,

$$\mathbf{q} = m \mathbf{v}.$$

• La ley de conservación (balance) de masa

$$\frac{\partial}{\partial t}(m\rho) + \operatorname{div}(\rho \mathbf{q}) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(m\rho) + \operatorname{div}(\rho \mathbf{q}) = f(\mathbf{x}, t)$$

$$\mathbf{q} = -\frac{k}{\mu} (\nabla p + \rho g h)$$

Para los medios no homogéneos y anisótropos:

$$\mathbf{q} = -\frac{1}{\mu} \mathbf{K} \cdot \nabla \Phi, \quad \nabla \Phi = \nabla p + \mathbf{f},$$

$\mathbf{K}$  - matriz de permeabilidad,  $\Phi$  - potencial hidráulico,  $\mathbf{f}$  - el campo de fuerzas exterior.

• El flujo de un gas en un medio poroso (despreciamos la gravedad):

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}(m\rho) + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0 \\ \mathbf{u} = -\frac{k}{\mu} \nabla p \end{cases}$$

Se supone que

$$p = c\rho^\gamma, \quad \gamma = \text{const.}$$

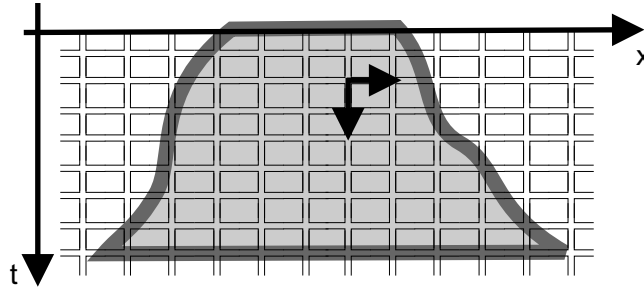


FIGURE 3. Filtración plana en medio poroso

$\gamma = 1$  para procesos isotérmicos,  $\gamma > 1$  en los procesos adiabáticos. Simplificando, llegamos a la Ecuación del Medio Poroso:

$$(10.1) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = \Delta(\rho^m), \quad m = \gamma + 1 > 1.$$

• **Problema con fronteras libres:** hallar la solución no negativa del problema de Cauchy para la ecuación (10.1)

$$(10.2) \quad \begin{cases} u_t = (u^m)_{xx} & \text{en } S = \mathbb{R} \times (0, T], \quad m > 1, \\ u(x, 0) = u_0(x) & \begin{cases} > 0 & \text{cuando } x \in (-a, a), \quad a < \infty, \\ 0 & \text{en } \mathbb{R} \setminus (-a, a). \end{cases} \end{cases}$$

•  $m = 1$ . La EDP lineal: la solución viene dada explícitamente por la fórmula

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_{\mathbb{R}} u_0(y) e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} dy, \quad u(x, t) > 0 \text{ para todo } x \in \mathbb{R} \text{ y } t > 0.$$

Si  $u_0 \geq 0$  (aunque puede tener el soporte compacto en  $\mathbb{R}$ ), la solución es **estrictamente positiva** en todo  $S$ .

•  $m > 1$ . La EDP semilineal revela una propiedad nueva: la velocidad de propagación de perturbaciones originadas por la función inicial es finita, es decir, si  $\text{supp } u_0 = (-a, a)$ , entonces para todo  $t > 0$   $\text{supp } u(x, t) \subset (\zeta(t), \eta(t))$  con unas funciones  $\zeta(t), \eta(t)$  acotadas.

**Soluciones explícitas:**

- Ya. Zel'dovich, A. Kolomeets (1950, física de plasma),
- G. Barenblatt (1952, movimientos de fluidos y gases en medios porosos)

$$u(x, t) = t^\beta \phi(\xi), \quad \xi = \frac{x^2}{t^\alpha}, \quad \alpha, \beta = \text{const.}$$

El problema físico: el proceso de filtración de un gas en un medio poroso,

$$u = \rho - \text{densidad}, \quad v = -\frac{m}{m-1} (u^{m-1})_x - \text{velocidad (la ley de Darcy).}$$

La formula explícita para la solución de G. Barenblatt:

$$(10.3) \quad U(x, t) = \frac{1}{t^{1/(m+1)}} \left[ \left( A - B \frac{x^2}{t^{2/(m+1)}} \right) \right]_+^{1/(m-1)}$$

donde  $A, B$  son unas constantes positivas a determinar,  $[\cdot]_+ \equiv \max\{\cdot, 0\}$ .

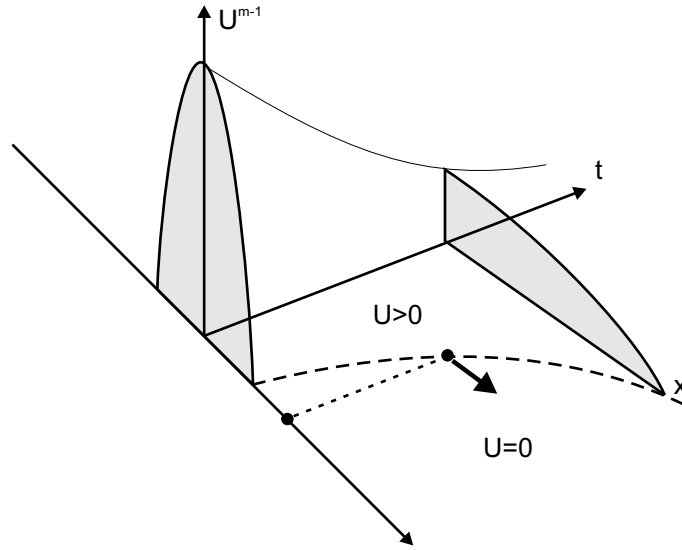


FIGURE 4. Solución de Barenblatt

La fórmula (10.3) representa la distribución de la densidad del gas en el medio poroso infinito.

Unas propiedades de la solución de Barenblatt:

- (1) **La masa es constante.** El flujo del gas se origina por la fuente puntual de intensidad  $M$ :

$$\forall t > 0 \quad \int_{\mathbb{R}} U(x, t) dx = M$$

y

$$U(x, t) \rightarrow M\delta(x) \quad \text{cuando } t \rightarrow 0, \quad M = M(A, B) = \text{const.}$$

$\delta(\cdot)$  es la función de Dirac.

- (2) **Fronteras libres.** El soporte de la solución (la parte del espacio ocupada por el gas) se delimita por las fronteras móviles

$$\zeta(t) = \inf\{x \in \mathbb{R} : u(x, t) > 0\}, \quad \eta(t) = \sup\{x \in \mathbb{R} : u(x, t) > 0\}.$$

Para la solución de Barenblatt la posición y velocidad de las fronteras libres vienen dadas por las formulas

$$x_f = \pm \sqrt{A/M} t^{1/(m+1)} \quad \text{las posiciones de las fronteras}$$

$$\mathbf{u}_f = \frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{A/B} \frac{1}{m+1} t^{-\frac{m}{m+1}} \quad \text{las velocidades de las fronteras}$$

- (3) **Velocidad discontinua.** Según la ley de Darcy la velocidad del flujo viene dada por la formula  $p = -\frac{m}{m-1}(U^{m-1})_x$ . Es fácil de calcular que para la solución de Barenblatt

$$(U^{m-1})_x = \begin{cases} \frac{-2Bx}{t} & \text{para } U > 0, (x > 0), \\ 0 & \text{para } U = 0. \end{cases}$$

Las derivadas espaciales son discontinuas en las curvas  $x = x_f(t)$ . Esto significa que la solución de Barenblatt no es una solución en el sentido clásico  $\implies$  **necesitamos otro concepto de solución.**

• **Soluciones débiles**

**Definition 10.1.** Digamos que la función  $u(x, t)$  es solución débil del problema (10.2) si

- (1)  $u \in C^0(S)$ ,  $(u^m)_x \in L^2_{loc}(S)$ ,
- (2)  $u \geq 0$  en  $S$ ,
- (3) para toda función-test  $\phi \in C^1(S)$ , tal que  $\phi \equiv 0$  para  $|x| \geq R$  con un cierto  $R > 0$ , se verifica la igualdad

$$(10.4) \quad \forall t_1, t_2 \in [0, T] \quad \int_S [u\phi_t - \phi_x(u^m)_x] dxdt = \int_{\mathbb{R}} u\phi dx \Big|_{t=t_1}^{t=t_2}.$$

• **Descripción lagrangiana** En el sistema de coordenadas de Lagrange el problema (10.2) toma la forma

$$\begin{cases} u x_y = u_0 & \text{en } (-a, a) \\ x_t = -\frac{m}{m-1}(u^{m-1})_x & t > 0, \quad x(y, 0) = y \in (-a, a) \end{cases}$$

Introduciendo la coordenada de masa y las nuevas incognitas,

$$\eta = \int_{-\infty}^y u_0(s) ds : (-a, a) \mapsto (0, 2b), \quad X(\eta, t) = x(y, t), \quad U(\eta, t) = u(x, t),$$

llegamos al sistema de dos ecuaciones para las incógnitas  $X$  (la posición de la partícula) y  $U$  (la densidad):

$$\begin{cases} UX_\eta = 1 & \text{en } (0, 2b) \\ X_t = -(U^m)_\eta & t > 0, \quad X(\eta, 0) = y(\eta) \in (0, 2b) \end{cases}$$

Sean

$$\zeta = \eta - b, \quad Y(\zeta) = X(\eta), \quad V(\zeta, t) = U(\eta, t).$$

Entonces el sistema de ecuaciones que describe el flujo del gas toma la forma

$$(10.5) \quad \begin{cases} VY_\zeta = 1 & \text{en } (-b, b) \times (0, T) \\ Y_t = -(V^m)_\zeta & t > 0, \quad Y(\zeta, 0) = y(\eta + b) \in (-b, b) \end{cases}$$

Derivando la primera ecuación respecto de  $t$  y la segunda respecto de  $\zeta$ , podemos excluir la incognita  $Y$  y reducir el sistema a una única ecuación para  $V$ :

$$(10.6) \quad \begin{cases} V_t = V^2(V^m)_{\eta\eta}, & (\eta, t) \in (-b, b) \times (0, T], \\ U(\pm b, t) = 0, & U(\eta, 0) = u_0(y(\eta)). \end{cases}$$

• **Soluciones explícitas** en el dominio rectangular: buscamos una solución particular en variables separadas

$$V(\eta, t) = \Phi(t)Q(\eta).$$

Sustituyendo en la ecuación (10.6) tenemos que

$$\begin{cases} \Phi'(t)Q(\eta) = \Phi^{m+2}(t)Q^2(\eta) (Q^m(\eta))'' = 0, \\ Q(\pm a) = 0, \end{cases}$$

y, si  $\Phi \neq 0$ , podemos presentar la última ecuación en la forma

$$\frac{\Phi'}{\Phi^{m+2}} = Q(Q^m)'' = -\lambda, \quad \lambda = \text{const} > 0.$$

La parte izquierda no depende de  $\eta$ , la parte derecha no depende de  $t \implies$  ambas partes son constantes.

Integración directa:

$$\Phi = \frac{K}{(\tau + t)^{1/(m+1)}}, \quad K = (\lambda(m+1))^{-1/(m+1)}.$$

EDO para  $R(\eta) = Q^m(\eta)$ :  $R(\eta)$  es una función par,

$$R'' = -\lambda R^{-1/m} \quad \text{para } \eta \in (0, b), \quad R(b) = 0, \quad R'(0) = 0$$

$$\frac{1}{2}[(R')^2]' = R'R'' = -\lambda R'R^{-1/m} = \frac{-m\lambda}{m-1} \left( R^{(m-1)/m} \right)'$$

$$(R')^2(\eta) = \frac{2m\lambda}{m-1} \left[ C \frac{m-1}{m} - R \frac{m-1}{m}(\eta) \right],$$



$C = R(0)$  es la constante de integración.

$$\begin{aligned}
 R'(\eta) &= \pm \sqrt{\frac{2m\lambda}{m-1}} \sqrt{C^{\frac{m-1}{m}} - R^{\frac{m-1}{m}}(\eta)} \\
 Z = R/C &\in [0, 1], \\
 C^{\frac{m+1}{m-1}} \frac{dZ}{\sqrt{1 - Z^{\frac{m-1}{m}}}} &= -\sqrt{\frac{2m\lambda}{m-1}} d\eta \\
 \sigma = 1 - Z^{\frac{m-1}{m}}, \quad Z &= (1 - \sigma)^{\frac{m}{m-1}}, \\
 dZ &= -\frac{m}{m-1} (1 - \sigma)^{\frac{m}{m-1}-1} d\sigma \\
 (10.7) \quad C^{\frac{m+1}{m-1}} \int_0^{1-(R/C)^{\frac{m}{m-1}}} &(1 - \sigma)^{\frac{m}{m-1}-1} \sigma^{\frac{1}{2}-1} d\sigma = \eta \sqrt{\frac{2(m-1)\lambda}{m}}
 \end{aligned}$$

La constante  $C$  viene dada por la expresión

$$C^{\frac{m+1}{m-1}} \mathcal{B}\left(\frac{1}{2}; \frac{m}{m-1}\right) = b \sqrt{\frac{2(m-1)\lambda}{m}},$$

$\mathcal{B}(\cdot, \cdot)$  es la función-beta de Euler. La función  $Q = R^{1/m}$  con  $R$  definida por la fórmula (10.7) es el homólogo de la solución de Barenblatt en el plano de las variables lagrangianas de masa.

- Aunque el sistema (10.5) y la ecuación (10.6) puedan parecer matemáticamente más complicadas que la ecuación original (10.2), la ventaja de usar las coordenadas lagrangianas de masa consiste en el hecho de que el soporte de la solución es conocido de antemano pues la masa total del fluido es constante para todo  $t > 0$ . Esto simplifica el análisis del comportamiento de las fronteras libres que demarcan el soporte de la solución.

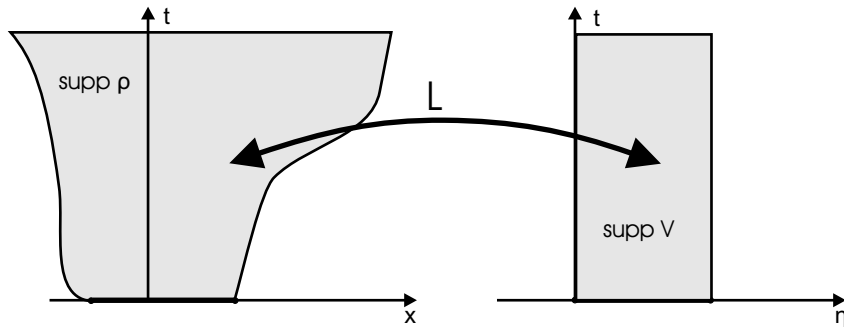


FIGURE 5. El soporte de la solución es inmóvil en el plano  $(\eta, t)$

Esta idea fue propuesta y realizada, independientemente y casi en el mismo momento, por J. Berryman (1980), A. Meirmanov, V. Pukhnachov (1980), M. Gurtin, R. McCamy, E. Sokolovsky (1984). Las motivaciones de estos investigadores eran distintas. J. Berryman

estudiaba la cuestión de estabilidad de la solución de Barenblatt y introdujo las variables lagrangianas con el fin de convertir el soporte de la solución en un dominio independiente del tiempo. A. Meirmanov y V. Pukhnachov propusieron este cambio de variables para analizar el problema de Stefan en glaciología. M. Gurtin, R. McCamy, E. Sokolovsky buscaban un método fiable que permitiría resolver numericamente el problema (10.1) con fronteras libres.

• **Equivalencia entre los planteamientos euleriano y lagrangiano.** A continuación analizaremos la situación más simple cuando se puede probar, de forma matemáticamente rigurosa, la equivalencia entre los problemas (10.2) y (10.5).

**Definition 10.2.** *A pair of functions  $(Y, U)$  is said to be a solution of problem (10.5) in  $Q_T = (-b, b) \times (0, T)$  if*

- (1)  $\sup_{Q_T} |V| < \infty$ ,  $V \geq 0$  a.e. in  $Q_T$ ,
- (2)  $(V^m)_\zeta$ ,  $Y_t \in L^2(Q_T)$ , and

$$(10.8) \quad Y_t + (V^m)_\zeta = 0, \quad V Y_\zeta = 1 \quad \text{a.e. in } Q_T.$$

**Theorem 10.1.** *Los problemas (10.2) and (10.5) son equivalentes en el sentido siguiente: el problema (10.2) tiene una solución en el sentido de la Definición 10.1 si y solo si el problema (10.5) tiene una solución en el sentido de la Definición 10.2.*

*Proof.* (1) Sean  $u(x, t)$  una solución del problema (10.2) y  $Y(\zeta, t)$  la función definida por la fórmula

$$\zeta = \int_{-\infty}^{Y(\zeta, t)} u(s, t) ds - b \in [-b, b].$$

$Y(\zeta, t)$  es monótona creciente para cualquier  $t$  fijo, lo que hace consistente la definición de  $Y$  y nos permite elegir  $\zeta$  como la nueva variable independiente. Para cualquier función-test  $\Phi(x, t)$ , que satisfaga las condiciones de la Definición 10.1, definimos

$$f(\zeta, t) \equiv \Phi(Y(\zeta, t), t) = \Phi(x, t)$$

y la función  $U(\eta, t) \equiv u(Y(\zeta, t), t)$ . Por la definición  $\|U\|_{L^\infty(Q_T)} = \|u\|_{L^\infty(S_T)}$  y  $U \geq 0$  en c.t.p. de  $Q_T$ . Para c.t.  $t \in (0, T)$   $\zeta$  es monótona como una función de  $Y$  y, por lo tanto, es diferenciable en c.t.p. Esto implica la veracidad de la segunda ecuación de (10.8). Es fácil de comprobar que

$$\begin{aligned} d\zeta &= V dY, & V Y_\zeta &= 1, & \frac{\partial}{\partial x} &= V \frac{\partial}{\partial \zeta} \\ \Phi_x(x, t)|_{x=Y(\zeta, t)} &= V f_\zeta, & \Phi_t(x, t)|_{x=Y(\zeta, t)} &= f_t - V Y_t f_\zeta. \end{aligned}$$

Usando estas fórmulas comprobamos que para cualquier función  $\Phi(x, t) \in C^0(\mathbb{R} \times [0, T])$ , tal que  $\Phi_x, \Phi_t \in L^2_{loc}(S_T)$ ,

$$\left| \int_{Q_T} \Phi_x(x, t)|_{x=Y(\zeta, t)} Y_t d\zeta dt \right| \leq \int_{-M}^M |\Phi(Y(\zeta, t), t)|_{t=0}^{t=T} d\zeta + \int_{S_T} u |\Phi_t| dx dt < \infty,$$

$$\left| \int_{Q_T} \Phi_x(x, t)|_{x=Y(\zeta, t)} (U^m)_\zeta d\zeta dt \right| = \int_{S_T} |\Phi_x| \frac{m}{m-1} |(u^{m-1})_x| dx dt < \infty,$$

asi que  $Y_t$  y  $(U^m)_\zeta$  son elementos del espacio dual a  $L^2(Q_T)$ . La sustitución  $x = Y(\zeta, t)$  transforma (10.4) en la relación siguiente:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{S_T} [u \Phi_t - \Phi_x (V^m)_\zeta] dx dt - \int_{\mathbb{R}} u(x, t) \Phi dx \Big|_{t=0}^{t=T} \\ &= \int_{Q_T} [V(f_t - V Y_t f_\zeta) - f_\zeta V (V^m)_\zeta] \frac{d\zeta dt}{V} - \int_{-b}^b f(\zeta, t) \Big|_{t=0}^{t=T} \\ &= \int_{Q_T} f_t d\zeta dt - \int_{-b}^b f(\zeta, t) \Big|_{t=0}^{t=T} - \int_{Q_T} V f_\zeta [Y_t + (V^m)_\zeta] d\zeta dt \\ &= - \int_{Q_T} V f_\eta [Y_t + (V^m)_\zeta] d\zeta dt \\ &\equiv - \int_{Q_T} \Phi_x(x, t)|_{x=Y(\zeta, t)} [Y_t + (V^m)_\zeta] d\zeta dt. \end{aligned}$$

La afirmación sigue porque  $\Phi_x(Y, t) \in L^2(Q_T)$  y  $\Phi(x, t)$  es arbitraria.

(2) Sea  $(Y, U)$  una solución del problema (10.5). Introducimos la función

$$u(x, t) = \begin{cases} U(\eta, t) & \text{para } x = Y(\eta, t) \text{ con } (\eta, t) \in Q_T, \\ 0 & \text{en el caso contrario.} \end{cases}$$

Sea  $\Phi(x, t)$  una función-test arbitraria de las condiciones de la Definición 10.1. Sea  $f(\eta, t) \equiv \Phi(Y(\eta, t), t) = \Phi(x, t)$ . Entonces

$$\int_{-b}^b f(\zeta, t) d\zeta \Big|_{t=0}^{t=T} = \int_{Y(-b, t)}^{Y(b, t)} \Phi(Y, t) V(\zeta, t) dY \Big|_{t=0}^{t=T} = \int_{\mathbb{R}} \Phi(x, t) u(x, t) dx \Big|_{t=0}^{t=T}.$$

Por el otro lado,

$$\begin{aligned}
\int_{-b}^b f(\zeta, t) d\zeta \Big|_{t=0}^{t=T} &= \int_{Q_T} \frac{df(\zeta, t)}{dt} d\zeta dt = \int_{Q_T} \frac{d\Phi(Y(\zeta, t), t)}{dt} d\zeta dt \\
&= \int_{Q_T} [\Phi_t(Y, t) + \Phi_x(Y, t)Y_t] d\zeta dt = \int_{Q_T} [U\Phi_t(Y, t) + \Phi_x(Y, t)VY_t] dY dt \\
&= \int_{Q_T} [V\Phi_t(Y, t) - \Phi_x(Y, t)V(V^m)_\zeta] dY dt \\
&= \int_{S_T} [u(x, t)\Phi_t - \Phi_x(u^m)_x] dx dt.
\end{aligned}$$

Comparando estas dos relaciones, llegamos a la identidad integral para la función  $u(x, t)$ . Las demás propiedades de  $u(x, t)$  se comprueban directamente.  $\square$

## 11. PROBLEMA DE CAUCHY PARA EDPs DEL TIPO DIFUSIÓN–CONVECCIÓN–REACCIÓN

A continuación se presentan algunos resultados del estudio del problema de Cauchy para las EDPs que pueden ser interpretadas (formalmente) como la ecuación de continuidad del flujo en la descripción de Euler ([3, Cap. 3]). Para analizar el comportamiento de las fronteras libres se utiliza el sistema de coordenadas de Lagrange.

### • Ecuaciones del tipo difusión–convección

$$(11.1) \quad \begin{cases} u_t = ((u^m)_x + \lambda u^k)_x, & \text{en } S_T, \quad m, k, \lambda = \text{const} \\ u(x, 0) = u_0(x) \geq 0, & \text{supp } u_0 = (0, a). \end{cases}$$

Interpretación:

$$u = \rho - \text{densidad}, \quad \mathbf{v} = -\frac{m}{m-1}(u)^{m-1} - \lambda u^{k-1} - \text{la velocidad}$$

Problema con las fronteras libres  $x = \zeta(t)$ ,  $x = \eta(t)$  que delimitan el soporte de la solución se transforma en el problema planteado en dominio conocido de antemano:

$$\begin{cases} VY_\zeta = 1, \\ Y_t = -(V^m) - \lambda V^{k-1} & \text{en } Q_T = (-b, b) \times (0, T], \\ Y(\zeta, 0) \in (0, a), \quad V(\zeta, 0) = u_0(Y(\zeta, 0)). \end{cases}$$

• **Filtración con evaporación:**  $m > 1$ ,  $k \in (0, 1)$  (convección “fuerte”). El fluido ocupa inicialmente el intervalo  $(0, a)$ . El soporte de la solución es semi acotado para todo  $t > 0$  y se mueve hacia izquierda con una velocidad finita

$$\zeta(t) = -\infty \quad \forall t > 0, \quad A - Bt \leq \eta(t) \leq K - Lt$$

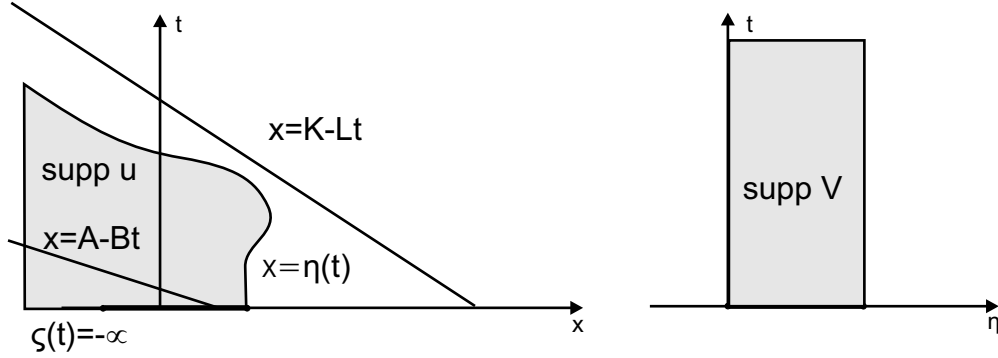


FIGURE 6. El caso  $m > 1$ ,  $k \in (0, 1)$

con unas constantes  $A, B, K, L$  positivas. La ecuación diferencial de la frontera libre (del interfaz suelo seco/mojado):

$$(11.2) \quad \eta'(t) = - \lim_{x \rightarrow \eta(t)^-} \left[ \frac{m}{m-1} (u^{m-1})_x + \lambda u^{k-1} \right]$$

Notar que la expresión para la velocidad de la frontera libre es una indeterminación del tipo “ $0 \cdot \infty$ ” pues

$$\frac{m}{m-1} (u^{m-1})_x + \lambda u^{k-1} = u^{k-1} \left[ \frac{m}{m-k} (u^{m-k})_x + 1 \right] \quad \text{con } k \in (0, 1).$$

Se puede demostrar independientemente que la velocidad de la frontera  $x = \eta(t)$  es finita para cualquier función inicial  $u_0$  de una clase adecuada. Es necesario entonces que sea

$$\lim_{x \rightarrow \eta(t)} (u^{m-k})_x = - \frac{m}{m-k}.$$

Esta igualdad significa que el valor de la derivada espacial sobre la frontera libre es prescrito y no depende de la función inicial.

- **Convección “débil”**: la ecuación (11.1) con los parametros  $m > 1$ ,  $k \geq 1$ . En este caso la ecuación de la frontera libre también viene dada por la fórmula (11.2), pero el término  $u^{k-1}$  se anula en la frontera.

- **Ecuación de difusión-reacción**

$$\begin{cases} u_t = (u^m)_{xx} + f(u), & \text{en } S_T, \quad m > 1 \\ u(x, 0) = u_0(x) \geq 0, & \text{supp } u_0 = (0, a). \end{cases}$$

La ecuación se interpreta como **la ley del balance de masa** en la descripción de Euler (6.2). Su homólogo en coordenadas de Lagrange (de masa) es la ecuación (6.1):

$$Y_\zeta = \frac{1}{V} \exp \left( \int_0^t \frac{f(V)}{V} dt \right).$$

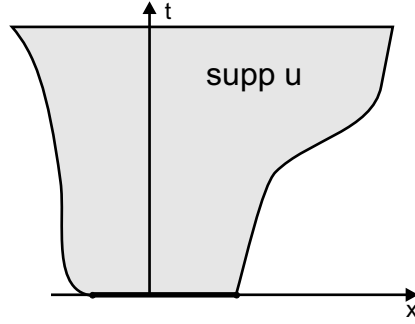


FIGURE 7. El caso  $m > 1, k \geq 1$ : el soporte queda acotado para todo  $t > 0$

El sistema de EDPs equivalente en el plano de coordenadas lagrangianas de masa tiene la forma

$$\begin{cases} VY_\zeta = \exp\left(\int_0^t \frac{f(V)}{V} d\tau\right) & \text{balance de la masa,} \\ Y_t + \exp\left(-\int_0^t \frac{f(V)}{V} dt\right) (V^m)_\zeta = 0 & \text{ecuación de trayectorias} \end{cases}$$

La ley del movimiento de las fronteras libres (la ecuación de Darcy)

$$\eta'(t) = -\frac{m}{m-1} \lim_{x \rightarrow \eta(t)^-} \left[ \exp\left(-\int_0^t \frac{f(u)}{u} d\tau\right) (u^{m-1})_x \right]$$

• **Introducción de la presión artificial**

$$(11.3) \quad \begin{cases} u_t = (u^m)_{xx} + f(u), & \text{en } S_T, \quad m > 1 \\ u(x, 0) = u_0(x) \geq 0, & \text{supp } u_0 = (0, a). \end{cases}$$

Interpretemos (11.3) como la ley de conservación de masa en el movimiento de un fluido con la densidad  $u$  y la velocidad

$$\mathbf{v} = -\frac{m}{m-1} (u^{m-1})_x + p_x$$

donde  $p$  es una nueva incognita:

$$u_t + \left[ u \left( -\frac{m}{m-1} (u^{m-1})_x + p_x \right) \right]_x = 0$$

Buscamos  $p(x, t)$  como la solución de la ecuación

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( u \frac{\partial p}{\partial x} \right) = f(u)$$

En el plano de coordenadas lagrangianas de masa

$$\begin{cases} VY_\zeta = 1 & \text{en } Q_T, \\ Y_t + (V^m)_\zeta - P = 0, \\ V(VP_\zeta)_\zeta + f(V)Y_\zeta = 0. \end{cases}$$

Aunque la masa de todo volumen no se conserva, la solución del sistema en coordenadas lagrangianas nos proporciona un subdominio que se adjunta a la frontera libre y que conserva su masa. Luego continuamos esta solución al resto del dominio.

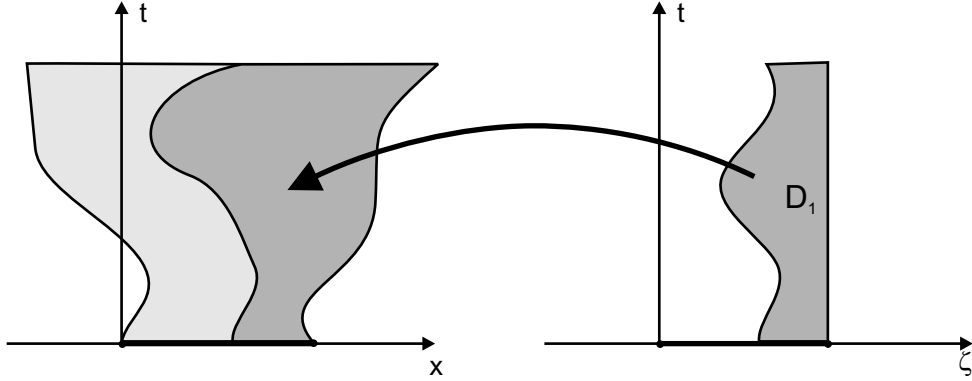


FIGURE 8. El problema en coordenadas lagrangianas permite construir una solución de masa constante en cualquier dominio  $D_1 \cap \{t = \text{const}\}$

• **Ecuación no local en dinámica de poblaciones.** Otro ejemplo es el problema de Cauchy para la EDP no local que surge en el modelado matemático de la dinámica de poblaciones [1], [3, Sec. 24.8]. Se considera el problema de Cauchy

$$(11.4) \quad \begin{cases} u_t = (u^m)_{xx} + \left[ u \left( \int_{-\infty}^x u(y, t) dy - \int_x^{\infty} u(y, t) dy \right) \right]_x & \text{en } S, \quad m > 1, \\ u(x, 0) = u_0(x) \text{ en } \mathbb{R}. \end{cases}$$

Interpretamos la ecuación (11.4) como la ecuación de continuidad del flujo del fluido con la densidad  $u(x, t)$  y la velocidad

$$V = -\frac{m}{m-1}(u^{m-1})_x - \left( \int_{-\infty}^x u(y, t) dy - \int_x^{\infty} u(y, t) dy \right).$$

La introducción de la coordenada lagrangiana de masa

$$\zeta = \int_{-\infty}^x u_0(y) dy : [0, a] \mapsto [0, b]$$

transforma la ecuación (11.4) (véase (10.6)) en la ecuación para la densidad  $v(\zeta, t) \equiv u[x(\zeta, t), t]$

$$\left( \frac{1}{v} \right)_t + (v^m)_{\zeta\zeta} + 2 = 0 \quad \text{en } Q = (0, b) \times (0, T].$$

Las fronteras que delimitan el soporte de la solución vienen dadas por la siguiente generalización de la ley de Darcy

$$\eta(t) = a - bt - \lim_{\zeta \rightarrow b^-} \int_0^t (v^m)_\zeta(\zeta, t) d\zeta,$$

$$\xi(t) = -bt - \lim_{\zeta \rightarrow 0^+} \int_0^t (v^m)_\zeta(\zeta, t) d\zeta.$$

En la ecuación del medio poroso las fronteras libres son siempre monótonas y el soporte de la solución solo puede expandirse debido a la ley Darcy. A diferencia de esta situación, las funciones  $\eta(t)$  y  $\xi(t)$  ya no tiene porque ser monótonas y el soporte de la solución puede tener la forma del “reloj de arena” (en el plano  $(x, t)$ ).

#### REFERENCES

- [1] J. I. DIAZ, T. NAGAI, AND S. I. SHMAREV, *On the interfaces in a nonlocal quasilinear degenerate equation arising in population dynamics*, Japan J. Indust. Appl. Math., 13 (1996), pp. 385–415.
- [2] N. K. IBRAGIMOV, *Transformation groups in mathematical physics*, “Nauka”, Moscow, 1983.
- [3] A. M. MEIRMANOV, V. V. PUKHNACHOV, AND S. I. SHMAREV, *Evolution equations and Lagrangian coordinates*, vol. 24 of de Gruyter Expositions in Mathematics, Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1997.
- [4] L. V. OVSJANNIKOV, *Group analysis of differential equations*, “Nauka”, Moscow, 1978.
- [5] L. I. SEDOV, *Mechanics of continuous media. Vol. 1, 2*, vol. 4 of Series in Theoretical and Applied Mechanics, World Scientific Publishing Co. Inc., River Edge, NJ, 1997. With an appendix by V. V. Lokhin and the author, Translated from the Russian, Translation edited by J. P. Nowacki.
- [6] C. A. TRUESDELL, *A first course in rational continuum mechanics. Vol. 1*, Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], New York, 1977. General concepts, Pure and Applied Mathematics.
- [7] J. L. VAZQUEZ, *Fundamentos matematicos de la mecánica de fluidos*, apuntes de clase, UAM, 2003. (En la pagina WEB del autor).