GEOMETRÍA SIMPLÉCTICA

GABRIELA P. OVANDO

El trabajo en el campo de la Mecánica Analítica de muchos matemáticos tales como Lagrange, Laplace, Hamilton, Poisson, Liouville, Poincaré, Lie, Cartan, entre otros, ha jugado un importante rol en el desarrollo de diversas áreas de la matemática: geometría diferencial, cálculo de variaciones, teoría de los grupos y álgebras de Lie, teoría de las ecuaciones diferenciales ordinarias y en derivadas parciales. La introducción de modernos métodos de la geometría diferencial es una de las razones de la importancia de este nuevo papel que permitió una formulación global de los problemas y suministró herramientas con las cuales resolverlos.

En la mecánica clásica el método más difundido para integrar las ecuaciones hamiltonianas es el de la aproximación de Hamilton-Jacobi. Existen nuevos métodos para integrar tales ecuaciones, cuya idea en común es la realización de las ecuaciones canónicas en álgebras de Lie o en espacios simétricos. En contraste con el método de Hamilton-Jacobi, en lugar de una ecuación no lineal en derivadas parciales, con los nuevos métodos tenemos que resolver un sistema de ecuaciones en derivadas parciales de primer orden.

Las motivaciones actuales tienen su origen en viejos y conocidos problemas. En el S. XIX los geómetras se interesaron por la teoría local de las superficies en $\mathbb{R}^3$, la cual puede ser vista como la prehistoria de las construcciones modernas. La ecuación del seno de Gordon surge primero a través de la teoría de superficies de curvatura constante -1 de Darboux y la ecuación de la 3-onda reducida puede ser encontrada en el trabajo de Darboux de los sistemas ortogonales triples en $\mathbb{R}^3$. En 1906, da Ríos modeló el movimiento de un fino filamento en un líquido viscoso usando las ecuaciones de una curva que se propaga en $\mathbb{R}^3$ a lo largo de su binormal. Hasimoto mostró mucho más tarde, la equivalencia de este sistema con la ecuación de Schrödinger lineal. Puesto que las ecuaciones fueron redescubiertas de alguna forma independientemente de su historia en la geometría, la principal contribución de los geómetras clásicos yace en los métodos que desarrollaron para construir soluciones explícitas de estas ecuaciones (Terng).

El affaire o casamiento entre geometría y física, aquí principalmente en el campo de la mecánica analítica, es ya muy conocido y antiguo. La rama de la geometría más implicada es la geometría simpléctica generalizada, la cual a pesar de su edad, continúa siendo un campo con nuevos resultados y conceptos (por ejemplo la noción de variedad de Poisson como una aparente natural generalización del concepto de variedad simpléctica). Sin embargo estas estructuras, no sólo tienen interés desde el punto de vista físico. Estas teorías han implicado avances en el tratamiento de otros problemás geométricos, como las variedades Kähler, las cuales son ejemplos particulares de variedades simplécticas.

Nos proponemos en primer lugar una introducción en la Geometría Simpléctica. Esata teoría constituye uno de los principales pilares en el estudio de las estructuras diferenciables, así como en las generalizaciones a objetos geométricos más generales. Una de las formas de introducir una estructura adicional en una variedad diferenciable es definir una forma bilineal antisimétrica en el espacio tangente que sea diferenciable como función del punto. La geometría de tales variedades es sustancialmente diferente de la riemanniana. Una extensión del concepto de variedad simpléctica viene dado por el de variedad de Poisson. En este nuevo tipo de geometría, estructuras tales como los algebroides y biálgebras juegan un papel esencial, al condensar las propiedades algebraicas necesarias que no son dependientes de la generalización de ciertos tipos de estructuras, como los campos de vectores visualizados como tensores contravariantes. La finalidad del curso es desarrollar la teoría algebraica de sistemas integrables, en el sentido de Fomenko, Mishchenko, Trofimov, etc, haciendo uso de las propiedades geométricas que aportan los grupos de Lie, así como los conceptos de integrabilidad e involuci'on que se derivan de ellos utilizando la teoría de funciones invariantes.

La propuesta del programa es la siguiente:

- Espacios tangente y cotangente de una variedad diferenciable
- El espacio de formas diferenciables y el operador exterior.
- Variedades simplécticas. Ejemplos: $\mathbb{R}^{2n}$ y el cotangente de una variedad diferenciable.
- El teorema de Darboux.
- Funciones y campos hamiltonianos.
- Ecuaciones hamiltonianas.
- El corchete de Poisson.
- Funciones en involución en el sentido de Liouville, sistemas integrables.
- El teorema de Liouville.
- Las órbitas coadjuntas como variedades simplécticas.
- Acciones de grupos de Lie en variedades simplécticas.
- La aplicación momento.

References

[Bo] N. Bourbaki, *Éléments de mathématics - Groupes et algèbres de Lie*, Hermann, PARIS, (1972).

[FM] A. Fomenko, A. Miscenko, *Euler equations on finite-dimensional Lie groups*, Izv. Akad.Nauk SSSR Ser Mat. **42**, (1978), 396-415 [ruso]; traducción al inglés: Math. USSR Izv.**12**, (1978), 371 - 389.

[Ge] M. Guest, *Harmonic Maps, Loop groups and Integrable Systems of several variables*, (London Math.Soc. Stud. texts; 38). New York: Cambridge University Press, (1997).

[Ko] B. Kostant *Quantization and representation theory. Part I, prequantization. Lectures in modern anaylis and applications III*, Lectures Notes in math., Springer Verlag Berlin, **170** (1970), 87 - 208.

[Kr] A. Kirillov *Elements of the Theory of representations*, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, (1976).

[K-N] S. Kobayashi, K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry*, Interscience Publisher, **I - II**, (1969).

[Kos] B. Kostant, *The solution to a generalized Toda lattice and representation theory*, Adv. Math., **39** (1979), 195 - 338.

[H-L] A. Hucleberry, E. Livorni, *A classification of homogeneous surfaces*, Can. J. Math., **33**, (1981), 1097 - 1110.

[L-M] P. Libermann, C.M. Marle, *Symplectic Geometry and Analytical Mechanics*, D. Reidel Publishing Company, 1987.

[O] G. Ovando, Invariant complex structures on solvable real Lie groups, Man. math., **103**, (2000), 19-30.

[P] A. Perelomov, *Integrable Systems of Classical Mechanics and Lie Algebras*, vol. I, Birkhäuser Verlag, Basel - Boston - Berlin, (1990).

[Re] A.Reyman, *Integrable Hamiltonian systems connected with graded Lie algebras. In: Differential geometry, Lie groups and mechanics* III. Zap. Nauchn. Semin. LOMI, **95**, (1980), 3 - 54 [ruso]; Traducción al inglés: J. Sov. Math., **19**, No. 5, (1982), 1507 - 1545.

[So] J.M. Souriau *" Geometrie symplectique différentielle" Applications*, Colloque CNRS Géométrie différentielle, Strasbourg, (1953) 53 - 59, Éditions du CNRS, Paris , (1953).

[Sk] E. Sklyanin, *Quantum version of the inverse scattering method. In: Differential geometry, Lie groups and mechanics* III. Zap. Nauchn. Semin. LOMI, **95**, (1980), 55 - 120 [ruso]; Traducción al inglés: J. Sov. Math., **19**, No. 5, (1982), 1546 - 1595.

[STS] Semenov-Tian-Shanky, *What is a classical r-matrix?* Funkts. Anal. Prilozh., **17**, No. 4, (1983), 17 - 33 [ruso]; Traducción al inglés: Funct. Anal. Appl., **17**, (1982), 259 - 272.

[Sy] W. Symes, *Systems of Toda type, inverse spectral problems and representation theory*, Invent. Math., **59** (1980), 13 - 53.

[Va] V. S. Varadarajan, *Lie groups, Lie algebras and their representations*, Springer, (1984).

[We] A. Weinstein, *Symplectic manifolds and their Lagrangian submanifolds*, Adv. in Math., **6** (1971), 329 - 346.

ECEN-FCEIA, Universidad Nacional de Rosario
E-mail address: ovando@mate.uncor.edu