Homotopía racional…

¡pero si es muy fácil!

Los grupos de homotopía son muy difíciles de calcular.

Jean Pierre Serre

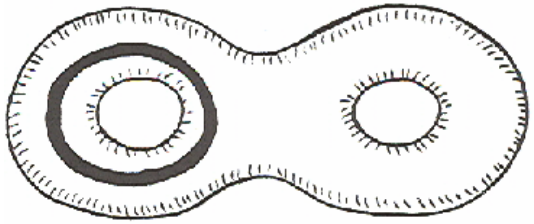
Teorema

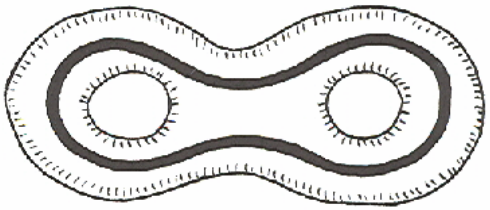
Cada grupo de homotopía de un complejo finito 1-conexo es finitamente generado.

$$\pi_n(X) \otimes \mathbb{Q} = \bigoplus_r \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Q} = \bigoplus_r \mathbb{Q}, \quad n > 1.\ 1.$$

$$rk\Big(\pi_n(X)\Big) = r = \dim \pi_n(X) \otimes \mathbb{Q}.$$

La homotopía racional estudia la parte libre de torsión de la homotopía de los espacios:





I.- Dado un espacio X, construir un nuevo espacio $X_{\mathbb{Q}}$, llamado el *racionalizado* de X, que satisfaga:

$$\pi_*(X_{\mathbb{Q}}) = \pi_*(X) \otimes \mathbb{Q}.$$

P. Hilton, G. Mislin, J. Roitberg, M. Postnikov,...

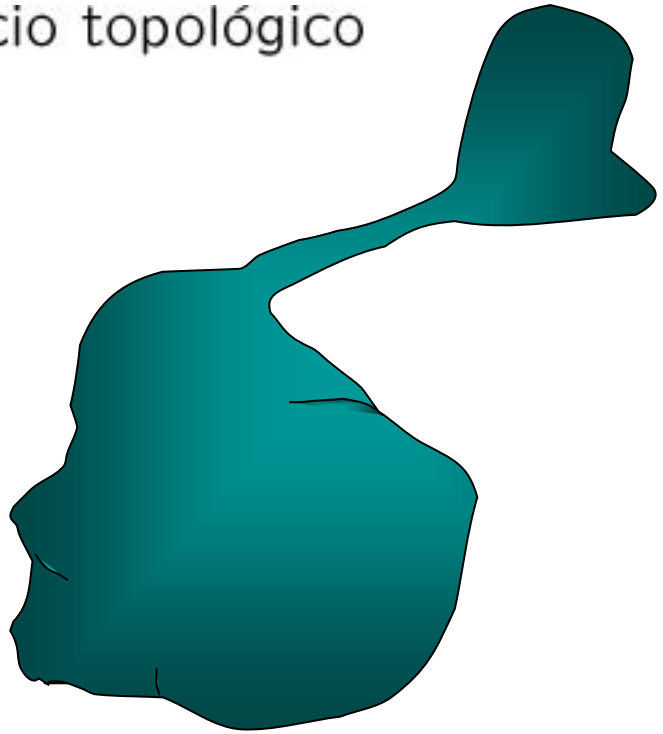
II.- Encontrar modelos algebraicos que representen fielmente a $X_{\mathbb{Q}}$. Para ello es clave la introducción de formas diferenciales en un espacio topológico X.

Dennis Sullivan

Daniel Quillen

Sea X un espacio topológico

$$A(X) = \oplus_{p \geq 0} A^p(X)$$

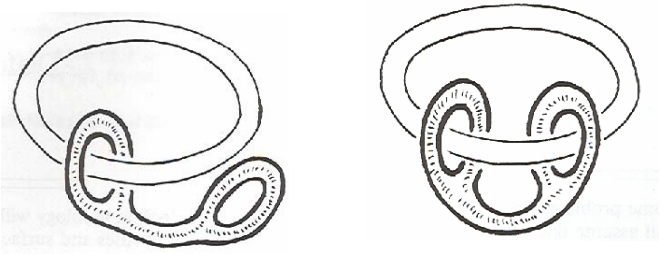


Una p-forma diferencial $\Phi \in A^p(X)$ es una familia de p-formas diferenciales "compatibles":

$$\{\Phi_\sigma \in A^p(\sigma),\ \sigma \text{ símplex de } X\}$$

El producto y la derivada exterior hacen de $A(X)$ un álgebra graduada diferencial conmutativa.

Las formas diferenciales polinomiales sobre X, $A_{PL}(X)$, es la subálgebra de $A(X)$ generada por $\mathbb{Q}$ y las funciones coordenadas.

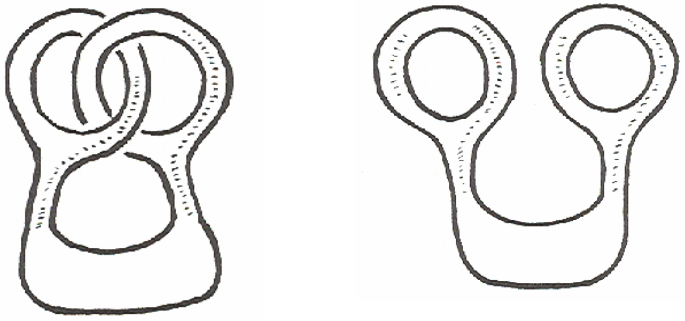


$A_{PL}(X)$ es un álgebra "muy grande" y puede ser simplificada: existe un morfismo de álgebras que induce isomorfismo en cohomología

$$\varphi\colon (\Lambda V, d) \xrightarrow{\simeq} A_{PL}(X)$$

donde $(\Lambda V, d)$ es el álgebra libre generada por el espacio vectorial V (polinomios en V con coeficientes racionales) y la diferencial d satisface la siguiente condición de minimalidad: para cada $v \in V$, dv es un polinomio en ΛV sin término lineal.

$(\Lambda V, d)$ es el *modelo minimal de* X.



Teorema

El modelo minimal de un espacio no sólo es un invariante del tipo de homotopía racional de X sino que lo caracteriza.

$$X_{\mathbb{Q}} \longleftrightarrow (\Lambda V, d)$$

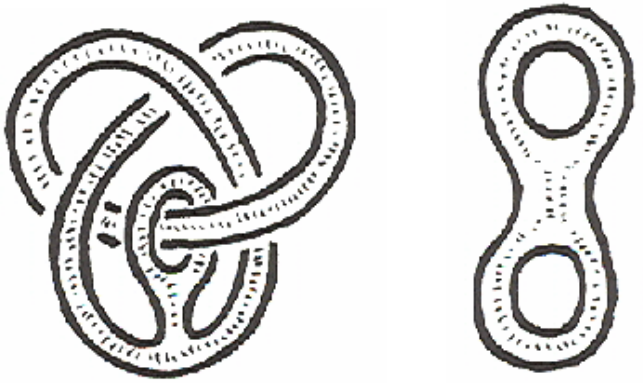
Teorema

Sea $(\Lambda V, d)$ el modelo minimal de X. Entonces:

$$H^*(X;\mathbb{Q}) \cong H^*(\Lambda V, d),$$

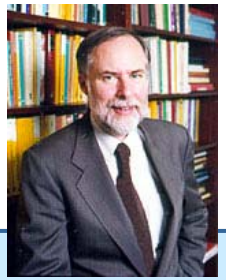
$$\pi_*(X) \otimes \mathbb{Q} \cong V,$$

$$\ldots$$



El rango de los grupos de homotopía de un espacio compacto no se dispone al azar:

Yves Félix



Stephen Halperin

Teorema: dualidad Elíptico-Hiperbólica

Dado un espacio compacto X, existen sólo dos posibilidades:

(i) $\pi_*(X) \otimes \mathbb{Q}$ es de dimensión finita.

(ii) $\pi_*(X) \otimes \mathbb{Q}$ crece exponencialmente: Existe una constante $c > 1$ y un entero positivo n_0 tal que para cada $k \geq n_0$

$$\sum_{i=1}^{k} \dim \pi_i(X) \otimes \mathbb{Q} \geq c^k.$$

Teorema

Sea X un espacio compacto con $\dim X = m$. Entonces:

(i) Si X es elíptico, $\pi_i(X) \otimes \mathbb{Q} = 0$, $i \geq 2m$.

(ii) Si X es hiperbólico, en cada intervalo de $\mathbb{N}$ de longitud m existe algún i con $\pi_i(X) \otimes \mathbb{Q} \neq 0$.

Propiedades de los espacios elípticos

Sea X un espacio elíptico. Entonces:

- $\chi(X) \geq 0$.
- $\chi_\pi(X) = \sum_{i \geq 1} (-1)^i \dim \pi_i(X) \otimes \mathbb{Q} \leq 0$.
- $H^*(X; \mathbb{Q})$ es un álgebra con dualidad de Poincaré.

Conjetura de Anick

David Anick

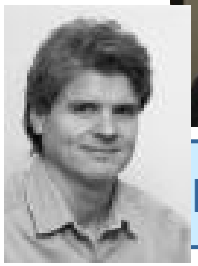
Todo espacio compacto de dimensión k es el k-*esqueleto* de un espacio elíptico.

Teorema

La conjetura de Anick es cierta si los invariantes de Postnikov de orden par son descomponibles:

$$k_n \in H^+(X^{(n-1)};\mathbb{Q}) \cdot H^+(X^{(n-1)};\mathbb{Q}) \otimes \pi_n X, \quad n \text{ par.}$$

Yves Félix



Barry Jessup

Y un servidor

Teorema

Sea X un espacio con $\pi_*(X) \otimes \mathbb{Q}$ de dimensión finita. Entonces $H^*(X;\mathbb{Q})$ es noetheriana si y sólo si existe una fibración

$$F \longrightarrow E \xrightarrow{p} X$$

donde E es elíptico y F es un producto finito de esferas de dimensión impar.