La ecuación de Hamilton–Jacobi: una perspectiva desde la mecánica geométrica

Xavier Gràcia

Dep. Matemàtica Aplicada IV
Universitat Politècnica de Catalunya
Barcelona

Jornada Interdisciplinar Hamilton–Jacobi

Fac. Ciencias Matemáticas, Universidad Complutense de Madrid

19 octubre 2007

La perspectiva de la mecánica geométrica

Mecánica analítica y geometría diferencial están estrechamente relacionadas.

Pregunta más habitual de la *mecánica geométrica*:

> *"¿Cuál es la formulación geométrica de esto?"*

La perspectiva de la mecánica geométrica

Ejemplo Ecuación diferencial ordinaria, de primer orden, autónoma:

$$x' = f(x)$$

donde $f\colon U \to \mathbf{R}^n$ es una función vectorial en un abierto $U \subset \mathbf{R}^n$ y las soluciones son caminos $x\colon I \to U$, ($I \subset \mathbf{R}$ intervalo abierto).

El cambio de variable dependiente $y = \varphi(x)$ transforma la ecuación en

$$y' = g(y),$$

siendo

$$g(y) = \mathrm{D}\varphi(\varphi^{-1}(y))\cdot f(\varphi^{-1}(y)).$$

No se pasa de f a g mediante el cambio *naïf* $g = f \circ \varphi^{-1}$! Aunque f parece una función vectorial, en realidad es la expresión coordenada de un objeto más complejo: un campo vectorial.

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi"'] & \mathbf{R}^n \\ V \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

La perspectiva de la mecánica geométrica

(sigue el ejemplo)

Formulación geométrica del concepto de ecuación diferencial ordinaria de primer orden y autónoma en una variedad M:

- X campo vectorial en M
  o sea, sección del fibrado tangente $\tau_M \colon \mathrm{T}M \to M$
- $\gamma \colon I \to M$ camino en M
  tiene un levantamiento canónico $\dot{\gamma} \colon I \to \mathrm{T}M$ (velocidad)

X define una ecuación diferencial y γ es una solución (curva integral) cuando

$$\dot{\gamma} = X \circ \gamma.$$

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{T}M \arrow[d, shift right, "\tau_M"'] \\ I \arrow[ur, "\dot{\gamma}"] \arrow[r, "\gamma"] & M \arrow[u, bend right, "X"'] \end{tikzcd}$$

Su expresión coordenada es de la forma $x'(t) = f(x(t))$.

La perspectiva de la mecánica geométrica

En general, no existe una única formulación geométrica de algo, sino varias, que pueden corresponder a distintos grados de generalidad en el planteamiento del problema, o en las propiedades de las soluciones.

Otras preguntas frecuentes:

> *"Esta condición, ¿qué significa?"*
> *"Esa condición, ¿cuándo se cumple?"*
> *"Aquellas construcciones, ¿qué relación guardan?"*

La perspectiva de la mecánica geométrica

Ejemplo La derivada

Dada una aplicación $F\colon M \to N$ y $x \in M$, tenemos la aplicación tangente $\mathrm{T}_x F\colon \mathrm{T}_x M \to \mathrm{T}_{F(x)} N$.
Si F es una función real, $F\colon M \to \mathbf{R}$, también tenemos la diferencial $\mathrm{d}_x F\colon \mathrm{T}_x M \to \mathbf{R}$.

Ejemplo Ecuación diferencial ordinaria de primer orden *no* autónoma

Se puede definir mediante $X\colon \mathbf{R} \times M \to \mathrm{T}M$, o $X\colon \mathbf{R} \times M \to \mathbf{R} \times \mathrm{T}M$, o $X\colon \mathbf{R} \times M \to \mathrm{T}(\mathbf{R} \times M)$, ...
En lugar de $\mathbf{R} \times M$, podríamos considerar un fibrado $N \to \mathbf{R}$.

Ejemplo Formas diferenciales cerradas y formas diferenciales exactas

Campo electromagnético en el espacio-tiempo: $F \in \Omega^2(M)$.
En el vacío $\mathrm{d}F = 0$ (2-forma cerrada), por tanto (lema de Poincaré) tiene un potencial local.
¿Puede escribirse globalmente $F = \mathrm{d}A$, siendo $A \in \Omega^1(M)$?

La mecánica hamiltoniana

Sistema dinámico hamiltoniano (independiente del tiempo): (M, ω, H)

- variedad diferenciable M (espacio de fases)
- forma simpléctica $\omega \in \Omega^2(M)$
  - $\mathrm{d}\omega = 0$ (cerrada)
  - ω es no-degenerada
- función $H \colon M \to \mathbf{R}$ (hamiltoniana)

(M, ω) es una variedad simpléctica.

ω no-degenerada: para cada $x \in M$, $\omega_x \colon \mathrm{T}_x M \times \mathrm{T}_x M \to \mathbf{R}$ es no-degenerada (por tanto $\dim M = 2n$), se tiene un isomorfismo $\widehat{\omega}_x \colon \mathrm{T}_x M \to \mathrm{T}^*_x M$, y globalmente $\widehat{\omega} \colon \mathrm{T}M \to \mathrm{T}^* M$.

Campo hamiltoniano de H: $Z_H = \widehat{\omega}^{-1} \circ \mathrm{d}H \in \mathfrak{X}(M)$:

$$\mathrm{i}_{Z_H}\omega = \mathrm{d}H.$$

Define la ecuación de Hamilton

$$\dot{\xi} = Z_H \circ \xi. \qquad (\mathrm{i}_{\dot{\xi}}\,\omega = \mathrm{d}H \circ \xi)$$

Paréntesis de Poisson de dos funciones:

$$\{f, g\} = \omega(Z_f, Z_g\} = Z_g \cdot f.$$

La mecánica hamiltoniana

Expresión en coordenadas (x^i) $(1 \leq i \leq 2n)$:

$$\omega = \frac{1}{2}\omega_{ij}\,\mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j,\ Z_H = \frac{\partial H}{\partial x^i}\omega^{ij}\frac{\partial}{\partial x^j},\ \{f,g\} = -\frac{\partial f}{\partial x^i}\omega^{ij}\frac{\partial g}{\partial x^j},$$

donde (ω^{ij}) es la matriz inversa de (ω_{ij}).

Ecuación de Hamilton: $\dot{x}^j = \dfrac{\partial H}{\partial x^i}\omega^{ij}$.

Siendo ω cerrada es localmente exacta: $\omega = -\mathrm{d}\theta$, con $\theta \in \Omega^1(M)$.
Más aún (teorema de Darboux), existen coordenadas canónicas $(q^i; p_i)$ $(1 \leq i \leq n)$, en las cuales

$$\omega = \mathrm{d}q^i \wedge \mathrm{d}p_i \quad (\text{y } \theta = p_i\,\mathrm{d}q^i).$$

En ellas $Z_H = \dfrac{\partial H}{\partial p_i}\dfrac{\partial}{\partial q^i} - \dfrac{\partial H}{\partial q^i}\dfrac{\partial}{\partial p_i}$ y $\{f,g\} = \dfrac{\partial f}{\partial q^i}\dfrac{\partial g}{\partial p_i} - \dfrac{\partial f}{\partial p_i}\dfrac{\partial g}{\partial q^i}$.
La ecuación de Hamilton se escribe

$$\begin{cases} \dot{q}^i = & \partial H/\partial p_i \\ \dot{p}_i = & -\partial H/\partial q^i \end{cases}$$

La mecánica hamiltoniana

Ejemplo básico de variedad simpléctica:
el fibrado cotangente de una variedad, $M = \mathrm{T}^*Q$.

Está dotado de una 1-forma y una 2-forma canónicas, θ_Q y $\omega_Q = -\mathrm{d}\theta_Q$.

Dadas coordenadas (q^i) de Q cualesquiera, y las coordenadas naturales $(q_i; p_i)$ de T^*Q correspondientes, se expresan

$$\theta_Q = p_i \, \mathrm{d}q^i, \qquad \omega_Q = \mathrm{d}q^i \wedge \mathrm{d}p_i.$$

La ecuación de Hamilton–Jacobi

La ecuación de Hamilton–Jacobi aparece asociada a la teoría de las transformaciones canónicas.

Sea (q, p) un sistema de coordenadas canónicas $(\omega = \mathrm{d}q^i \wedge \mathrm{d}p_i)$ de M, y (Q, P) otro sistema de coordenadas.
Éstas son canónicas sii $\mathrm{d}q^i \wedge \mathrm{d}p_i - \mathrm{d}Q^i \wedge \mathrm{d}P_i = 0$.
Localmente significa que, para cierta función S,

$$p_i \mathrm{d}q^i - P_i \mathrm{d}Q^i = \mathrm{d}S.$$

Supongamos que en el entorno de un punto las funciones (q, Q) constituyen un sistema de coordenadas. $\left(\det \frac{\partial(q,Q)}{\partial(q,p)} = \det \frac{\partial Q}{\partial p} \neq 0\right)$

Entonces se puede expresar $S(q, p) = S_1(q, Q)$.
S_1 se denomina función generatriz, puesto que las relaciones

$$\frac{\partial S_1}{\partial q} = p, \quad \frac{\partial S_1}{\partial Q} = -P$$

determinan la transformación de coordenadas.

Recíprocamente, cualquier función S_1 tal que $\det(\partial^2 S_1/\partial q\,\partial Q) \neq 0$ genera una tal transformación.

La ecuación de Hamilton–Jacobi

Sea K la expresión de la hamiltoniana en las nuevas coordenadas canónicas, y supongamos que sólo depende de Q: $H(q,p) = K(Q)$. La ecuación de Hamilton se escribe

$$\begin{cases} \dot{Q}^i = 0 \\ \dot{P}_i = -\partial K / \partial Q^i \end{cases}$$

y su integración es inmediata.

¿Existe alguna función generatriz que lo permita? Deberá cumplir

$$H\left(q, \frac{\partial S_1(q,Q)}{\partial q}\right) = K(Q).$$

Teorema

Sea $S_1(q,Q)$ una solución de la ecuación precedente, dependiente de n parámetros Q, y tal que $\det(\partial^2 S_1 / \partial q\, \partial Q) \neq 0$.
Entonces la ecuación de Hamilton es integrable por cuadraturas, y las funciones $Q(q,p)$ determinadas por $\partial S_1 / \partial q = p$ son integrales primeras.

La ecuación de Hamilton–Jacobi

A partir de ahora consideramos la variedad simpléctica $M = \mathrm{T}^*Q$.

Ecuación de Hamilton–Jacobi (independiente del tiempo):

$$H\left(q, \frac{\partial W}{\partial q}\right) = E,$$

siendo la incógnita una función $W(q)$ (función característica de Hamilton), y E una constante.

Teorema

Sea $W(q)$ una función.
Supongamos que satisface la ecuación de Hamilton–Jacobi. En tal caso, si $q(t)$ es curva integral de $\dot{q}^i = \dfrac{\partial H}{\partial p_i}\left(q, \dfrac{\partial W}{\partial q}\right)$, entonces $(q(t), p(t))$, con $p(t) = \dfrac{\partial W}{\partial q}(q(t))$, es solución de la ecuación de Hamilton.
Recíprocamente, si esta implicación se satisface para toda $q(t)$, W es solución de la ecuación de Hamilton–Jacobi.

Cuestiones planteadas

Algunas preguntas:

- ¿Cómo se expresa geométricamente la ecuación de Hamilton–Jacobi?
- ¿Qué significan los teoremas anteriores?
- ¿Es relevante la estructura simpléctica?
- Si el sistema hamiltoniano está asociado a un sistema lagrangiano, ¿podemos describir algo análogo a la ecuación de Hamilton–Jacobi en el formalismo lagrangiano?
- ¿Cuál es el significado geométrico de la función generatriz?
- ¿Y el caso dependiente del tiempo?
    - Ecuación de Hamilton–Jacobi (dependiente del tiempo):

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}\right) = 0 \qquad S(t,q) \text{ función principal de Hamilton}$$

$$S(t,q) = W(q) - Et \implies H\left(q, \frac{\partial W}{\partial q}\right) = E.$$

Cuestiones planteadas

Formulación geométrica de $H\left(q, \dfrac{\partial W}{\partial q}\right) = E$.

Sea $W\colon Q \to \mathbf{R}$. Su diferencial es una aplicación $\mathrm{d}W\colon Q \to \mathrm{T}^*Q$, y la ecuación de Hamilton–Jacobi se expresa

$$H \circ \mathrm{d}W \equiv (\mathrm{d}W)^*(H) = E.$$

Localmente es equivalente a

$$\alpha^*(H) = E, \quad \mathrm{d}\alpha = 0. \qquad \alpha \in \Omega^1(Q)$$

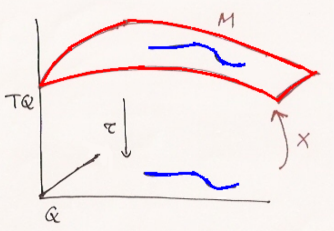
Propiedades equivalentes:

- $\mathrm{d}\alpha = 0$,
- $\alpha^*(\omega_Q) = 0$, (puesto que $\alpha^*(\theta_Q) = \alpha$)
- $\alpha(Q) \subset \mathrm{T}^*Q$ es una subvariedad lagrangiana.

Cuestiones planteadas

Sea $Y \in \mathfrak{X}(\mathrm{T}Q)$ campo vectorial de segundo orden.

¿Se pueden describir las curvas integrales de Y como las curvas integrales de una familia de campos vectoriales $X \in \mathfrak{X}(Q)$?



Una subvariedad $M \subset \mathrm{T}Q$,
de dimensión $\dim Q$,
invariante por Y,
y transversal a la proyección τ_Q,
define X.

Puede haber lagrangianas alternativas L_1, L_2 para Y.
$M = X(Q)$ puede ser una subvariedad lagrangiana para ω_{L_1} pero no para ω_{L_2}.

Planteamiento general

Consideremos variedades M y N, campos vectoriales $X \in \mathfrak{X}(M)$, $Y \in \mathfrak{X}(N)$, y una aplicación $\alpha\colon M \to N$.

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{T}M \arrow[r, "\mathrm{T}\alpha"] \arrow[d] & \mathrm{T}N \arrow[d] \\
M \arrow[r, "\alpha"] \arrow[u, bend left, "X"] & N \arrow[u, bend right, "Y"']
\end{tikzcd}
$$

Las condiciones siguientes son equivalentes:

(1) γ curva integral de $X \quad \Longrightarrow \quad \delta = \alpha \circ \gamma$ curva integral de Y.

(2) $\mathrm{T}\alpha \circ X = Y \circ \alpha$. $\quad (X \underset{\alpha}{\sim} Y.)$

Planteamiento general

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{T}M \arrow[r, "\mathrm{T}\alpha"] \arrow[d] & \mathrm{T}N \arrow[d] \\
M \arrow[r, "\alpha"] \arrow[u, bend left, "X"] & N \arrow[u, bend right, "Y"']
\end{tikzcd}
$$

Supongamos que α es un *embedding*: $\alpha(M) \subset N$ es una subvariedad regular y $\alpha_\circ \colon M \to \alpha(M)$ es un difeomorfismo.

Las condiciones precedentes son equivalentes a

(3) Y es tangente a $\alpha(M)$,

y X está determinado por los otros datos:

$$X = \alpha_\circ^*(Y|_{\alpha(M)}).$$

Hay una biyección entre las curvas integrales de X y las curvas integrales de Y que pasan por $\alpha(M)$.

Planteamiento general

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{T}M \arrow[r, "\mathrm{T}\alpha"] \arrow[d] & \mathrm{T}N \arrow[d] \\
M \arrow[u, bend left, "X"] \arrow[r, "\alpha"] & N \arrow[l, bend left, "\pi"] \arrow[u, bend right, "Y"']
\end{tikzcd}$$

Supongamos que α es una sección de un fibrado $\pi\colon N \to M$.

Entonces X viene dado por

$$X = \mathrm{T}\pi \circ Y \circ \alpha.$$

Planteamiento general

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{T}Q \arrow[r, "\mathrm{T}\alpha"] \arrow[d] & \mathrm{T}(\mathrm{T}Q) \arrow[d] \\
Q \arrow[u, bend left, "X"] \arrow[r, "\alpha"] & \mathrm{T}Q \arrow[u, bend right, "Y"']
\end{tikzcd}
$$

Supongamos:

- Y es un campo vectorial de segundo orden en $\mathrm{T}Q$ ($\mathrm{T}\tau \circ Y = \mathrm{Id}_{\mathrm{T}Q}$).
  (En coordenadas: $Y = v^i \dfrac{\partial}{\partial q^i} + a^i(q,v)\dfrac{\partial}{\partial v^i}$.)
- α es una sección de $\mathrm{T}Q \xrightarrow{\tau} Q$ (un campo vectorial).

Entonces

$$X = \alpha.$$

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{T}Q \arrow[r, "\mathrm{T}X"] \arrow[d] & \mathrm{T}(\mathrm{T}Q) \arrow[d] \\
Q \arrow[u, bend left, "X"] \arrow[r, "X"] & \mathrm{T}Q \arrow[u, bend right, "Y"']
\end{tikzcd}
$$

Problema de Hamilton–Jacobi hamiltoniano

- $H\colon \mathrm{T}^*Q \to \mathbf{R}$ hamiltoniana
- $\theta_Q \in \Omega^1(\mathrm{T}^*Q)$, $\omega_Q = -\mathrm{d}\theta_Q \in \Omega^2(\mathrm{T}^*Q)$
- Z_H campo vectorial hamiltoniano

$$\begin{tikzcd} \mathrm{T}Q \arrow[r, "\mathrm{T}\alpha"] \arrow[d, shift left] & \mathrm{T}(\mathrm{T}^*Q) \arrow[d, shift right] \\ Q \arrow[r, "\alpha"] \arrow[u, bend left, "X"] & \mathrm{T}^*Q \arrow[u, bend right, "Z_H"'] \end{tikzcd}$$

Problema de Hamilton–Jacobi hamiltoniano generalizado: $\mathrm{T}\alpha \circ X = Z_H \circ \alpha$.

X se puede obtener a partir de α:

$$X = \mathrm{T}\pi \circ Z_H \circ \alpha = \mathcal{F}H \circ \alpha.$$

$\mathcal{F}H\colon \mathrm{T}^*Q \to \mathrm{T}Q$ derivada fibrada

El problema de Hamilton–Jacobi hamiltoniano generalizado equivale a

(4) $\mathrm{i}_X \mathrm{d}\alpha + \alpha^*(\mathrm{d}H) = 0$.

La relación viene dada por

$$\mathrm{vl}\,(X, \mathrm{i}_X \mathrm{d}\alpha + \alpha^*(\mathrm{d}H)) = \mathrm{T}\alpha \circ X - Z_H \circ \alpha,$$

donde $\mathrm{vl}\colon \mathrm{T}^*Q \times_Q \mathrm{T}^*Q \to \mathrm{V}(\mathrm{T}^*Q) \subset \mathrm{T}(\mathrm{T}^*Q)$ (levantamiento vertical).

Problema de Hamilton–Jacobi hamiltoniano

Problema de Hamilton–Jacobi hamiltoniano (restringido): α tiene que satisfacer

$$\mathrm{d}\alpha = 0,$$

lo que significa que

α es una 1-forma cerrada.

Además $\alpha(Q) \subset \mathrm{T}^*Q$ es una subvariedad lagrangiana.
Bajo esta condición la ecuación de Hamilton–Jacobi es equivalente a

$$(5) \quad \alpha^*(\mathrm{d}H) = 0$$

o, lo que es localmente lo mismo,

$$(6) \quad \alpha^*(H) \equiv H \circ \alpha = \text{constante.}$$

Escribiendo localmente

$$\alpha = \mathrm{d}W \qquad\qquad W \colon Q \to \mathbf{R}$$

la ecuación de Hamilton–Jacobi se escribe $H \circ \mathrm{d}W = \text{constante}$.

Problema de Hamilton–Jacobi lagrangiano

- $L\colon \mathrm{T}Q \to \mathbf{R}$ lagrangiana regular
- $E_L\colon \mathrm{T}Q \to \mathbf{R}$ energía lagrangiana
- $\theta_L \in \Omega^1(\mathrm{T}Q)$, $\omega_L = -\mathrm{d}\theta_L \in \Omega^2(\mathrm{T}Q)$
- $i_Y\omega_L = \mathrm{d}E_L$ campo vectorial lagrangiano Y

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{T}Q \arrow[r, "\mathrm{T}X"] \arrow[d] & \mathrm{T}(\mathrm{T}Q) \arrow[d] \\
Q \arrow[r, "X"] \arrow[u, bend left, "X"] & \mathrm{T}Q \arrow[u, bend right, "Y"']
\end{tikzcd}
$$

Problema de Hamilton–Jacobi lagrangiano generalizado: $\mathrm{T}X \circ X = Y \circ X$.

Es equivalente a

(7) $\mathrm{i}_X X^*(\omega_L) = X^*(\mathrm{d}E_L)$.

Relación:

$$(X, -i_X X^*(\omega_L) + X^*(\mathrm{d}E_L)) = \widehat{\mathcal{F}^2 L} \circ \mathrm{vl}^{-1} \circ (\mathrm{T}X \circ X - Y_0 \circ X),$$

donde $\mathrm{vl}\colon \mathrm{T}Q \times_Q \mathrm{T}Q \to \mathrm{V}(\mathrm{T}Q) \subset \mathrm{T}(\mathrm{T}Q)$ (levantamiento vertical)
$\widehat{\mathcal{F}^2 L}\colon \mathrm{T}Q \times_Q \mathrm{T}Q \to \mathrm{T}Q \times_Q \mathrm{T}^*Q$ (hessiana fibrada)

Problema de Hamilton–Jacobi lagrangiano

Problema de Hamilton–Jacobi lagrangiano (restringido): se exige que X satisfaga

$$X^*(\omega_L) = 0,$$

lo que significa que

$X^*(\theta_L)$ es una 1-forma cerrada.

En tal caso, localmente

$$X^*(\theta_L) = \mathrm{d}W. \qquad\qquad W\colon Q \to \mathbf{R}$$

Ahora $X(Q) \subset \mathrm{T}Q$ es una subvariedad lagrangiana.

Bajo esta condición, la ecuación de Hamilton–Jacobi es equivalente a

$$X^*(\mathrm{d}E_L) = 0 \tag{8}$$

o, lo que es localmente lo mismo,

$$X^*(E_L) = \text{constante}. \tag{9}$$

Equivalencia entre las formulaciones lagrangiana y hamiltoniana

- $L \colon \mathrm{T}Q \to \mathbf{R}$ lagrangiana hiperregular
- $\mathcal{F}L \colon \mathrm{T}Q \to \mathrm{T}^*Q$ derivada fibrada (transformación de Legendre)
- $H = \mathcal{F}L_*(E_L) \colon \mathrm{T}^*Q \to \mathbf{R}$

Teorema

La aplicación

$$X \mapsto \alpha = \mathcal{F}L \circ X$$

es una biyección entre las soluciones del problema de Hamilton–Jacobi lagrangiano [generalizado/restringido] y las soluciones del problema de Hamilton–Jacobi hamiltoniano [generalizado/restringido].

Soluciones completas

En el caso lagrangiano (por ejemplo) una solución completa es un difeomorfismo

$$\Phi \colon Q \times \Lambda \to \mathrm{T}Q$$

(o, tal vez, un difeomorfismo entre abiertos "grandes" de estos espacios) tal que, para cada $\lambda \in \Lambda$, la aplicación $X_\lambda(q) = \Phi(q, \lambda)$ es un campo vectorial solución de la ecuación de Hamilton–Jacobi. $\Lambda \subset \mathbf{R}^n$ es un espacio de parámetros.

Dichos campos vectoriales son una solución completa en el sentido de que las imágenes $X_\lambda(Q)$ recubren todo $\mathrm{T}Q$, y por tanto permiten describir todas las curvas integrales de la dinámica lagrangiana.

El mismo concepto se aplica sin más al caso hamiltoniano: $\Psi \colon Q \times \Lambda \to \mathrm{T}^*Q$.

Soluciones completas

Relación entre soluciones completas y constantes del movimiento.

- Supongamos que hay n integrales primeras $f_1, \ldots, f_n$ de la dinámica Y tales que $\mathcal{F}f_1, \ldots, \mathcal{F}f_n$ son linealmente independientes
  $\Longrightarrow$ $f_i = c_i$ ($c_i \in \mathbf{R}$) foliación transversal a $\tau \colon \mathrm{T}Q \to Q$
  $\Longrightarrow$ despejamos $\dot{q}^i(q; c)$
  $\Longrightarrow$ campos vectoriales $X_{(c_1,\ldots,c_n)}$, son solución completa
- Supongamos una solución completa $\Phi \colon Q \times \Lambda \to \mathrm{T}Q$
  $\Longrightarrow$ las funciones que definen la foliación son integrales primeras:
  $$F = \mathrm{pr}_2 \circ \Phi^{-1} \colon \mathrm{T}Q \to \Lambda \subset \mathbf{R}^n$$

Además, las soluciones satisfacen $X_\lambda^*(\omega_L) = 0$ sii las funciones f_i están en involución, $\{f_i, f_j\} = 0$.

Ejemplo: oscilador armónico bidimensional

$L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 - x^2 - y^2)$

Ecuación de Euler–Lagrange: $\ddot{x} + x = 0$, $\ddot{y} + y = 0$.

Forma simpléctica: $\omega_L = \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}\dot{x} + \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}\dot{y}$.

A partir de las integrales primeras $\frac{1}{2}(\dot{x}^2 + x^2) = E_1$, $\frac{1}{2}(\dot{y}^2 + y^2) = E_2$, obtenemos una solución completa

$$X_{E_1,E_2} = \sqrt{2E_1 - x^2}\frac{\partial}{\partial x} + \sqrt{2E_2 - y^2}\frac{\partial}{\partial y}$$

que satisface $X^*_{E_1,E_2}(\omega_L) = 0$.

(Partiendo de otras constantes del movimiento como $\dot{x}\dot{y} + xy = C$, $x\dot{y} - y\dot{x} = l$, se obtienen otras soluciones X para las cuales $X^*(\omega_L) \neq 0$.)

$L' = \dot{x}\dot{y} - xy$ es una lagrangiana alternativa, que describe la misma dinámica. En este caso $\omega_{L'} = \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}\dot{y} + \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}\dot{x}$, y

$X^*_{E_1,E_2}(\omega_{L'}) = \left(\frac{x}{\sqrt{2E_1 - x^2}} - \frac{y}{\sqrt{2E_2 - y^2}} \right) \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \neq 0.$

Cuestiones adicionales

- caso dependiente del tiempo
- lagrangianas singulares
- sistemas con ligaduras no holónomas
- ejemplos relevantes
  - distancia en una variedad pseudo-riemanniana
  - sistemas dinámicos en grupos de Lie

Bibliografía

R. Abraham and J.E. Marsden, *Foundations of mechanics*, 1978.

P. Libermann and C.-M. Marle, *Symplectic geometry and analytical mechanics*, 1987.

V.I. Arnol'd, *Mathematical methods of classical mechanics*, 1989.

J.V. José and E. Saletan, *Classical dynamics. A contemporary approach*, 1998.

J.F. Cariñena, X. Gràcia, G. Marmo, E. Martínez, M.C. Muñoz–Lecanda and N. Román–Roy, "Geometric Hamilton–Jacobi theory", *Int. J. Geometric Methods Mod. Phys.* **3** (2006) 1417–1458.