Problemas admisibles gobernados por ecuaciones de Hamilton–Jacobi

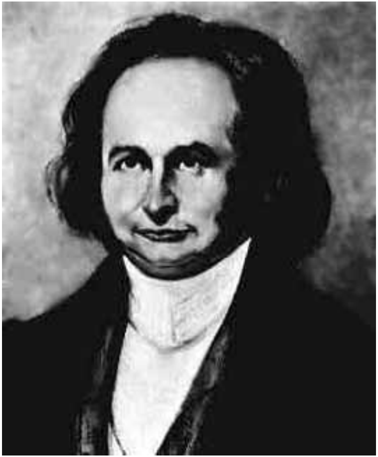
G. Díaz

Matemática Aplicada
UCM

Jornada Interdisciplinar Hamilton–Jacobi.
F. Matemáticas. UCM.
19 de Octubre. 2007

http://www.mat.ucm.es/~gdiaz/docencia/ProbAdmisJHJ.pdf

W.R.Hamilton (1805–1865)



C.G.J. Jacobi (1804–1851)

Introducción

Los problemas gobernados por ecuaciones de Hamilton–Jacobi

- **el Hamiltoniano**

$$\mathrm{H}(x, t, u, \nabla_x u)$$

operador diferencial de primer orden, completamente no lineal, ...
En Mecánica

$$p \mapsto \mathcal{H}(x, t, r, p) \quad (\text{convexa})$$

- **la ecuación de Hamilton–Jacobi**

$$u_t(x, t) = \mathrm{H}(x, t, u(x, t), \nabla_x u(x, t)),$$

ecuación de primer orden, completamente no lineal, hiperbólica no lineal.

- **el bastidor**

$$(x, t) \in \mathcal{V} \times]0, \mathrm{T}[$$

$\mathcal{V}$ es una variedad espacial. $\mathrm{T} \leq +\infty$ es el horizonte temporal.

Introducción

Los problemas gobernados por ecuaciones de Hamilton–Jacobi

• **el Hamiltoniano**

$$\mathrm{H}(x, t, u, \nabla_x u)$$

operador diferencial de primer orden, completamente no lineal, ...
En Mecánica

$$p \mapsto \mathcal{H}(x, t, r, p) \quad (\text{convexa})$$

• **la ecuación de Hamilton–Jacobi**

$$u_t(x, t) = \mathrm{H}(x, t, u(x, t), \nabla_x u(x, t)),$$

ecuación de primer orden, completamente no lineal, hiperbólica no lineal.

• **el bastidor**

$$(x, t) \in \mathcal{V} \times]0, \mathrm{T}[$$

$\mathcal{V}$ es una variedad espacial. $\mathrm{T} \leq +\infty$ es el horizonte temporal.

Introducción
Los problemas gobernados por ecuaciones de Hamilton–Jacobi

• **el Hamiltoniano**

$$\mathrm{H}(x, t, u, \nabla_x u)$$

operador diferencial de primer orden, completamente no lineal, ...

En Mecánica

$$p \mapsto \mathcal{H}(x, t, r, p) \quad (\text{convexa})$$

• **la ecuación de Hamilton–Jacobi**

$$u_t(x, t) = \mathrm{H}(x, t, u(x, t), \nabla_x u(x, t)),$$

ecuación de primer orden, completamente no lineal, hiperbólica no lineal.

• **el bastidor**

$$(x, t) \in \mathcal{V} \times]0, \mathrm{T}[$$

$\mathcal{V}$ es una variedad espacial. $\mathrm{T} \leq +\infty$ es el horizonte temporal.

- **el Hamiltoniano**

$$\mathrm{H}(x, t, u, \nabla_x u)$$

operador diferencial de primer orden, completamente no lineal, ...
En Mecánica

$$p \mapsto \mathcal{H}(x, t, r, p) \quad (\text{convexa})$$

- **la ecuación de Hamilton–Jacobi**

$$u_t(x, t) = \mathrm{H}(x, t, u(x, t), \nabla_x u(x, t)),$$

ecuación de primer orden, completamente no lineal, hiperbólica no lineal.

- **el bastidor**

$$(x, t) \in \mathcal{V} \times]0, \mathrm{T}[$$

$\mathcal{V}$ es una variedad espacial. $\mathrm{T} \leq +\infty$ es el horizonte temporal.

- **el Hamiltoniano**

$$\mathrm{H}(x, t, u, \nabla_x u)$$

operador diferencial de primer orden, completamente no lineal, ...
En Mecánica

$$p \mapsto \mathcal{H}(x, t, r, p) \quad (\text{convexa})$$

- **la ecuación de Hamilton–Jacobi**

$$u_t(x, t) = \mathrm{H}(x, t, u(x, t), \nabla_x u(x, t)),$$

ecuación de primer orden, completamente no lineal, hiperbólica no lineal.

- **el bastidor**

$$(x, t) \in \mathcal{V} \times]0, \mathrm{T}[$$

$\mathcal{V}$ es una variedad espacial. $\mathrm{T} \leq +\infty$ es el horizonte temporal.

- **el Hamiltoniano**

$$\mathrm{H}(x, t, u, \nabla_x u)$$

operador diferencial de primer orden, completamente no lineal, ...
En Mecánica

$$p \mapsto \mathcal{H}(x, t, r, p) \quad (\text{convexa})$$

- **la ecuación de Hamilton–Jacobi**

$$u_t(x, t) = \mathrm{H}(x, t, u(x, t), \nabla_x u(x, t)),$$

ecuación de primer orden, completamente no lineal, hiperbólica no lineal.

- **el bastidor**

$$(x, t) \in \mathcal{V} \times]0, \mathrm{T}[$$

$\mathcal{V}$ es una variedad espacial. $\mathrm{T} \leq +\infty$ es el horizonte temporal.

• **el Hamiltoniano**

$$\mathrm{H}(x, t, u, \nabla_x u)$$

operador diferencial de primer orden, completamente no lineal, ...
En Mecánica

$$p \mapsto \mathcal{H}(x, t, r, p) \quad (\text{convexa})$$

• **la ecuación de Hamilton–Jacobi**

$$u_t(x, t) = \mathrm{H}(x, t, u(x, t), \nabla_x u(x, t)),$$

ecuación de primer orden, completamente no lineal, hiperbólica no lineal.

• **el bastidor**

$$(x, t) \in \mathcal{V} \times]0, \mathrm{T}[$$

$\mathcal{V}$ es una variedad espacial. $\mathrm{T} \leq +\infty$ es el horizonte temporal.

• **el Hamiltoniano**

$$\mathrm{H}(x, t, u, \nabla_x u)$$

operador diferencial de primer orden, completamente no lineal, ...
En Mecánica

$$p \mapsto \mathcal{H}(x, t, r, p) \quad (\text{convexa})$$

• **la ecuación de Hamilton–Jacobi**

$$u_t(x, t) = \mathrm{H}(x, t, u(x, t), \nabla_x u(x, t)),$$

ecuación de primer orden, completamente no lineal, hiperbólica no lineal.
• **el bastidor**

$$(x, t) \in \mathcal{V} \times]0, \mathrm{T}[$$

$\mathcal{V}$ es una variedad espacial. $\mathrm{T} \leq +\infty$ es el horizonte temporal.

• **el Hamiltoniano**

$$\mathrm{H}(x, t, u, \nabla_x u)$$

operador diferencial de primer orden, completamente no lineal, ...
En Mecánica

$$p \mapsto \mathcal{H}(x, t, r, p) \quad (\text{convexa})$$

• **la ecuación de Hamilton–Jacobi**

$$u_t(x, t) = \mathrm{H}(x, t, u(x, t), \nabla_x u(x, t)),$$

ecuación de primer orden, completamente no lineal, hiperbólica no lineal.
• **el bastidor**

$$(x, t) \in \mathcal{V} \times]0, \mathrm{T}[$$

$\mathcal{V}$ es una variedad espacial. $\mathrm{T} \leq +\infty$ es el horizonte temporal.

- **Problemas de valor inicial**

$$\begin{cases} u_t = \mathrm{H}(x, t, u, \nabla_x u) & \text{en } \mathcal{V}\times]0, \mathrm{T}[, \\ u(x, 0) = u_0(x) & x \in \mathcal{V}. \end{cases}$$

¿Cómo entender la EDP?,¿Cómo entender la "juntura" entre la EDP y el dato inicial?,¿Cómo entender el comportamiento inicial y final de las soluciones?

- **Horizontes maximales (blow up)**

$$\mathrm{T} = \mathrm{T}_\infty \text{ horizonte maximal} \Leftrightarrow \begin{cases} |u(x, t)| < +\infty, \; t < \mathrm{T}_\infty, \\ |u(x, \mathrm{T}_\infty)| = +\infty. \end{cases}$$

- **Problemas admisibles**

$$\mathrm{T}_\infty \begin{cases} > 0, & \text{problema admisible,} \\ = 0, & \text{problema no admisible.} \end{cases}$$

- **Problemas de valor inicial**

$$\begin{cases} u_t = \mathrm{H}(x, t, u, \nabla_x u) & \text{en } \mathcal{V}\times]0, \mathrm{T}[, \\ u(x, 0) = u_0(x) & x \in \mathcal{V}. \end{cases}$$

¿Cómo entender la EDP?,¿Cómo entender la "juntura" entre la EDP y el dato inicial?,¿Cómo entender el comportamiento inicial y final de las soluciones?

- **Horizontes maximales (blow up)**

$$\mathrm{T} = \mathrm{T}_\infty \text{ horizonte maximal} \Leftrightarrow \begin{cases} |u(x,t)| < +\infty, \ t < \mathrm{T}_\infty, \\ |u(x, \mathrm{T}_\infty)| = +\infty. \end{cases}$$

- **Problemas admisibles**

$$\mathrm{T}_\infty \begin{cases} > 0, & \text{problema admisible,} \\ = 0, & \text{problema no admisible.} \end{cases}$$

- **Problemas de valor inicial**

$$\begin{cases} u_t = \mathrm{H}(x, t, u, \nabla_x u) & \text{en } \mathcal{V}\times]0, \mathrm{T}[, \\ u(x, 0) = u_0(x) & x \in \mathcal{V}. \end{cases}$$

¿Cómo entender la EDP?,¿Cómo entender la "juntura" entre la EDP y el dato inicial?,¿Cómo entender el comportamiento inicial y final de las soluciones?

- **Horizontes maximales (blow up)**

$$\mathrm{T} = \mathrm{T}_\infty \text{ horizonte maximal} \Leftrightarrow \begin{cases} |u(x,t)| < +\infty, \ t < \mathrm{T}_\infty, \\ |u(x, \mathrm{T}_\infty)| = +\infty. \end{cases}$$

- **Problemas admisibles**

$$\mathrm{T}_\infty \begin{cases} > 0, & \text{problema admisible,} \\ = 0, & \text{problema no admisible.} \end{cases}$$

- **Problemas de valor inicial**

$$\begin{cases} u_t = \mathrm{H}(x,t,u,\nabla_x u) & \text{en } \mathcal{V}\times]0,\mathrm{T}[, \\ u(x,0) = u_0(x) & x \in \mathcal{V}. \end{cases}$$

¿Cómo entender la EDP?,¿Cómo entender la "juntura" entre la EDP y el dato inicial?,¿Cómo entender el comportamiento inicial y final de las soluciones?

- **Horizontes maximales (blow up)**

$$\mathrm{T} = \mathrm{T}_\infty \text{ horizonte maximal} \Leftrightarrow \begin{cases} |u(x,t)| < +\infty, \ t < \mathrm{T}_\infty, \\ |u(x,\mathrm{T}_\infty)| = +\infty. \end{cases}$$

- **Problemas admisibles**

$$\mathrm{T}_\infty \begin{cases} > 0, & \text{problema admisible,} \\ = 0, & \text{problema no admisible.} \end{cases}$$

- **Problemas de valor inicial**

$$\begin{cases} u_t = \mathrm{H}(x,t,u,\nabla_x u) & \text{en } \mathcal{V}\times]0,\mathrm{T}[, \\ u(x,0) = u_0(x) & x \in \mathcal{V}. \end{cases}$$

¿Cómo entender la EDP?,¿Cómo entender la "juntura" entre la EDP y el dato inicial?,¿Cómo entender el comportamiento inicial y final de las soluciones?

- **Horizontes maximales (blow up)**

$$\mathrm{T} = \mathrm{T}_\infty \text{ horizonte maximal} \Leftrightarrow \begin{cases} |u(x,t)| < +\infty, \ t < \mathrm{T}_\infty, \\ |u(x,\mathrm{T}_\infty)| = +\infty. \end{cases}$$

- **Problemas admisibles**

$$\mathrm{T}_\infty \begin{cases} > 0, & \text{problema admisible,} \\ = 0, & \text{problema no admisible.} \end{cases}$$

- **Problemas de valor inicial**

$$\begin{cases} u_t = \mathrm{H}(x,t,u,\nabla_x u) & \text{en } \mathcal{V}\times]0,\mathrm{T}[, \\ u(x,0) = u_0(x) & x \in \mathcal{V}. \end{cases}$$

¿Cómo entender la EDP?,¿Cómo entender la "juntura" entre la EDP y el dato inicial?,¿Cómo entender el comportamiento inicial y final de las soluciones?

- **Horizontes maximales (blow up)**

$$\mathrm{T} = \mathrm{T}_\infty \text{ horizonte maximal} \Leftrightarrow \begin{cases} |u(x,t)| < +\infty, \;\; t < \mathrm{T}_\infty, \\ |u(x,\mathrm{T}_\infty)| = +\infty. \end{cases}$$

- **Problemas admisibles**

$$\mathrm{T}_\infty \begin{cases} > 0, & \text{problema admisible}, \\ = 0, & \text{problema no admisible}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_t = \mathrm{R}|\nabla_x u| & \text{en } \mathbb{R}^{\mathrm{N}}\times]0,\mathrm{T}[\qquad (\mathrm{R}>0), \\ u(x,0) = u_0(x) & x\in\mathbb{R}^{\mathrm{N}}. \end{cases}$$

$$u(x,t) = \sup_{y\in\overline{\mathbf{B}}_{\mathrm{R}t}(x)} (u_0)^*(y), \quad (x,t)\in\mathbb{R}^{\mathrm{N}}\times\mathbb{R}_+ \quad \boxed{\mathrm{T}_\infty = +\infty}$$

traza: $u_0\in\mathcal{C}$ es muy excluyente deja fuera $1\!\!1_{\overline{\mathbf{B}}}$ (propagación de frentes).

regularidad mínima: $((u_0)_*)^* = (u_0)^*$.

D^+ soluciones: las superdiferenciales verifican la ecuación.

limitación de la regularidad: $u(\cdot,t)\in\mathcal{C}$, $t>0$ aunque $u_0\in\mathcal{C}^\infty$.

- $\boxed{u(x,0) = \ell|x|^{1+\alpha}, \quad x\in\mathbb{R}^{\mathrm{N}}}$

$$\mathcal{U}(x,t) = \ell \sup_{|y-x|\le\mathrm{R}t} |y|^{1+\alpha} = \begin{cases} \ell\left([|x|-\mathrm{R}t]_+\right)^{1+\alpha}, & \text{si } \alpha<-1, \\ \ell, & \text{si } \alpha=-1, \\ \ell\left(|x|+\mathrm{R}t\right)^{1+\alpha}, & \text{si } \alpha>1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_t = \mathrm{R}|\nabla_x u| & \text{en } \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \times]0,\mathrm{T}[\qquad (\mathrm{R} > 0), \\ u(x,0) = u_0(x) & x \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}}. \end{cases}$$

$$u(x,t) = \sup_{y \in \overline{\mathbf{B}}_{\mathrm{R}t}(x)} (u_0)^*(y), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \times \mathbb{R}_+ \qquad \boxed{\mathrm{T}_\infty = +\infty}$$

traza: $u_0 \in \mathcal{C}$ es muy excluyente deja fuera $1\!\!\mathrm{I}_{\overline{\mathbf{B}}}$ (propagación de frentes).

regularidad mínima: $((u_0)_*)^* = (u_0)^*$.

D^+ soluciones: las superdiferenciales verifican la ecuación.

limitación de la regularidad: $u(\cdot,t) \in \mathcal{C}$, $t > 0$ aunque $u_0 \in \mathcal{C}^\infty$.

- $\boxed{u(x,0) = \ell|x|^{1+\alpha}, \quad x \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}}}$

$$\mathcal{U}(x,t) = \ell \sup_{|y-x| \leq \mathrm{R}t} |y|^{1+\alpha} = \begin{cases} \ell\left([|x| - \mathrm{R}t]_+\right)^{1+\alpha}, & \text{si } \alpha < -1, \\ \ell, & \text{si } \alpha = -1, \\ \ell\left(|x| + \mathrm{R}t\right)^{1+\alpha}, & \text{si } \alpha > 1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_t = \mathrm{R}|\nabla_x u| & \text{en } \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \times]0,\mathrm{T}[\qquad (\mathrm{R}>0), \\ u(x,0) = u_0(x) & x \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}}. \end{cases}$$

$$u(x,t) = \sup_{y \in \overline{\mathbf{B}}_{\mathrm{R}t}(x)} (u_0)^*(y), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \times \mathbb{R}_+ \qquad \boxed{\mathrm{T}_\infty = +\infty}$$

traza: $u_0 \in \mathcal{C}$ es muy excluyente deja fuera $1\!\!1_{\overline{\mathbf{B}}}$ (propagación de frentes).

regularidad mínima: $((u_0)_*)^* = (u_0)^*$.

D^+ soluciones: las superdiferenciales verifican la ecuación.

limitación de la regularidad: $u(\cdot,t) \in \mathcal{C}$, $t>0$ aunque $u_0 \in \mathcal{C}^\infty$.

- $\boxed{u(x,0) = \ell|x|^{1+\alpha}, \quad x \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}}}$

$$\mathcal{U}(x,t) = \ell \sup_{|y-x| \le \mathrm{R}t} |y|^{1+\alpha} = \begin{cases} \ell\left([|x| - \mathrm{R}t]_+\right)^{1+\alpha}, & \text{si } \alpha < -1, \\ \ell, & \text{si } \alpha = -1, \\ \ell\left(|x| + \mathrm{R}t\right)^{1+\alpha}, & \text{si } \alpha > 1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_t = \mathrm{R}|\nabla_x u| & \text{en } \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \times]0, \mathrm{T}[\qquad (\mathrm{R} > 0), \\ u(x,0) = u_0(x) & x \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}}. \end{cases}$$

$$u(x,t) = \sup_{y \in \overline{\mathbf{B}}_{\mathrm{R}t}(x)} (u_0)^*(y), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \times \mathbb{R}_+ \qquad \boxed{\mathrm{T}_\infty = +\infty}$$

traza: $u_0 \in \mathcal{C}$ es muy excluyente deja fuera $1\!\mathrm{I}_{\overline{\mathbf{B}}}$ (propagación de frentes).

regularidad mínima: $((u_0)_*)^* = (u_0)^*$.

D^+ soluciones: las superdiferenciales verifican la ecuación.

limitación de la regularidad: $u(\cdot,t) \in \mathcal{C}$, $t > 0$ aunque $u_0 \in \mathcal{C}^\infty$.

- $\boxed{u(x,0) = \ell|x|^{1+\alpha}, \quad x \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}}}$

$$\mathcal{U}(x,t) = \ell \sup_{|y-x| \le \mathrm{R}t} |y|^{1+\alpha} = \begin{cases} \ell\left([|x| - \mathrm{R}t]_+\right)^{1+\alpha}, & \text{si } \alpha < -1, \\ \ell, & \text{si } \alpha = -1, \\ \ell\left(|x| + \mathrm{R}t\right)^{1+\alpha}, & \text{si } \alpha > 1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_t = \mathrm{R}|\nabla_x u| & \text{en } \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \times]0, \mathrm{T}[\qquad (\mathrm{R} > 0), \\ u(x,0) = u_0(x) & x \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}}. \end{cases}$$

$$u(x,t) = \sup_{y \in \overline{\mathbf{B}}_{\mathrm{R}t}(x)} (u_0)^*(y), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \times \mathbb{R}_+ \qquad \boxed{\mathrm{T}_\infty = +\infty}$$

traza: $u_0 \in \mathcal{C}$ es muy excluyente deja fuera $1\!\mathrm{I}_{\overline{\mathbf{B}}}$ (propagación de frentes).
regularidad mínima: $((u_0)_*)^* = (u_0)^*$.
D^+ soluciones: las superdiferenciales verifican la ecuación.
limitación de la regularidad: $u(\cdot, t) \in \mathcal{C}, \ t > 0$ aunque $u_0 \in \mathcal{C}^\infty$.

- $\boxed{u(x,0) = \ell |x|^{1+\alpha}, \quad x \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}}}$

$$\mathcal{U}(x,t) = \ell \sup_{|y-x| \le \mathrm{R}t} |y|^{1+\alpha} = \begin{cases} \ell\left([|x| - \mathrm{R}t]_+\right)^{1+\alpha}, & \text{si } \alpha < -1, \\ \ell, & \text{si } \alpha = -1, \\ \ell\left(|x| + \mathrm{R}t\right)^{1+\alpha}, & \text{si } \alpha > 1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_t = \mathrm{R}|\nabla_x u| & \text{en } \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \times]0, \mathrm{T}[\qquad (\mathrm{R} > 0), \\ u(x,0) = u_0(x) & x \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}}. \end{cases}$$

$$u(x,t) = \sup_{y \in \overline{\mathbf{B}}_{\mathrm{R}t}(x)} (u_0)^*(y), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \times \mathbb{R}_+ \qquad \boxed{\mathrm{T}_\infty = +\infty}$$

traza: $u_0 \in \mathcal{C}$ es muy excluyente deja fuera $1\!\mathrm{I}_{\overline{\mathbf{B}}}$ (propagación de frentes).
regularidad mínima: $((u_0)_*)^* = (u_0)^*$.
D^+ soluciones: las superdiferenciales verifican la ecuación.
limitación de la regularidad: $u(\cdot,t) \in \mathcal{C}$, $t > 0$ aunque $u_0 \in \mathcal{C}^\infty$.

- $\boxed{u(x,0) = \ell|x|^{1+\alpha}, \quad x \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}}}$

$$\mathcal{U}(x,t) = \ell \sup_{|y-x| \le \mathrm{R}t} |y|^{1+\alpha} = \begin{cases} \ell\left([|x| - \mathrm{R}t]_+\right)^{1+\alpha}, & \text{si } \alpha < -1, \\ \ell, & \text{si } \alpha = -1, \\ \ell\left(|x| + \mathrm{R}t\right)^{1+\alpha}, & \text{si } \alpha > 1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_t = \mathrm{R}|\nabla_x u| & \text{en } \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \times]0, \mathrm{T}[\qquad (\mathrm{R} > 0), \\ u(x,0) = u_0(x) & x \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}}. \end{cases}$$

$$u(x,t) = \sup_{y \in \overline{\mathbf{B}}_{\mathrm{R}t}(x)} (u_0)^*(y), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \times \mathbb{R}_+ \qquad \boxed{\mathrm{T}_\infty = +\infty}$$

traza: $u_0 \in \mathcal{C}$ es muy excluyente deja fuera $1\!\mathrm{I}_{\overline{\mathbf{B}}}$ (propagación de frentes).
regularidad mínima: $((u_0)_*)^* = (u_0)^*$.
D^+ soluciones: las superdiferenciales verifican la ecuación.
limitación de la regularidad: $u(\cdot, t) \in \mathcal{C}$, $t > 0$ aunque $u_0 \in \mathcal{C}^\infty$.

- $\boxed{u(x,0) = \ell |x|^{1+\alpha}, \quad x \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}}}$

$$\mathcal{U}(x,t) = \ell \sup_{|y-x| \leq \mathrm{R}t} |y|^{1+\alpha} = \begin{cases} \ell \left([|x| - \mathrm{R}t]_+\right)^{1+\alpha}, & \text{si } \alpha < -1, \\ \ell, & \text{si } \alpha = -1, \\ \ell \left(|x| + \mathrm{R}t\right)^{1+\alpha}, & \text{si } \alpha > 1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_t = \mathrm{R}|\nabla_x u| & \text{en } \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \times]0, \mathrm{T}[\qquad (\mathrm{R} > 0), \\ u(x,0) = u_0(x) & x \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}}. \end{cases}$$

$$u(x,t) = \sup_{y \in \overline{\mathbf{B}}_{\mathrm{R}t}(x)} (u_0)^*(y), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \times \mathbb{R}_+ \qquad \boxed{\mathrm{T}_\infty = +\infty}$$

traza: $u_0 \in \mathcal{C}$ es muy excluyente deja fuera $1\!\mathrm{I}_{\overline{\mathbf{B}}}$ (propagación de frentes).
regularidad mínima: $((u_0)_*)^* = (u_0)^*$.
D^+ soluciones: las superdiferenciales verifican la ecuación.
limitación de la regularidad: $u(\cdot, t) \in \mathcal{C},\ t > 0$ aunque $u_0 \in \mathcal{C}^\infty$.

- $\boxed{u(x,0) = \ell |x|^{1+\alpha}, \quad x \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}}}$

$$\mathcal{U}(x,t) = \ell \sup_{|y-x| \leq \mathrm{R}t} |y|^{1+\alpha} = \begin{cases} \ell\left([|x| - \mathrm{R}t]_+\right)^{1+\alpha}, & \text{si } \alpha < -1, \\ \ell, & \text{si } \alpha = -1, \\ \ell\left(|x| + \mathrm{R}t\right)^{1+\alpha}, & \text{si } \alpha > 1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_t = \mathrm{R}|\nabla_x u| & \text{en } \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \times]0,\mathrm{T}[\qquad (\mathrm{R}>0), \\ u(x,0) = u_0(x) & x \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}}. \end{cases}$$

$$u(x,t) = \sup_{y \in \overline{\mathbf{B}}_{\mathrm{R}t}(x)} (u_0)^*(y), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \times \mathbb{R}_+ \qquad \boxed{\mathrm{T}_\infty = +\infty}$$

traza: $u_0 \in \mathcal{C}$ es muy excluyente deja fuera $1\!\mathrm{I}_{\overline{\mathbf{B}}}$ (propagación de frentes).
regularidad mínima: $((u_0)_*)^* = (u_0)^*$.
D^+ soluciones: las superdiferenciales verifican la ecuación.
limitación de la regularidad: $u(\cdot,t) \in \mathcal{C}$, $t > 0$ aunque $u_0 \in \mathcal{C}^\infty$.

- $\boxed{u(x,0) = \ell|x|^{1+\alpha}, \quad x \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}}}$

$$\mathcal{U}(x,t) = \ell \sup_{|y-x| \le \mathrm{R}t} |y|^{1+\alpha} = \begin{cases} \ell\left([|x| - \mathrm{R}t]_+\right)^{1+\alpha}, & \text{si } \alpha < -1, \\ \ell, & \text{si } \alpha = -1, \\ \ell\left(|x| + \mathrm{R}t\right)^{1+\alpha}, & \text{si } \alpha > 1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_t = \mathrm{R}|\nabla_x u|^m & \text{en } \mathbb{R}^{\mathrm{N}}\times]0,\mathrm{T}[\qquad (\mathrm{R}>0,\ m>1), \\ u(x,t) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}}. \end{cases}$$

$$u(x,t) = \sup_{y\in\mathbb{R}^{\mathrm{N}}} \left\{ (u_0)^*(y) - (m-1)\left(\frac{|y-x|^m}{\mathrm{R}m^m t}\right)^{\frac{1}{m-1}} \right\},\ (x,t)\in\mathbb{R}^{\mathrm{N}}\times]0,\mathrm{T}_\infty[$$

traza: $u_0 \in \mathcal{C}$ es muy excluyente deja fuera $1\!\!\mathrm{I}_{\overline{\mathbf{B}}}$,

regularidad mínima: $((u_0)_*)^* = (u_0)^*$

efecto regularizante limitado: $u(\cdot,t) \in \mathcal{W}^{1,\infty}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}}),\ t>0$

$$\boxed{\text{problema admisible}} \quad \Leftrightarrow \quad \limsup_{|x|\to\infty} \frac{(u_0)^*(x)}{|x|^{\frac{m}{m-1}}} \doteq \ell < +\infty. \qquad (1)$$

$$\mathrm{T}_\infty = \frac{1}{\mathrm{R}m^m}\left(\frac{m-1}{\ell_+}\right)^{m-1} \begin{cases} = 0, & \ell = \infty, \quad \text{no admisible} \\ < \infty, & \ell < \infty, \\ = +\infty, & \ell = 0 \end{cases} \qquad (2)$$

$$\begin{cases} u_t = \mathrm{R}|\nabla_x u|^m & \text{en } \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \times]0, \mathrm{T}[\qquad (\mathrm{R} > 0,\ m > 1), \\ u(x,t) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}}. \end{cases}$$

$$u(x,t) = \sup_{y \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}}} \left\{ (u_0)^*(y) - (m-1) \left(\frac{|y-x|^m}{\mathrm{R} m^m t} \right)^{\frac{1}{m-1}} \right\}, \ (x,t) \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \times]0, \mathrm{T}_\infty[$$

traza: $u_0 \in \mathcal{C}$ es muy excluyente deja fuera $1\!\mathrm{I}_{\overline{\mathbf{B}}}$,

regularidad mínima: $((u_0)_*)^* = (u_0)^*$

efecto regularizante limitado: $u(\cdot, t) \in \mathcal{W}^{1,\infty}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}}),\ t > 0$

$$\boxed{\text{problema admisible}} \quad \Leftrightarrow \quad \limsup_{|x| \to \infty} \frac{(u_0)^*(x)}{|x|^{\frac{m}{m-1}}} \doteq \ell < +\infty. \qquad (1)$$

$$\mathrm{T}_\infty = \frac{1}{\mathrm{R} m^m} \left(\frac{m-1}{\ell_+} \right)^{m-1} \begin{cases} = 0, & \ell = \infty, \quad \text{no admisible} \\ < \infty, & \ell < \infty, \\ = +\infty, & \ell = 0. \end{cases} \qquad (2)$$

$$\begin{cases} u_t = \mathrm{R}|\nabla_x u|^m & \text{en } \mathbb{R}^{\mathrm{N}}\times]0,\mathrm{T}[\qquad (\mathrm{R}>0,\ m>1), \\ u(x,t) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}}. \end{cases}$$

$$u(x,t) = \sup_{y\in\mathbb{R}^{\mathrm{N}}} \left\{ (u_0)^*(y) - (m-1)\left(\frac{|y-x|^m}{\mathrm{R}m^m t}\right)^{\frac{1}{m-1}} \right\}, \ (x,t)\in\mathbb{R}^{\mathrm{N}}\times]0,\mathrm{T}_\infty[$$

traza: $u_0 \in \mathcal{C}$ es muy excluyente deja fuera $1\!\mathrm{I}_{\overline{\mathbf{B}}}$,

regularidad mínima: $((u_0)_*)^* = (u_0)^*$

efecto regularizante limitado: $u(\cdot,t)\in\mathcal{W}^{1,\infty}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}}),\ t>0$

$$\boxed{\text{problema admisible}} \quad \Leftrightarrow \quad \limsup_{|x|\to\infty} \frac{(u_0)^*(x)}{|x|^{\frac{m}{m-1}}} \doteq \ell < +\infty. \qquad (1)$$

$$\mathrm{T}_\infty = \frac{1}{\mathrm{R}m^m}\left(\frac{m-1}{\ell_+}\right)^{m-1} \begin{cases} = 0, & \ell=\infty, \quad \text{no admisible} \\ < \infty, & \ell<\infty, \\ = +\infty, & \ell = 0 \end{cases} \qquad (2)$$

$$\begin{cases} u_t = \mathrm{R}|\nabla_x u|^m & \text{en } \mathbb{R}^{\mathrm{N}}\times]0,\mathrm{T}[\qquad (\mathrm{R}>0,\ m>1), \\ u(x,t) = u_0(x), & x\in\mathbb{R}^{\mathrm{N}}. \end{cases}$$

$$u(x,t) = \sup_{y\in\mathbb{R}^{\mathrm{N}}}\left\{(u_0)^*(y) - (m-1)\left(\frac{|y-x|^m}{\mathrm{R}m^m t}\right)^{\frac{1}{m-1}}\right\},\ (x,t)\in\mathbb{R}^{\mathrm{N}}\times]0,\mathrm{T}_\infty[$$

traza: $u_0\in\mathcal{C}$ es muy excluyente deja fuera $1\!\mathrm{I}_{\overline{\mathbf{B}}}$,
regularidad mínima: $((u_0)_*)^* = (u_0)^*$
efecto regularizante limitado: $u(\cdot,t)\in\mathcal{W}^{1,\infty}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}}),\ t>0$

$$\boxed{\text{problema admisible}} \quad\Leftrightarrow\quad \limsup_{|x|\to\infty}\frac{(u_0)^*(x)}{|x|^{\frac{m}{m-1}}} \doteq \ell < +\infty. \tag{1}$$

$$\mathrm{T}_\infty = \frac{1}{\mathrm{R}m^m}\left(\frac{m-1}{\ell_+}\right)^{m-1}\begin{cases} =0, & \ell=\infty, \quad \text{no admisible} \\ <\infty, & \ell<\infty, \\ =+\infty, & \ell=0, \end{cases} \tag{2}$$

$$\begin{cases} u_t = \mathrm{R}|\nabla_x u|^m & \text{en } \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \times]0, \mathrm{T}[\qquad (\mathrm{R} > 0,\ m > 1), \\ u(x,t) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}}. \end{cases}$$

$$u(x,t) = \sup_{y \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}}} \left\{ (u_0)^*(y) - (m-1) \left(\frac{|y-x|^m}{\mathrm{R} m^m t} \right)^{\frac{1}{m-1}} \right\}, \ (x,t) \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \times]0, \mathrm{T}_\infty[$$

traza: $u_0 \in \mathcal{C}$ es muy excluyente deja fuera $1\!\mathrm{I}_{\overline{\mathbf{B}}}$,
regularidad mínima: $((u_0)_*)^* = (u_0)^*$
efecto regularizante limitado: $u(\cdot, t) \in \mathcal{W}^{1,\infty}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}}),\ t > 0$

$$\boxed{\text{problema admisible}} \quad \Leftrightarrow \quad \limsup_{|x| \to \infty} \frac{(u_0)^*(x)}{|x|^{\frac{m}{m-1}}} \doteq \ell < +\infty. \tag{1}$$

$$\mathrm{T}_\infty = \frac{1}{\mathrm{R} m^m} \left(\frac{m-1}{\ell_+} \right)^{m-1} \begin{cases} = 0, & \ell = \infty, \quad \text{no admisible} \\ < \infty, & \ell < \infty, \\ = +\infty, & \ell = 0. \end{cases} \tag{2}$$

$$\begin{cases} u_t = \mathrm{R}|\nabla_x u|^m & \text{en } \mathbb{R}^{\mathrm{N}}\times]0,\mathrm{T}[\qquad (\mathrm{R}>0,\ m>1),\\ u(x,t)=u_0(x), & x\in\mathbb{R}^{\mathrm{N}}.\end{cases}$$

$$u(x,t)=\sup_{y\in\mathbb{R}^{\mathrm{N}}}\left\{(u_0)^*(y)-(m-1)\left(\frac{|y-x|^m}{\mathrm{R}m^m t}\right)^{\frac{1}{m-1}}\right\},\ (x,t)\in\mathbb{R}^{\mathrm{N}}\times]0,\mathrm{T}_\infty[$$

traza: $u_0\in\mathcal{C}$ es muy excluyente deja fuera $1\!\mathrm{I}_{\overline{\mathbf{B}}}$,
regularidad mínima: $((u_0)_*)^*=(u_0)^*$
efecto regularizante limitado: $u(\cdot,t)\in\mathcal{W}^{1,\infty}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}}),\ t>0$

$$\boxed{\text{problema admisible}} \quad\Leftrightarrow\quad \limsup_{|x|\to\infty}\frac{(u_0)^*(x)}{|x|^{\frac{m}{m-1}}}\doteq\ell<+\infty. \tag{1}$$

$$\mathrm{T}_\infty=\frac{1}{\mathrm{R}m^m}\left(\frac{m-1}{\ell_+}\right)^{m-1}\begin{cases}=0, & \ell=\infty, \quad \text{no admisible}\\ <\infty, & \ell<\infty,\\ =+\infty, & \ell=0,\end{cases} \tag{2}$$

$$\begin{cases} u_t = \mathrm{R}|\nabla_x u|^m & \text{en } \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \times]0, \mathrm{T}[\qquad (\mathrm{R} > 0,\ m > 1), \\ u(x,t) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}}. \end{cases}$$

$$u(x,t) = \sup_{y \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}}} \left\{ (u_0)^*(y) - (m-1) \left(\frac{|y-x|^m}{\mathrm{R} m^m t} \right)^{\frac{1}{m-1}} \right\}, \ (x,t) \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \times]0, \mathrm{T}_\infty[$$

traza: $u_0 \in \mathcal{C}$ es muy excluyente deja fuera $1\!\mathrm{I}_{\overline{\mathbf{B}}}$,
regularidad mínima: $((u_0)_*)^* = (u_0)^*$
efecto regularizante limitado: $u(\cdot, t) \in \mathcal{W}^{1,\infty}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}}),\ t > 0$

$$\boxed{\text{problema admisible}} \quad \Leftrightarrow \quad \limsup_{|x| \to \infty} \frac{(u_0)^*(x)}{|x|^{\frac{m}{m-1}}} \doteq \ell < +\infty. \tag{1}$$

$$\mathrm{T}_\infty = \frac{1}{\mathrm{R} m^m} \left(\frac{m-1}{\ell_+} \right)^{m-1} \begin{cases} = 0, & \ell = \infty, \quad \text{no admisible} \\ < \infty, & \ell < \infty, \\ = +\infty, & \ell = 0, \end{cases} \tag{2}$$

$$\begin{cases} u_t = \mathrm{R}|\nabla_x u|^m & \text{en } \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \times]0, \mathrm{T}[\qquad (\mathrm{R} > 0,\ m > 1), \\ u(x,0) = \ell |x|^{1+\alpha}, & x \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}}. \end{cases}$$

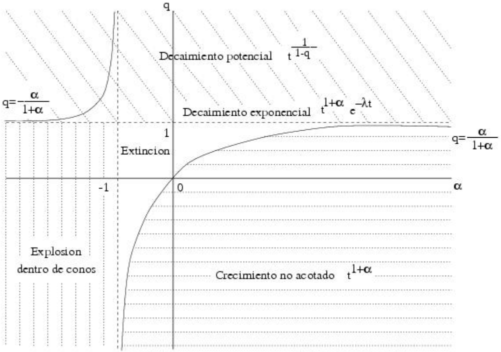
Comportamiento	
$\alpha < -1$	problema no admisible
$\alpha = -1$	$u(x,t) \equiv \ell$
$-1 < \alpha < \dfrac{1}{m-1}$	$\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{u(x,t)}{t^{\frac{1+\alpha}{1-\alpha(m-1)}}} = \mathrm{C}_{m,\alpha},\ \mathrm{C}_{m,-1} = \ell$
$\alpha = \dfrac{1}{m-1}$	$u(x,t) = \ell \left(\dfrac{\mathrm{T}_\infty}{\mathrm{T}_\infty - t} \right) \lvert x \rvert^{\frac{m}{m-1}},\ 0 \le t < \mathrm{T}_\infty$
$\alpha > \dfrac{1}{m-1}$	problema no admisible

$$\begin{cases} u_t = \mathrm{R}|\nabla_x u|^m & \text{en } \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \times]0, \mathrm{T}[\qquad (\mathrm{R} > 0,\ m > 1), \\ u(x,0) = \ell |x|^{1+\alpha}, & x \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}}. \end{cases}$$

Comportamiento	
$\alpha < -1$	problema no admisible
$\alpha = -1$	$u(x,t) \equiv \ell$
$-1 < \alpha < \dfrac{1}{m-1}$	$\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{u(x,t)}{t^{\frac{1+\alpha}{1-\alpha(m-1)}}} = \mathrm{C}_{m,\alpha},\ \mathrm{C}_{m,-1} = \ell$
$\alpha = \dfrac{1}{m-1}$	$u(x,t) = \ell \left(\dfrac{\mathrm{T}_\infty}{\mathrm{T}_\infty - t} \right) \lvert x\rvert^{\frac{m}{m-1}},\ 0 \le t < \mathrm{T}_\infty$
$\alpha > \dfrac{1}{m-1}$	problema no admisible

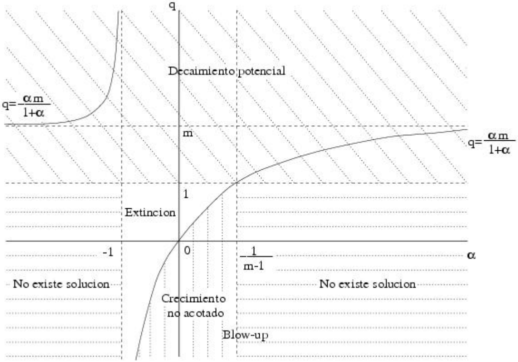
$$\begin{cases} u_t + \lambda u^q = \mathrm{R}|\nabla_x u| & \text{en } \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \times]0, \mathrm{T}[\qquad (\mathrm{R} > 0), \\ u(x,0) = \ell |x|^{1+\alpha}, & x \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_t + \lambda u^q = \mathrm{R}|\nabla_x u| & \text{en } \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \times]0, \mathrm{T}[\qquad (\mathrm{R} > 0), \\ u(x,0) = \ell |x|^{1+\alpha}, & x \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}}. \end{cases}$$



$$\begin{cases} u_t + \lambda u^q = \mathrm{R}|\nabla_x u|^m & \text{en } \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \times]0, \mathrm{T}[\qquad (\mathrm{R} > 0,\ m > 1), \\ u(x,0) = \ell |x|^{1+\alpha}, & x \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_t + \lambda u^q = \mathrm{R}|\nabla_x u|^m & \text{en } \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \times]0, \mathrm{T}[\qquad (\mathrm{R} > 0,\ m > 1), \\ u(x,0) = \ell |x|^{1+\alpha}, & x \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}}. \end{cases}$$



Índice

Índice

Índice

Índice

Algunos modelos

la ecuación eikonal
Geofísica Aplicada. [Robinson & Clark]

El cálculo de traveltimes a partir de la función velocidad es requerido en muchos procesos sísmicos, siendo la ecuación eikonal uno de los métodos más frecuentes.

Propagación del frente de onda normal al rayo, después de $\Delta t \ll 1$

El cálculo de traveltimes a partir de la función velocidad es requerido en muchos procesos sísmicos, siendo la ecuación eikonal uno de los métodos más frecuentes.

Propagación del frente de onda normal al rayo, después de $\Delta t \ll 1$

El cálculo de traveltimes a partir de la función velocidad es requerido en muchos procesos sísmicos, siendo la ecuación eikonal uno de los métodos más frecuentes.

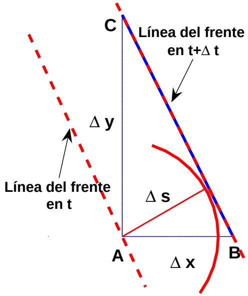
Propagación del frente de onda normal al rayo, después de $\Delta t \ll 1$

El cálculo de traveltimes a partir de la función velocidad es requerido en muchos procesos sísmicos, siendo la ecuación eikonal uno de los métodos más frecuentes.

Propagación del frente de onda normal al rayo, después de $\Delta t \ll 1$

El cálculo de traveltimes a partir de la función velocidad es requerido en muchos procesos sísmicos, siendo la ecuación eikonal uno de los métodos más frecuentes.

Propagación del frente de onda normal al rayo, después de $\Delta t \ll 1$



la ecuación eikonal
El Teorema secreto de Pitágoras

$b^2+c^2=a^2$ (Teorema de Pitágoras).

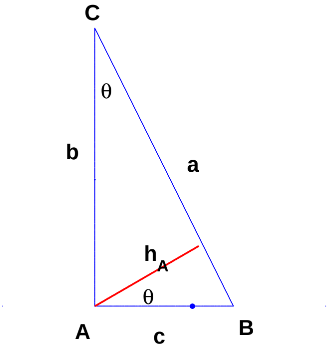
$$\frac{bc}{2}=(\text{área del triángulo})=\frac{a\mathrm{h}_\mathrm{A}}{2},$$

de donde

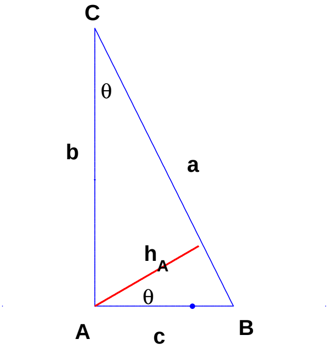
$$b^2+c^2=\left(\frac{bc}{\mathrm{h}_\mathrm{A}}\right)^2$$

y

$$\boxed{\left(\frac{1}{b}\right)^2+\left(\frac{1}{c}\right)^2=\left(\frac{1}{\mathrm{h}_\mathrm{A}}\right)^2}$$ (Teorema secreto de Pitágoras)



$b^2+c^2 = a^2$ (Teorema de Pitágoras).



$$\frac{bc}{2} = (\text{área del triángulo}) = \frac{a\mathrm{h_A}}{2},$$

de donde

$$b^2 + c^2 = \left(\frac{bc}{\mathrm{h_A}}\right)^2$$

y

$$\boxed{\left(\frac{1}{b}\right)^2 + \left(\frac{1}{c}\right)^2 = \left(\frac{1}{\mathrm{h_A}}\right)^2}$$ (Teorema secreto de Pitágoras)

$b^2+c^2 = a^2$ (Teorema de Pitágoras).

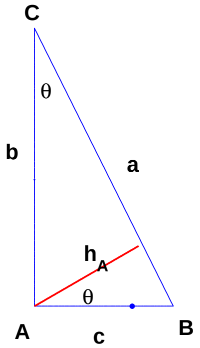
$$\frac{bc}{2} = (\text{área del triángulo}) = \frac{a\mathrm{h}_\mathrm{A}}{2},$$

de donde

$$b^2 + c^2 = \left(\frac{bc}{\mathrm{h}_\mathrm{A}}\right)^2$$

y

$$\boxed{\left(\frac{1}{b}\right)^2 + \left(\frac{1}{c}\right)^2 = \left(\frac{1}{\mathrm{h}_\mathrm{A}}\right)^2}$$ (Teorema secreto de Pitágoras)



$b^2+c^2 = a^2$ (Teorema de Pitágoras).

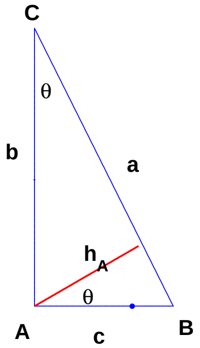
$$\frac{bc}{2} = (\text{área del triángulo}) = \frac{a\mathrm{h}_\mathrm{A}}{2},$$

de donde

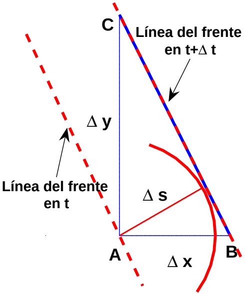
$$b^2 + c^2 = \left(\frac{bc}{\mathrm{h}_\mathrm{A}}\right)^2$$

y

$$\boxed{\left(\frac{1}{b}\right)^2 + \left(\frac{1}{c}\right)^2 = \left(\frac{1}{\mathrm{h}_\mathrm{A}}\right)^2}$$ (Teorema secreto de Pitágoras)

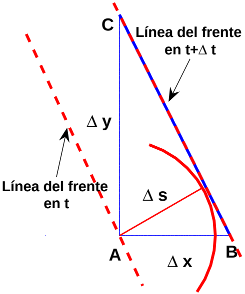


Propagación del frente de onda normal al rayo, después de $\Delta t \ll 1$



$$\left(\frac{1}{\Delta x}\right)^2+\left(\frac{1}{\Delta y}\right)^2=\left(\frac{1}{\Delta s}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2+\left(\frac{\Delta t}{\Delta y}\right)^2=\left(\frac{\Delta t}{\Delta s}\right)^2$$

Propagación del frente de onda normal al rayo, después de $\Delta t \ll 1$

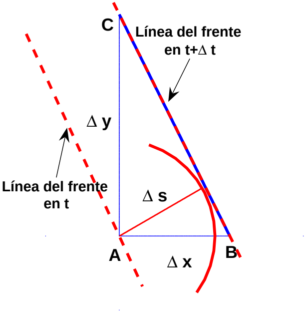


$$\left(\frac{1}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{1}{\Delta y}\right)^2 = \left(\frac{1}{\Delta s}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{\Delta t}{\Delta y}\right)^2 = \left(\frac{\Delta t}{\Delta s}\right)^2$$

la ecuación eikonal

Geofísica Aplicada. [Robinson & Clark]

Propagación del frente de onda normal al rayo, después de $\Delta t \ll 1$



$$|\nabla \mathrm{t}(x,y)| = \overbrace{\frac{1}{|\vec{\mathbf{v}}|}}^{\text{lentitud sísmica}}$$

Frentes de onda, $\Phi(x) = t$, propagándose en un medio isótropo. El frente se propaga normalmente a sí mismo,

$$\Phi(x) = t \quad \Leftrightarrow \quad \Phi(x + h\vec{v}(x))) = t + h, \; h \ll 1,$$

donde $\vec{v}$ aporta la dirección normal de propagación.

Frentes de onda, $\Phi(x) = t$, propagándose en un medio isótropo. El frente se propaga normalmente a sí mismo,

$$\Phi(x) = t \quad \Leftrightarrow \quad \Phi(x + h\vec{v}(x))) = t + h, \; h \ll 1,$$

donde $\vec{v}$ aporta la dirección normal de propagación.

Frentes de onda, $\Phi(x) = t$, propagándose en un medio isótropo. El frente se propaga normalmente a sí mismo,

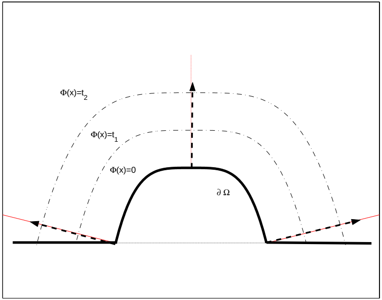
$$\Phi(x) = t \quad \Leftrightarrow \quad \Phi(x + h\vec{v}(x))) = t + h, \;\; h \ll 1,$$

donde $\vec{v}$ aporta la dirección normal de propagación.

Frentes de onda, $\Phi(x) = t$, propagándose en un medio isótropo. El frente se propaga normalmente a sí mismo,

$$\Phi(x) = t \quad \Leftrightarrow \quad \Phi(x + h\vec{v}(x))) = t + h, \;\; h \ll 1,$$

donde $\vec{v}$ aporta la dirección normal de propagación.



Frentes de onda, $\Phi(x) = t$, propagándose en un medio isótropo. El frente se propaga normalmente a sí mismo,

$$\Phi(x) = t \quad \Leftrightarrow \quad \Phi(x + h\vec{v}(x))) = t + h, \ h \ll 1,$$

donde $\vec{v}$ aporta la dirección normal de propagación. Para $\Phi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$, con $\nabla\Phi(z) \neq 0$ si $\Phi(z) = 0$, la frontera del abierto regular

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 : \ -\Phi(x) < 0\},$$

es una hipersuperficie $\partial\Omega$, dada por el nivel $\Phi(x) = 0$, con

$$\vec{v}(z) = |\vec{v}(z)| \frac{\nabla\Phi(z)}{|\nabla\Phi(z)|}, \quad z \in \partial\Omega,$$

$$1 = \langle \nabla\Phi(x), \vec{v}(x) \rangle = |\vec{v}(x)| \cdot |\nabla\Phi(x)|, \quad \text{(regla de la cadena)}.$$

Frentes de onda, $\Phi(x) = t$, propagándose en un medio isótropo. El frente se propaga normalmente a sí mismo,

$$\Phi(x) = t \quad \Leftrightarrow \quad \Phi(x + h\vec{v}(x))) = t + h, \;\; h \ll 1,$$

donde $\vec{v}$ aporta la dirección normal de propagación. Para $\Phi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$, con $\nabla\Phi(z) \neq 0$ si $\Phi(z) = 0$, la frontera del abierto regular

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 : \;\; -\Phi(x) < 0\},$$

es una hipersuperficie $\partial\Omega$, dada por el nivel $\Phi(x) = 0$, con

$$\vec{v}(z) = |\vec{v}(z)| \frac{\nabla\Phi(z)}{|\nabla\Phi(z)|}, \quad z \in \partial\Omega,$$

$$1 = \langle \nabla\Phi(x), \vec{v}(x) \rangle = |\vec{v}(x)| \cdot |\nabla\Phi(x)|, \quad \text{(regla de la cadena)}.$$

Frentes de onda, $\Phi(x) = t$, propagándose en un medio isótropo. El frente se propaga normalmente a sí mismo,

$$\Phi(x) = t \quad \Leftrightarrow \quad \Phi(x + h\vec{v}(x))) = t + h, \ \ h \ll 1,$$

donde $\vec{v}$ aporta la dirección normal de propagación. Para $\Phi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$, con $\nabla\Phi(z) \neq 0$ si $\Phi(z) = 0$, la frontera del abierto regular

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 : \ \ -\Phi(x) < 0\},$$

es una hipersuperficie $\partial\Omega$, dada por el nivel $\Phi(x) = 0$, con

$$\vec{v}(z) = |\vec{v}(z)| \frac{\nabla\Phi(z)}{|\nabla\Phi(z)|}, \quad z \in \partial\Omega,$$

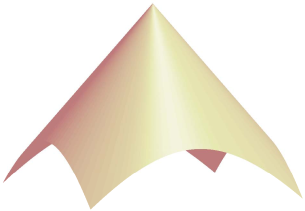
$$1 = \langle \nabla\Phi(x), \vec{v}(x) \rangle = |\vec{v}(x)| \cdot |\nabla\Phi(x)|, \quad (\text{regla de la cadena}).$$

Médiante el método de las características se prueba que en las proximidades de $\partial\Omega \doteq [\Phi(x) = 0]$ las curvas de nivel vienen dadas por

$$[\Phi(x) = t] = \left[\frac{\mathrm{d}\,(x, \partial\Omega)}{v} = t \right] \qquad (|\overrightarrow{\mathbf{v}}(x)| \equiv v)$$

Médiante el método de las características se prueba que en las proximidades de $\partial\Omega \doteq [\Phi(x) = 0]$ las curvas de nivel vienen dadas por

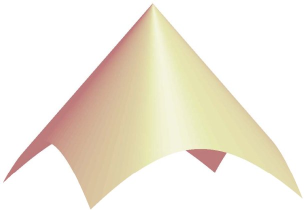
$$[\Phi(x) = t] = \left[\frac{\mathrm{d}\,(x, \partial\Omega)}{v} = t\right] \qquad (|\overrightarrow{\mathbf{v}}(x)| \equiv v)$$



De hecho ésos son los conjuntos de nivel también lejos de $\partial\Omega$ y para velocidades no constantes, ahora mediante la teoría de soluciones de viscosidad.

Médiante el método de las características se prueba que en las proximidades de $\partial\Omega \doteq [\Phi(x) = 0]$ las curvas de nivel vienen dadas por

$$[\Phi(x) = t] = \left[\frac{\mathrm{d}\,(x, \partial\Omega)}{v} = t\right] \qquad (|\overrightarrow{\mathbf{v}}(x)| \equiv v)$$



De hecho ésos son los conjuntos de nivel también lejos de $\partial\Omega$ y para velocidades no constantes, ahora mediante la teoría de soluciones de viscosidad.

la ecuación eikonal

Geometría computacional. M. Peternell & T. Steiner

Pensemos en el problema

$$\begin{cases} |\nabla f| = a & \text{en } \Omega \subset \mathbb{R}^2, \\ u = g & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

se requiere

$$|\partial g| < a \quad \text{puntos de frontera regulares}$$

Pensemos en el problema

$$\begin{cases} |\nabla f| = a & \text{en } \Omega \subset \mathbb{R}^2, \\ u = g & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

se requiere

$$|\partial g| < a \quad \text{puntos de frontera regulares}$$

Pensemos en el problema

$$\begin{cases} |\nabla f| = a & \text{en } \Omega \subset \mathbb{R}^2, \\ u = g & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

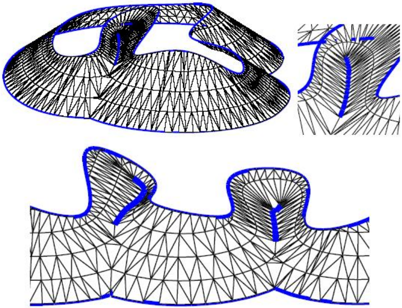
se requiere

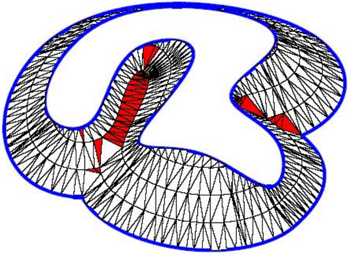
$$|\partial g| < a \quad \text{puntos de frontera regulares}$$

Mediante Geometría Computacional se estudian la equivalencia entre las soluciones clásicas cerca de $\partial\Omega$ y la superficies desarrollables hasta las singularidades.

la ecuación eikonal

Geometría computacional. M. Peternell & T. Steiner





Estudio de las pequeñas longitudes de onda en la propagación de un campo eléctrico o magnético

$$\left.\begin{array}{ll} u^\varepsilon_{tt} - \mathrm{div}(k(x,t)\nabla u^\varepsilon) = 0 & \text{en } \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+, \\ u^\varepsilon(x,0) = \boxed{\varepsilon e^{\frac{i}{\varepsilon}S_0(x)} v_0(x)} & \text{en } \mathbb{R}^N, \\ u^\varepsilon_t(x,0) = w_0(x) & \text{en } \mathbb{R}^N. \end{array}\right\}$$

$$\Downarrow \qquad \boxed{u^\varepsilon(x,t) = \varepsilon e^{\frac{i}{\varepsilon}S(x,t)} v(x,t)}$$

$\varepsilon \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_{tt} = k(x,t)\Delta v + \nabla k \cdot \nabla v}$ (ondas generalizada)

$\frac{1}{\varepsilon} \quad \Rightarrow \quad \boxed{S_t = \sqrt{k(x,t)}|\nabla S|}$ (eikonal generalizada)

$i \quad \Rightarrow \quad \boxed{vS_{tt} + 2v_t S_t = k(x,t)\left(v\Delta S + 2\nabla v \cdot \nabla S\right) + v\nabla k \cdot \nabla S}$ (transporte generalizada)

La ecuación eikonal
Óptica Geométrica. [Landau & Lifschtiz]

Estudio de las pequeñas longitudes de onda en la propagación de un campo eléctrico o magnético

$$\left.\begin{array}{lll} u^{\varepsilon}_{tt} - \operatorname{div}(k(x,t)\nabla u^{\varepsilon}) = 0 & \text{en} & \mathbb{R}^{N} \times \mathbb{R}_{+}, \\ u^{\varepsilon}(x,0) = \boxed{\varepsilon e^{\frac{i}{\varepsilon}S_0(x)} v_0(x)} & \text{en} & \mathbb{R}^{N}, \\ u^{\varepsilon}_{t}(x,0) = w_0(x) & \text{en} & \mathbb{R}^{N}. \end{array}\right\}$$

$$\Downarrow \qquad \boxed{u^{\varepsilon}(x,t) = \varepsilon e^{\frac{i}{\varepsilon}S(x,t)} v(x,t)}$$

$$\varepsilon \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_{tt} = k(x,t)\Delta v + \nabla k \cdot \nabla v} \quad \text{(ondas generalizada)}$$

$$\frac{1}{\varepsilon} \quad \Rightarrow \quad \boxed{S_t = \sqrt{k(x,t)}|\nabla S|} \quad \text{(eikonal generalizada)}$$

$$i \quad \Rightarrow \quad \boxed{vS_{tt} + 2v_t S_t = k(x,t)\left(v\Delta S + 2\nabla v \cdot \nabla S\right) + v\nabla k \cdot \nabla S}$$

(transporte generalizada)

Estudio de las pequeñas longitudes de onda en la propagación de un campo eléctrico o magnético

$$\left.\begin{array}{lll} u^{\varepsilon}_{tt} - \operatorname{div}(k(x,t)\nabla u^{\varepsilon}) = 0 & \text{en} & \mathbb{R}^{N} \times \mathbb{R}_{+}, \\ u^{\varepsilon}(x,0) = \boxed{\varepsilon e^{\frac{i}{\varepsilon}S_0(x)} v_0(x)} & \text{en} & \mathbb{R}^{N}, \\ u^{\varepsilon}_{t}(x,0) = w_0(x) & \text{en} & \mathbb{R}^{N}. \end{array}\right\}$$

$$\Downarrow \qquad \boxed{u^{\varepsilon}(x,t) = \varepsilon e^{\frac{i}{\varepsilon}S(x,t)} v(x,t)}$$

$$\varepsilon \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_{tt} = k(x,t)\Delta v + \nabla k \cdot \nabla v} \qquad \text{(ondas generalizada)}$$

$$\frac{1}{\varepsilon} \quad \Rightarrow \quad \boxed{S_t = \sqrt{k(x,t)}|\nabla S|} \qquad \text{(eikonal generalizada)}$$

$$i \quad \Rightarrow \quad \boxed{vS_{tt} + 2v_t S_t = k(x,t)\left(v\Delta S + 2\nabla v \cdot \nabla S\right) + v\nabla k \cdot \nabla S}$$

(transporte generalizada)

La ecuación eikonal

Óptica Geométrica. [Landau & Lifschtiz]

Estudio de las pequeñas longitudes de onda en la propagación de un campo eléctrico o magnético

$$\left.\begin{array}{llr} u^{\varepsilon}_{tt} - \mathrm{div}(k(x,t)\nabla u^{\varepsilon}) = 0 & \text{en} & \mathbb{R}^{N} \times \mathbb{R}_{+}, \\ u^{\varepsilon}(x,0) = \boxed{\varepsilon e^{\frac{i}{\varepsilon} S_0(x)} v_0(x)} & \text{en} & \mathbb{R}^{N}, \\ u^{\varepsilon}_{t}(x,0) = w_0(x) & \text{en} & \mathbb{R}^{N}. \end{array}\right\}$$

$$\Downarrow \qquad \boxed{u^{\varepsilon}(x,t) = \varepsilon e^{\frac{i}{\varepsilon} S(x,t)} v(x,t)}$$

$$\varepsilon \quad \Rightarrow \boxed{v_{tt} = k(x,t)\Delta v + \nabla k \cdot \nabla v} \quad \text{(ondas generalizada)}$$

$$\frac{1}{\varepsilon} \quad \Rightarrow \boxed{S_t = \sqrt{k(x,t)}|\nabla S|} \quad \text{(eikonal generalizada)}$$

$$i \quad \Rightarrow \boxed{vS_{tt} + 2v_t S_t = k(x,t)\left(v\Delta S + 2\nabla v \cdot \nabla S\right) + v\nabla k \cdot \nabla S}$$

(transporte generalizada)

Estudio de las pequeñas longitudes de onda en la propagación de un campo eléctrico o magnético

$$\left.\begin{array}{lll} u^\varepsilon_{tt} - \operatorname{div}(k(x,t)\nabla u^\varepsilon) = 0 & \text{en} & \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+, \\ u^\varepsilon(x,0) = \boxed{\varepsilon e^{\frac{i}{\varepsilon} S_0(x)} v_0(x)} & \text{en} & \mathbb{R}^N, \\ u^\varepsilon_t(x,0) = w_0(x) & \text{en} & \mathbb{R}^N. \end{array}\right\}$$

$$\Downarrow \qquad \boxed{u^\varepsilon(x,t) = \varepsilon e^{\frac{i}{\varepsilon} S(x,t)} v(x,t)}$$

$$\varepsilon \quad \Rightarrow \boxed{v_{tt} = k(x,t)\Delta v + \nabla k \cdot \nabla v}$$ (ondas generalizada)

$$\frac{1}{\varepsilon} \quad \Rightarrow \boxed{S_t = \sqrt{k(x,t)}|\nabla S|}$$ (eikonal generalizada)

$$i \quad \Rightarrow \boxed{vS_{tt} + 2v_tS_t = k(x,t)\left(v\Delta S + 2\nabla v \cdot \nabla S\right) + v\nabla k \cdot \nabla S}$$

(transporte generalizada)

Estudio de las pequeñas longitudes de onda en la propagación de un campo eléctrico o magnético

$$\left.\begin{aligned} &u^\varepsilon_{tt} - \operatorname{div}(k(x,t)\nabla u^\varepsilon) = 0 && \text{en } \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+, \\ &u^\varepsilon(x,0) = \boxed{\varepsilon e^{\frac{i}{\varepsilon} S_0(x)} v_0(x)} && \text{en } \mathbb{R}^N, \\ &u^\varepsilon_t(x,0) = w_0(x) && \text{en } \mathbb{R}^N. \end{aligned}\right\}$$

$$\Downarrow \qquad \boxed{u^\varepsilon(x,t) = \varepsilon e^{\frac{i}{\varepsilon} S(x,t)} v(x,t)}$$

$$\varepsilon \quad \Rightarrow \boxed{v_{tt} = k(x,t)\Delta v + \nabla k \cdot \nabla v} \quad \text{(ondas generalizada)}$$

$$\frac{1}{\varepsilon} \quad \Rightarrow \boxed{S_t = \sqrt{k(x,t)}|\nabla S|} \quad \text{(eikonal generalizada)}$$

$$i \quad \Rightarrow \boxed{vS_{tt} + 2v_tS_t = k(x,t)\,(v\Delta S + 2\nabla v \cdot \nabla S) + v\nabla k \cdot \nabla S}$$

(transporte generalizada)

Estudio de las pequeñas longitudes de onda en la propagación de un campo eléctrico o magnético

$$\left.\begin{aligned} u^\varepsilon_{tt} - \operatorname{div}(k(x,t)\nabla u^\varepsilon) &= 0 && \text{en } \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+, \\ u^\varepsilon(x,0) &= \boxed{\varepsilon e^{\frac{i}{\varepsilon} S_0(x)} v_0(x)} && \text{en } \mathbb{R}^N, \\ u^\varepsilon_t(x,0) &= w_0(x) && \text{en } \mathbb{R}^N. \end{aligned}\right\}$$

$$\Downarrow \qquad \boxed{u^\varepsilon(x,t) = \varepsilon e^{\frac{i}{\varepsilon} S(x,t)} v(x,t)}$$

$$\varepsilon \quad \Rightarrow \boxed{v_{tt} = k(x,t)\Delta v + \nabla k \cdot \nabla v} \quad \text{(ondas generalizada)}$$

$$\frac{1}{\varepsilon} \quad \Rightarrow \boxed{S_t = \sqrt{k(x,t)}|\nabla S|} \quad \text{(eikonal generalizada)}$$

$$i \quad \Rightarrow \boxed{vS_{tt} + 2v_t S_t = k(x,t)\left(v\Delta S + 2\nabla v \cdot \nabla S\right) + v\nabla k \cdot \nabla S}$$

(transporte generalizada)

Estudio de las pequeñas longitudes de onda en la propagación de un campo eléctrico o magnético

$$\left.\begin{array}{lll} u^\varepsilon_{tt} - \operatorname{div}(k(x,t)\nabla u^\varepsilon) = 0 & \text{en} & \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+, \\ u^\varepsilon(x,0) = \boxed{\varepsilon e^{\frac{i}{\varepsilon}S_0(x)} v_0(x)} & \text{en} & \mathbb{R}^N, \\ u^\varepsilon_t(x,0) = w_0(x) & \text{en} & \mathbb{R}^N. \end{array}\right\}$$

$$\Downarrow \qquad \boxed{u^\varepsilon(x,t) = \varepsilon e^{\frac{i}{\varepsilon}S(x,t)} v(x,t)}$$

$\varepsilon \quad \Rightarrow \boxed{v_{tt} = k(x,t)\Delta v + \nabla k \cdot \nabla v}$ (ondas generalizada)

$\frac{1}{\varepsilon} \quad \Rightarrow \boxed{S_t = \sqrt{k(x,t)}|\nabla S|}$ (eikonal generalizada)

$i \quad \Rightarrow \boxed{vS_{tt} + 2v_t S_t = k(x,t)\left(v\Delta S + 2\nabla v \cdot \nabla S\right) + v\nabla k \cdot \nabla S}$

(transporte generalizada)

Estudio de las pequeñas longitudes de onda en la propagación de un campo eléctrico o magnético

$$\left.\begin{aligned} u^\varepsilon_{tt} - \mathrm{div}(k(x,t)\nabla u^\varepsilon) &= 0 && \text{en } \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+, \\ u^\varepsilon(x,0) &= \boxed{\varepsilon e^{\frac{i}{\varepsilon}S_0(x)} v_0(x)} && \text{en } \mathbb{R}^N, \\ u^\varepsilon_t(x,0) &= w_0(x) && \text{en } \mathbb{R}^N. \end{aligned}\right\}$$

$$\Downarrow \qquad \boxed{u^\varepsilon(x,t) = \varepsilon e^{\frac{i}{\varepsilon}S(x,t)} v(x,t)}$$

$\varepsilon \quad \Rightarrow \boxed{v_{tt} = k(x,t)\Delta v + \nabla k \cdot \nabla v}$ (ondas generalizada)

$\frac{1}{\varepsilon} \quad \Rightarrow \boxed{S_t = \sqrt{k(x,t)}|\nabla S|}$ (eikonal generalizada)

$i \quad \Rightarrow \boxed{vS_{tt} + 2v_tS_t = k(x,t)\left(v\Delta S + 2\nabla v \cdot \nabla S\right) + v\nabla k \cdot \nabla S}$

(transporte generalizada)

El operador Δ_∞

$$\mathbb{F}_\infty(q,\mathcal{Z}) \doteq -\langle \mathcal{Z}q, q\rangle, \quad q \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}},\ \mathcal{Z} \in \mathcal{S}^{\mathrm{N}},\ \mathrm{N} \geq 1,$$
$$\Delta_\infty u = -\sum_{ij} \mathrm{D}_i u \mathrm{D}_{ij} u \mathrm{D}_j u$$

$\mathbb{F}_\infty(q,\mathcal{Z})$ es elíptico eventualmente degenerado

$$\mathbb{F}_\infty(q,\mathcal{Y}) - \mathbb{F}_\infty(q,\mathcal{X}) \geq 0 \qquad q \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}},\ \mathcal{X}-\mathcal{Y} \in \mathcal{S}^{\mathrm{N}}_{+},$$

(pero no es uniformemente elíptico

$$\mathbb{F}_\infty(q,\mathcal{Y}) - \mathbb{F}_\infty(q,\mathcal{X}) \geq \theta(\mathrm{traza}\ (\mathcal{X}-\mathcal{Y})),\ q \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}},\ \mathcal{X}-\mathcal{Y} \in \mathcal{S}^{\mathrm{N}}_{+},$$

para algún $\theta > 0$).
Por tanto, en general, $\nexists u \in C^2$ con $\Delta_\infty u = 0$.

El operador Δ_∞

$$\mathbb{F}_\infty(q,\mathcal{Z}) \doteq -\langle \mathcal{Z}q, q\rangle, \quad q \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}},\ \mathcal{Z} \in \mathcal{S}^{\mathrm{N}},\ \mathrm{N} \geq 1,$$

$$\Delta_\infty u = -\sum_{ij} \mathrm{D}_i u \mathrm{D}_{ij} u \mathrm{D}_j u$$

$\mathbb{F}_\infty(q,\mathcal{Z})$ es elíptico eventualmente degenerado

$$\mathbb{F}_\infty(q,\mathcal{Y}) - \mathbb{F}_\infty(q,\mathcal{X}) \geq 0 \qquad q \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}},\ \mathcal{X}-\mathcal{Y} \in \mathcal{S}^{\mathrm{N}}_{+},$$

(pero no es uniformemente elíptico

$$\mathbb{F}_\infty(q,\mathcal{Y}) - \mathbb{F}_\infty(q,\mathcal{X}) \geq \theta(\mathrm{traza}\ (\mathcal{X}-\mathcal{Y})),\ q \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}},\ \mathcal{X}-\mathcal{Y} \in \mathcal{S}^{\mathrm{N}}_{+},$$

para algún $\theta > 0$).
Por tanto, en general, $\nexists u \in \mathcal{C}^2$ con $\Delta_\infty u = 0$.

El operador Δ_∞

$$\mathbb{F}_\infty(q,\mathcal{Z}) \doteq -\langle \mathcal{Z}q, q\rangle, \quad q \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}},\ \mathcal{Z} \in \mathcal{S}^{\mathrm{N}},\ \mathrm{N} \geq 1,$$
$$\Delta_\infty u = -\sum_{ij} \mathrm{D}_i u \mathrm{D}_{ij} u \mathrm{D}_j u$$

$\mathbb{F}_\infty(q,\mathcal{Z})$ es elíptico eventualmente degenerado

$$\mathbb{F}_\infty(q,\mathcal{Y}) - \mathbb{F}_\infty(q,\mathcal{X}) \geq 0 \qquad q \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}},\ \mathcal{X}-\mathcal{Y} \in \mathcal{S}^{\mathrm{N}}_+,$$

(pero no es uniformemente elíptico

$$\mathbb{F}_\infty(q,\mathcal{Y}) - \mathbb{F}_\infty(q,\mathcal{X}) \geq \theta(\mathrm{traza}\ (\mathcal{X}-\mathcal{Y})),\ q \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}},\ \mathcal{X}-\mathcal{Y} \in \mathcal{S}^{\mathrm{N}}_+,$$

para algún $\theta > 0$).
Por tanto, en general, $\nexists u \in \mathcal{C}^2$ con $\Delta_\infty u = 0$.

El operador Δ_∞

$$\mathbb{F}_\infty(q,\mathcal{Z}) \doteq -\langle \mathcal{Z}q, q\rangle, \quad q\in\mathbb{R}^{\mathrm{N}},\ \mathcal{Z}\in\mathcal{S}^{\mathrm{N}},\ \mathrm{N}\geq 1,$$
$$\Delta_\infty u = -\sum_{ij} \mathrm{D}_i u \mathrm{D}_{ij} u \mathrm{D}_j u$$

$\mathbb{F}_\infty(q,\mathcal{Z})$ es elíptico eventualmente degenerado

$$\mathbb{F}_\infty(q,\mathcal{Y}) - \mathbb{F}_\infty(q,\mathcal{X}) \geq 0 \qquad q\in\mathbb{R}^{\mathrm{N}},\ \mathcal{X}-\mathcal{Y}\in\mathcal{S}_+^{\mathrm{N}},$$

(pero no es uniformemente elíptico

$$\mathbb{F}_\infty(q,\mathcal{Y}) - \mathbb{F}_\infty(q,\mathcal{X}) \geq \theta(\mathrm{traza}\ (\mathcal{X}-\mathcal{Y})),\ q\in\mathbb{R}^{\mathrm{N}},\ \mathcal{X}-\mathcal{Y}\in\mathcal{S}_+^{\mathrm{N}},$$

para algún $\theta > 0$).
Por tanto, en general, $\nexists u\in\mathcal{C}^2$ con $\Delta_\infty u = 0$.

El operador Δ_∞

$$\mathbb{F}_\infty(q,\mathcal{Z}) \doteq -\langle \mathcal{Z}q,q\rangle, \quad q\in\mathbb{R}^{\mathrm{N}},\ \mathcal{Z}\in\mathcal{S}^{\mathrm{N}},\ \mathrm{N}\geq 1,$$
$$\Delta_\infty u = -\sum_{ij}\mathrm{D}_i u \mathrm{D}_{ij} u \mathrm{D}_j u$$

$\mathbb{F}_\infty(q,\mathcal{Z})$ es elíptico eventualmente degenerado

$$\mathbb{F}_\infty(q,\mathcal{Y})-\mathbb{F}_\infty(q,\mathcal{X})\geq 0 \qquad q\in\mathbb{R}^{\mathrm{N}},\ \mathcal{X}-\mathcal{Y}\in\mathcal{S}^{\mathrm{N}}_+,$$

(pero no es uniformemente elíptico

$$\mathbb{F}_\infty(q,\mathcal{Y})-\mathbb{F}_\infty(q,\mathcal{X})\geq \theta(\mathrm{traza}\ (\mathcal{X}-\mathcal{Y})),\ q\in\mathbb{R}^{\mathrm{N}},\ \mathcal{X}-\mathcal{Y}\in\mathcal{S}^{\mathrm{N}}_+,$$

para algún $\theta>0$).

Por tanto, en general, $\nexists u\in\mathcal{C}^2$ con $\Delta_\infty u=0$.

El operador Δ_∞

$$\mathbb{F}_\infty(q,\mathcal{Z}) \doteq -\langle \mathcal{Z}q, q\rangle, \quad q\in\mathbb{R}^{\mathrm{N}},\ \mathcal{Z}\in\mathcal{S}^{\mathrm{N}},\ \mathrm{N}\geq 1,$$
$$\Delta_\infty u = -\sum_{ij} \mathrm{D}_i u \mathrm{D}_{ij} u \mathrm{D}_j u$$

$\mathbb{F}_\infty(q,\mathcal{Z})$ es elíptico eventualmente degenerado

$$\mathbb{F}_\infty(q,\mathcal{Y}) - \mathbb{F}_\infty(q,\mathcal{X}) \geq 0 \qquad q\in\mathbb{R}^{\mathrm{N}},\ \mathcal{X}-\mathcal{Y}\in\mathcal{S}^{\mathrm{N}}_+,$$

(pero no es uniformemente elíptico

$$\mathbb{F}_\infty(q,\mathcal{Y}) - \mathbb{F}_\infty(q,\mathcal{X}) \geq \theta(\mathrm{traza}\ (\mathcal{X}-\mathcal{Y})),\ q\in\mathbb{R}^{\mathrm{N}},\ \mathcal{X}-\mathcal{Y}\in\mathcal{S}^{\mathrm{N}}_+,$$

para algún $\theta > 0$).
Por tanto, en general, $\nexists u\in\mathcal{C}^2$ con $\Delta_\infty u = 0$.

Al minimizar, en una clase funcional adecuada, el funcional

$$\int_\Omega \Phi(|\mathrm{D}u|)dx$$

Para funciones regulares, se obtiene la ecuación no divergente, elíptica degenerada

$$\frac{1}{|\mathrm{D}u|}\left(\left(\frac{\Phi''(|\mathrm{D}u|)}{|\mathrm{D}u|} - \Phi'(|\mathrm{D}u|)\right)\Delta_\infty u + \Phi'(|\mathrm{D}u|)\Delta u\right) = 0 \quad \text{en } \Omega,$$

ecuación de Euler–Lagrange correspondiente.

Al minimizar, en una clase funcional adecuada, el funcional

$$\int_\Omega \Phi(|\mathrm{D}u|)dx$$

Para funciones regulares, se obtiene la ecuación no divergente, elíptica degenerada

$$\frac{1}{|\mathrm{D}u|}\left(\left(\frac{\Phi''(|\mathrm{D}u|)}{|\mathrm{D}u|}-\Phi'(|\mathrm{D}u|)\right)\Delta_\infty u+\Phi'(|\mathrm{D}u|)\Delta u\right)=0 \quad \text{en } \Omega,$$

ecuación de Euler–Lagrange correspondiente.

Dos elecciones:

$$a) \qquad \Phi(q) \doteq \frac{1}{p}|q|^p, \quad 1 \le p < \infty \quad (p\text{–Laplaciano})$$

$$\Delta_p u \doteq |\mathrm{D}u|^{p-4}\left((p-2)\Delta_\infty u + |\mathrm{D}u|^2 \Delta u\right) = 0 \quad \text{en } \Omega,$$

donde

$$\begin{cases} \text{elíptico si } p \neq 2 \text{ y uniformemente elíptico si } p = 2, \\ p = 2 \text{ (operador de Laplace)} \\ p \neq 2 \text{ en fluidos no Newtonianos y difusiones no lineales.} \end{cases}$$

Formalmente, $\boxed{\dfrac{|\mathrm{D}u|^{4-p}}{p-2}\Delta_p u \to \Delta_\infty u, \quad \text{cuando } p \to \infty.}$

Dos elecciones:

$$a) \qquad \Phi(q) \doteq \frac{1}{p}|q|^p, \quad 1 \leq p < \infty \quad (p\text{–Laplaciano})$$

$$\Delta_p u \doteq |\mathrm{D}u|^{p-4}\left((p-2)\Delta_\infty u + |\mathrm{D}u|^2 \Delta u\right) = 0 \quad \text{en } \Omega,$$

donde

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{elíptico si } p \neq 2 \text{ y uniformemente elíptico si } p = 2, \\ p = 2 \text{ (operador de Laplace)} \\ p \neq 2 \text{ en fluidos no Newtonianos y difusiones no lineales.} \end{array} \right.$$

Formalmente, $\boxed{\dfrac{|\mathrm{D}u|^{4-p}}{p-2}\Delta_p u \to \Delta_\infty u, \quad \text{cuando } p \to \infty.}$

Dos elecciones:

$$a) \qquad \Phi(q) \doteq \frac{1}{p}|q|^p, \quad 1 \leq p < \infty \quad (p\text{–Laplaciano})$$

$$\Delta_p u \doteq |\mathrm{D}u|^{p-4}\left((p-2)\Delta_\infty u + |\mathrm{D}u|^2 \Delta u\right) = 0 \quad \text{en } \Omega,$$

donde

$$\begin{cases} \text{elíptico si } p \neq 2 \text{ y uniformemente elíptico si } p = 2, \\ p = 2 \text{ (operador de Laplace)} \\ p \neq 2 \text{ en fluidos no Newtonianos y difusiones no lineales.} \end{cases}$$

Formalmente, $\boxed{\dfrac{|\mathrm{D}u|^{4-p}}{p-2}\Delta_p u \to \Delta_\infty u, \quad \text{cuando } p \to \infty.}$

Dos elecciones:

$$b) \qquad \Phi(|q|) \doteq \left(1+|q|^2\right)^{\frac{\alpha}{2}}, \quad \alpha \geq 1 \quad (\text{superficie mínima})$$

$$0 = \mathbb{M}_\alpha u \doteq \alpha\left(1+|\mathrm{D}u|^2\right)^{\frac{\alpha-2}{2}}\left((\alpha-2)\frac{\Delta_\infty u}{1+|\mathrm{D}u|^2}+\Delta u\right) \quad \text{en } \Omega,$$

donde

$$\begin{cases} \text{elíptico si } \alpha = 1 \text{ y uniformemente elíptico si } \alpha > 1, \\ \alpha = 2 \text{ (operador de Laplace)}, \ \alpha = 1 \text{ (superficie mínima, curvatura media)}, \\ \alpha \neq 1,\ 2 \text{ en roturas de placas y fundiciones a temperaturas "elevadas".} \end{cases}$$

Formalmente, $\boxed{\dfrac{\left(1+|\mathrm{D}u|^2\right)^{\frac{4-\alpha}{2}}}{\alpha(\alpha-2)}\mathbb{M}_\alpha u \to \Delta_\infty u, \quad \text{cuando } \alpha \to \infty.}$

Dos elecciones:

$$b) \qquad \Phi(|q|) \doteq \left(1+|q|^2\right)^{\frac{\alpha}{2}}, \quad \alpha \geq 1 \quad (\text{superficie mínima})$$

$$0 = \mathbb{M}_\alpha u \doteq \alpha \left(1+|\mathrm{D}u|^2\right)^{\frac{\alpha-2}{2}} \left((\alpha-2)\frac{\Delta_\infty u}{1+|\mathrm{D}u|^2} + \Delta u\right) \quad \text{en } \Omega,$$

donde

$$\begin{cases} \text{elíptico si } \alpha = 1 \text{ y uniformemente elíptico si } \alpha > 1, \\ \alpha = 2 \text{ (operador de Laplace)}, \ \alpha = 1 \text{ (superficie mínima, curvatura media)}, \\ \alpha \neq 1,\ 2 \text{ en roturas de placas y fundiciones a temperaturas ``elevadas''}. \end{cases}$$

Formalmente, $\boxed{\dfrac{\left(1+|\mathrm{D}u|^2\right)^{\frac{4-\alpha}{2}}}{\alpha(\alpha-2)} \mathbb{M}_\alpha u \to \Delta_\infty u, \quad \text{cuando } \alpha \to \infty.}$

Dos elecciones:

$$b) \qquad \Phi(|q|) \doteq \left(1+|q|^2\right)^{\frac{\alpha}{2}}, \quad \alpha \geq 1 \quad (\text{superficie mínima})$$

$$0 = \mathbb{M}_\alpha u \doteq \alpha \left(1+|\mathrm{D}u|^2\right)^{\frac{\alpha-2}{2}} \left((\alpha-2)\frac{\Delta_\infty u}{1+|\mathrm{D}u|^2} + \Delta u\right) \quad \text{en } \Omega,$$

donde

$$\begin{cases} \text{elíptico si } \alpha = 1 \text{ y uniformemente elíptico si } \alpha > 1, \\ \alpha = 2 \text{ (operador de Laplace)}, \ \alpha = 1 \text{ (superficie mínima, curvatura media,} \\ \alpha \neq 1,\ 2 \text{ en roturas de placas y fundiciones a temperaturas ``elevadas''}. \end{cases}$$

Formalmente, $$\boxed{\frac{\left(1+|\mathrm{D}u|^2\right)^{\frac{4-\alpha}{2}}}{\alpha(\alpha-2)}\mathbb{M}_\alpha u \to \Delta_\infty u, \quad \text{cuando } \alpha \to \infty.}$$

$$0 = \Delta_\infty u = \langle \mathrm{D}^2 u \mathrm{D} u, \mathrm{D} u \rangle = \frac{1}{2} \langle \mathrm{D}(|\mathrm{D} u|^2), \mathrm{D} u \rangle$$

es decir,

$$|\mathrm{D} u| = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \Delta_\infty u = 0.$$

Algunas soluciones particulares en $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ de la ecuación eikonal:

$u(x) = \langle p, x \rangle$	regular,
$u(x) = a \pm \lvert x - z \rvert$	regular en $\mathbb{R}^{\mathrm{N}} \setminus \{z\}$,
distancia a un segmento rectilíneo	regular en $\mathbb{R}^{\mathrm{N}} \setminus \{$cto. unidimensional$\}$

Consideremos

$|\mathrm{D} u| = 1$ en $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ salvo un conjunto de medida unidimensional nula

$\Downarrow$ (L. Caffarelli & M.G.Crandall)

$$u(x) = \langle p, x \rangle \qquad \text{ó} \qquad u(x) = a \pm |x - z|.$$

La ecuación eikonal
Laplaciano infinito en la ecuación eikonal

$$0 = \Delta_\infty u = \langle \mathrm{D}^2 u \mathrm{D} u, \mathrm{D} u \rangle = \frac{1}{2} \langle \mathrm{D}(|\mathrm{D} u|^2), \mathrm{D} u \rangle$$

es decir,

$$|\mathrm{D} u| = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \Delta_\infty u = 0.$$

Algunas soluciones particulares en $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ de la ecuación eikonal:

$u(x) = \langle p, x \rangle$	regular,
$u(x) = a \pm \|x - z\|$	regular en $\mathbb{R}^{\mathrm{N}} \setminus \{z\}$,
distancia a un segmento rectilíneo	regular en $\mathbb{R}^{\mathrm{N}} \setminus \{\text{cto. unidimensional}\}$

Consideremos

$$|\mathrm{D} u| = 1 \quad \text{en } \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \text{ salvo un conjunto de medida unidimensional nula}$$

$$\Downarrow \text{ (L. Caffarelli \& M.G.Crandall)}$$

$$u(x) = \langle p, x \rangle \qquad \text{ó} \qquad u(x) = a \pm |x - z|.$$

$$0 = \Delta_\infty u = \langle \mathrm{D}^2 u \mathrm{D}u, \mathrm{D}u \rangle = \frac{1}{2}\langle \mathrm{D}(|\mathrm{D}u|^2), \mathrm{D}u \rangle$$

es decir,

$$|\mathrm{D}u| = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \Delta_\infty u = 0.$$

Algunas soluciones particulares en $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ de la ecuación eikonal:

$u(x) = \langle p, x \rangle$	regular,
$u(x) = a \pm \lvert x - z \rvert$	regular en $\mathbb{R}^{\mathrm{N}} \setminus \{z\}$,
distancia a un segmento rectilíneo	regular en $\mathbb{R}^{\mathrm{N}} \setminus \{$cto. unidimensional$\}$

Consideremos

$$|\mathrm{D}u| = 1 \quad \text{en } \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \text{ salvo un conjunto de medida unidimensional nula}$$

$$\Downarrow \ \text{(L. Caffarelli \& M.G.Crandall)}$$

$$u(x) = \langle p, x \rangle \qquad \text{ó} \qquad u(x) = a \pm |x - z|.$$

$$0 = \Delta_\infty u = \langle \mathrm{D}^2 u \mathrm{D} u, \mathrm{D} u \rangle = \frac{1}{2} \langle \mathrm{D}(|\mathrm{D} u|^2), \mathrm{D} u \rangle$$

es decir,

$$|\mathrm{D} u| = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \Delta_\infty u = 0.$$

Algunas soluciones particulares en $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ de la ecuación eikonal:

$u(x) = \langle p, x \rangle$	regular,
$u(x) = a \pm \|x - z\|$	regular en $\mathbb{R}^{\mathrm{N}} \setminus \{z\}$,
distancia a un segmento rectilíneo	regular en $\mathbb{R}^{\mathrm{N}} \setminus \{$cto. unidimensional$\}$

Consideremos

$$|\mathrm{D} u| = 1 \quad \text{en } \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \text{ salvo un conjunto de medida unidimensional nula}$$

$$\Downarrow \quad \text{(L. Caffarelli \& M.G.Crandall)}$$

$$u(x) = \langle p, x \rangle \qquad \text{ó} \qquad u(x) = a \pm |x - z|.$$

$$0 = \Delta_\infty u = \langle \mathrm{D}^2 u \mathrm{D}u, \mathrm{D}u\rangle = \frac{1}{2}\langle \mathrm{D}(|\mathrm{D}u|^2), \mathrm{D}u\rangle$$

es decir,

$$|\mathrm{D}u| = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \Delta_\infty u = 0.$$

Algunas soluciones particulares en $\mathbb{R}^N$ de la ecuación eikonal:

$u(x) = \langle p, x\rangle$	regular,
$u(x) = a \pm \lvert x - z\rvert$	regular en $\mathbb{R}^N \setminus \{z\}$,
distancia a un segmento rectilíneo	regular en $\mathbb{R}^N \setminus \{$cto. unidimensional$\}$

Consideremos

$$|\mathrm{D}u| = 1 \quad \text{en } \mathbb{R}^N \text{ salvo un conjunto de medida unidimensional nula}$$

$$\Downarrow \text{ (L. Caffarelli \& M.G.Crandall)}$$

$$u(x) = \langle p, x\rangle \qquad \text{ó} \qquad u(x) = a \pm |x - z|.$$

$$0 = \Delta_\infty u = \langle \mathrm{D}^2 u \mathrm{D} u, \mathrm{D} u\rangle = \frac{1}{2}\langle \mathrm{D}(|\mathrm{D} u|^2), \mathrm{D} u\rangle$$

es decir,

$$|\mathrm{D} u| = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \Delta_\infty u = 0.$$

Algunas soluciones particulares en $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ de la ecuación eikonal:

$u(x) = \langle p, x\rangle$	regular,
$u(x) = a \pm \lvert x - z\rvert$	regular en $\mathbb{R}^{\mathrm{N}} \setminus \{z\}$,
distancia a un segmento rectilíneo	regular en $\mathbb{R}^{\mathrm{N}} \setminus$ {cto. unidimensional}

Consideremos

$$|\mathrm{D} u| = 1 \quad \text{en } \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \text{ salvo un conjunto de medida unidimensional nula}$$

$$\Downarrow \text{ (L. Caffarelli \& M.G.Crandall)}$$

$$u(x) = \langle p, x\rangle \qquad \text{ó} \qquad u(x) = a \pm |x - z|.$$

$$0 = \Delta_\infty u = \langle \mathrm{D}^2 u \mathrm{D} u, \mathrm{D} u\rangle = \frac{1}{2}\langle \mathrm{D}(|\mathrm{D} u|^2), \mathrm{D} u\rangle$$

es decir,

$$|\mathrm{D} u| = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \Delta_\infty u = 0.$$

Algunas soluciones particulares en $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ de la ecuación eikonal:

$u(x) = \langle p, x\rangle$	regular,
$u(x) = a \pm \lvert x - z\rvert$	regular en $\mathbb{R}^{\mathrm{N}} \setminus \{z\}$,
distancia a un segmento rectilíneo	regular en $\mathbb{R}^{\mathrm{N}} \setminus \{\text{cto. unidimensional}\}$

Consideremos

$$|\mathrm{D} u| = 1 \quad \text{en } \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \text{ salvo un conjunto de medida unidimensional nula}$$

$$\Downarrow \text{ (L. Caffarelli \& M.G.Crandall)}$$

$$u(x) = \langle p, x\rangle \qquad \text{ó} \qquad u(x) = a \pm |x - z|.$$

$$0 = \Delta_\infty u = \langle \mathrm{D}^2 u \mathrm{D} u, \mathrm{D} u \rangle = \frac{1}{2} \langle \mathrm{D}(|\mathrm{D} u|^2), \mathrm{D} u \rangle$$

es decir,

$$|\mathrm{D} u| = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \Delta_\infty u = 0.$$

Algunas soluciones particulares en $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ de la ecuación eikonal:

$u(x) = \langle p, x \rangle$	regular,
$u(x) = a \pm \lvert x - z \rvert$	regular en $\mathbb{R}^{\mathrm{N}} \setminus \{z\}$,
distancia a un segmento rectilíneo	regular en $\mathbb{R}^{\mathrm{N}} \setminus \{\text{cto. unidimensional}\}$

Consideremos

$$|\mathrm{D} u| = 1 \quad \text{en } \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \text{ salvo un conjunto de medida unidimensional nula}$$

$$\Downarrow \ \text{(L. Caffarelli \& M.G.Crandall)}$$

$$u(x) = \langle p, x \rangle \qquad \text{ó} \qquad u(x) = a \pm |x - z|.$$

La ecuación eikonal

Problema de Backus. [Backus], [Heiskanen & Moritz], [G. Díaz, J.I. Díaz & J.Otero]

• Suponemos conocida la superficie de la Tierra ($S = \partial \mathrm{G}$), el Problema de Backus trata de la determinación del potencial externo gravitatorio de la Tierra a partir de medidas en la superficie del módulo del campo gravitatorio.

• Denotando por u el potencial newtoniano de la Tierra y por g el módulo de la fuerza de la gravedad el problema queda en la forma

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{en } \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\mathrm{G}}, \\ |\nabla u| = g & \text{en } S, \\ u(x) \to 0 & \text{cuando } |x| \to +\infty. \end{cases}$$

• No se han considerados los efectos de la rotación de la Tierra. Puesto que la gravedad puede ser fácilmente medida tanto en la tierra como en el mar el problema es bastante realista.

• Un problema análogo surge en Geomagnetismo. Control Óptimo de reflexiones.

• Suponemos conocida la superficie de la Tierra ($S = \partial \mathrm{G}$), el Problema de Backus trata de la determinación del potencial externo gravitatorio de la Tierra a partir de medidas en la superficie del módulo del campo gravitatorio.

• Denotando por u el potencial newtoniano de la Tierra y por g el módulo de la fuerza de la gravedad el problema queda en la forma

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{en } \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\mathrm{G}}, \\ |\nabla u| = g & \text{en } S, \\ u(x) \to 0 & \text{cuando } |x| \to +\infty. \end{cases}$$

• No se han considerados los efectos de la rotación de la Tierra. Puesto que la gravedad puede ser fácilmente medida tanto en la tierra como en el mar el problema es bastante realista.

• Un problema análogo surge en Geomagnetismo. Control Óptimo de reflexiones.

• Suponemos conocida la superficie de la Tierra ($S = \partial \mathrm{G}$), el Problema de Backus trata de la determinación del potencial externo gravitatorio de la Tierra a partir de medidas en la superficie del módulo del campo gravitatorio.

• Denotando por u el potencial newtoniano de la Tierra y por g el módulo de la fuerza de la gravedad el problema queda en la forma

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{en } \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\mathrm{G}}, \\ |\nabla u| = g & \text{en } S, \\ u(x) \to 0 & \text{cuando } |x| \to +\infty. \end{cases}$$

• No se han considerados los efectos de la rotación de la Tierra. Puesto que la gravedad puede ser fácilmente medida tanto en la tierra como en el mar el problema es bastante realista.

• Un problema análogo surge en Geomagnetismo. Control Óptimo de reflexiones.

• Suponemos conocida la superficie de la Tierra ($S = \partial \mathrm{G}$), el Problema de Backus trata de la determinación del potencial externo gravitatorio de la Tierra a partir de medidas en la superficie del módulo del campo gravitatorio.

• Denotando por u el potencial newtoniano de la Tierra y por g el módulo de la fuerza de la gravedad el problema queda en la forma

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{en } \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\mathrm{G}}, \\ |\nabla u| = g & \text{en } S, \\ u(x) \to 0 & \text{cuando } |x| \to +\infty. \end{cases}$$

• No se han considerados los efectos de la rotación de la Tierra. Puesto que la gravedad puede ser fácilmente medida tanto en la tierra como en el mar el problema es bastante realista.

• Un problema análogo surge en Geomagnetismo. Control Óptimo de reflexiones.

• Suponemos conocida la superficie de la Tierra ($S = \partial \mathrm{G}$), el Problema de Backus trata de la determinación del potencial externo gravitatorio de la Tierra a partir de medidas en la superficie del módulo del campo gravitatorio.

• Denotando por u el potencial newtoniano de la Tierra y por g el módulo de la fuerza de la gravedad el problema queda en la forma

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{en } \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\mathrm{G}}, \\ |\nabla u| = g & \text{en } S, \\ u(x) \to 0 & \text{cuando } |x| \to +\infty. \end{cases}$$

• No se han considerados los efectos de la rotación de la Tierra. Puesto que la gravedad puede ser fácilmente medida tanto en la tierra como en el mar el problema es bastante realista.

• Un problema análogo surge en Geomagnetismo. Control Óptimo de reflexiones.

- Backus, G.E. (1968). Application of a non-linear boundary-value problem for the Laplaces equation to gravity and geomagnetic intensity surveys, *Quart. J. Mech. Appl. Math.* XXI, 195-221.
- Díaz,G., Díaz,J.I. and Otero,J. (2006). On an oblique boundary value problem related to the Backus problem in geodesy, *Nonlinear Anal. Real World Appl.* (7), 147–166.
- Heiskanen, W.A. and Moritz, H. (1967). *Physical Geodesy*,W.H. Freeman and Co.
- Landau, L.D. y Lifschtiz, (1987). *Teoría Clásica de Campos*, Vol. 2, Reverté.
- Robinson, E.A. and Clark, D. (2003). The eikonal equation and the secret Pythagorean theorem, *The Leanding Edge*, 22 (**8**), 749–750.
- Sethian, J.A. (1996). *Level Set Methods*, Cambridge Uniersity Press.

Versión simplificada de la ecuación de Navier–Sokes de la Mecánica de Fluidos

$$\underbrace{\mathbf{u}_t + \langle \mathbf{u}, \nabla \mathbf{u} \rangle}_{\text{inercia}} = - \overbrace{\frac{1}{\rho}\nabla p}^{\text{presión}} + \underbrace{\frac{1}{\rho}\mathbf{f}}_{\text{fuerzas exteriores}} + \overbrace{\nu \Delta \mathbf{u}}^{\text{fuerzas interiores (viscosidad)}}$$

donde $\mathbf{u}$ es el campo de velocidades, ρ es la densidad y p la presión en un fluido incompresible y homogéneo y $\mathbf{Re} = \nu^{-1}$ es el número de Reynolds . Para el caso escalar a presión constante

$$v_t + v v_x = \nu v_{xx} \quad \text{(ec. Burgers viscosa)}$$

Introducida por A. R. Forsyth (1906), analizada con detalle por J. M. Burgers en 1940, (huerísticamente), para una distribución inicial que era ruido blanco.

Versión simplificada de la ecuación de Navier–Sokes de la Mecánica de Fluidos

$$\underbrace{\mathbf{u}_t + \langle \mathbf{u}, \nabla \mathbf{u} \rangle}_{\text{inercia}} = - \overbrace{\frac{1}{\rho} \nabla p}^{\text{presión}} + \underbrace{\frac{1}{\rho}\mathbf{f}}_{\text{fuerzas exteriores}} + \overbrace{\nu \Delta \mathbf{u}}^{\text{fuerzas interiores (viscosidad)}}$$

donde $\mathbf{u}$ es el campo de velocidades, ρ es la densidad y p la presión en un fluido incompresible y homogéneo y $\mathbf{Re} = \nu^{-1}$ es el número de Reynolds . Para el caso escalar a presión constante

$$v_t + v v_x = \nu v_{xx} \quad \text{(ec. Burgers viscosa)}$$

Introducida por A. R. Forsyth (1906), analizada con detalle por J. M. Burgers en 1940, (huerísticamente), para una distribución inicial que era ruido blanco.

Versión simplificada de la ecuación de Navier–Sokes de la Mecánica de Fluidos

$$\underbrace{\mathbf{u}_t + \langle \mathbf{u}, \nabla \mathbf{u} \rangle}_{\text{inercia}} = - \overbrace{\frac{1}{\rho}\nabla p}^{\text{presión}} + \underbrace{\frac{1}{\rho}\mathbf{f}}_{\text{fuerzas exteriores}} + \overbrace{\nu \Delta \mathbf{u}}^{\text{fuerzas interiores (viscosidad)}}$$

donde $\mathbf{u}$ es el campo de velocidades, ρ es la densidad y p la presión en un fluido incompresible y homogéneo y $\mathbf{Re} = \nu^{-1}$ es el número de Reynolds .
Para el caso escalar a presión constante

$$v_t + v v_x = \nu v_{xx} \quad \text{(ec. Burgers viscosa)}$$

Introducida por A. R. Forsyth (1906), analizada con detalle por J. M. Burgers en 1940, (huerísticamente), para una distribución inicial que era ruido blanco.

Versión simplificada de la ecuación de Navier–Sokes de la Mecánica de Fluidos

$$\underbrace{\mathbf{u}_t + \langle \mathbf{u}, \nabla \mathbf{u} \rangle}_{\text{inercia}} = - \overbrace{\frac{1}{\rho} \nabla p}^{\text{presión}} + \underbrace{\frac{1}{\rho} \mathbf{f}}_{\text{fuerzas exteriores}} + \overbrace{\nu \Delta \mathbf{u}}^{\text{fuerzas interiores (viscosidad)}}$$

donde $\mathbf{u}$ es el campo de velocidades, ρ es la densidad y p la presión en un fluido incompresible y homogéneo y $\mathbf{Re} = \nu^{-1}$ es el número de Reynolds . Para el caso escalar a presión constante

$$v_t + v v_x = \nu v_{xx} \quad \text{(ec. Burgers viscosa)}$$

Introducida por A. R. Forsyth (1906), analizada con detalle por J. M. Burgers en 1940, (huerísticamente), para una distribución inicial que era ruido blanco.

Versión simplificada de la ecuación de Navier–Sokes de la Mecánica de Fluidos

$$\underbrace{\mathbf{u}_t + \langle \mathbf{u}, \nabla \mathbf{u}\rangle}_{\text{inercia}} = - \overbrace{\frac{1}{\rho}\nabla p}^{\text{presión}} + \underbrace{\frac{1}{\rho}\mathbf{f}}_{\text{fuerzas exteriores}} + \overbrace{\nu \Delta \mathbf{u}}^{\text{fuerzas interiores (viscosidad)}}$$

donde $\mathbf{u}$ es el campo de velocidades, ρ es la densidad y p la presión en un fluido incompresible y homogéneo y $\mathbf{Re} = \nu^{-1}$ es el número de Reynolds . Para el caso escalar a presión constante

$$v_t + v v_x = \nu v_{xx} \quad (\text{ec. Burgers viscosa})$$

Introducida por A. R. Forsyth (1906), analizada con detalle por J. M. Burgers en 1940, (huerísticamente), para una distribución inicial que era ruido blanco.

J.M. Burgers (1923–1981)

$$u_t + |u_x|^2 = \nu u_{xx} \quad \overbrace{\rightsquigarrow}^{v=u_x} \quad v_t + (v^2)_x = \nu v_{xx}$$ (ec. Burgers viscosa)

El método de la viscosidad evanescente

(ec.viscosas)

$$u^\nu_t + f(u^\nu_x) = \nu u^\nu_{xx} \quad \overbrace{\rightsquigarrow}^{v^\nu=u^\nu_x} \quad v^\nu_t + (f(v^\nu))_x = \nu v^\nu_{xx}$$

$$\Downarrow (\nu \to 0)$$

$$u_t + f(u_x) = 0 \quad \overbrace{\rightsquigarrow}^{v=u_x} \quad v_t + (f(v))_x = 0$$

Hamilton–Jacobi | ley de conservación

(ec. no viscosas)

$$u_t + |u_x|^2 = \nu u_{xx} \quad \overbrace{\rightsquigarrow}^{v=u_x} \quad v_t + (v^2)_x = \nu v_{xx} \quad \text{(ec. Burgers viscosa)}$$

El método de la viscosidad evanescente

(ec.viscosas)

$$u_t^\nu + f(u_x^\nu) = \nu u_{xx}^\nu \quad \overbrace{\rightsquigarrow}^{v^\nu=u_x^\nu} \quad v_t^\nu + (f(v^\nu))_x = \nu v_{xx}^\nu$$

$$\Downarrow (\nu \to 0)$$

$$u_t + f(u_x) = 0 \quad \overbrace{\rightsquigarrow}^{v=u_x} \quad v_t + (f(v))_x = 0$$

Hamilton–Jacobi | ley de conservación

(ec. no viscosas)

$$u_t + |u_x|^2 = \nu u_{xx} \quad \overbrace{\rightsquigarrow}^{v=u_x} \quad v_t + (v^2)_x = \nu v_{xx} \quad \text{(ec. Burgers viscosa)}$$

El método de la viscosidad evanescente

(ec.viscosas)

$$u^\nu_t + f(u^\nu_x) = \nu u^\nu_{xx} \quad \overbrace{\rightsquigarrow}^{v^\nu=u^\nu_x} \quad v^\nu_t + (f(v^\nu))_x = \nu v^\nu_{xx}$$

$$\Downarrow \ (\nu \to 0)$$

$$u_t + f(u_x) = 0 \quad \overbrace{\rightsquigarrow}^{v=u_x} \quad v_t + (f(v))_x = 0$$

Hamilton–Jacobi | ley de conservación

(ec. no viscosas)

$$u_t = \operatorname{div}\, k\nabla u \quad \boxed{\text{ecuación de transmisión del calor}}$$

$$\Downarrow \quad k = mu^{m-1} \quad (m > 1)\ \boxed{\text{difusividad}}$$

$$u_t = \Delta u^m \quad \boxed{\text{ecuación de los medios porosos}}$$

Modela flujo de un gas isentrópico a través de un medio poroso, radiación de calor en plasma, biología matemática, filtración en aguas subterráneas,

$$\boxed{v = \frac{m}{m-1} u^{m-1}}$$

$$u_t = \Delta u^m \quad \Longleftrightarrow \quad v_t = (m-1)v\Delta v + |\nabla v|^2$$

$$\Downarrow \quad \left\{ \boxed{\partial\{u = 0\}} \right.$$

$$v_t = |\nabla v|^2$$

$$u_t = \mathrm{div}\ k\nabla u \qquad \boxed{\text{ecuación de transmisión del calor}}$$

$$\Downarrow \qquad k = mu^{m-1} \quad (m>1)\ \boxed{\text{difusividad}}$$

$$u_t = \Delta u^m \qquad \boxed{\text{ecuación de los medios porosos}}$$

Modela flujo de un gas isentrópico a través de un medio poroso, radiación de calor en plasma, biología matemática, filtración en aguas subterráneas, ...

$$\boxed{v = \frac{m}{m-1}u^{m-1}}$$

$$u_t = \Delta u^m \quad \Longleftrightarrow \quad v_t = (m-1)v\Delta v + |\nabla v|^2$$

$$\Downarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \boxed{\partial\{u=0\}} \\ v_t = |\nabla v|^2 \end{array} \right.$$

$$u_t = \mathrm{div}\; k\nabla u \quad \boxed{\text{ecuación de transmisión del calor}}$$

$$\Downarrow \qquad k = mu^{m-1} \quad (m > 1) \; \boxed{\text{difusividad}}$$

$$u_t = \Delta u^m \quad \boxed{\text{ecuación de los medios porosos}}$$

Modela flujo de un gas isentrópico a través de un medio poroso, radiación de calor en plasma, biología matemática, filtración en aguas subterráneas, ...

$$\boxed{v = \frac{m}{m-1} u^{m-1}}$$

$$u_t = \Delta u^m \quad \Longleftrightarrow \quad v_t = (m-1)v\Delta v + |\nabla v|^2$$

$$\Downarrow \quad \left\{ \boxed{\partial\{u=0\}} \right. \quad v_t = |\nabla v|^2$$

$$u_t = \mathrm{div}\ k\nabla u \quad \boxed{\text{ecuación de transmisión del calor}}$$

$$\Downarrow \quad k = m u^{m-1} \quad (m > 1)\ \boxed{\text{difusividad}}$$

$$u_t = \Delta u^m \quad \boxed{\text{ecuación de los medios porosos}}$$

Modela flujo de un gas isentrópico a través de un medio poroso, radiación de calor en plasma, biología matemática, filtración en aguas subterráneas,

$$\boxed{v = \frac{m}{m-1} u^{m-1}}$$

$$u_t = \Delta u^m \quad \Longleftrightarrow \quad v_t = (m-1) v \Delta v + |\nabla v|^2$$

$$\Downarrow \quad \left\{ \boxed{\partial\{u = 0\}} \right.$$

$$v_t = |\nabla v|^2$$

$$u_t = \mathrm{div}\; k\nabla u \quad \boxed{\text{ecuación de transmisión del calor}}$$
$$\Downarrow \quad k = mu^{m-1} \quad (m > 1)\ \boxed{\text{difusividad}}$$
$$u_t = \Delta u^m \quad \boxed{\text{ecuación de los medios porosos}}$$

Modela flujo de un gas isentrópico a través de un medio poroso, radiación de calor en plasma, biología matemática, filtración en aguas subterráneas,

$$\boxed{v = \frac{m}{m-1} u^{m-1}}$$

$$u_t = \Delta u^m \quad \Longleftrightarrow \quad v_t = (m-1) v \Delta v + |\nabla v|^2$$

$$\Downarrow \quad \left\{ \boxed{\partial\{u = 0\}} \right.$$

$$v_t = |\nabla v|^2$$

Mecánica de Medios Continuos

Medios porosos. [Vázquez], [Zel'dovich & Raizer]

$$u_t = \operatorname{div}\, k\nabla u \quad \boxed{\text{ecuación de transmisión del calor}}$$

$$\Downarrow \qquad k = m u^{m-1} \quad (m > 1) \ \boxed{\text{difusividad}}$$

$$u_t = \Delta u^m \quad \boxed{\text{ecuación de los medios porosos}}$$

Modela flujo de un gas isentrópico a través de un medio poroso, radiación de calor en plasma, biología matemática, filtración en aguas subterráneas,

$$\boxed{v = \frac{m}{m-1} u^{m-1}}$$

$$u_t = \Delta u^m \quad \Longleftrightarrow \quad v_t = (m-1) v \Delta v + |\nabla v|^2$$

$$\Downarrow \quad \left\{ \boxed{\partial\{u = 0\}} \right.$$

$$v_t = |\nabla v|^2$$

Mecánica de Medios Continuos

Medios porosos. [Vázquez], [Zel'dovich & Raizer]

$$u_t = \operatorname{div}\, k\nabla u \qquad \boxed{\text{ecuación de transmisión del calor}}$$
$$\Downarrow \qquad k = mu^{m-1} \quad (m > 1)\ \boxed{\text{difusividad}}$$
$$u_t = \Delta u^m \qquad \boxed{\text{ecuación de los medios porosos}}$$

Modela flujo de un gas isentrópico a través de un medio poroso, radiación de calor en plasma, biología matemática, filtración en aguas subterráneas,

$$\boxed{v = \frac{m}{m-1}u^{m-1}}$$

$$u_t = \Delta u^m \quad \Longleftrightarrow \quad v_t = (m-1)v\Delta v + |\nabla v|^2$$
$$\Downarrow \quad \left\{ \boxed{\partial\{u=0\}} \right.$$
$$v_t = |\nabla v|^2$$

Mecánica de Medios Continuos

Medios porosos. [Vázquez], [Zel'dovich & Raizer]

$$u_t = \operatorname{div}\, k\nabla u \quad \boxed{\text{ecuación de transmisión del calor}}$$

$$\Downarrow \quad k = mu^{m-1} \quad (m > 1)\ \boxed{\text{difusividad}}$$

$$u_t = \Delta u^m \quad \boxed{\text{ecuación de los medios porosos}}$$

Modela flujo de un gas isentrópico a través de un medio poroso, radiación de calor en plasma, biología matemática, filtración en aguas subterráneas,

$$\boxed{v = \frac{m}{m-1} u^{m-1}}$$

$$u_t = \Delta u^m \quad \Longleftrightarrow \quad v_t = (m-1)v\Delta v + |\nabla v|^2$$

$$\Downarrow \quad \left\{ \boxed{\partial\{u=0\}} \right.$$

$$v_t = |\nabla v|^2$$

Mecánica de Medios Continuos

Medios porosos. [Vázquez], [Zel'dovich & Raizer]

$$u_t = \mathrm{div}\ k\nabla u \quad \boxed{\text{ecuación de transmisión del calor}}$$

$$\Downarrow \quad k = m u^{m-1} \quad (m > 1) \ \boxed{\text{difusividad}}$$

$$u_t = \Delta u^m \quad \boxed{\text{ecuación de los medios porosos}}$$

Modela flujo de un gas isentrópico a través de un medio poroso, radiación de calor en plasma, biología matemática, filtración en aguas subterráneas,

$$\boxed{v = \frac{m}{m-1} u^{m-1}}$$

$$u_t = \Delta u^m \quad \Longleftrightarrow \quad v_t = (m-1) v \Delta v + |\nabla v|^2$$

$$\Downarrow \quad \left\{ \boxed{\partial\{u = 0\}} \right.$$

$$v_t = |\nabla v|^2$$

Mecánica de Medios Continuos

Medios porosos. [Vázquez], [Zel'dovich & Raizer]

$$u_t = \mathrm{div}\ k\nabla u \quad \boxed{\text{ecuación de transmisión del calor}}$$

$$\Downarrow \quad k = mu^{m-1} \quad (m > 1)\ \boxed{\text{difusividad}}$$

$$u_t = \Delta u^m \quad \boxed{\text{ecuación de los medios porosos}}$$

Modela flujo de un gas isentrópico a través de un medio poroso, radiación de calor en plasma, biología matemática, filtración en aguas subterráneas,

$$u_t = \Delta u^m \quad \overbrace{\Longrightarrow}^{\boxed{v = \frac{m}{m-1}u^{m-1}}} \quad v_t = (m-1)v\Delta v + |\nabla v|^2$$

$$\Downarrow \quad \left\{ \boxed{\partial\{u = 0\}} \right.$$

$$v_t = |\nabla v|^2$$

$$u_t = \operatorname{div}\, k\nabla u \quad \boxed{\text{ecuación de transmisión del calor}}$$
$$\Downarrow \qquad k = m u^{m-1} \quad (m > 1)\ \boxed{\text{difusividad}}$$
$$u_t = \Delta u^m \quad \boxed{\text{ecuación de los medios porosos}}$$

Modela flujo de un gas isentrópico a través de un medio poroso, radiación de calor en plasma, biología matemática, filtración en aguas subterráneas,

$$u_t = \Delta u^m \quad \overbrace{\Longrightarrow}^{\boxed{v = \frac{m}{m-1} u^{m-1}}} \quad v_t = (m-1)v\Delta v + |\nabla v|^2$$

$$\Downarrow \quad \left\{ \boxed{\partial\{u=0\}} \right.$$
$$v_t = |\nabla v|^2$$

$$u_t = \operatorname{div}\, k\nabla u \quad \boxed{\text{ecuación de transmisión del calor}}$$
$$\Downarrow \quad k = mu^{m-1} \quad (m>1) \ \boxed{\text{difusividad}}$$
$$u_t = \Delta u^m \quad \boxed{\text{ecuación de los medios porosos}}$$

Modela flujo de un gas isentrópico a través de un medio poroso, radiación de calor en plasma, biología matemática, filtración en aguas subterráneas,

$$u_t = \Delta u^m \quad \overset{\boxed{v = \frac{m}{m-1}u^{m-1}}}{\overbrace{\Longrightarrow}} \quad v_t = (m-1)v\Delta v + |\nabla v|^2$$

$$\Downarrow \quad \left\{ \boxed{\partial\{u=0\}} \right.$$

$$v_t = |\nabla v|^2$$

$$u_t = \operatorname{div}\, k\nabla u \quad \boxed{\text{ecuación de transmisión del calor}}$$
$$\Downarrow \quad k = m u^{m-1} \quad (m > 1)\ \boxed{\text{difusividad}}$$
$$u_t = \Delta u^m \quad \boxed{\text{ecuación de los medios porosos}}$$

Modela flujo de un gas isentrópico a través de un medio poroso, radiación de calor en plasma, biología matemática, filtración en aguas subterráneas,

$$u_t = \Delta u^m \quad \overset{\boxed{v = \frac{m}{m-1}u^{m-1}}}{\Longleftrightarrow} \quad v_t = (m-1)v\Delta v + |\nabla v|^2$$
$$\Downarrow \quad \left\{ \boxed{\partial\{u = 0\}} \right. \quad v_t = |\nabla v|^2$$

Burgers, J. M. (1974). *The Nonlinear Diffusion Equations*, Reidel.

Ross,D.S. (1988). Evlutions of material boundaries under Ion bombardment, *J.Electrochem. Soc.*, 135 (5), 1260–1266.

Vázquez, J.L. (2006). *The Porous Medium Equation. Mathematical Theory*, Oxford Univ. Press.

Zel'dovich, Y. B. and Raizer, Y. P. (1966). *Physics of Shock Waves and High-Temperature Hydro- dynamic Phenomena II*, Academic Press.

Naturaleza de los problemas de Hamilton–Jacobi

W.R.Hamilton (1805–1865)

En 1831 W.R. Hamilton

$\boxed{\text{trayectorias de las partículas en campos potenciales}}$

$\updownarrow$ analogía

$\boxed{\text{caminos de los rayos de luz en medios con índice de refracción que varían}}$

W.R.Hamilton (1805–1865)

En 1831 W.R. Hamilton

trayectorias de las partículas en campos potenciales

$\updownarrow$ analogía

caminos de los rayos de luz en medios con índice de refracción que varían

W.R.Hamilton (1805–1865)

En 1831 W.R. Hamilton

trayectorias de las partículas en campos potenciales

$\updownarrow$ analogía

caminos de los rayos de luz en medios con índice de refracción que varían

Segunda Ley de Newton: El cambio de la cantidad de movimiento de un cuerpo es igual a la fuerza que actúa sobre él

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{m}\dot{\vec{\mathbf{r}}}(t) = \vec{\mathbf{F}} = \vec{\mathbf{f}}_{\text{externas}} + \cancel{\vec{\mathbf{f}}}_{\text{inerciales}} + \cancel{\vec{\mathbf{f}}}_{\text{electromagnéticas}} + \vec{\mathbf{f}}_{\text{ligadura}}$$

con velocidades no excesivamente grandes.

Segunda Ley de Newton: El cambio de la cantidad de movimiento de un cuerpo es igual a la fuerza que actúa sobre él

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{m}\,\dot{\vec{\mathbf{r}}}(t) = \vec{\mathbf{F}} = \vec{\mathbf{f}}_{\text{externas}} + \vec{\mathbf{f}}_{\text{inerciales}} + \vec{\mathbf{f}}_{\text{electromagnéticas}} + \vec{\mathbf{f}}_{\text{ligadura}}$$

con velocidades no excesivamente grandes.

Segunda Ley de Newton: El cambio de la cantidad de movimiento de un cuerpo es igual a la fuerza que actúa sobre él

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{m}\,\dot{\vec{\mathbf{r}}}(t) = \vec{\mathbf{F}} = \vec{\mathbf{f}}_{\text{externas}} + \cancel{\vec{\mathbf{f}}}_{\text{inerciales}} + \cancel{\vec{\mathbf{f}}}_{\text{electromagnéticas}} + \vec{\mathbf{f}}_{\text{ligadura}}$$

con velocidades no excesivamente grandes.

Naturaleza de los problemas de Hamilton–Jacobi

Teoría de Hamilton–Jacobi. Sistemas mecánicos

Segunda Ley de Newton: El cambio de la cantidad de movimiento de un cuerpo es igual a la fuerza que actúa sobre él

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{m}\dot{\vec{\mathbf{r}}}(t) = \vec{\mathbf{F}} = \vec{\mathbf{f}}_{\text{externas}} + \cancel{\vec{\mathbf{f}}}_{\text{inerciales}} + \cancel{\vec{\mathbf{f}}}_{\text{electromagnéticas}} + \vec{\mathbf{f}}_{\text{ligadura}}$$

con velocidades no excesivamente grandes.

Segunda Ley de Newton: El cambio de la cantidad de movimiento de un cuerpo es igual a la fuerza que actúa sobre él

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{m}\overset{\bullet}{\overrightarrow{\mathbf{r}}}(t) = \overrightarrow{\mathbf{F}} = \overrightarrow{\mathbf{f}}_{\text{externas}} + \cancel{\overrightarrow{\mathbf{f}}}_{\text{inerciales}} + \cancel{\overrightarrow{\mathbf{f}}}_{\text{electromagnéticas}} + \overrightarrow{\mathbf{f}}_{\text{ligadura}}$$

con velocidades no excesivamente grandes.

Naturaleza de los problemas de Hamilton–Jacobi

Teoría de Hamilton–Jacobi. Sistemas mecánicos

Segunda Ley de Newton: El cambio de la cantidad de movimiento de un cuerpo es igual a la fuerza que actúa sobre él

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{m}\dot{\vec{\mathbf{r}}}(t) = \vec{\mathbf{F}} = \vec{\mathbf{f}}_{\text{externas}} + \cancel{\vec{\mathbf{f}}}_{\text{inerciales}} + \cancel{\vec{\mathbf{f}}}_{\text{electromagnéticas}} + \vec{\mathbf{f}}_{\text{ligadura}}$$

con velocidades no excesivamente grandes.

Naturaleza de los problemas de Hamilton–Jacobi

Teoría de Hamilton–Jacobi. Sistemas mecánicos

Segunda Ley de Newton: El cambio de la cantidad de movimiento de un cuerpo es igual a la fuerza que actúa sobre él

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{m}\,\dot{\vec{\mathbf{r}}}(t) = \vec{\mathbf{F}} = \vec{\mathbf{f}}_{\text{externas}} + \cancel{\vec{\mathbf{f}}}_{\text{inerciales}} + \cancel{\vec{\mathbf{f}}}_{\text{electromagnéticas}} + \vec{\mathbf{f}}_{\text{ligadura}}$$

con velocidades no excesivamente grandes.

$$\boxed{\mathrm{m}\,\ddot{\vec{\mathbf{r}}}(t) = \vec{\mathbf{f}}(t, \vec{\mathbf{r}}(t), \dot{\vec{\mathbf{r}}}(t))}$$ Newton coordenadas

En general

sistema mecánico $\longleftrightarrow$ $\begin{cases} \vec{\mathbf{r}} \in \mathbb{E}^3 & \text{posición} \\ \dot{\vec{\mathbf{r}}} \in \mathbb{E}^3 & \text{velocidad} \end{cases}$ estado del sistema

Para no depender de las coordenadas

sistema mecánico $\longleftrightarrow$ $\begin{cases} \vec{\mathbf{q}} \in \mathbb{E}^n & \text{coordenadas} \\ \dot{\vec{\mathbf{q}}} \in \mathbb{E}^n & \text{velocidad} \end{cases}$ estado generalizado

$$\boxed{\mathrm{m}\,\ddot{\vec{\mathbf{r}}}(t) = \vec{\mathbf{f}}(t, \vec{\mathbf{r}}(t), \dot{\vec{\mathbf{r}}}(t))}$$ Newton coordenadas

En general

$$\boxed{\text{sistema mecánico}} \quad \leftrightarrow \quad \begin{cases} \vec{\mathbf{r}} \in \mathbb{E}^3 & \text{posición} \\ \dot{\vec{\mathbf{r}}} \in \mathbb{E}^3 & \text{velocidad} \end{cases} \quad \boxed{\text{estado del sistema}}$$

Para no depender de las coordenadas

$$\boxed{\text{sistema mecánico}} \quad \leftrightarrow \quad \begin{cases} \vec{\mathbf{q}} \in \mathbb{E}^n & \text{coordenadas} \\ \dot{\vec{\mathbf{q}}} \in \mathbb{E}^n & \text{velocidad} \end{cases} \quad \boxed{\text{estado generalizado}}$$

$$\boxed{\mathrm{m}\,\ddot{\vec{\mathbf{r}}}(t) = \vec{\mathbf{f}}\,(t, \vec{\mathbf{r}}(t), \dot{\vec{\mathbf{r}}}(t))}$$ Newton coordenadas

En general

$\boxed{\text{sistema mecánico}}$ $\leftrightarrow$ $\left\{ \begin{array}{ll} \vec{\mathbf{r}} \in \mathbb{E}^3 & \text{posición} \\ \dot{\vec{\mathbf{r}}} \in \mathbb{E}^3 & \text{velocidad} \end{array} \right.$ $\boxed{\text{estado del sistema}}$

Para no depender de las coordenadas

$\boxed{\text{sistema mecánico}}$ $\leftrightarrow$ $\left\{ \begin{array}{ll} \vec{\mathbf{q}} \in \mathbb{E}^n & \text{coordenadas} \\ \dot{\vec{\mathbf{q}}} \in \mathbb{E}^n & \text{velocidad} \end{array} \right.$ $\boxed{\text{estado generalizado}}$

$$\boxed{\mathrm{m}\,\ddot{\vec{\mathbf{r}}}(t) = \vec{\mathbf{f}}(t, \vec{\mathbf{r}}(t), \dot{\vec{\mathbf{r}}}(t))}$$ Newton coordenadas

En general

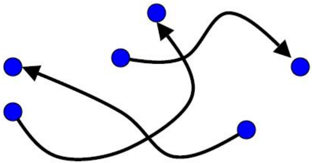
$$\boxed{\text{sistema mecánico}} \quad \leftrightarrow \quad \begin{cases} \vec{\mathbf{r}} \in \mathbb{E}^3 & \text{posición} \\ \dot{\vec{\mathbf{r}}} \in \mathbb{E}^3 & \text{velocidad} \end{cases} \quad \boxed{\text{estado del sistema}}$$

Para no depender de las coordenadas

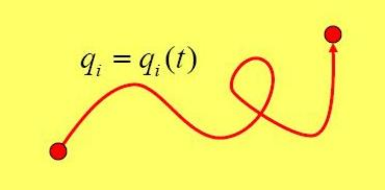
$$\boxed{\text{sistema mecánico}} \quad \leftrightarrow \quad \begin{cases} \vec{\mathbf{q}} \in \mathbb{E}^n & \text{coordenadas} \\ \dot{\vec{\mathbf{q}}} \in \mathbb{E}^n & \text{velocidad} \end{cases} \quad \boxed{\text{estado generalizado}}$$

Naturaleza de los problemas de Hamilton–Jacobi

Teoría de Hamilton–Jacobi. Configuraciones



Espacio real ($\mathbb{E}^3$)



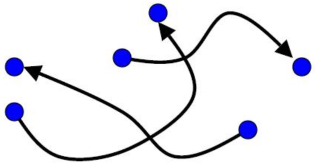
Espacio de configuraciones ($\mathbb{E}^n$)

$(\overrightarrow{\mathbf{r}}, \dot{\overrightarrow{\mathbf{r}}})$

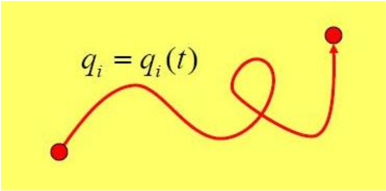
Estado real ($\mathbb{E}^3 \times \mathbb{E}^3$)

$(\overrightarrow{\mathbf{q}}, \dot{\overrightarrow{\mathbf{q}}})$

Estado de cofiguraciones ($\mathbb{E}^n \times \mathbb{E}^n$)



Espacio real ($\mathbb{E}^3$)



Espacio de configuraciones ($\mathbb{E}^n$)

$(\vec{\mathbf{r}}, \dot{\vec{\mathbf{r}}})$

Estado real ($\mathbb{E}^3 \times \mathbb{E}^3$)

$(\vec{\mathbf{q}}, \dot{\vec{\mathbf{q}}})$

Estado de cofiguraciones ($\mathbb{E}^n \times \mathbb{E}^n$)

Principio de mínima acción (Hamilton): las trayectorias entre dos instantes, siguiendo una ley mecánica, no es arbitraria, optimiza alguna acción (la naturaleza no da puntada sin hilo)

Ese pensamiento no es nuevo
Las desigualdades isoperimétricas en los griegos clásicos.

> Todo lo superfluo desagrada a Dios y a la naturaleza.
> Todo cuanto desagrada a Dios y a la naturaleza es malo.
> Dante Alighieri, hacia 1300.

Principio de mínima acción (Hamilton): las trayectorias entre dos instantes, siguiendo una ley mecánica, no es arbitraria, optimiza alguna acción (la naturaleza no da puntada sin hilo)

Ese pensamiento no es nuevo

Las desigualdades isoperimétricas en los griegos clásicos.

> Todo lo superfluo desagrada a Dios y a la naturaleza.
> Todo cuanto desagrada a Dios y a la naturaleza es malo.
> DANTE ALIGHIERI, hacia 1300.

Principio de mínima acción (Hamilton): las trayectorias entre dos instantes, siguiendo una ley mecánica, no es arbitraria, optimiza alguna acción (la naturaleza no da puntada sin hilo)

Ese pensamiento no es nuevo

Las desigualdades isoperimétricas en los griegos clásicos.

> Todo lo superfluo desagrada a Dios y a la naturaleza.
> Todo cuanto desagrada a Dios y a la naturaleza es malo.
> DANTE ALIGHIERI, hacia 1300.

Principio de mínima acción (Hamilton): las trayectorias entre dos instantes, siguiendo una ley mecánica, no es arbitraria, optimiza alguna acción (la naturaleza no da puntada sin hilo)

Ese pensamiento no es nuevo

Las desigualdades isoperimétricas en los griegos clásicos.

> Todo lo superfluo desagrada a Dios y a la naturaleza.
> Todo cuanto desagrada a Dios y a la naturaleza es malo.
> Dante Alighieri, hacia 1300.

Principio de mínima acción (Hamilton): las trayectorias entre dos instantes, siguiendo una ley mecánica, no es arbitraria, optimiza alguna acción (la naturaleza no da puntada sin hilo)

Ese pensamiento no es nuevo
Las desigualdades isoperimétricas en los griegos clásicos.

> Todo lo superfluo desagrada a Dios y a la naturaleza.
> Todo cuanto desagrada a Dios y a la naturaleza es malo.
> Dante Alighieri, hacia 1300.

Principio de mínima acción (Hamilton): las trayectorias entre dos instantes, siguiendo una ley mecánica, no es arbitraria, optimiza alguna acción (la naturaleza no da puntada sin hilo)

Ese pensamiento no es nuevo
Las desigualdades isoperimétricas en los griegos clásicos.

> Todo lo superfluo desagrada a Dios y a la naturaleza.
> Todo cuanto desagrada a Dios y a la naturaleza es malo.
> Dante Alighieri, hacia 1300.

Principio de mínima acción (Hamilton): las trayectorias entre dos instantes, siguiendo una ley mecánica, no es arbitraria, optimiza alguna acción (la naturaleza no da puntada sin hilo)

Dos pioneros cercanos:

Pierre de Fermat (1601–1665)

Pierre Louis Moreau de Maupertuis (1698–1759)

- Principio de Fermat (1657): el camino entre dos puntos que recorre un rayo de luz es aquel que requiere un tiempo mínimo.
- Principio de Maupertius (1744): en todo cambio que se produce en la naturaleza, la cantidad de acción ha de ser la mínima posible.

Naturaleza de los problemas de Hamilton–Jacobi

Teoría de Hamilton–Jacobi. Principio de Hamilton

Principio de mínima acción (Hamilton): las trayectorias entre dos instantes, siguiendo una ley mecánica, no es arbitraria, optimiza alguna acción (la naturaleza no da puntada sin hilo)

Dos pioneros cercanos:

Pierre de Fermat (1601–1665)

Pierre Louis Moreau de Maupertuis (1698–1759)

- Principio de Fermat (1657): el camino entre dos puntos que recorre un rayo de luz es aquel que requiere un tiempo mínimo.
- Principio de Maupertius (1744): en todo cambio que se produce en la naturaleza, la cantidad de acción ha de ser la mínima posible.

Principio de mínima acción (Hamilton): las trayectorias entre dos instantes, siguiendo una ley mecánica, no es arbitraria, optimiza alguna acción (la naturaleza no da puntada sin hilo)

Dos pioneros cercanos:

Pierre de Fermat (1601–1665)

Pierre Louis Moreau de Maupertuis (1698–1759)

- Principio de Fermat (1657): el camino entre dos puntos que recorre un rayo de luz es aquel que requiere un tiempo mínimo.
- Principio de Maupertius (1744): en todo cambio que se produce en la naturaleza, la cantidad de acción ha de ser la mínima posible.

Principio de mínima acción (Hamilton): las trayectorias entre dos instantes, siguiendo una ley mecánica, no es arbitraria, optimiza alguna acción (la naturaleza no da puntada sin hilo)

Dos pioneros cercanos:

Pierre de Fermat (1601–1665)

Pierre Louis Moreau de Maupertuis (1698–1759)

- Principio de Fermat (1657): el camino entre dos puntos que recorre un rayo de luz es aquel que requiere un tiempo mínimo.
- Principio de Maupertius (1744): en todo cambio que se produce en la naturaleza, la cantidad de acción ha de ser la mínima posible.

Principio de mínima acción (Hamilton): las trayectorias entre dos instantes, siguiendo una ley mecánica, no es arbitraria, optimiza alguna acción (la naturaleza no da puntada sin hilo)

Dos pioneros cercanos:

Pierre de Fermat (1601–1665)

Pierre Louis Moreau de Maupertuis (1698–1759)

- Principio de Fermat (1657): el camino entre dos puntos que recorre un rayo de luz es aquel que requiere un tiempo mínimo.
- Principio de Maupertuis (1744): en todo cambio que se produce en la naturaleza, la cantidad de acción ha de ser la mínima posible.

Principio de mínima acción (Hamilton): las trayectorias entre dos instantes, siguiendo una ley mecánica, no es arbitraria, optimiza alguna acción (la naturaleza no da puntada sin hilo)

Dos pioneros cercanos:

Pierre de Fermat (1601–1665)

Pierre Louis Moreau de Maupertuis (1698–1759)

- Principio de Fermat (1657): el camino entre dos puntos que recorre un rayo de luz es aquel que requiere un tiempo mínimo.
- Principio de Maupertius (1744): en todo cambio que se produce en la naturaleza, la cantidad de acción ha de ser la mínima posible.

Se trata de optimizar

$$\mathrm{I}[\overrightarrow{\mathbf{q}}] = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{L}(s, \overrightarrow{\mathbf{q}}(s), \dot{\overrightarrow{\mathbf{q}}}(s))\mathrm{d}s \quad \text{acción}$$

donde $\mathrm{L}(t, \overrightarrow{\mathbf{q}}, \dot{\overrightarrow{\mathbf{q}}})$ es el Lagrangiano, dado por el sistema mecánico, es decir, se trata de encontrar la posición generalizada cuya primera variación, $\delta\mathrm{I}[\overrightarrow{\mathbf{q}}]$, sea nula, con

$$\delta\mathrm{I}[\overrightarrow{\mathbf{q}}] \doteq \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{L}(s, \overrightarrow{\mathbf{q}}(s) + \delta\overrightarrow{\mathbf{q}}(s), \dot{\overrightarrow{\mathbf{q}}}(s) + \delta\dot{\overrightarrow{\mathbf{q}}})\mathrm{d}s - \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{L}(s, \overrightarrow{\mathbf{q}}(s), \dot{\overrightarrow{\mathbf{q}}}(s))\mathrm{d}s$$

Se trata de optimizar

$$\mathrm{I}[\overrightarrow{\mathbf{q}}] = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{L}(s, \overrightarrow{\mathbf{q}}(s), \dot{\overrightarrow{\mathbf{q}}}(s))\mathrm{d}s \quad \text{acción}$$

donde $\mathrm{L}(t, \overrightarrow{\mathbf{q}}, \dot{\overrightarrow{\mathbf{q}}})$ es el Lagrangiano, dado por el sistema mecánico, es decir, se trata de encontrar la posición generalizada cuya primera variación, $\delta\mathrm{I}[\overrightarrow{\mathbf{q}}]$, sea nula, con

$$\delta\mathrm{I}[\overrightarrow{\mathbf{q}}] \doteq \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{L}(s, \overrightarrow{\mathbf{q}}(s) + \delta\overrightarrow{\mathbf{q}}(s), \dot{\overrightarrow{\mathbf{q}}}(s) + \delta\dot{\overrightarrow{\mathbf{q}}})\mathrm{d}s - \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{L}(s, \overrightarrow{\mathbf{q}}(s), \dot{\overrightarrow{\mathbf{q}}}(s))\mathrm{d}s$$

Se trata de optimizar

$$\mathrm{I}[\vec{\mathbf{q}}] = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{L}(s, \vec{\mathbf{q}}(s), \dot{\vec{\mathbf{q}}}(s))\mathrm{d}s \quad \text{acción}$$

donde $\mathrm{L}(t, \vec{\mathbf{q}}, \dot{\vec{\mathbf{q}}})$ es el Lagrangiano, dado por el sistema mecánico, es decir, se trata de encontrar la posición generalizada cuya primera variación, $\delta\mathrm{I}[\vec{\mathbf{q}}]$, sea nula, con

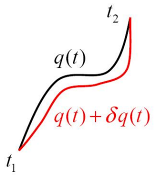
$$\delta\mathrm{I}[\vec{\mathbf{q}}] \doteq \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{L}(s, \vec{\mathbf{q}}(s) + \delta\vec{\mathbf{q}}(s), \dot{\vec{\mathbf{q}}}(s) + \delta\dot{\vec{\mathbf{q}}})\mathrm{d}s - \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{L}(s, \vec{\mathbf{q}}(s), \dot{\vec{\mathbf{q}}}(s))\mathrm{d}s$$

Se trata de optimizar

$$\mathrm{I}[\vec{\mathbf{q}}] = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{L}(s, \vec{\mathbf{q}}(s), \dot{\vec{\mathbf{q}}}(s))\mathrm{d}s \quad \text{acción}$$

donde $\mathrm{L}(t, \vec{\mathbf{q}}, \dot{\vec{\mathbf{q}}})$ es el Lagrangiano, dado por el sistema mecánico, es decir, se trata de encontrar la posición generalizada cuya primera variación, $\delta\mathrm{I}[\vec{\mathbf{q}}]$, sea nula, con

$$\delta\mathrm{I}[\vec{\mathbf{q}}] \doteq \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{L}(s, \vec{\mathbf{q}}(s)+\delta\vec{\mathbf{q}}(s), \dot{\vec{\mathbf{q}}}(s)+\delta\dot{\vec{\mathbf{q}}})\mathrm{d}s - \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{L}(s, \vec{\mathbf{q}}(s), \dot{\vec{\mathbf{q}}}(s))\mathrm{d}s$$



$$\Rightarrow \qquad \delta\vec{\mathbf{q}}(t_1) = \delta\vec{\mathbf{q}}(t_2) = 0.$$

Se trata de encontrar la posición generalizada con primera variación nula, para

$$\delta \overrightarrow{\mathbf{q}}(t) = \alpha \overrightarrow{\eta}(t),\ \alpha \in \mathbb{R},\ \overrightarrow{\eta} \in \mathcal{C}^1_p,\ \overrightarrow{\eta}(t_1) = \overrightarrow{\eta}(t_2) = 0.$$

Entonces para $\overrightarrow{\mathbf{q}}(t;\alpha) = \overrightarrow{\mathbf{q}}(t) + \alpha \overrightarrow{\eta}(t),\ |\alpha| \ll 1$ formamos

$$\mathrm{I}[\overrightarrow{\mathbf{q}}(t;\alpha)] \doteq \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{L}(s, \overrightarrow{\mathbf{q}}(s) + \alpha \overrightarrow{\eta}(s), \dot{\overrightarrow{\mathbf{q}}}(s) + \alpha \dot{\overrightarrow{\eta}}(s))\mathrm{d}s,$$

de donde

$$\left\{\begin{array}{l} \mathrm{I}[\overrightarrow{\mathbf{q}}(t] \leq \mathrm{I}[\overrightarrow{\mathbf{q}}(t;\alpha)] \\ \text{ó} \\ \mathrm{I}[\overrightarrow{\mathbf{q}}(t;\alpha)] \leq \mathrm{I}[\overrightarrow{\mathbf{q}}(t)] \end{array}\right. \qquad \forall |\alpha| \ll 1 \quad \Rightarrow \quad \delta \mathrm{I}[\overrightarrow{\mathbf{q}}] = \left.\frac{\mathrm{dI}[\overrightarrow{\mathbf{q}}(t;\alpha)]}{\mathrm{d}\alpha}\right|_{\alpha=0} \mathrm{d}\alpha$$

con lo que

$$\delta \mathrm{I}[\overrightarrow{\mathbf{q}}] = 0 \quad \Rightarrow \quad \left.\frac{\mathrm{dI}_\alpha}{\mathrm{d}\alpha}\right|_{\alpha=0} = 0.$$

Se trata de encontrar la posición generalizada con primera variación nula, para

$$\delta \overrightarrow{\mathbf{q}}(t) = \alpha \overrightarrow{\eta}(t),\ \alpha \in \mathbb{R},\ \overrightarrow{\eta} \in \mathcal{C}^1_p,\ \overrightarrow{\eta}(t_1) = \overrightarrow{\eta}(t_2) = 0.$$

Entonces para $\overrightarrow{\mathbf{q}}(t;\alpha) = \overrightarrow{\mathbf{q}}(t) + \alpha \overrightarrow{\eta}(t),\ |\alpha| \ll 1$ formamos

$$\mathrm{I}[\overrightarrow{\mathbf{q}}(t;\alpha)] \doteq \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{L}(s, \overrightarrow{\mathbf{q}}(s) + \alpha \overrightarrow{\eta}(s), \dot{\overrightarrow{\mathbf{q}}}(s) + \alpha \dot{\overrightarrow{\eta}}(s))\mathrm{d}s,$$

de donde

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathrm{I}[\overrightarrow{\mathbf{q}}(t] \leq \mathrm{I}[\overrightarrow{\mathbf{q}}(t;\alpha)] \\ \text{ó} \\ \mathrm{I}[\overrightarrow{\mathbf{q}}(t;\alpha)] \leq \mathrm{I}[\overrightarrow{\mathbf{q}}(t)] \end{array} \right. \quad \forall |\alpha| \ll 1 \quad \Rightarrow \quad \delta \mathrm{I}[\overrightarrow{\mathbf{q}}] = \left.\frac{\mathrm{dI}[\overrightarrow{\mathbf{q}}(t;\alpha)]}{\mathrm{d}\alpha}\right|_{\alpha=0} \mathrm{d}\alpha$$

con lo que

$$\delta \mathrm{I}[\overrightarrow{\mathbf{q}}] = 0 \quad \Rightarrow \quad \left.\frac{\mathrm{dI}_\alpha}{\mathrm{d}\alpha}\right|_{\alpha=0} = 0.$$

$$\frac{\mathrm{d}\mathrm{I}_\alpha}{\mathrm{d}\alpha} = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \vec{\mathbf{q}}} \frac{\partial \vec{\mathbf{q}}}{\partial \alpha} + \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \overset{\bullet}{\vec{\mathbf{q}}}} \frac{\partial \overset{\bullet}{\vec{\mathbf{q}}}}{\partial \alpha} \right) \mathrm{d}s = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \vec{\mathbf{q}}} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \overset{\bullet}{\vec{\mathbf{q}}}} \right) \frac{\partial \vec{\mathbf{q}}}{\partial \alpha} \mathrm{d}s$$

$$\Downarrow \ \vec{\mathbf{q}}(t;\alpha) = \vec{\mathbf{q}}(t) + \alpha \vec{\eta}(t)$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \vec{\mathbf{q}}} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \overset{\bullet}{\vec{\mathbf{q}}}} \right) \eta \mathrm{d}s$$

$\Downarrow$ Lema Fundamental C.V.

$$0 = \frac{\mathrm{d}\mathrm{I}_\alpha}{\mathrm{d}\alpha} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \vec{\mathbf{q}}} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \overset{\bullet}{\vec{\mathbf{q}}}} = 0}$$

$$\frac{\mathrm{d}\mathrm{I}_\alpha}{\mathrm{d}\alpha} = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \vec{\mathbf{q}}} \frac{\partial \vec{\mathbf{q}}}{\partial \alpha} + \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \dot{\vec{\mathbf{q}}}} \frac{\partial \dot{\vec{\mathbf{q}}}}{\partial \alpha} \right) \mathrm{d}s = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \vec{\mathbf{q}}} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \dot{\vec{\mathbf{q}}}} \right) \frac{\partial \vec{\mathbf{q}}}{\partial \alpha} \mathrm{d}s$$

$$\Downarrow \ \vec{\mathbf{q}}(t;\alpha) = \vec{\mathbf{q}}(t) + \alpha \vec{\eta}(t)$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \vec{\mathbf{q}}} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \dot{\vec{\mathbf{q}}}} \right) \eta \mathrm{d}s$$

$\Downarrow$ Lema Fundamental C.V.

$$0 = \frac{\mathrm{d}\mathrm{I}_\alpha}{\mathrm{d}\alpha} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \vec{\mathbf{q}}} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \dot{\vec{\mathbf{q}}}} = 0}$$

$$\frac{\mathrm{dI}_\alpha}{\mathrm{d}\alpha} = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \overrightarrow{\mathbf{q}}} \frac{\partial \overrightarrow{\mathbf{q}}}{\partial \alpha} + \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \dot{\overrightarrow{\mathbf{q}}}} \frac{\partial \dot{\overrightarrow{\mathbf{q}}}}{\partial \alpha} \right) \mathrm{d}s = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \overrightarrow{\mathbf{q}}} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \dot{\overrightarrow{\mathbf{q}}}} \right) \frac{\partial \overrightarrow{\mathbf{q}}}{\partial \alpha} \mathrm{d}s$$

$$\Downarrow \;\; \overrightarrow{\mathbf{q}}(t;\alpha) = \overrightarrow{\mathbf{q}}(t) + \alpha \overrightarrow{\eta}(t)$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \overrightarrow{\mathbf{q}}} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \dot{\overrightarrow{\mathbf{q}}}} \right) \eta \mathrm{d}s$$

$\Downarrow$ Lema Fundamental C.V.

$$0 = \frac{\mathrm{dI}_\alpha}{\mathrm{d}\alpha} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \overrightarrow{\mathbf{q}}} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \dot{\overrightarrow{\mathbf{q}}}} = 0}$$

$$\frac{\mathrm{dI}_\alpha}{\mathrm{d}\alpha} = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \vec{\mathbf{q}}} \frac{\partial \vec{\mathbf{q}}}{\partial \alpha} + \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \dot{\vec{\mathbf{q}}}} \frac{\partial \dot{\vec{\mathbf{q}}}}{\partial \alpha} \right) \mathrm{d}s = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \vec{\mathbf{q}}} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \dot{\vec{\mathbf{q}}}} \right) \frac{\partial \vec{\mathbf{q}}}{\partial \alpha} \mathrm{d}s$$

$$\Downarrow \ \vec{\mathbf{q}}(t;\alpha) = \vec{\mathbf{q}}(t) + \alpha \vec{\eta}(t)$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \vec{\mathbf{q}}} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \dot{\vec{\mathbf{q}}}} \right) \eta \mathrm{d}s$$

$\Downarrow$ Lema Fundamental C.V.

$$0 = \frac{\mathrm{dI}_\alpha}{\mathrm{d}\alpha} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \vec{\mathbf{q}}} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \dot{\vec{\mathbf{q}}}} = 0}$$

$$\frac{\mathrm{dI}_\alpha}{\mathrm{d}\alpha} = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \vec{\mathbf{q}}} \frac{\partial \vec{\mathbf{q}}}{\partial \alpha} + \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \dot{\vec{\mathbf{q}}}} \frac{\partial \dot{\vec{\mathbf{q}}}}{\partial \alpha} \right) \mathrm{d}s = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \vec{\mathbf{q}}} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \dot{\vec{\mathbf{q}}}} \right) \frac{\partial \vec{\mathbf{q}}}{\partial \alpha} \mathrm{d}s$$

$$\Downarrow \;\; \vec{\mathbf{q}}(t;\alpha) = \vec{\mathbf{q}}(t) + \alpha \vec{\eta}(t)$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \vec{\mathbf{q}}} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \dot{\vec{\mathbf{q}}}} \right) \eta \mathrm{d}s$$

$\Downarrow$ Lema Fundamental C.V.

$$0 = \frac{\mathrm{dI}_\alpha}{\mathrm{d}\alpha} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \vec{\mathbf{q}}} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \dot{\vec{\mathbf{q}}}} = 0}$$

$$\frac{\mathrm{d}\mathrm{I}_\alpha}{\mathrm{d}\alpha} = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \overrightarrow{\mathbf{q}}} \frac{\partial \overrightarrow{\mathbf{q}}}{\partial \alpha} + \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \dot{\overrightarrow{\mathbf{q}}}} \frac{\partial \dot{\overrightarrow{\mathbf{q}}}}{\partial \alpha} \right) \mathrm{d}s = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \overrightarrow{\mathbf{q}}} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \dot{\overrightarrow{\mathbf{q}}}} \right) \frac{\partial \overrightarrow{\mathbf{q}}}{\partial \alpha} \mathrm{d}s$$

$$\Downarrow \; \overrightarrow{\mathbf{q}}(t;\alpha) = \overrightarrow{\mathbf{q}}(t) + \alpha \overrightarrow{\eta}(t)$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \overrightarrow{\mathbf{q}}} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \dot{\overrightarrow{\mathbf{q}}}} \right) \eta \mathrm{d}s$$

$\Downarrow$ Lema Fundamental C.V.

$$0 = \frac{\mathrm{d}\mathrm{I}_\alpha}{\mathrm{d}\alpha} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \overrightarrow{\mathbf{q}}} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \dot{\overrightarrow{\mathbf{q}}}} = 0}$$

$$\frac{\mathrm{dI}_\alpha}{\mathrm{d}\alpha} = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \overrightarrow{\mathbf{q}}} \frac{\partial \overrightarrow{\mathbf{q}}}{\partial \alpha} + \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \overset{\bullet}{\overrightarrow{\mathbf{q}}}} \frac{\partial \overset{\bullet}{\overrightarrow{\mathbf{q}}}}{\partial \alpha} \right) \mathrm{d}s = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \overrightarrow{\mathbf{q}}} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \overset{\bullet}{\overrightarrow{\mathbf{q}}}} \right) \frac{\partial \overrightarrow{\mathbf{q}}}{\partial \alpha} \mathrm{d}s$$

$$\Downarrow \ \overrightarrow{\mathbf{q}}(t;\alpha) = \overrightarrow{\mathbf{q}}(t) + \alpha \overrightarrow{\eta}(t)$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \overrightarrow{\mathbf{q}}} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \overset{\bullet}{\overrightarrow{\mathbf{q}}}} \right) \eta \mathrm{d}s$$

$\Downarrow$ Lema Fundamental C.V.

$$0 = \frac{\mathrm{dI}_\alpha}{\mathrm{d}\alpha} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \overrightarrow{\mathbf{q}}} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \overset{\bullet}{\overrightarrow{\mathbf{q}}}} = 0}$$

Observamos:

- Ecuación de Newton depende explícitamente de las coordenadas

$$\boxed{\mathrm{m}\,\ddot{\vec{\mathbf{r}}} = \vec{\mathbf{f}}(t, \vec{\mathbf{r}}, \dot{\vec{\mathbf{r}}})}$$

- El lagrangiano es el mismo para cualquiera coordenada generalizada

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \dot{\vec{\mathbf{q}}}} - \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \vec{\mathbf{q}}} = 0}$$

- El Principio de Hamilton no se refiere a ninguna coordenada

$$\boxed{\delta\left(\int_{t_1}^{t_2} \mathrm{L}(s, \vec{\mathbf{q}}(s), \dot{\vec{\mathbf{q}}}(s))\right) \mathrm{d}s = 0}$$

parece más fundamental, pues todo está en la integral.

Observamos:

- Ecuación de Newton depende explícitamente de las coordenadas

$$\boxed{m\ddot{\vec{\mathbf{r}}} = \vec{\mathbf{f}}(t, \vec{\mathbf{r}}, \dot{\vec{\mathbf{r}}})}$$

- El lagrangiano es el mismo para cualquiera coordenada generalizada

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \dot{\vec{\mathbf{q}}}} - \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \vec{\mathbf{q}}} = 0}$$

- El Principio de Hamilton no se refiere a ninguna coordenada

$$\boxed{\delta\left(\int_{t_1}^{t_2} \mathrm{L}(s, \vec{\mathbf{q}}(s), \dot{\vec{\mathbf{q}}}(s))\right) \mathrm{d}s = 0}$$

parece más fundamental, pues todo está en la integral.

Observamos:

- Ecuación de Newton depende explícitamente de las coordenadas

$$\boxed{\mathrm{m}\,\ddot{\vec{\mathbf{r}}} = \vec{\mathbf{f}}(t, \vec{\mathbf{r}}, \dot{\vec{\mathbf{r}}})}$$

- El lagrangiano es el mismo para cualquiera coordenada generalizada

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \dot{\vec{\mathbf{q}}}} - \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \vec{\mathbf{q}}} = 0}$$

- El Principio de Hamilton no se refiere a ninguna coordenada

$$\boxed{\delta\left(\int_{t_1}^{t_2} \mathrm{L}(s, \vec{\mathbf{q}}(s), \dot{\vec{\mathbf{q}}}(s))\right) \mathrm{d}s = 0}$$

parece más fundamental, pues todo está en la integral.

Observamos:

- Ecuación de Newton depende explícitamente de las coordenadas

$$\boxed{\mathrm{m}\,\ddot{\vec{\mathbf{r}}} = \vec{\mathbf{f}}(t, \vec{\mathbf{r}}, \dot{\vec{\mathbf{r}}})}$$

- El lagrangiano es el mismo para cualquiera coordenada generalizada

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \dot{\vec{\mathbf{q}}}} - \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \vec{\mathbf{q}}} = 0}$$

- El Principio de Hamilton no se refiere a ninguna coordenada

$$\boxed{\delta\left(\int_{t_1}^{t_2} \mathrm{L}(s, \vec{\mathbf{q}}(s), \dot{\vec{\mathbf{q}}}(s))\right) \mathrm{d}s = 0}$$

parece más fundamental, pues todo está en la integral.

- Un ejemplo. Sistema conservativo

$$L \doteq \underbrace{K}_{\text{energía cinética}} - \overbrace{V}^{\text{energía potencial}}$$

Así, para $\vec{\mathbf{f}}(t, \vec{\mathbf{r}}, \dot{\vec{\mathbf{r}}}) = -\nabla V(\vec{\mathbf{r}})$ y $(\vec{\mathbf{r}}, \dot{\vec{\mathbf{r}}}) = (\vec{\mathbf{q}}, \dot{\vec{\mathbf{q}}})$ se tiene

$$L(t, \vec{\mathbf{q}}, \dot{\vec{\mathbf{q}}}) \doteq \underbrace{\frac{1}{2} m |\dot{\vec{\mathbf{q}}}|^2}_{\text{energía cinética}} - \overbrace{V(\vec{\mathbf{q}})}^{\text{energía potencial}}$$

y

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{\mathbf{q}}}} - \frac{\partial L}{\partial \vec{\mathbf{q}}} = 0 \quad \rightsquigarrow \quad m \ddot{\vec{\mathbf{r}}} + \nabla V(\dot{\vec{\mathbf{r}}}) = 0$$

(ec. de Lagrange) (2ª Ley de Newton)

- Un ejemplo. Sistema conservativo

$$\mathrm{L} \doteq \underbrace{\mathrm{K}}_{\text{energía cinética}} - \overbrace{\mathrm{V}}^{\text{energía potencial}}$$

Así, para $\vec{\mathbf{f}}(t, \vec{\mathbf{r}}, \dot{\vec{\mathbf{r}}}) = -\nabla \mathrm{V}(\vec{\mathbf{r}})$ y $(\vec{\mathbf{r}}, \dot{\vec{\mathbf{r}}}) = (\vec{\mathbf{q}}, \dot{\vec{\mathbf{q}}})$ se tiene

$$\mathrm{L}(t, \vec{\mathbf{q}}, \dot{\vec{\mathbf{q}}}) \doteq \underbrace{\frac{1}{2}\mathrm{m}|\dot{\vec{\mathbf{q}}}|^2}_{\text{energía cinética}} - \overbrace{\mathrm{V}(\vec{\mathbf{q}})}^{\text{energía potencial}}$$

y

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \dot{\vec{\mathbf{q}}}} - \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \vec{\mathbf{q}}} = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \mathrm{m}\ddot{\vec{\mathbf{r}}} + \nabla \mathrm{V}(\dot{\vec{\mathbf{r}}}) = 0$$

(ec. de Lagrange) (2ª Ley de Newton)

- Un ejemplo. Sistema conservativo

$$\mathrm{L} \doteq \underbrace{\mathrm{K}}_{\text{energía cinética}} - \overbrace{\mathrm{V}}^{\text{energía potencial}}$$

Así, para $\overrightarrow{\mathbf{f}}(t, \overrightarrow{\mathbf{r}}, \dot{\overrightarrow{\mathbf{r}}}) = -\nabla \mathrm{V}(\overrightarrow{\mathbf{r}})$ y $(\overrightarrow{\mathbf{r}}, \dot{\overrightarrow{\mathbf{r}}}) = (\overrightarrow{\mathbf{q}}, \dot{\overrightarrow{\mathbf{q}}})$ se tiene

$$\mathrm{L}(t, \overrightarrow{\mathbf{q}}, \dot{\overrightarrow{\mathbf{q}}}) \doteq \underbrace{\frac{1}{2}\mathrm{m}|\dot{\overrightarrow{\mathbf{q}}}|^2}_{\text{energía cinética}} - \overbrace{\mathrm{V}(\overrightarrow{\mathbf{q}})}^{\text{energía potencial}}$$

y

$$\underset{\text{(ec. de Lagrange)}}{\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \dot{\overrightarrow{\mathbf{q}}}} - \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \overrightarrow{\mathbf{q}}} = 0} \quad \rightsquigarrow \quad \underset{\text{(2}^a\text{ Ley de Newton)}}{\mathrm{m}\ddot{\overrightarrow{\mathbf{r}}} + \nabla \mathrm{V}(\dot{\overrightarrow{\mathbf{r}}}) = 0}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \overrightarrow{\dot{\mathbf{q}}}} - \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \overrightarrow{\mathbf{q}}} = 0$$ sistema de n ecuaciones de segundo orden en t

Interesa reducción de orden mediante $\overrightarrow{\mathbf{w}} = \overrightarrow{\dot{\mathbf{q}}}$ se obtienen $2n$ ecuaciones de primer orden en t para $(\overrightarrow{\mathbf{q}}, \overrightarrow{\mathbf{w}})$.

Para buscar una reducción simétrica

$$\overrightarrow{\mathbf{p}} \doteq \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \overrightarrow{\dot{\mathbf{q}}}}$$ momento generalizado o conjugado

entonces la ecuación de Lagrange queda

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \overrightarrow{\dot{\mathbf{q}}}} - \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \overrightarrow{\mathbf{q}}} = 0$$

$$\overrightarrow{\dot{\mathbf{p}}} \quad \underbrace{}_{=} \quad \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \overrightarrow{\mathbf{q}}}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \overset{\bullet}{\overrightarrow{\mathbf{q}}}} - \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \overrightarrow{\mathbf{q}}} = 0$$ sistema de n ecuaciones de segundo orden en t

Interesa reducción de orden mediante $\overrightarrow{\mathbf{w}} = \overset{\bullet}{\overrightarrow{\mathbf{q}}}$ se obtienen $2n$ ecuaciones de primer orden en t para $(\overrightarrow{\mathbf{q}}, \overrightarrow{\mathbf{w}})$.

Para buscar una reducción simétrica

$$\overrightarrow{\mathbf{p}} \doteq \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \overset{\bullet}{\overrightarrow{\mathbf{q}}}}$$ momento generalizado o conjugado

entonces la ecuación de Lagrange queda

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \overset{\bullet}{\overrightarrow{\mathbf{q}}}}}_{\overset{\bullet}{\overrightarrow{\mathbf{p}}}} - \underbrace{\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \overrightarrow{\mathbf{q}}}}_{\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \overrightarrow{\mathbf{q}}}} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \dot{\vec{\mathbf{q}}}} - \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \vec{\mathbf{q}}} = 0$$ sistema de n ecuaciones de segundo orden en t

Interesa reducción de orden mediante $\vec{\mathbf{w}} = \dot{\vec{\mathbf{q}}}$ se obtienen $2n$ ecuaciones de primer orden en t para $(\vec{\mathbf{q}}, \vec{\mathbf{w}})$.

Para buscar una reducción simétrica

$$\vec{\mathbf{p}} \doteq \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \dot{\vec{\mathbf{q}}}}$$ momento generalizado o conjugado

entonces la ecuación de Lagrange queda

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \dot{\vec{\mathbf{q}}}} - \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \vec{\mathbf{q}}} = 0$$

$$\dot{\vec{\mathbf{p}}} \overbrace{=} \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \vec{\mathbf{q}}}$$

Naturaleza de los problemas de Hamilton–Jacobi

Teoría de Hamilton–Jacobi. Los momentos

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \dot{\vec{\mathbf{q}}}} - \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \vec{\mathbf{q}}} = 0$$ sistema de n ecuaciones de segundo orden en t

Interesa reducción de orden mediante $\vec{\mathbf{w}} = \dot{\vec{\mathbf{q}}}$ se obtienen $2n$ ecuaciones de primer orden en t para $(\vec{\mathbf{q}}, \vec{\mathbf{w}})$.

Para buscar una reducción simétrica

$$\vec{\mathbf{p}} \doteq \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \dot{\vec{\mathbf{q}}}}$$ momento generalizado o conjugado

entonces la ecuación de Lagrange queda

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \dot{\vec{\mathbf{q}}}} - \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \vec{\mathbf{q}}} = 0$$

$$\dot{\vec{\mathbf{p}}} \quad \overbrace{=} \quad \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \vec{\mathbf{q}}}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \overset{\bullet}{\vec{\mathbf{q}}}} - \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \vec{\mathbf{q}}} = 0$$ sistema de n ecuaciones de segundo orden en t

Interesa reducción de orden mediante $\vec{\mathbf{w}} = \overset{\bullet}{\vec{\mathbf{q}}}$ se obtienen $2n$ ecuaciones de primer orden en t para $(\vec{\mathbf{q}}, \vec{\mathbf{w}})$.
Para buscar una reducción simétrica

$$\vec{\mathbf{p}} \doteq \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \overset{\bullet}{\vec{\mathbf{q}}}}$$ momento generalizado o conjugado

entonces la ecuación de Lagrange queda

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \overset{\bullet}{\vec{\mathbf{q}}}}}_{\overset{\bullet}{\vec{\mathbf{p}}}\ =} - \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \vec{\mathbf{q}}} = 0 \qquad \overset{\bullet}{\vec{\mathbf{p}}} = \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \vec{\mathbf{q}}}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \dot{\vec{\mathbf{q}}}} - \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \vec{\mathbf{q}}} = 0$$ sistema de n ecuaciones de segundo orden en t

Interesa reducción de orden mediante $\vec{\mathbf{w}} = \dot{\vec{\mathbf{q}}}$ se obtienen $2n$ ecuaciones de primer orden en t para $(\vec{\mathbf{q}}, \vec{\mathbf{w}})$.

Para buscar una reducción simétrica

$$\vec{\mathbf{p}} \doteq \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \dot{\vec{\mathbf{q}}}}$$ momento generalizado o conjugado

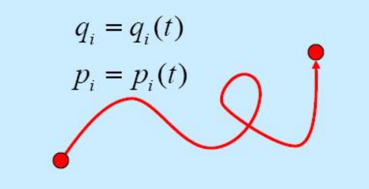
entonces la ecuación de Lagrange queda

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \dot{\vec{\mathbf{q}}}} - \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \vec{\mathbf{q}}} = 0$$

$$\dot{\vec{\mathbf{p}}} \quad \overbrace{=} \quad \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \vec{\mathbf{q}}}$$

Ahora

$$(t, \overrightarrow{\mathbf{q}}, \dot{\overrightarrow{\mathbf{q}}}) \mapsto (t, \overrightarrow{\mathbf{q}}, \overrightarrow{\mathbf{p}})$$



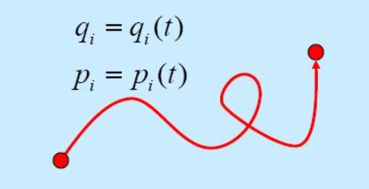
Espacio de fases ($\mathbb{E}^n \times \mathbb{E}^n$)

Además, mediante la transformación de Legendre se introduce el hamiltoniano

$$\mathrm{H}(t, \overrightarrow{\mathbf{q}}, \overrightarrow{\mathbf{p}}) \doteq \langle \dot{\overrightarrow{\mathbf{q}}}, \overrightarrow{\mathbf{p}} \rangle - \mathrm{L}(t, \overrightarrow{\mathbf{q}}, \dot{\overrightarrow{\mathbf{q}}})$$

Ahora

$$(t, \vec{\mathbf{q}}, \dot{\vec{\mathbf{q}}}) \mapsto (t, \vec{\mathbf{q}}, \vec{\mathbf{p}})$$



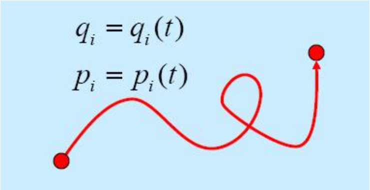
Espacio de fases ($\mathbb{E}^n \times \mathbb{E}^n$)

Además, mediante la transformación de Legendre se introduce el hamiltoniano

$$\mathrm{H}(t, \vec{\mathbf{q}}, \vec{\mathbf{p}}) \doteq \langle \dot{\vec{\mathbf{q}}}, \vec{\mathbf{p}} \rangle - \mathrm{L}(t, \vec{\mathbf{q}}, \dot{\vec{\mathbf{q}}})$$

Ahora

$$(t, \vec{\mathbf{q}}, \dot{\vec{\mathbf{q}}}) \mapsto (t, \vec{\mathbf{q}}, \vec{\mathbf{p}})$$



Espacio de fases $(\mathbb{E}^n \times \mathbb{E}^n)$

Además, mediante la transformación de Legendre se introduce el hamiltoniano

$$\mathrm{H}(t, \vec{\mathbf{q}}, \vec{\mathbf{p}}) \doteq \langle \dot{\vec{\mathbf{q}}}, \vec{\mathbf{p}} \rangle - \mathrm{L}(t, \vec{\mathbf{q}}, \dot{\vec{\mathbf{q}}})$$

En sistemas conservativos

$$\mathrm{L}(t, \vec{\mathbf{q}}, \dot{\vec{\mathbf{q}}}) \doteq \underbrace{\frac{1}{2}\mathrm{m}|\dot{\vec{\mathbf{q}}}|^2}_{\text{energía cinética}} - \overbrace{\mathrm{V}(\vec{\mathbf{q}})}^{\text{energía potencial}}$$

la relación $\vec{\mathbf{p}} = \dfrac{\partial \mathrm{L}}{\partial \dot{\vec{\mathbf{q}}}}(t, \vec{\mathbf{q}}, \dot{\vec{\mathbf{q}}}) = \mathrm{m}\dot{\vec{\mathbf{q}}}$ lleva a

$$\begin{aligned}
\mathrm{H}(t, \vec{\mathbf{q}}, \vec{\mathbf{p}}) &= \langle \dot{\vec{\mathbf{q}}}, \vec{\mathbf{p}} \rangle - \mathrm{L}(t, \vec{\mathbf{q}}, \dot{\vec{\mathbf{q}}}) \\
&= \underbrace{\frac{1}{2}\mathrm{m}|\dot{\vec{\mathbf{q}}}|^2}_{\text{energía cinética}} + \underbrace{\mathrm{V}(\vec{\mathbf{q}})}_{\text{energía potencial}}
\end{aligned}$$

En sistemas conservativos

$$\mathrm{L}(t, \vec{\mathbf{q}}, \dot{\vec{\mathbf{q}}}) \doteq \underbrace{\frac{1}{2}\mathrm{m}|\dot{\vec{\mathbf{q}}}|^2}_{\text{energía cinética}} - \overbrace{\mathrm{V}(\vec{\mathbf{q}})}^{\text{energía potencial}}$$

la relación $\vec{\mathbf{p}} = \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \dot{\vec{\mathbf{q}}}}(t, \vec{\mathbf{q}}, \dot{\vec{\mathbf{q}}}) = \mathrm{m}\dot{\vec{\mathbf{q}}}$ lleva a

$$\begin{aligned}\mathrm{H}(t, \vec{\mathbf{q}}, \vec{\mathbf{p}}) &= \langle \dot{\vec{\mathbf{q}}}, \vec{\mathbf{p}} \rangle - \mathrm{L}(t, \vec{\mathbf{q}}, \dot{\vec{\mathbf{q}}}) \\ &= \underbrace{\frac{1}{2}\mathrm{m}|\dot{\vec{\mathbf{q}}}|^2}_{\text{energía cinética}} + \underbrace{\mathrm{V}(\vec{\mathbf{q}})}_{\text{energía potencial}}\end{aligned}$$

En sistemas conservativos

$$\mathrm{L}(t, \vec{\mathbf{q}}, \dot{\vec{\mathbf{q}}}) \doteq \underbrace{\frac{1}{2}\mathrm{m}|\dot{\vec{\mathbf{q}}}|^2}_{\text{energía cinética}} - \overbrace{\mathrm{V}(\vec{\mathbf{q}})}^{\text{energía potencial}}$$

la relación $\vec{\mathbf{p}} = \dfrac{\partial \mathrm{L}}{\partial \dot{\vec{\mathbf{q}}}}(t, \vec{\mathbf{q}}, \dot{\vec{\mathbf{q}}}) = \mathrm{m}\dot{\vec{\mathbf{q}}}$ lleva a

$$\begin{aligned}\mathrm{H}(t, \vec{\mathbf{q}}, \vec{\mathbf{p}}) &= \langle \dot{\vec{\mathbf{q}}}, \vec{\mathbf{p}} \rangle - \mathrm{L}(t, \vec{\mathbf{q}}, \dot{\vec{\mathbf{q}}}) \\ &= \underbrace{\frac{1}{2}\mathrm{m}|\dot{\vec{\mathbf{q}}}|^2}_{\text{energía cinética}} + \underbrace{\mathrm{V}(\vec{\mathbf{q}})}_{\text{energía potencial}}\end{aligned}$$

En sistemas conservativos

$$\mathrm{L}(t, \vec{\mathbf{q}}, \dot{\vec{\mathbf{q}}}) \doteq \underbrace{\frac{1}{2}\mathrm{m}|\dot{\vec{\mathbf{q}}}|^2}_{\text{energía cinética}} - \overbrace{\mathrm{V}(\vec{\mathbf{q}})}^{\text{energía potencial}}$$

la relación $\vec{\mathbf{p}} = \dfrac{\partial \mathrm{L}}{\partial \dot{\vec{\mathbf{q}}}}(t, \vec{\mathbf{q}}, \dot{\vec{\mathbf{q}}}) = \mathrm{m}\dot{\vec{\mathbf{q}}}$ lleva a

$$\begin{aligned} \mathrm{H}(t, \vec{\mathbf{q}}, \vec{\mathbf{p}}) &= \langle \dot{\vec{\mathbf{q}}}, \vec{\mathbf{p}} \rangle - \mathrm{L}(t, \vec{\mathbf{q}}, \dot{\vec{\mathbf{q}}}) \\ &= \underbrace{\frac{1}{2}\mathrm{m}|\dot{\vec{\mathbf{q}}}|^2}_{\text{energía cinética}} + \underbrace{\mathrm{V}(\vec{\mathbf{q}})}_{\text{energía potencial}} \end{aligned}$$

Para

$$\mathrm{H}(t, \vec{\mathbf{q}}, \vec{\mathbf{p}}) \doteq \langle \dot{\vec{\mathbf{q}}}, \vec{\mathbf{p}} \rangle - \mathrm{L}(t, \vec{\mathbf{q}}, \dot{\vec{\mathbf{q}}})$$

se tiene

$$\begin{cases} \vec{\mathbf{p}} &= \dfrac{\partial \mathrm{L}}{\partial \dot{\vec{\mathbf{q}}}}, \quad \boxed{\dot{\vec{\mathbf{p}}} = \dfrac{\partial \mathrm{L}}{\partial \vec{\mathbf{q}}} \text{ ec. de Lagrange}} \\ \mathrm{dH} &= \langle \vec{\mathbf{p}} - \dfrac{\partial \mathrm{L}}{\partial \dot{\vec{\mathbf{q}}}}, \mathrm{d}\dot{\vec{\mathbf{p}}} \rangle + \langle \dot{\vec{\mathbf{q}}}, \mathrm{d}\vec{\mathbf{p}} \rangle - \dfrac{\partial \mathrm{L}}{\partial t}\mathrm{d}t - \langle \dfrac{\partial \mathrm{L}}{\partial \vec{\mathbf{q}}}, \mathrm{d}\vec{\mathbf{q}} \rangle \\ &= \langle \dot{\vec{\mathbf{q}}}, \mathrm{d}\vec{\mathbf{p}} \rangle - \dfrac{\partial \mathrm{L}}{\partial t}\mathrm{d}t - \langle \dot{\vec{\mathbf{p}}}, \mathrm{d}\vec{\mathbf{q}} \rangle \end{cases}$$

de donde

$$\langle \dot{\vec{\mathbf{q}}}, \mathrm{d}\vec{\mathbf{p}} \rangle - \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial t}\mathrm{d}t - \langle \dot{\vec{\mathbf{p}}}, \mathrm{d}\vec{\mathbf{q}} \rangle = \mathrm{dH} = \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial t}\mathrm{d}t + \langle \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial \vec{\mathbf{q}}}, \mathrm{d}\vec{\mathbf{q}} \rangle + \langle \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial \vec{\mathbf{p}}}, \mathrm{d}\vec{\mathbf{p}} \rangle$$

Para

$$\mathrm{H}(t, \vec{\mathbf{q}}, \vec{\mathbf{p}}) \doteq \langle \dot{\vec{\mathbf{q}}}, \vec{\mathbf{p}} \rangle - \mathrm{L}(t, \vec{\mathbf{q}}, \dot{\vec{\mathbf{q}}})$$

se tiene

$$\begin{cases} \vec{\mathbf{p}} &= \dfrac{\partial \mathrm{L}}{\partial \dot{\vec{\mathbf{q}}}}, \quad \boxed{\dot{\vec{\mathbf{p}}} = \dfrac{\partial \mathrm{L}}{\partial \vec{\mathbf{q}}} \text{ ec. de Lagrange}} \\ \mathrm{dH} &= \langle \vec{\mathbf{p}} - \dfrac{\partial \mathrm{L}}{\partial \dot{\vec{\mathbf{q}}}}, \mathrm{d}\dot{\vec{\mathbf{p}}} \rangle + \langle \dot{\vec{\mathbf{q}}}, \mathrm{d}\vec{\mathbf{p}} \rangle - \dfrac{\partial \mathrm{L}}{\partial t}\mathrm{d}t - \langle \dfrac{\partial \mathrm{L}}{\partial \vec{\mathbf{q}}}, \mathrm{d}\vec{\mathbf{q}} \rangle \\ &= \langle \dot{\vec{\mathbf{q}}}, \mathrm{d}\vec{\mathbf{p}} \rangle - \dfrac{\partial \mathrm{L}}{\partial t}\mathrm{d}t - \langle \dot{\vec{\mathbf{p}}}, \mathrm{d}\vec{\mathbf{q}} \rangle \end{cases}$$

de donde

$$\langle \dot{\vec{\mathbf{q}}}, \mathrm{d}\vec{\mathbf{p}} \rangle - \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial t}\mathrm{d}t - \langle \dot{\vec{\mathbf{p}}}, \mathrm{d}\vec{\mathbf{q}} \rangle = \mathrm{dH} = \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial t}\mathrm{d}t + \langle \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial \vec{\mathbf{q}}}, \mathrm{d}\vec{\mathbf{q}} \rangle + \langle \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial \vec{\mathbf{p}}}, \mathrm{d}\vec{\mathbf{p}} \rangle$$

Para

$$\mathrm{H}(t, \overrightarrow{\mathbf{q}}, \overrightarrow{\mathbf{p}}) \doteq \langle \dot{\overrightarrow{\mathbf{q}}}, \overrightarrow{\mathbf{p}} \rangle - \mathrm{L}(t, \overrightarrow{\mathbf{q}}, \dot{\overrightarrow{\mathbf{q}}})$$

se tiene

$$\begin{cases} \overrightarrow{\mathbf{p}} & = \dfrac{\partial \mathrm{L}}{\partial \dot{\overrightarrow{\mathbf{q}}}}, \quad \boxed{\dot{\overrightarrow{\mathbf{p}}} = \dfrac{\partial \mathrm{L}}{\partial \overrightarrow{\mathbf{q}}} \ \text{ec. de Lagrange}} \\ \mathrm{dH} & = \langle \overrightarrow{\mathbf{p}} - \dfrac{\partial \mathrm{L}}{\partial \dot{\overrightarrow{\mathbf{q}}}}, \mathrm{d}\dot{\overrightarrow{\mathbf{p}}} \rangle + \langle \dot{\overrightarrow{\mathbf{q}}}, \mathrm{d}\overrightarrow{\mathbf{p}} \rangle - \dfrac{\partial \mathrm{L}}{\partial t}\mathrm{d}t - \langle \dfrac{\partial \mathrm{L}}{\partial \overrightarrow{\mathbf{q}}}, \mathrm{d}\overrightarrow{\mathbf{q}} \rangle \\ & = \langle \dot{\overrightarrow{\mathbf{q}}}, \mathrm{d}\overrightarrow{\mathbf{p}} \rangle - \dfrac{\partial \mathrm{L}}{\partial t}\mathrm{d}t - \langle \dot{\overrightarrow{\mathbf{p}}}, \mathrm{d}\overrightarrow{\mathbf{q}} \rangle \end{cases}$$

de donde

$$\langle \dot{\overrightarrow{\mathbf{q}}}, \mathrm{d}\overrightarrow{\mathbf{p}} \rangle - \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial t}\mathrm{d}t - \langle \dot{\overrightarrow{\mathbf{p}}}, \mathrm{d}\overrightarrow{\mathbf{q}} \rangle = \mathrm{dH} = \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial t}\mathrm{d}t + \langle \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial \overrightarrow{\mathbf{q}}}, \mathrm{d}\overrightarrow{\mathbf{q}} \rangle + \langle \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial \overrightarrow{\mathbf{p}}}, \mathrm{d}\overrightarrow{\mathbf{p}} \rangle$$

Para

$$\mathrm{H}(t, \overrightarrow{\mathbf{q}}, \overrightarrow{\mathbf{p}}) \doteq \langle \dot{\overrightarrow{\mathbf{q}}}, \overrightarrow{\mathbf{p}} \rangle - \mathrm{L}(t, \overrightarrow{\mathbf{q}}, \dot{\overrightarrow{\mathbf{q}}})$$

se tiene

$$\begin{cases} \overrightarrow{\mathbf{p}} & = \dfrac{\partial \mathrm{L}}{\partial \dot{\overrightarrow{\mathbf{q}}}}, \ \boxed{\dot{\overrightarrow{\mathbf{p}}} = \dfrac{\partial \mathrm{L}}{\partial \overrightarrow{\mathbf{q}}} \ \text{ec. de Lagrange}} \\ \mathrm{dH} & = \langle \overrightarrow{\mathbf{p}} - \dfrac{\partial \mathrm{L}}{\partial \dot{\overrightarrow{\mathbf{q}}}}, \mathrm{d}\dot{\overrightarrow{\mathbf{p}}} \rangle + \langle \dot{\overrightarrow{\mathbf{q}}}, \mathrm{d}\overrightarrow{\mathbf{p}} \rangle - \dfrac{\partial \mathrm{L}}{\partial t}\mathrm{d}t - \langle \dfrac{\partial \mathrm{L}}{\partial \overrightarrow{\mathbf{q}}}, \mathrm{d}\overrightarrow{\mathbf{q}} \rangle \\ & = \langle \dot{\overrightarrow{\mathbf{q}}}, \mathrm{d}\overrightarrow{\mathbf{p}} \rangle - \dfrac{\partial \mathrm{L}}{\partial t}\mathrm{d}t - \langle \dot{\overrightarrow{\mathbf{p}}}, \mathrm{d}\overrightarrow{\mathbf{q}} \rangle \end{cases}$$

de donde

$$\langle \dot{\overrightarrow{\mathbf{q}}}, \mathrm{d}\overrightarrow{\mathbf{p}} \rangle - \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial t}\mathrm{d}t - \langle \dot{\overrightarrow{\mathbf{p}}}, \mathrm{d}\overrightarrow{\mathbf{q}} \rangle = \mathrm{dH} = \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial t}\mathrm{d}t + \langle \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial \overrightarrow{\mathbf{q}}}, \mathrm{d}\overrightarrow{\mathbf{q}} \rangle + \langle \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial \overrightarrow{\mathbf{p}}}, \mathrm{d}\overrightarrow{\mathbf{p}} \rangle$$

El hamiltoniano

$$\mathrm{H}(t, \overrightarrow{\mathbf{q}}, \overrightarrow{\mathbf{p}}) \doteq \langle \overset{\bullet}{\overrightarrow{\mathbf{q}}}, \overrightarrow{\mathbf{p}} \rangle - \mathrm{L}(t, \overrightarrow{\mathbf{q}}, \overset{\bullet}{\overrightarrow{\mathbf{q}}})$$

satisface

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \overset{\bullet}{\overrightarrow{\mathbf{q}}} & = & \dfrac{\partial \mathrm{H}}{\partial \overrightarrow{\mathbf{p}}}(t, \overrightarrow{\mathbf{q}}, \overrightarrow{\mathbf{p}}) \\ \overset{\bullet}{\overrightarrow{\mathbf{p}}} & = & -\dfrac{\partial \mathrm{H}}{\partial \overrightarrow{\mathbf{q}}}(t, \overrightarrow{\mathbf{q}}, \overrightarrow{\mathbf{p}}) \end{array} \right.$$

ecuaciones características de Hamilton

($2n$ ecuaciones “simétricas” de primer orden en t para $(\overrightarrow{\mathbf{q}}, \overrightarrow{\mathbf{p}})$)

Entonces

$$\frac{d\mathrm{H}}{dt}(t, \overrightarrow{\mathbf{q}}(t), \overrightarrow{\mathbf{p}}(t)) = \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial t}(t, \overrightarrow{\mathbf{q}}(t), \overrightarrow{\mathbf{p}}(t)) = -\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial t}(t, \overrightarrow{\mathbf{q}}(t), \overset{\bullet}{\overrightarrow{\mathbf{q}}}(t))$$

con lo que $\boxed{\dfrac{\partial \mathrm{L}}{\partial t}(t, \overrightarrow{\mathbf{q}}(t), \overset{\bullet}{\overrightarrow{\mathbf{q}}}(t)) = 0 \Rightarrow \mathrm{H}(t, \overrightarrow{\mathbf{q}}(t), \overrightarrow{\mathbf{p}}(t)) = \text{constante}}$

El hamiltoniano

$$\mathrm{H}(t, \overrightarrow{\mathbf{q}}, \overrightarrow{\mathbf{p}}) \doteq \langle \overset{\bullet}{\overrightarrow{\mathbf{q}}}, \overrightarrow{\mathbf{p}} \rangle - \mathrm{L}(t, \overrightarrow{\mathbf{q}}, \overset{\bullet}{\overrightarrow{\mathbf{q}}})$$

satisface

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \overset{\bullet}{\overrightarrow{\mathbf{q}}} & = & \dfrac{\partial \mathrm{H}}{\partial \overrightarrow{\mathbf{p}}}(t, \overrightarrow{\mathbf{q}}, \overrightarrow{\mathbf{p}}) \\ \overset{\bullet}{\overrightarrow{\mathbf{p}}} & = & -\dfrac{\partial \mathrm{H}}{\partial \overrightarrow{\mathbf{q}}}(t, \overrightarrow{\mathbf{q}}, \overrightarrow{\mathbf{p}}) \end{array} \right.$$

ecuaciones características de Hamilton

($2n$ ecuaciones "simétricas" de primer orden en t para $(\overrightarrow{\mathbf{q}}, \overrightarrow{\mathbf{p}})$)

Entonces

$$\frac{\mathrm{dH}}{\mathrm{d}t}(t, \overrightarrow{\mathbf{q}}(t), \overrightarrow{\mathbf{p}}(t)) = \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial t}(t, \overrightarrow{\mathbf{q}}(t), \overrightarrow{\mathbf{p}}(t)) = -\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial t}(t, \overrightarrow{\mathbf{q}}(t), \overset{\bullet}{\overrightarrow{\mathbf{q}}}(t))$$

con lo que $\boxed{\dfrac{\partial \mathrm{L}}{\partial t}(t, \overrightarrow{\mathbf{q}}(t), \overset{\bullet}{\overrightarrow{\mathbf{q}}}(t)) = 0 \Rightarrow \mathrm{H}(t, \overrightarrow{\mathbf{q}}(t), \overrightarrow{\mathbf{p}}(t)) = \text{constante}}$

El hamiltoniano

$$\mathrm{H}(t, \overrightarrow{\mathbf{q}}, \overrightarrow{\mathbf{p}}) \doteq \langle \overset{\bullet}{\overrightarrow{\mathbf{q}}}, \overrightarrow{\mathbf{p}} \rangle - \mathrm{L}(t, \overrightarrow{\mathbf{q}}, \overset{\bullet}{\overrightarrow{\mathbf{q}}})$$

satisface

$$\begin{cases} \overset{\bullet}{\overrightarrow{\mathbf{q}}} &= \dfrac{\partial \mathrm{H}}{\partial \overrightarrow{\mathbf{p}}}(t, \overrightarrow{\mathbf{q}}, \overrightarrow{\mathbf{p}}) \\ \overset{\bullet}{\overrightarrow{\mathbf{p}}} &= -\dfrac{\partial \mathrm{H}}{\partial \overrightarrow{\mathbf{q}}}(t, \overrightarrow{\mathbf{q}}, \overrightarrow{\mathbf{p}}) \end{cases}$$ ecuaciones características de Hamilton

($2n$ ecuaciones “simétricas” de primer orden en t para $(\overrightarrow{\mathbf{q}}, \overrightarrow{\mathbf{p}})$)

Entonces

$$\frac{d\mathrm{H}}{dt}(t, \overrightarrow{\mathbf{q}}(t), \overrightarrow{\mathbf{p}}(t)) = \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial t}(t, \overrightarrow{\mathbf{q}}(t), \overrightarrow{\mathbf{p}}(t)) = -\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial t}(t, \overrightarrow{\mathbf{q}}(t), \overset{\bullet}{\overrightarrow{\mathbf{q}}}(t))$$

con lo que $\boxed{\dfrac{\partial \mathrm{L}}{\partial t}(t, \overrightarrow{\mathbf{q}}(t), \overset{\bullet}{\overrightarrow{\mathbf{q}}}(t)) = 0 \Rightarrow \mathrm{H}(t, \overrightarrow{\mathbf{q}}(t), \overrightarrow{\mathbf{p}}(t)) = \text{constante}}$

El hamiltoniano

$$\mathrm{H}(t, \vec{\mathbf{q}}, \vec{\mathbf{p}}) \doteq \langle \dot{\vec{\mathbf{q}}}, \vec{\mathbf{p}} \rangle - \mathrm{L}(t, \vec{\mathbf{q}}, \dot{\vec{\mathbf{q}}})$$

satisface

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{\vec{\mathbf{q}}} & = & \dfrac{\partial \mathrm{H}}{\partial \vec{\mathbf{p}}}(t, \vec{\mathbf{q}}, \vec{\mathbf{p}}) \\ \dot{\vec{\mathbf{p}}} & = & -\dfrac{\partial \mathrm{H}}{\partial \vec{\mathbf{q}}}(t, \vec{\mathbf{q}}, \vec{\mathbf{p}}) \end{array} \right. \quad \text{ecuaciones características de Hamilton}$$

($2n$ ecuaciones "simétricas" de primer orden en t para $(\vec{\mathbf{q}}, \vec{\mathbf{p}})$)

Entonces

$$\frac{\mathrm{dH}}{\mathrm{d}t}(t, \vec{\mathbf{q}}(t), \vec{\mathbf{p}}(t)) = \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial t}(t, \vec{\mathbf{q}}(t), \vec{\mathbf{p}}(t)) = -\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial t}(t, \vec{\mathbf{q}}(t), \dot{\vec{\mathbf{q}}}(t))$$

con lo que $\boxed{\dfrac{\partial \mathrm{L}}{\partial t}(t, \vec{\mathbf{q}}(t), \dot{\vec{\mathbf{q}}}(t)) = 0 \Rightarrow \mathrm{H}(t, \vec{\mathbf{q}}(t), \vec{\mathbf{p}}(t)) = \text{constante}}$

En sistemas conservativos

$$\mathrm{L}(t, \vec{\mathbf{q}}, \dot{\vec{\mathbf{q}}}) \doteq \underbrace{\frac{1}{2}\mathrm{m}|\dot{\vec{\mathbf{q}}}|^2}_{\text{energía cinética}} - \overbrace{\mathrm{V}(\vec{\mathbf{q}})}^{\text{energía potencial}}$$

la relación $\vec{\mathbf{p}} = \mathrm{m}\dot{\vec{\mathbf{q}}}$ lleva a

$$\mathrm{H}(t, \vec{\mathbf{q}}, \vec{\mathbf{p}}) = \langle \dot{\vec{\mathbf{q}}}, \vec{\mathbf{p}} \rangle - \mathrm{L}(t, \vec{\mathbf{q}}, \dot{\vec{\mathbf{q}}}) = \underbrace{\frac{1}{2}\mathrm{m}|\dot{\vec{\mathbf{q}}}|^2}_{\text{energía cinética}} + \underbrace{\mathrm{V}(\vec{\mathbf{q}})}_{\text{energía potencial}}$$

entonces

$$\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial t}(t, \vec{\mathbf{q}}(t), \dot{\vec{\mathbf{q}}}(t)) = 0 \quad \Rightarrow \quad \overbrace{\frac{1}{2}\mathrm{m}|\dot{\vec{\mathbf{q}}}|^2}^{\text{energía cinética}} + \overbrace{\mathrm{V}(\vec{\mathbf{q}})}^{\text{energía potencial}} = \text{constante} = \mathrm{E}$$

En sistemas conservativos

$$\mathrm{L}(t, \vec{\mathbf{q}}, \dot{\vec{\mathbf{q}}}) \doteq \underbrace{\frac{1}{2}\mathrm{m}|\dot{\vec{\mathbf{q}}}|^2}_{\text{energía cinética}} - \overbrace{\mathrm{V}(\vec{\mathbf{q}})}^{\text{energía potencial}}$$

la relación $\vec{\mathbf{p}} = \mathrm{m}\dot{\vec{\mathbf{q}}}$ lleva a

$$\mathrm{H}(t, \vec{\mathbf{q}}, \vec{\mathbf{p}}) = \langle \dot{\vec{\mathbf{q}}}, \vec{\mathbf{p}} \rangle - \mathrm{L}(t, \vec{\mathbf{q}}, \dot{\vec{\mathbf{q}}}) = \underbrace{\frac{1}{2}\mathrm{m}|\dot{\vec{\mathbf{q}}}|^2}_{\text{energía cinética}} + \underbrace{\mathrm{V}(\vec{\mathbf{q}})}_{\text{energía potencial}}$$

entonces

$$\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial t}(t, \vec{\mathbf{q}}(t), \dot{\vec{\mathbf{q}}}(t)) = 0 \quad \Rightarrow \quad \overbrace{\frac{1}{2}\mathrm{m}|\dot{\vec{\mathbf{q}}}|^2}^{\text{energía cinética}} + \overbrace{\mathrm{V}(\vec{\mathbf{q}})}^{\text{energía potencial}} = \text{constante} = \mathrm{E}$$

En lugar de

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \dot{\vec{\mathbf{q}}}} - \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \vec{\mathbf{q}}} = 0 \qquad (n \text{ ecuaciones de segundo orden en } t)$$

ó

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{\vec{\mathbf{q}}} & = & \dfrac{\partial \mathrm{H}}{\partial \vec{\mathbf{p}}}(t, \vec{\mathbf{q}}, \vec{\mathbf{p}}) \\ \dot{\vec{\mathbf{p}}} & = & -\dfrac{\partial \mathrm{H}}{\partial \vec{\mathbf{q}}}(t, \vec{\mathbf{q}}, \vec{\mathbf{p}}) \end{array}\right. \qquad (2n \text{ ecuaciones de primer orden en } t)$$

se quiere resolver

$$\frac{\partial \mathrm{S}}{\partial t} + \mathrm{H}\left(t, \vec{\mathbf{q}}, \nabla_{\vec{\mathbf{q}}}\mathrm{S}\right) = 0 \quad \text{ecuación de Hamilton}$$

se ha reemplazado el momento conjugado $\vec{\mathbf{p}}$ por $\nabla_{\vec{\mathbf{q}}}\mathrm{S}$. Se dice que $\mathrm{S}(\vec{\mathbf{q}}, t)$ es función principal de Hamilton

En lugar de

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \overset{\bullet}{\overrightarrow{\mathbf{q}}}} - \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \overrightarrow{\mathbf{q}}} = 0 \qquad (n \text{ ecuaciones de segundo orden en } t)$$

ó

$$\left\{\begin{array}{rcl} \overset{\bullet}{\overrightarrow{\mathbf{q}}} & = & \dfrac{\partial \mathrm{H}}{\partial \overrightarrow{\mathbf{p}}}(t, \overrightarrow{\mathbf{q}}, \overrightarrow{\mathbf{p}}) \\ \overset{\bullet}{\overrightarrow{\mathbf{p}}} & = & -\dfrac{\partial \mathrm{H}}{\partial \overrightarrow{\mathbf{q}}}(t, \overrightarrow{\mathbf{q}}, \overrightarrow{\mathbf{p}}) \end{array}\right. \qquad (2n \text{ ecuaciones de primer orden en } t)$$

se quiere resolver

$$\frac{\partial \mathrm{S}}{\partial t} + \mathrm{H}\left(t, \overrightarrow{\mathbf{q}}, \nabla_{\overrightarrow{\mathbf{q}}}\mathrm{S}\right) = 0 \quad \text{ecuación de Hamilton}$$

se ha reemplazado el momento conjugado $\overrightarrow{\mathbf{p}}$ por $\nabla_{\overrightarrow{\mathbf{q}}}\mathrm{S}$. Se dice que $\mathrm{S}(\overrightarrow{\mathbf{q}}, t)$ es función principal de Hamilton

En lugar de

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \overset{\bullet}{\vec{\mathbf{q}}}} - \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \vec{\mathbf{q}}} = 0 \qquad (n \text{ ecuaciones de segundo orden en } t)$$

ó

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \overset{\bullet}{\vec{\mathbf{q}}} & = & \dfrac{\partial \mathrm{H}}{\partial \vec{\mathbf{p}}}(t, \vec{\mathbf{q}}, \vec{\mathbf{p}}) \\ \overset{\bullet}{\vec{\mathbf{p}}} & = & -\dfrac{\partial \mathrm{H}}{\partial \vec{\mathbf{q}}}(t, \vec{\mathbf{q}}, \vec{\mathbf{p}}) \end{array} \right. \qquad (2n \text{ ecuaciones de primer orden en } t)$$

se quiere resolver

$$\frac{\partial \mathrm{S}}{\partial t} + \mathrm{H}\left(t, \vec{\mathbf{q}}, \nabla_{\vec{\mathbf{q}}}\mathrm{S}\right) = 0 \quad \text{ecuación de Hamilton}$$

se ha reemplazado el momento conjugado $\vec{\mathbf{p}}$ por $\nabla_{\vec{\mathbf{q}}}\mathrm{S}$. Se dice que $\mathrm{S}(\vec{\mathbf{q}}, t)$ es función principal de Hamilton

Una solución completa es $\mathrm{S}(\overrightarrow{\mathbf{q}}, t; \overrightarrow{\alpha})$, $\overrightarrow{\alpha} \in \mathbb{E}^n$

Formalmente

$$\overrightarrow{\mathbf{p}} = \nabla_{\overrightarrow{\mathbf{q}}} \mathrm{S}(\overrightarrow{\mathbf{q}}, t; \overrightarrow{\alpha}) \quad \text{y} \quad \overrightarrow{\beta} = \nabla_{\overrightarrow{\alpha}} \mathrm{S}(\overrightarrow{\mathbf{q}}, t; \overrightarrow{\alpha}$$

definen implícitamente el movimiento $\overrightarrow{\mathbf{q}}(t; \overrightarrow{\alpha}, \overrightarrow{\beta})$ y $\overrightarrow{\mathbf{p}}(t; \overrightarrow{\alpha}, \overrightarrow{\beta})$.

Una solución completa es $\mathrm{S}(\overrightarrow{\mathbf{q}}, t; \overrightarrow{\alpha}),\ \overrightarrow{\alpha} \in \mathbb{E}^n$

Formalmente

$$\overrightarrow{\mathbf{p}} = \nabla_{\overrightarrow{\mathbf{q}}} \mathrm{S}(\overrightarrow{\mathbf{q}}, t; \overrightarrow{\alpha}) \quad \text{y} \quad \overrightarrow{\beta} = \nabla_{\overrightarrow{\alpha}} \mathrm{S}(\overrightarrow{\mathbf{q}}, t; \overrightarrow{\alpha}$$

definen implícitamente el movimiento $\overrightarrow{\mathbf{q}}(t; \overrightarrow{\alpha}, \overrightarrow{\beta})$ y $\overrightarrow{\mathbf{p}}(t; \overrightarrow{\alpha}, \overrightarrow{\beta})$.

Naturaleza de los problemas de Hamilton–Jacobi

Para hamiltonianos independientes de t, es decir, $\mathrm{H}(\overrightarrow{\mathbf{q}}, \overrightarrow{\mathbf{p}})$ (habrá conservación de la energía) es posible

$$\mathrm{S}(\overrightarrow{\mathbf{q}}, t; \overrightarrow{\alpha}) \overbrace{=}^{\text{variables separadas}} \mathbb{T}(t) + \mathrm{W}(\overrightarrow{\mathbf{q}}; \overrightarrow{\alpha})$$

con lo que la ecuación de Hamilton queda

$$\mathbb{T}'(t) = -\text{constante} = \mathrm{H}(\overrightarrow{\mathbf{q}}, \nabla_{\overrightarrow{\mathbf{q}}} \mathrm{W}(\overrightarrow{\mathbf{q}}; \overrightarrow{\alpha}))$$

es decir,

$$\mathrm{S}(\overrightarrow{\mathbf{q}}, t; \overrightarrow{\alpha}) = -\mathrm{E}t + \overbrace{\mathrm{W}(\overrightarrow{\mathbf{q}}; \overrightarrow{\alpha})}^{\text{función característica de Hamilton}}$$

con

$$\mathrm{H}(\overrightarrow{\mathbf{q}}, \nabla_{\overrightarrow{\mathbf{q}}} \mathrm{W}(\overrightarrow{\mathbf{q}}; \overrightarrow{\alpha})) = \mathrm{E}$$

Para hamiltonianos independientes de t, es decir, $\mathrm{H}(\overrightarrow{\mathbf{q}}, \overrightarrow{\mathbf{p}})$ (habrá conservación de la energía) es posible

$$\mathrm{S}(\overrightarrow{\mathbf{q}}, t; \overrightarrow{\alpha}) \overbrace{=}^{\text{variables separadas}} \mathbb{T}(t) + \mathrm{W}(\overrightarrow{\mathbf{q}}; \overrightarrow{\alpha})$$

con lo que la ecuación de Hamilton queda

$$\mathbb{T}'(t) = -\text{constante} = \mathrm{H}(\overrightarrow{\mathbf{q}}, \nabla_{\overrightarrow{\mathbf{q}}} \mathrm{W}(\overrightarrow{\mathbf{q}}; \overrightarrow{\alpha}))$$

es decir,

$$\mathrm{S}(\overrightarrow{\mathbf{q}}, t; \overrightarrow{\alpha}) = -\mathrm{E}t + \overbrace{\mathrm{W}(\overrightarrow{\mathbf{q}}; \overrightarrow{\alpha})}^{\text{función característica de Hamilton}}$$

con

$$\mathrm{H}(\overrightarrow{\mathbf{q}}, \nabla_{\overrightarrow{\mathbf{q}}} \mathrm{W}(\overrightarrow{\mathbf{q}}; \overrightarrow{\alpha})) = \mathrm{E}$$

Para hamiltonianos independientes de t, es decir, $\mathrm{H}(\overrightarrow{\mathbf{q}}, \overrightarrow{\mathbf{p}})$ (habrá conservación de la energía) es posible

$$\mathrm{S}(\overrightarrow{\mathbf{q}}, t; \overrightarrow{\alpha}) \quad \overbrace{=}^{\text{variables separadas}} \quad \mathbb{T}(t) + \mathrm{W}(\overrightarrow{\mathbf{q}}; \overrightarrow{\alpha})$$

con lo que la ecuación de Hamilton queda

$$\mathbb{T}'(t) = -\text{constante} = \mathrm{H}(\overrightarrow{\mathbf{q}}, \nabla_{\overrightarrow{\mathbf{q}}} \mathrm{W}(\overrightarrow{\mathbf{q}}; \overrightarrow{\alpha}))$$

es decir,

$$\mathrm{S}(\overrightarrow{\mathbf{q}}, t; \overrightarrow{\alpha}) = -\mathrm{E}t + \overbrace{\mathrm{W}(\overrightarrow{\mathbf{q}}; \overrightarrow{\alpha})}^{\text{función característica de Hamilton}}$$

con

$$\mathrm{H}(\overrightarrow{\mathbf{q}}, \nabla_{\overrightarrow{\mathbf{q}}} \mathrm{W}(\overrightarrow{\mathbf{q}}; \overrightarrow{\alpha})) = \mathrm{E}$$

Para hamiltonianos independientes de t, es decir, $\mathrm{H}(\overrightarrow{\mathbf{q}}, \overrightarrow{\mathbf{p}})$ (habrá conservación de la energía) es posible

$$\mathrm{S}(\overrightarrow{\mathbf{q}}, t; \overrightarrow{\alpha}) \overbrace{=}^{\text{variables separadas}} \mathbb{T}(t) + \mathrm{W}(\overrightarrow{\mathbf{q}}; \overrightarrow{\alpha})$$

con lo que la ecuación de Hamilton queda

$$\mathbb{T}'(t) = -\text{constante} = \mathrm{H}(\overrightarrow{\mathbf{q}}, \nabla_{\overrightarrow{\mathbf{q}}} \mathrm{W}(\overrightarrow{\mathbf{q}}; \overrightarrow{\alpha}))$$

es decir,

$$\mathrm{S}(\overrightarrow{\mathbf{q}}, t; \overrightarrow{\alpha}) = -\mathrm{E}t + \overbrace{\mathrm{W}(\overrightarrow{\mathbf{q}}; \overrightarrow{\alpha})}^{\text{función característica de Hamilton}}$$

con

$$\mathrm{H}(\overrightarrow{\mathbf{q}}, \nabla_{\overrightarrow{\mathbf{q}}} \mathrm{W}(\overrightarrow{\mathbf{q}}; \overrightarrow{\alpha})) = \mathrm{E}$$

Para hamiltonianos independientes de t, es decir, $\mathrm{H}(\overrightarrow{\mathbf{q}}, \overrightarrow{\mathbf{p}})$ (habrá conservación de la energía) es posible

$$\mathrm{S}(\overrightarrow{\mathbf{q}}, t; \overrightarrow{\alpha}) \overbrace{=}^{\text{variables separadas}} \mathbb{T}(t) + \mathrm{W}(\overrightarrow{\mathbf{q}}; \overrightarrow{\alpha})$$

con lo que la ecuación de Hamilton queda

$$\mathbb{T}'(t) = -\text{constante} = \mathrm{H}(\overrightarrow{\mathbf{q}}, \nabla_{\overrightarrow{\mathbf{q}}} \mathrm{W}(\overrightarrow{\mathbf{q}}; \overrightarrow{\alpha}))$$

es decir,

$$\mathrm{S}(\overrightarrow{\mathbf{q}}, t; \overrightarrow{\alpha}) = -\mathrm{E}t + \overbrace{\mathrm{W}(\overrightarrow{\mathbf{q}}; \overrightarrow{\alpha})}^{\text{función característica de Hamilton}}$$

con

$$\mathrm{H}(\overrightarrow{\mathbf{q}}, \nabla_{\overrightarrow{\mathbf{q}}} \mathrm{W}(\overrightarrow{\mathbf{q}}; \overrightarrow{\alpha})) = \mathrm{E}$$

En sistemas conservativos la relación $\overrightarrow{\mathbf{p}} = \mathrm{m}\dot{\overrightarrow{\mathbf{q}}}$ lleva a

$$\mathrm{H}(t, \overrightarrow{\mathbf{r}}, \overrightarrow{\mathbf{p}}) = \underbrace{\frac{1}{2\mathrm{m}}|\dot{\overrightarrow{\mathbf{p}}}|^2}_{\text{energía cinética}} + \underbrace{\mathrm{V}(\overrightarrow{\mathbf{r}})}_{\text{energía potencial}}$$

de modo que

$$\frac{\partial \mathrm{S}}{\partial t} + \frac{1}{2\mathrm{m}}|\dot{\overrightarrow{\mathbf{p}}}|^2 + \mathrm{V}(\overrightarrow{\mathbf{r}}) = 0 \quad \text{ecuación de Hamilton}$$

y la función característica de Hamilton viene dada por

$$|\nabla_{\overrightarrow{\mathbf{q}}} \mathrm{W}|^2 = 2\mathrm{m}[\mathrm{E} - \mathrm{V}(\overrightarrow{\mathbf{r}})].$$

En sistemas conservativos la relación $\overrightarrow{\mathbf{p}} = \mathrm{m}\dot{\overrightarrow{\mathbf{q}}}$ lleva a

$$\mathrm{H}(t, \overrightarrow{\mathbf{r}}, \overrightarrow{\mathbf{p}}) = \underbrace{\frac{1}{2\mathrm{m}}|\dot{\overrightarrow{\mathbf{p}}}|^2}_{\text{energía cinética}} + \underbrace{\mathrm{V}(\overrightarrow{\mathbf{r}})}_{\text{energía potencial}}$$

de modo que

$$\frac{\partial \mathrm{S}}{\partial t} + \frac{1}{2\mathrm{m}}|\dot{\overrightarrow{\mathbf{p}}}|^2 + \mathrm{V}(\overrightarrow{\mathbf{r}}) = 0 \quad \text{ecuación de Hamilton}$$

y la función característica de Hamilton viene dada por

$$|\nabla_{\overrightarrow{\mathbf{q}}}\mathrm{W}|^2 = 2\mathrm{m}[\mathrm{E} - \mathrm{V}(\overrightarrow{\mathbf{r}})].$$

En sistemas conservativos la relación $\vec{\mathbf{p}} = \mathrm{m}\,\dot{\vec{\mathbf{q}}}$ lleva a

$$\mathrm{H}(t, \vec{\mathbf{r}}, \vec{\mathbf{p}}) = \underbrace{\frac{1}{2\mathrm{m}}|\dot{\vec{\mathbf{p}}}|^2}_{\text{energía cinética}} + \underbrace{\mathrm{V}(\vec{\mathbf{r}})}_{\text{energía potencial}}$$

de modo que

$$\frac{\partial \mathrm{S}}{\partial t} + \frac{1}{2\mathrm{m}}|\dot{\vec{\mathbf{p}}}|^2 + \mathrm{V}(\vec{\mathbf{r}}) = 0 \quad \text{ecuación de Hamilton}$$

y la función característica de Hamilton viene dada por

$$|\nabla_{\vec{\mathbf{q}}}\mathrm{W}|^2 = 2\mathrm{m}[\mathrm{E} - \mathrm{V}(\vec{\mathbf{r}})].$$

- $\boxed{f(\overrightarrow{\mathbf{r}}) = \text{constante}}$ es una superficie (conjunto de nivel)
- $\boxed{f(\overrightarrow{\mathbf{r}}, t) = \text{constante}}$ es una superficie que se "mueve con el tiempo"

Para un hamiltoniano independientes de t,

$$\mathrm{S}(\overrightarrow{\mathbf{r}}, t; \overrightarrow{\alpha}) = -\mathrm{E}t + \overbrace{\mathrm{W}(\overrightarrow{\mathbf{r}}; \overrightarrow{\alpha})}^{\text{función característica de Hamilton}}$$

omitimos la dependencia en $\overrightarrow{\alpha}$

- $\boxed{f(\overrightarrow{\mathbf{r}}) = \text{constante}}$ es una superficie (conjunto de nivel)
- $\boxed{f(\overrightarrow{\mathbf{r}}, t) = \text{constante}}$ es una superficie que se "mueve con el tiempo"

Para un hamiltoniano independientes de t,

$$\mathrm{S}(\overrightarrow{\mathbf{r}}, t; \overrightarrow{\alpha}) = -\mathrm{E}t + \overbrace{\mathrm{W}(\overrightarrow{\mathbf{r}}; \overrightarrow{\alpha})}^{\text{función característica de Hamilton}}$$

omitimos la dependencia en $\overrightarrow{\alpha}$

- $\boxed{f(\overrightarrow{\mathbf{r}}) = \text{constante}}$ es una superficie (conjunto de nivel)
- $\boxed{f(\overrightarrow{\mathbf{r}}, t) = \text{constante}}$ es una superficie que se "mueve con el tiempo"

Para un hamiltoniano independientes de t,

$$\mathrm{S}(\overrightarrow{\mathbf{r}}, t; \overrightarrow{\alpha}) = -\mathrm{E}t + \overbrace{\mathrm{W}(\overrightarrow{\mathbf{r}}; \overrightarrow{\alpha})}^{\text{función característica de Hamilton}}$$

omitimos la dependencia en $\overrightarrow{\alpha}$

- $\boxed{f(\overrightarrow{\mathbf{r}}) = \text{constante}}$ es una superficie (conjunto de nivel)
- $\boxed{f(\overrightarrow{\mathbf{r}}, t) = \text{constante}}$ es una superficie que se "mueve con el tiempo"

Para un hamiltoniano independientes de t,

$$\mathrm{S}(\overrightarrow{\mathbf{r}}, t; \overrightarrow{\alpha}) = -\mathrm{E}t + \overbrace{\mathrm{W}(\overrightarrow{\mathbf{r}}; \overrightarrow{\alpha})}^{\text{función característica de Hamilton}}$$

omitimos la dependencia en $\overrightarrow{\alpha}$

- $\boxed{f(\overrightarrow{\mathbf{r}}) = \text{constante}}$ es una superficie (conjunto de nivel)
- $\boxed{f(\overrightarrow{\mathbf{r}}, t) = \text{constante}}$ es una superficie que se "mueve con el tiempo"

Para un hamiltoniano independientes de t,

$$\mathrm{S}(\overrightarrow{\mathbf{r}}, t) = -\mathrm{E}t + \overbrace{\mathrm{W}(\overrightarrow{\mathbf{r}})}^{\text{función característica de Hamilton}}$$

Entonces

$$\mathrm{S}(\overrightarrow{\mathbf{r}}, t_0) = \mathrm{C} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{W}(\overrightarrow{\mathbf{r}}) = \mathrm{C} + \mathrm{E}t_0$$

que en un intervalo Δt se habrá desplazado a

$$\mathrm{S}(\overrightarrow{\mathbf{r}}, t_0 + \Delta t) = \mathrm{C} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{W}(\overrightarrow{\mathbf{r}}) = \mathrm{C} + \mathrm{E}(t_0 + \Delta t)$$

exactamente igual a como lo hacen los frentes de ondas en Óptica

- $\boxed{f(\vec{\mathbf{r}}) = \text{constante}}$ es una superficie (conjunto de nivel)
- $\boxed{f(\vec{\mathbf{r}}, t) = \text{constante}}$ es una superficie que se "mueve con el tiempo"

Para un hamiltoniano independientes de t,

$$\mathrm{S}(\vec{\mathbf{r}}, t) = -\mathrm{E}t + \overbrace{\mathrm{W}(\vec{\mathbf{r}})}^{\text{función característica de Hamilton}}$$

Entonces

$$\mathrm{S}(\vec{\mathbf{r}}, t_0) = \mathrm{C} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{W}(\vec{\mathbf{r}}) = \mathrm{C} + \mathrm{E}t_0$$

que en un intervalo Δt se habrá desplazado a

$$\mathrm{S}(\vec{\mathbf{r}}, t_0 + \Delta t) = \mathrm{C} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{W}(\vec{\mathbf{r}}) = \mathrm{C} + \mathrm{E}(t_0 + \Delta t)$$

exactamente igual a como lo hacen los frentes de ondas en Óptica

- $\boxed{f(\overrightarrow{\mathbf{r}}) = \text{constante}}$ es una superficie (conjunto de nivel)
- $\boxed{f(\overrightarrow{\mathbf{r}}, t) = \text{constante}}$ es una superficie que se "mueve con el tiempo"

Para un hamiltoniano independientes de t,

$$\mathrm{S}(\overrightarrow{\mathbf{r}}, t) = -\mathrm{E}t + \overbrace{\mathrm{W}(\overrightarrow{\mathbf{r}})}^{\text{función característica de Hamilton}}$$

Entonces

$$\mathrm{S}(\overrightarrow{\mathbf{r}}, t_0) = \mathrm{C} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{W}(\overrightarrow{\mathbf{r}}) = \mathrm{C} + \mathrm{E}t_0$$

que en un intervalo Δt se habrá desplazado a

$$\mathrm{S}(\overrightarrow{\mathbf{r}}, t_0 + \Delta t) = \mathrm{C} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{W}(\overrightarrow{\mathbf{r}}) = \mathrm{C} + \mathrm{E}(t_0 + \Delta t)$$

exactamente igual a como lo hacen los frentes de ondas en Óptica

- $\boxed{f(\vec{\mathbf{r}}) = \text{constante}}$ es una superficie (conjunto de nivel)
- $\boxed{f(\vec{\mathbf{r}}, t) = \text{constante}}$ es una superficie que se "mueve con el tiempo"

Para un hamiltoniano independientes de t,

$$\mathrm{S}(\vec{\mathbf{r}}, t) = -\mathrm{E}t + \overbrace{\mathrm{W}(\vec{\mathbf{r}})}^{\text{función característica de Hamilton}}$$

Entonces

$$\mathrm{S}(\vec{\mathbf{r}}, t_0) = \mathrm{C} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{W}(\vec{\mathbf{r}}) = \mathrm{C} + \mathrm{E}t_0$$

que en un intervalo Δt se habrá desplazado a

$$\mathrm{S}(\vec{\mathbf{r}}, t_0 + \Delta t) = \mathrm{C} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{W}(\vec{\mathbf{r}}) = \mathrm{C} + \mathrm{E}(t_0 + \Delta t)$$

exactamente igual a como lo hacen los frentes de ondas en Óptica

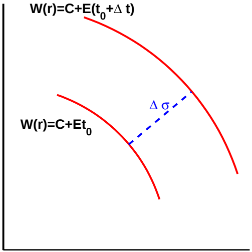
Puesto que $\mathrm{S}(\overrightarrow{\mathbf{r}}, t) = \mathrm{C}$ es un frente de onda, ¿cuál es su velocidad de propagación?

Puesto que $\mathrm{S}(\overrightarrow{\mathbf{r}}, t) = \mathrm{C}$ es un frente de onda, ¿cuál es su velocidad de propagación?

Puesto que $\mathrm{S}(\overrightarrow{\mathbf{r}}, t) = \mathrm{C}$ es un frente de onda, ¿cuál es su velocidad de propagación?

$$v = \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}$$

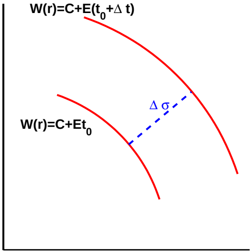
donde $\mathrm{d}\sigma$ es la distancia perpendicular entre dos superficies separadas en el intervalo de tiempo $\mathrm{d}t$



Puesto que $S(\overrightarrow{\mathbf{r}}, t) = C$ es un frente de onda, ¿cuál es su velocidad de propagación?

$$v = \frac{d\sigma}{dt}$$

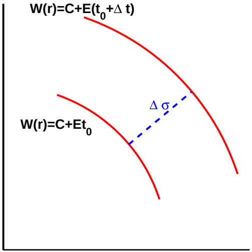
donde $d\sigma$ es la distancia perpendicular entre dos superficies separadas en el intervalo de tiempo dt



Puesto que $\mathrm{S}(\overrightarrow{\mathbf{r}}, t) = \mathrm{C}$ es un frente de onda, ¿cuál es su velocidad de propagación?

$$v = \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}$$

donde $\mathrm{d}\sigma$ es la distancia perpendicular entre dos superficies separadas en el intervalo de tiempo $\mathrm{d}t$



$$\mathrm{S}(\overrightarrow{\mathbf{r}}, t) = \mathrm{C} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{dW}(\overrightarrow{\mathbf{r}}) = \mathrm{E}\mathrm{d}t \quad \Leftrightarrow \quad \langle \nabla \mathrm{W}(\overrightarrow{\mathbf{r}}), \mathrm{d}\overrightarrow{\mathbf{r}} \rangle = \mathrm{E}\mathrm{d}t$$

Entonces

$$\langle \nabla \mathrm{W}(\overrightarrow{\mathbf{r}}), \mathrm{d}\overrightarrow{\mathbf{r}} \rangle = |\nabla \mathrm{W}(\overrightarrow{\mathbf{r}})|\mathrm{d}\sigma \quad \Leftrightarrow \quad |\nabla \mathrm{W}(\overrightarrow{\mathbf{r}})|\mathrm{d}\sigma = \mathrm{E}\mathrm{d}t$$

de donde

$$v = \frac{\mathrm{E}}{|\nabla \mathrm{W}(\overrightarrow{\mathbf{r}})} = \frac{\mathrm{E}}{\sqrt{2\mathrm{m}[\mathrm{E} - \mathrm{V}(\overrightarrow{\mathbf{r}})]}}$$

$$\mathrm{S}(\overrightarrow{\mathbf{r}}, t) = \mathrm{C} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{dW}(\overrightarrow{\mathbf{r}}) = \mathrm{E d}t \quad \Leftrightarrow \quad \langle \nabla \mathrm{W}(\overrightarrow{\mathbf{r}}), \mathrm{d}\overrightarrow{\mathbf{r}} \rangle = \mathrm{E d}t$$

Entonces

$$\langle \nabla \mathrm{W}(\overrightarrow{\mathbf{r}}), \mathrm{d}\overrightarrow{\mathbf{r}} \rangle = |\nabla \mathrm{W}(\overrightarrow{\mathbf{r}})| \mathrm{d}\sigma \quad \Leftrightarrow \quad |\nabla \mathrm{W}(\overrightarrow{\mathbf{r}})| \mathrm{d}\sigma = \mathrm{E d}t$$

de donde

$$v = \frac{\mathrm{E}}{|\nabla \mathrm{W}(\overrightarrow{\mathbf{r}})|} = \frac{\mathrm{E}}{\sqrt{2\mathrm{m}[\mathrm{E} - \mathrm{V}(\overrightarrow{\mathbf{r}})]}}$$

$$\mathrm{S}(\overrightarrow{\mathbf{r}}, t) = \mathrm{C} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{dW}(\overrightarrow{\mathbf{r}}) = \mathrm{Ed}t \quad \Leftrightarrow \quad \langle \nabla \mathrm{W}(\overrightarrow{\mathbf{r}}), \mathrm{d}\overrightarrow{\mathbf{r}} \rangle = \mathrm{Ed}t$$

Entonces

$$\langle \nabla \mathrm{W}(\overrightarrow{\mathbf{r}}), \mathrm{d}\overrightarrow{\mathbf{r}} \rangle = |\nabla \mathrm{W}(\overrightarrow{\mathbf{r}})| \mathrm{d}\sigma \quad \Leftrightarrow \quad |\nabla \mathrm{W}(\overrightarrow{\mathbf{r}})| \mathrm{d}\sigma = \mathrm{Ed}t$$

de donde

$$v = \frac{\mathrm{E}}{|\nabla \mathrm{W}(\overrightarrow{\mathbf{r}})} = \frac{\mathrm{E}}{\sqrt{2\mathrm{m}[\mathrm{E} - \mathrm{V}(\overrightarrow{\mathbf{r}})]}}$$

$$\mathrm{S}(\overrightarrow{\mathbf{r}}, t) = \mathrm{C} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{dW}(\overrightarrow{\mathbf{r}}) = \mathrm{Ed}t \quad \Leftrightarrow \quad \langle \nabla \mathrm{W}(\overrightarrow{\mathbf{r}}), \mathrm{d}\overrightarrow{\mathbf{r}} \rangle = \mathrm{Ed}t$$

Entonces

$$\langle \nabla \mathrm{W}(\overrightarrow{\mathbf{r}}), \mathrm{d}\overrightarrow{\mathbf{r}} \rangle = |\nabla \mathrm{W}(\overrightarrow{\mathbf{r}})| \mathrm{d}\sigma \quad \Leftrightarrow \quad |\nabla \mathrm{W}(\overrightarrow{\mathbf{r}})| \mathrm{d}\sigma = \mathrm{Ed}t$$

de donde

$$v = \frac{\mathrm{E}}{|\nabla \mathrm{W}(\overrightarrow{\mathbf{r}})} = \frac{\mathrm{E}}{\sqrt{2\mathrm{m}[\mathrm{E} - \mathrm{V}(\overrightarrow{\mathbf{r}})]}}$$

Como $\overrightarrow{\mathbf{p}} = \nabla_{\overrightarrow{\mathbf{q}}}\mathrm{S}$, para un sistema conservativo

$$\overrightarrow{\mathbf{p}} = \nabla_{\overrightarrow{\mathbf{q}}}\mathrm{S} = \nabla_{\overrightarrow{\mathbf{q}}}\mathrm{W}(\overrightarrow{\mathbf{q}}) \quad \Leftrightarrow \quad v = \frac{\mathrm{E}}{\overrightarrow{\mathbf{p}}}$$

Entonces

$$\begin{cases} \nabla_{\overrightarrow{\mathbf{q}}}\mathrm{S} = \nabla_{\overrightarrow{\mathbf{q}}}\mathrm{W}(\overrightarrow{\mathbf{q}}) \quad \text{es un vector perpendicular a } \mathrm{S} = \text{constante} \\ \text{y} \\ \overrightarrow{\mathbf{p}} \quad \text{tiene la dirección de la trayectoria de la partícula} \end{cases}$$

las trayectorias mecánicas de la partícula son ortogonales a las superficies $\mathrm{S} =$ constante

las trayectorias mecánicas se comportan igual que los rayos de luz en Óptica

Naturaleza de los problemas de Hamilton–Jacobi

Teoría de Hamilton–Jacobi. Aspectos geométricos de la función de Hamilton

Como $\overrightarrow{\mathbf{p}} = \nabla_{\overrightarrow{\mathbf{q}}}\mathrm{S}$, para un sistema conservativo

$$\overrightarrow{\mathbf{p}} = \nabla_{\overrightarrow{\mathbf{q}}}\mathrm{S} = \nabla_{\overrightarrow{\mathbf{q}}}\mathrm{W}(\overrightarrow{\mathbf{q}}) \quad \Leftrightarrow \quad v = \frac{\mathrm{E}}{\overrightarrow{\mathbf{p}}}$$

Entonces

$$\begin{cases} \nabla_{\overrightarrow{\mathbf{q}}}\mathrm{S} = \nabla_{\overrightarrow{\mathbf{q}}}\mathrm{W}(\overrightarrow{\mathbf{q}}) \quad \text{es un vector perpendicular a } \mathrm{S} = \text{constante} \\ \text{y} \\ \overrightarrow{\mathbf{p}} \quad \text{tiene la dirección de la trayectoria de la partícula} \end{cases}$$

las trayectorias mecánicas de la partícula son ortogonales a las superficies $\mathrm{S} = \text{constante}$

$\boxed{\text{las trayectorias mecánicas se comportan igual que los rayos de luz en Óptica}}$

Como $\overrightarrow{\mathbf{p}} = \nabla_{\overrightarrow{\mathbf{q}}}\mathrm{S}$, para un sistema conservativo

$$\overrightarrow{\mathbf{p}} = \nabla_{\overrightarrow{\mathbf{q}}}\mathrm{S} = \nabla_{\overrightarrow{\mathbf{q}}}\mathrm{W}(\overrightarrow{\mathbf{q}}) \quad \Leftrightarrow \quad v = \frac{\mathrm{E}}{\overrightarrow{\mathbf{p}}}$$

Entonces

$$\begin{cases} \nabla_{\overrightarrow{\mathbf{q}}}\mathrm{S} = \nabla_{\overrightarrow{\mathbf{q}}}\mathrm{W}(\overrightarrow{\mathbf{q}}) & \text{es un vector perpendicular a } \mathrm{S} = \text{constante} \\ \text{y} \\ \overrightarrow{\mathbf{p}} & \text{tiene la dirección de la trayectoria de la partícula} \end{cases}$$

las trayectorias mecánicas de la partícula son ortogonales a las superficies $\mathrm{S} = $ constante

las trayectorias mecánicas se comportan igual que los rayos de luz en Óptica

Como $\overrightarrow{\mathbf{p}} = \nabla_{\overrightarrow{\mathbf{q}}}\mathrm{S}$, para un sistema conservativo

$$\overrightarrow{\mathbf{p}} = \nabla_{\overrightarrow{\mathbf{q}}}\mathrm{S} = \nabla_{\overrightarrow{\mathbf{q}}}\mathrm{W}(\overrightarrow{\mathbf{q}}) \quad \Leftrightarrow \quad v = \frac{\mathrm{E}}{\overrightarrow{\mathbf{p}}}$$

Entonces

$$\begin{cases} \nabla_{\overrightarrow{\mathbf{q}}}\mathrm{S} = \nabla_{\overrightarrow{\mathbf{q}}}\mathrm{W}(\overrightarrow{\mathbf{q}}) \quad \text{es un vector perpendicular a } \mathrm{S} = \text{constante} \\ \text{y} \\ \overrightarrow{\mathbf{p}} \quad \text{tiene la dirección de la trayectoria de la partícula} \end{cases}$$

las trayectorias mecánicas de la partícula son ortogonales a las superficies $\mathrm{S} =$ constante

las trayectorias mecánicas se comportan igual que los rayos de luz en Óptica

Como $\overrightarrow{\mathbf{p}} = \nabla_{\overrightarrow{\mathbf{q}}}\mathrm{S}$, para un sistema conservativo

$$\overrightarrow{\mathbf{p}} = \nabla_{\overrightarrow{\mathbf{q}}}\mathrm{S} = \nabla_{\overrightarrow{\mathbf{q}}}\mathrm{W}(\overrightarrow{\mathbf{q}}) \quad \Leftrightarrow \quad v = \frac{\mathrm{E}}{\overrightarrow{\mathbf{p}}}$$

Entonces

$$\begin{cases} \nabla_{\overrightarrow{\mathbf{q}}}\mathrm{S} = \nabla_{\overrightarrow{\mathbf{q}}}\mathrm{W}(\overrightarrow{\mathbf{q}}) \quad \text{es un vector perpendicular a } \mathrm{S} = \text{constante} \\ \text{y} \\ \overrightarrow{\mathbf{p}} \quad \text{tiene la dirección de la trayectoria de la partícula} \end{cases}$$

las trayectorias mecánicas de la partícula son ortogonales a las superficies $\mathrm{S} =$ constante

las trayectorias mecánicas se comportan igual que los rayos de luz en Óptica

Consideraremos el problema

$$\begin{cases} u_t = \mathrm{H}(\nabla_x u) & \text{en } \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \times \mathbb{R}_+, \\ u(\cdot, 0) = u_0(\cdot) & \text{en } \mathbb{R}^{\mathrm{N}}, \end{cases}$$

- El operador diferencial $\mathrm{F}(y, r, \widetilde{p}) \doteq p_{\mathrm{N}+1} - \mathrm{H}(p)$ es no degenerado, *i.e.*

$$\mathrm{D}_p \mathrm{F}(y, r, \widetilde{p}) \neq 0, \quad \widetilde{p} = (p, p_{\mathrm{N}+1}) \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \times \mathbb{R}.$$

- Los puntos de la frontera $z = (x, 0) \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \times \{0\}$ son regulares, *i.e.*

$$\langle \mathrm{D}_{\widetilde{p}} \mathrm{F}(z, \varphi(z), \partial\varphi(z) + c\,\overrightarrow{\mathbf{n}}_z), \overrightarrow{\mathbf{n}}_z \rangle = -1 < 0,$$

donde $\partial\varphi(z) = (\nabla u_0(x), 0)$ es el gradiente tangencial de $\varphi(z) = u_0(x)$.

Consideraremos el problema

$$\begin{cases} u_t = \mathrm{H}(\nabla_x u) & \text{en } \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \times \mathbb{R}_+, \\ u(\cdot, 0) = u_0(\cdot) & \text{en } \mathbb{R}^{\mathrm{N}}, \end{cases}$$

- El operador diferencial $\mathrm{F}(y, r, \widetilde{p}) \doteq p_{\mathrm{N}+1} - \mathrm{H}(p)$ es no degenerado, *i.e.*

$$\mathrm{D}_p\mathrm{F}(y, r, \widetilde{p}) \neq 0, \quad \widetilde{p} = (p, p_{\mathrm{N}+1}) \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \times \mathbb{R}.$$

- Los puntos de la frontera $z = (x, 0) \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \times \{0\}$ son regulares, *i.e.*

$$\langle \mathrm{D}_{\widetilde{p}}\mathrm{F}(z, \varphi(z), \partial\varphi(z) + c\,\overrightarrow{\mathbf{n}}_z), \overrightarrow{\mathbf{n}}_z \rangle = -1 < 0,$$

donde $\partial\varphi(z) = (\nabla u_0(x), 0)$ es el gradiente tangencial de $\varphi(z) = u_0(x)$.

Consideraremos el problema

$$\begin{cases} u_t = \mathrm{H}(\nabla_x u) & \text{en } \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \times \mathbb{R}_+, \\ u(\cdot, 0) = u_0(\cdot) & \text{en } \mathbb{R}^{\mathrm{N}}, \end{cases}$$

- El operador diferencial $\mathrm{F}(y, r, \widetilde{p}) \doteq p_{\mathrm{N}+1} - \mathrm{H}(p)$ es no degenerado, *i.e.*

$$\mathrm{D}_p\mathrm{F}(y, r, \widetilde{p}) \neq 0, \quad \widetilde{p} = (p, p_{\mathrm{N}+1}) \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \times \mathbb{R}.$$

- Los puntos de la frontera $z = (x, 0) \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \times \{0\}$ son regulares, *i.e.*

$$\langle \mathrm{D}_{\widetilde{p}}\mathrm{F}(z, \varphi(z), \partial\varphi(z) + c\,\overrightarrow{\mathbf{n}}_z), \overrightarrow{\mathbf{n}}_z \rangle = -1 < 0,$$

donde $\partial\varphi(z) = (\nabla u_0(x), 0)$ es el gradiente tangencial de $\varphi(z) = u_0(x)$.

Consideraremos el problema

$$\begin{cases} u_t = \mathrm{H}(\nabla_x u) & \text{en } \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \times \mathbb{R}_+, \\ u(\cdot, 0) = u_0(\cdot) & \text{en } \mathbb{R}^{\mathrm{N}}, \end{cases}$$

El sistema de Hamilton asociado

$$\begin{cases} \overset{\bullet}{\mathbb{X}} = -\dfrac{\partial \mathrm{H}}{\partial p}(\mathbb{P}), \quad \mathbb{X}(0) = x \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \\ \overset{\bullet}{\mathbb{P}} = \dfrac{\partial \mathrm{H}}{\partial x}(\mathbb{P}) = 0, \quad \mathbb{P}(0) = \nabla_x u_0(x) \end{cases}$$

lleva

$$\begin{cases} \nabla_x u(\mathbb{X}(t), t) = \mathbb{P}(t) \equiv \mathbb{P}(0) = \nabla_x u_0(x), \\ \mathbb{X}(t) = x - t\nabla_p \mathrm{H}(\nabla_x u_0(x)) \quad (\text{rectas características}), \\ \dfrac{\mathrm{d}u(\mathbb{X}(t), t)}{\mathrm{d}t} = \overset{\bullet}{\mathbb{X}}(t) \cdot \nabla_x u(\mathbb{X}(t), t) + u_t(\mathbb{X}(t), t) \\ \qquad = -\nabla_p \mathrm{H}(\nabla_x u_0(x)) \cdot \nabla_x u_0(x) + \mathrm{H}(\nabla_x u_0(x)) \end{cases}$$

Naturaleza de los problemas de Hamilton–Jacobi
Método de las características

Consideraremos el problema

$$\begin{cases} u_t = \mathrm{H}(\nabla_x u) & \text{en } \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \times \mathbb{R}_+, \\ u(\cdot, 0) = u_0(\cdot) & \text{en } \mathbb{R}^{\mathrm{N}}, \end{cases}$$

El sistema de Hamilton asociado

$$\begin{cases} \overset{\bullet}{\mathbb{X}} = -\dfrac{\partial \mathrm{H}}{\partial p}(\mathbb{P}), \quad \mathbb{X}(0) = x \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \\ \overset{\bullet}{\mathbb{P}} = \dfrac{\partial \mathrm{H}}{\partial x}(\mathbb{P}) = 0, \quad \mathbb{P}(0) = \nabla_x u_0(x) \end{cases}$$

lleva

$$\begin{cases} \nabla_x u(\mathbb{X}(t), t) = \mathbb{P}(t) \equiv \mathbb{P}(0) = \nabla_x u_0(x), \\ \mathbb{X}(t) = x - t\nabla_p \mathrm{H}(\nabla_x u_0(x)) \quad (\text{rectas características}), \\ \dfrac{\mathrm{d}u(\mathbb{X}(t), t)}{\mathrm{d}t} = \overset{\bullet}{\mathbb{X}}(t) \cdot \nabla_x u(\mathbb{X}(t), t) + u_t(\mathbb{X}(t), t) \\ \qquad = -\nabla_p \mathrm{H}(\nabla_x u_0(x)) \cdot \nabla_x u_0(x) + \mathrm{H}(\nabla_x u_0(x)) \end{cases}$$

Consideraremos el problema

$$\begin{cases} u_t = \mathrm{H}(\nabla_x u) & \text{en } \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \times \mathbb{R}_+, \\ u(\cdot, 0) = u_0(\cdot) & \text{en } \mathbb{R}^{\mathrm{N}}, \end{cases}$$

El sistema de Hamilton asociado

$$\begin{cases} \overset{\bullet}{\mathbb{X}} = -\dfrac{\partial \mathrm{H}}{\partial p}(\mathbb{P}), & \mathbb{X}(0) = x \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \\ \overset{\bullet}{\mathbb{P}} = \dfrac{\partial \mathrm{H}}{\partial x}(\mathbb{P}) = 0, & \mathbb{P}(0) = \nabla_x u_0(x) \end{cases}$$

lleva

$$\begin{cases} \nabla_x u(\mathbb{X}(t), t) = \mathbb{P}(t) \equiv \mathbb{P}(0) = \nabla_x u_0(x), \\ \mathbb{X}(t) = x - t\nabla_p \mathrm{H}(\nabla_x u_0(x)) \quad (\text{rectas características}), \\ \dfrac{\mathrm{d}u(\mathbb{X}(t), t)}{\mathrm{d}t} = \overset{\bullet}{\mathbb{X}}(t) \cdot \nabla_x u(\mathbb{X}(t), t) + u_t(\mathbb{X}(t), t) \\ \qquad = -\nabla_p \mathrm{H}(\nabla_x u_0(x)) \cdot \nabla_x u_0(x) + \mathrm{H}(\nabla_x u_0(x)) \end{cases}$$

Consideraremos el problema

$$\begin{cases} u_t = \mathrm{H}(\nabla_x u) & \text{en } \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \times \mathbb{R}_+, \\ u(\cdot,0) = u_0(\cdot) & \text{en } \mathbb{R}^{\mathrm{N}}, \end{cases}$$

El sistema de Hamilton asociado

$$\begin{cases} \overset{\bullet}{\mathbb{X}} = -\dfrac{\partial \mathrm{H}}{\partial p}(\mathbb{P}), \quad \mathbb{X}(0) = x \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \\ \overset{\bullet}{\mathbb{P}} = \dfrac{\partial \mathrm{H}}{\partial x}(\mathbb{P}) = 0, \quad \mathbb{P}(0) = \nabla_x u_0(x) \end{cases}$$

lleva

$$\begin{cases} \nabla_x u(\mathbb{X}(t),t) = \mathbb{P}(t) \equiv \mathbb{P}(0) = \nabla_x u_0(x), \\ \mathbb{X}(t) = x - t\nabla_p \mathrm{H}(\nabla_x u_0(x)) \quad (\text{rectas características}), \\ \dfrac{\mathrm{d}u(\mathbb{X}(t),t)}{\mathrm{d}t} \quad = \overset{\bullet}{\mathbb{X}}(t)\cdot\nabla_x u(\mathbb{X}(t),t) + u_t(\mathbb{X}(t),t) \\ \qquad\qquad = -\nabla_p \mathrm{H}(\nabla_x u_0(x))\cdot\nabla_x u_0(x) + \mathrm{H}(\nabla_x u_0(x)) \end{cases}$$

Consideraremos el problema

$$\begin{cases} u_t = \mathrm{H}(\nabla_x u) & \text{en } \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \times \mathbb{R}_+, \\ u(\cdot,0) = u_0(\cdot) & \text{en } \mathbb{R}^{\mathrm{N}}, \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} \mathbb{X}(t) = x - t\nabla_p \mathrm{H}(\nabla_x u_0(x)) \quad (\text{rectas características}), \\ \boxed{u(\mathbb{X}(t),t) = u_0(x) - t\Big[\nabla_p \mathrm{H}(\nabla_x u_0(x)) \cdot \nabla_x u_0(x) + \mathrm{H}(\nabla_x u_0(x))\Big]} \end{cases}$$

Dos primeras dificultades:

- Método exigente (datos regulares H, $u_0 \in \mathcal{C}^1$),
- shock o multivocidad en los gradientes.

$$x_1 \neq x_2,\ \mathbb{X}(t^*;x_1) = \mathbb{X}(t^*;x_2) \text{ y } \nabla_x u(\mathbb{X}(t^*;x_1),t^*) = \nabla_x u(\mathbb{X}(t^*;x_2),t^*)$$

$$\nabla_x u_0(x_1) = \nabla_x u(\mathbb{X}(t^*;x_1),t^*) = \nabla_x u(\mathbb{X}(t^*;x_2),t^*) = \nabla_x u_0(x_2)$$

Consideraremos el problema

$$\begin{cases} u_t = \mathrm{H}(\nabla_x u) & \text{en } \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \times \mathbb{R}_+, \\ u(\cdot, 0) = u_0(\cdot) & \text{en } \mathbb{R}^{\mathrm{N}}, \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} \mathbb{X}(t) = x - t\nabla_p \mathrm{H}(\nabla_x u_0(x)) \quad (\text{rectas características}), \\ \boxed{u(\mathbb{X}(t), t) = u_0(x) - t\Big[\nabla_p \mathrm{H}(\nabla_x u_0(x)) \cdot \nabla_x u_0(x) + \mathrm{H}(\nabla_x u_0(x))\Big]} \end{cases}$$

Dos primeras dificultades:

- Método exigente (datos regulares $\mathrm{H},\ u_0 \in \mathcal{C}^1$),
- shock o multivocidad en los gradientes.

$$x_1 \neq x_2,\ \mathbb{X}(t^*; x_1) = \mathbb{X}(t^*; x_2) \text{ y } \nabla_x u(\mathbb{X}(t^*; x_1), t^*) = \nabla_x u(\mathbb{X}(t^*; x_2), t^*)$$

$$\nabla_x u_0(x_1) = \nabla_x u(\mathbb{X}(t^*; x_1), t^*) = \nabla_x u(\mathbb{X}(t^*; x_2), t^*) = \nabla_x u_0(x_2)$$

Consideraremos el problema

$$\begin{cases} u_t = \mathrm{H}(\nabla_x u) & \text{en } \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \times \mathbb{R}_+, \\ u(\cdot,0) = u_0(\cdot) & \text{en } \mathbb{R}^{\mathrm{N}}, \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} \mathbb{X}(t) = x - t\nabla_p \mathrm{H}(\nabla_x u_0(x)) \quad \text{(rectas características)}, \\ \boxed{u(\mathbb{X}(t),t) = u_0(x) - t\Big[\nabla_p \mathrm{H}(\nabla_x u_0(x)) \cdot \nabla_x u_0(x) + \mathrm{H}(\nabla_x u_0(x))\Big]} \end{cases}$$

Dos primeras dificultades:

- Método exigente (datos regulares H, $u_0 \in \mathcal{C}^1$),
- shock o multivocidad en los gradientes.

$$x_1 \neq x_2,\ \mathbb{X}(t^*;x_1) = \mathbb{X}(t^*;x_2) \text{ y } \nabla_x u(\mathbb{X}(t^*;x_1),t^*) = \nabla_x u(\mathbb{X}(t^*;x_2),t^*)$$
$$\nabla_x u_0(x_1) = \nabla_x u(\mathbb{X}(t^*;x_1),t^*) = \nabla_x u(\mathbb{X}(t^*;x_2),t^*) = \nabla_x u_0(x_2)$$

Consideraremos el problema

$$\begin{cases} u_t = \mathrm{H}(\nabla_x u) & \text{en } \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \times \mathbb{R}_+, \\ u(\cdot, 0) = u_0(\cdot) \Downarrow & \text{en } \mathbb{R}^{\mathrm{N}}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathbb{X}(t) = x - t\nabla_p \mathrm{H}(\nabla_x u_0(x)) \quad (\text{rectas características}), \\ \boxed{u(\mathbb{X}(t), t) = u_0(x) - t\Big[\nabla_p \mathrm{H}(\nabla_x u_0(x)) \cdot \nabla_x u_0(x) + \mathrm{H}(\nabla_x u_0(x))\Big]} \end{cases}$$

Dos primeras dificultades:

- Método exigente (datos regulares H, $u_0 \in \mathcal{C}^1$),
- shock o multivocidad en los gradientes. $\mathbb{X}(t^*; x_1) = \mathbb{X}(t^*; x_2)$ sí y sólo si

$$\frac{1}{t^*_{x_1,x_2}} = \frac{\langle \nabla_p \mathrm{H}(\nabla_x u_0(x_1)) - \nabla_p \mathrm{H}(\nabla_x u_0(x_2)), x_1 - x_2 \rangle}{|x_1 - x_2|^2}.$$

Consideraremos el problema

$$\begin{cases} u_t = \mathrm{H}(\nabla_x u) & \text{en } \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \times \mathbb{R}_+, \\ u(\cdot, 0) = u_0(\cdot) \Downarrow & \text{en } \mathbb{R}^{\mathrm{N}}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathbb{X}(t) = x - t\nabla_p \mathrm{H}(\nabla_x u_0(x)) \quad (\text{rectas características}), \\ \boxed{u(\mathbb{X}(t), t) = u_0(x) - t\Big[\nabla_p \mathrm{H}(\nabla_x u_0(x)) \cdot \nabla_x u_0(x) + \mathrm{H}(\nabla_x u_0(x))\Big]} \end{cases}$$

Dos primeras dificultades:

- Método exigente (datos regulares $\mathrm{H}, \ u_0 \in \mathcal{C}^1$),
- shock o multivocidad en los gradientes. No hay intersección de características sí y sólo si

$$\langle \nabla_p \mathrm{H}(\nabla_x u_0(x_1)) - \nabla_p \mathrm{H}(\nabla_x u_0(x_2)), x_1 - x_2 \rangle \leq 0.$$

Un ejemplo

$$\begin{cases} u_t = \mathrm{R}|\nabla_x u|^m & \text{en } \mathbb{R}^\mathrm{N} \times \mathbb{R}_+, \quad (\mathrm{R} > 0,\ m > 1) \\ u(x,0) = \ell |x|^{1+\alpha} & \text{en } \mathbb{R}^\mathrm{N}, \quad (\ell > 0,\ \alpha > -1) \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} \mathbb{X}(t) = \left(1 - \mathrm{R}m(\ell(1+\alpha))^m |x|^{\alpha(m-1)-1} t\right) x \quad (\text{rectas características}), \\ \dfrac{1}{t^*_{x_1,x_2}} = \mathrm{R}m(\ell(1+\alpha))^{m-1} \dfrac{\left(|x_1|^{\alpha(m-1)-1}x_1 - |x_2|^{\alpha(m-1)-1}x_2\right)\cdot(x_1 - x_2)}{|x_1 - x_2|^2} \end{cases}$$

- $\boxed{\alpha < \dfrac{1}{m-1}}$

$$\frac{1}{t^*_{x_1,x_2}} \geq \mathrm{K}_{m,\alpha} \left(\frac{|x_1 - x_2|}{|x_1| + |x_2|}\right)^{1-\alpha(m-1)} > 0.$$

NO HAY SOLUCIÓN CLÁSICA, existe una función $u \in W^{1,\infty}_{loc}(\mathbb{R}^\mathrm{N} \times \mathbb{R}_+)$

Un ejemplo

$$\begin{cases} u_t = \mathrm{R}|\nabla_x u|^m & \text{en } \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \times \mathbb{R}_+, \quad (\mathrm{R} > 0,\ m > 1) \\ u(x,0) = \ell |x|^{1+\alpha} & \text{en } \mathbb{R}^{\mathrm{N}}, \quad (\ell > 0,\ \alpha > -1) \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} \mathbb{X}(t) = \left(1 - \mathrm{R}m(\ell(1+\alpha))^m |x|^{\alpha(m-1)-1} t\right) x \quad (\text{rectas características}), \\ \dfrac{1}{t^*_{x_1,x_2}} = \mathrm{R}m(\ell(1+\alpha))^{m-1} \dfrac{\left(|x_1|^{\alpha(m-1)-1}x_1 - |x_2|^{\alpha(m-1)-1}x_2\right)\cdot(x_1 - x_2)}{|x_1 - x_2|^2} \end{cases}$$

- $\boxed{\alpha < \dfrac{1}{m-1}}$

$$\frac{1}{t^*_{x_1,x_2}} \geq \mathrm{K}_{m,\alpha}\left(\frac{|x_1 - x_2|}{|x_1| + |x_2|}\right)^{1-\alpha(m-1)} > 0.$$

NO HAY SOLUCIÓN CLÁSICA, existe una función $u \in W^{1,\infty}_{loc}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}} \times \mathbb{R}_+)$

Un ejemplo

$$\begin{cases} u_t = \mathrm{R}|\nabla_x u|^m & \text{en } \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \times \mathbb{R}_+, \quad (\mathrm{R} > 0,\ m > 1) \\ u(x,0) = \ell |x|^{1+\alpha} & \text{en } \mathbb{R}^{\mathrm{N}}, \quad (\ell > 0,\ \alpha > -1) \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} \mathbb{X}(t) = \left(1 - \mathrm{R}m(\ell(1+\alpha))^m |x|^{\alpha(m-1)-1} t\right) x \quad (\text{rectas características}), \\ \dfrac{1}{t^*_{x_1,x_2}} = \mathrm{R}m(\ell(1+\alpha))^{m-1} \dfrac{\left(|x_1|^{\alpha(m-1)-1}x_1 - |x_2|^{\alpha(m-1)-1}x_2\right)\cdot(x_1 - x_2)}{|x_1 - x_2|^2} \end{cases}$$

- $\boxed{\alpha < \dfrac{1}{m-1}}$

$$\frac{1}{t^*_{x_1,x_2}} \geq \mathrm{K}_{m,\alpha}\left(\frac{|x_1 - x_2|}{|x_1| + |x_2|}\right)^{1-\alpha(m-1)} > 0.$$

NO HAY SOLUCIÓN CLÁSICA, existe una función $u \in \mathcal{W}^{1,\infty}_{loc}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}} \times \mathbb{R}_+)$

Un ejemplo

$$\begin{cases} u_t = \mathrm{R}|\nabla_x u|^m & \text{en } \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \times \mathbb{R}_+, \quad (\mathrm{R} > 0,\ m > 1) \\ u(x,0) = \ell|x|^{1+\alpha} & \text{en } \mathbb{R}^{\mathrm{N}}, \quad (\ell > 0,\ \alpha > -1) \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} \mathbb{X}(t) = \left(1 - \mathrm{R}m(\ell(1+\alpha))^m |x|^{\alpha(m-1)-1} t\right) x \quad (\text{rectas características}), \\ \dfrac{1}{t^*_{x_1,x_2}} = \mathrm{R}m(\ell(1+\alpha))^{m-1} \dfrac{\left(|x_1|^{\alpha(m-1)-1}x_1 - |x_2|^{\alpha(m-1)-1}x_2\right)\cdot(x_1 - x_2)}{|x_1 - x_2|^2} \end{cases}$$

- $\boxed{\alpha < \dfrac{1}{m-1}}$

$$\frac{1}{t^*_{x_1,x_2}} \geq \mathrm{K}_{m,\alpha}\left(\frac{|x_1 - x_2|}{|x_1| + |x_2|}\right)^{1-\alpha(m-1)} > 0.$$

NO HAY SOLUCIÓN CLÁSICA, existe una función $u \in \mathcal{W}^{1,\infty}_{loc}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}} \times \mathbb{R}_+)$

Un ejemplo

$$\begin{cases} u_t = \mathrm{R}|\nabla_x u|^m & \text{en } \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \times \mathbb{R}_+, \quad (\mathrm{R} > 0,\ m > 1) \\ u(x,0) = \ell |x|^{1+\alpha} & \text{en } \mathbb{R}^{\mathrm{N}}, \quad (\ell > 0,\ \alpha > -1) \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} \mathbb{X}(t) = \left(1 - \mathrm{R}m(\ell(1+\alpha))^m |x|^{\alpha(m-1)-1} t\right) x \quad (\text{rectas características}), \\ \dfrac{1}{t^*_{x_1,x_2}} = \mathrm{R}m(\ell(1+\alpha))^{m-1} \dfrac{\left(|x_1|^{\alpha(m-1)-1}x_1 - |x_2|^{\alpha(m-1)-1}x_2\right)\cdot(x_1 - x_2)}{|x_1 - x_2|^2} \end{cases}$$

- $\boxed{\alpha < \dfrac{1}{m-1}}$

$$\frac{1}{t^*_{x_1,x_2}} \geq \mathrm{K}_{m,\alpha} \left(\frac{|x_1 - x_2|}{|x_1| + |x_2|} \right)^{1-\alpha(m-1)} > 0.$$

NO HAY SOLUCIÓN CLÁSICA, existe una función $u \in \mathcal{W}^{1,\infty}_{loc}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}} \times \mathbb{R}_+)$

Un ejemplo

$$\begin{cases} u_t = \mathrm{R}|\nabla_x u|^m & \text{en } \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \times \mathbb{R}_+, \quad (\mathrm{R} > 0,\ m > 1) \\ u(x,0) = \ell |x|^{1+\alpha} & \text{en } \mathbb{R}^{\mathrm{N}}, \quad (\ell > 0,\ \alpha > -1) \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} \mathbb{X}(t) = \left(1 - \mathrm{R}m(\ell(1+\alpha))^m |x|^{\alpha(m-1)-1} t\right) x \quad (\text{rectas características}), \\ \dfrac{1}{t^*_{x_1,x_2}} = \mathrm{R}m(\ell(1+\alpha))^{m-1} \dfrac{\left(|x_1|^{\alpha(m-1)-1} x_1 - |x_2|^{\alpha(m-1)-1} x_2\right) \cdot (x_1 - x_2)}{|x_1 - x_2|^2} \end{cases}$$

- $\boxed{\alpha < \dfrac{1}{m-1}}$

$$\frac{1}{t^*_{x_1,x_2}} \geq \mathrm{K}_{m,\alpha} \left(\frac{|x_1 - x_2|}{|x_1| + |x_2|} \right)^{1-\alpha(m-1)} > 0.$$

NO HAY SOLUCIÓN CLÁSICA, existe una función $u \in \mathcal{W}^{1,\infty}_{loc}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}} \times \mathbb{R}_+)$

Un ejemplo

$$\begin{cases} u_t = \mathrm{R}|\nabla_x u|^m & \text{en } \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \times \mathbb{R}_+, \quad (\mathrm{R} > 0,\ m > 1) \\ u(x,0) = \ell |x|^{1+\alpha} & \text{en } \mathbb{R}^{\mathrm{N}}, \quad (\ell > 0,\ \alpha > -1) \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} \mathbb{X}(t) = \left(1 - \mathrm{R}m(\ell(1+\alpha))^m |x|^{\alpha(m-1)-1} t\right) x \quad (\text{rectas características}), \\ \dfrac{1}{t^*_{x_1,x_2}} = \mathrm{R}m(\ell(1+\alpha))^{m-1} \dfrac{\left(|x_1|^{\alpha(m-1)-1}x_1 - |x_2|^{\alpha(m-1)-1}x_2\right)\cdot(x_1 - x_2)}{|x_1 - x_2|^2} \end{cases}$$

- $\boxed{\alpha = \dfrac{1}{m-1} \Leftrightarrow \alpha(m-1) - 1 = 0 \Leftrightarrow 1 + \alpha = \dfrac{m}{m-1}}$

$$\mathbb{X}(t;x) = \frac{\mathrm{T}_\infty - t}{\mathrm{T}_\infty} x, \quad t^* \equiv \mathrm{T}_\infty = \frac{1}{\mathrm{R}m^m}\left(\frac{m-1}{\ell}\right)^{m-1}, \quad (\text{ver } (1) \text{ y } (2))$$

Un ejemplo

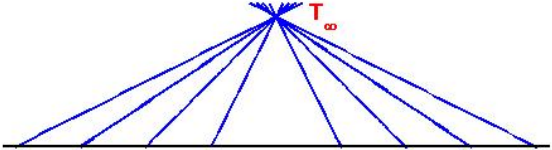
$$\begin{cases} u_t = \mathrm{R}|\nabla_x u|^m & \text{en } \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \times \mathbb{R}_+, \quad (\mathrm{R} > 0,\ m > 1) \\ u(x,0) = \ell|x|^{1+\alpha} & \text{en } \mathbb{R}^{\mathrm{N}}, \quad (\ell > 0,\ \alpha > -1) \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} \mathbb{X}(t) = \left(1 - \mathrm{R}m(\ell(1+\alpha))^m|x|^{\alpha(m-1)-1}t\right)x \quad (\text{rectas características}), \\ \dfrac{1}{t^*_{x_1,x_2}} = \mathrm{R}m(\ell(1+\alpha))^{m-1}\dfrac{\left(|x_1|^{\alpha(m-1)-1}x_1 - |x_2|^{\alpha(m-1)-1}x_2\right)\cdot(x_1-x_2)}{|x_1-x_2|^2} \end{cases}$$

• $\boxed{\alpha = \dfrac{1}{m-1} \Leftrightarrow \alpha(m-1) - 1 = 0 \Leftrightarrow 1 + \alpha = \dfrac{m}{m-1}}$

$$\mathbb{X}(t;x) = \frac{\mathrm{T}_\infty - t}{\mathrm{T}_\infty}x, \quad t^* \equiv \mathrm{T}_\infty = \frac{1}{\mathrm{R}m^m}\left(\frac{m-1}{\ell}\right)^{m-1}, \quad (\text{ver } (1) \text{ y } (2))$$


T_∞

Un ejemplo

$$\begin{cases} u_t = \mathrm{R}|\nabla_x u|^m & \text{en } \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \times \mathbb{R}_+, \quad (\mathrm{R} > 0,\ m > 1) \\ u(x,0) = \ell|x|^{1+\alpha} & \text{en } \mathbb{R}^{\mathrm{N}}, \quad (\ell > 0,\ \alpha > -1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathbb{X}(t) = \left(1 - \mathrm{R}m(\ell(1+\alpha))^m |x|^{\alpha(m-1)-1} t\right) x \quad (\text{rectas características}), \\ \dfrac{1}{t^*_{x_1,x_2}} = \mathrm{R}m(\ell(1+\alpha))^{m-1} \dfrac{\left(|x_1|^{\alpha(m-1)-1}x_1 - |x_2|^{\alpha(m-1)-1}x_2\right)\cdot(x_1 - x_2)}{|x_1 - x_2|^2} \end{cases}$$

- $\boxed{\alpha = \dfrac{1}{m-1} \Leftrightarrow \alpha(m-1) - 1 = 0 \Leftrightarrow 1 + \alpha = \dfrac{m}{m-1}}$

$$\mathbb{X}(t;x) = \frac{\mathrm{T}_\infty - t}{\mathrm{T}_\infty} x, \quad t^* \equiv \mathrm{T}_\infty = \frac{1}{\mathrm{R}m^m}\left(\frac{m-1}{\ell}\right)^{m-1}, \quad (\text{ver } (1) \text{ y } (2))$$

$$\boxed{u(x,t) = \ell|x|^{\frac{m}{m-1}}\left(\frac{\mathrm{T}_\infty}{\mathrm{T}_\infty - t}\right)^{\frac{1}{m-1}}, \quad (x,t) \in \left(\mathbb{R}^{\mathrm{N}} \setminus \{0\}\right) \times [0, \mathrm{T}_\infty[}$$

Un ejemplo

$$\begin{cases} u_t = \mathrm{R}|\nabla_x u|^m & \text{en } \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \times \mathbb{R}_+, \quad (\mathrm{R} > 0,\ m > 1) \\ u(x,0) = \ell |x|^{1+\alpha} & \text{en } \mathbb{R}^{\mathrm{N}}, \quad (\ell > 0,\ \alpha > -1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathbb{X}(t) = \left(1 - \mathrm{R}m(\ell(1+\alpha))^m |x|^{\alpha(m-1)-1} t\right) x \quad (\text{rectas características}), \\ \dfrac{1}{t^*_{x_1,x_2}} = \mathrm{R}m(\ell(1+\alpha))^{m-1} \dfrac{\left(|x_1|^{\alpha(m-1)-1}x_1 - |x_2|^{\alpha(m-1)-1}x_2\right)\cdot(x_1 - x_2)}{|x_1 - x_2|^2} \end{cases}$$

- $\boxed{\alpha > \dfrac{1}{m-1}}$

$$\frac{1}{t^*_{x_1,x_2}} \geq \mathrm{K}_{m,\alpha}|x_1 - x_2|^{\alpha(m-1)-1} > 0.$$

NO HAY SOLUCIÓN CLÁSICA , de hecho no hay ningún tipo de solución

Un ejemplo

$$\begin{cases} u_t = \mathrm{R}|\nabla_x u|^m & \text{en } \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \times \mathbb{R}_+, \quad (\mathrm{R} > 0,\ m > 1) \\ u(x,0) = \ell |x|^{1+\alpha} & \text{en } \mathbb{R}^{\mathrm{N}}, \quad (\ell > 0,\ \alpha > -1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathbb{X}(t) = \left(1 - \mathrm{R}m(\ell(1+\alpha))^m |x|^{\alpha(m-1)-1} t\right) x \quad (\text{rectas características}), \\ \dfrac{1}{t^*_{x_1,x_2}} = \mathrm{R}m(\ell(1+\alpha))^{m-1} \dfrac{\left(|x_1|^{\alpha(m-1)-1}x_1 - |x_2|^{\alpha(m-1)-1}x_2\right)\cdot(x_1 - x_2)}{|x_1 - x_2|^2} \end{cases}$$

- $\boxed{\alpha > \dfrac{1}{m-1}}$

$$\frac{1}{t^*_{x_1,x_2}} \geq \mathrm{K}_{m,\alpha} |x_1 - x_2|^{\alpha(m-1)-1} > 0.$$

NO HAY SOLUCIÓN CLÁSICA , de hecho no hay ningún tipo de solución

Un ejemplo

$$\begin{cases} u_t = \mathrm{R}|\nabla_x u|^m & \text{en } \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \times \mathbb{R}_+, \quad (\mathrm{R} > 0,\ m > 1) \\ u(x,0) = \ell|x|^{1+\alpha} & \text{en } \mathbb{R}^{\mathrm{N}}, \quad (\ell > 0,\ \alpha > -1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathbb{X}(t) = \left(1 - \mathrm{R}m(\ell(1+\alpha))^m |x|^{\alpha(m-1)-1} t\right) x \quad (\text{rectas características}), \\ \dfrac{1}{t^*_{x_1,x_2}} = \mathrm{R}m(\ell(1+\alpha))^{m-1} \dfrac{\left(|x_1|^{\alpha(m-1)-1}x_1 - |x_2|^{\alpha(m-1)-1}x_2\right)\cdot(x_1 - x_2)}{|x_1 - x_2|^2} \end{cases}$$

- $\boxed{\alpha > \dfrac{1}{m-1}}$

$$\frac{1}{t^*_{x_1,x_2}} \geq \mathrm{K}_{m,\alpha}|x_1 - x_2|^{\alpha(m-1)-1} > 0.$$

NO HAY SOLUCIÓN CLÁSICA , de hecho no hay ningún tipo de solución

Un ejemplo

$$\begin{cases} u_t = \mathrm{R}|\nabla_x u|^m & \text{en } \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \times \mathbb{R}_+, \quad (\mathrm{R} > 0,\ m > 1) \\ u(x,0) = \ell|x|^{1+\alpha} & \text{en } \mathbb{R}^{\mathrm{N}}, \quad (\ell > 0,\ \alpha > -1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathbb{X}(t) = \left(1 - \mathrm{R}m(\ell(1+\alpha))^m |x|^{\alpha(m-1)-1} t\right) x \quad (\text{rectas características}), \\ \dfrac{1}{t^*_{x_1,x_2}} = \mathrm{R}m(\ell(1+\alpha))^{m-1} \dfrac{\left(|x_1|^{\alpha(m-1)-1}x_1 - |x_2|^{\alpha(m-1)-1}x_2\right)\cdot(x_1-x_2)}{|x_1-x_2|^2} \end{cases}$$

- $\boxed{\alpha > \dfrac{1}{m-1}}$

$$\frac{1}{t^*_{x_1,x_2}} \geq \mathrm{K}_{m,\alpha}|x_1 - x_2|^{\alpha(m-1)-1} > 0.$$

NO HAY SOLUCIÓN CLÁSICA , de hecho no hay ningún tipo de solución

- Benton, S. (1977). *The Hamilton–Jacobi Equation. A Global Approach*, Academic Press.
- Calkin, M. G. (1996). *Lagrangian and Hamiltonian Mechanics*, World Scientific.
- Courant,R. and Hilbert, D. (1953, 1962). *Methods of Matematical Physics*, Vol I–II. J. Wiley & Sons.
- Díaz, J. I. *Mecánica Clásica. Una introducción a la luz de la Matemática Aplicada*, por aparecer.
- Goldstein, H. H. (1992). *Mecánica Clásica*, Reverté (20 ed.).
- Masoliver, J. (2005). De la mecànica clàssica a la mecànica quàntica a través de l'òptica, *Revista de Fíica*, **05** (2), 0415.
- Pucci, B. and Serrin, J. (1994). On the derivation of Hamilton's equation, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **125**, 297–310.

Naturaleza de los problemas de Hamilton–Jacobi

Control Óptimo Determinista. [Fleming & Soner]

$$J(x,t,a(\cdot)) = \overbrace{\int_0^t \Phi(a(s))ds}^{\text{coste interior}} + \overbrace{u_0\left(\mathcal{X}(t;x,a(\cdot))\right)}^{\text{coste de frontera}}, \quad (x,t)\in\mathbb{R}^N\times[0,T[$$

$$\overbrace{a(\cdot)\in D(\Phi)\subset\mathbb{R}^N}^{\text{controles}} \quad \Downarrow \quad \overbrace{\begin{cases} \mathcal{X}'(s;a(\cdot)) = a(s), & \mathcal{X}(0) = x\in\mathbb{R}^N \\ \mathcal{T}'(s;a(\cdot)) = -1, & \mathcal{T}(0) = t\in\mathbb{R}_+ \end{cases}}^{\text{sistema dinámico determinista}}$$

$$\boxed{\mathcal{U}(x,t) = \sup_{a(\cdot)} J(x,t,a(\cdot))} \quad \text{(función coste óptimo)} \tag{3}$$

$$\mathcal{U}(x,t) = \sup_{a(\cdot)}\left\{\int_0^h \Phi(a(s))ds + \mathcal{U}\left(x+\int_0^h a(s)ds, t-h\right)\right\} \quad 0\le h\le t. \tag{4}$$

$$J(x,t,a(\cdot)) = \overbrace{\int_0^t \Phi(a(s))ds}^{\text{coste interior}} + \overbrace{u_0\left(\mathcal{X}(t;x,a(\cdot))\right)}^{\text{coste de frontera}}, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \times [0,\mathrm{T}[$$

$$\overbrace{a(\cdot) \in D(\Phi) \subset \mathbb{R}^{\mathrm{N}}}^{\text{controles}} \quad \Downarrow \quad \overbrace{\begin{cases} \mathcal{X}'(s;a(\cdot)) = a(s), & \mathcal{X}(0) = x \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \\ \mathcal{T}'(s;a(\cdot)) = -1, & \mathcal{T}(0) = t \in \mathbb{R}_+ \end{cases}}^{\text{sistema dinámico determinista}}$$

$$\boxed{\mathcal{U}(x,t) = \sup_{a(\cdot)} J(x,t,a(\cdot))} \quad \text{(función coste óptimo)} \tag{3}$$

$$\mathcal{U}(x,t) = \sup_{a(\cdot)} \left\{ \int_0^h \Phi(a(s))ds + \mathcal{U}\left(x + \int_0^h a(s)ds, t-h\right) \right\} \quad 0 \leq h \leq t. \tag{4}$$

$$J(x,t,a(\cdot)) = \overbrace{\int_0^t \Phi(a(s))ds}^{\text{coste interior}} + \overbrace{u_0\left(\mathcal{X}(t;x,a(\cdot))\right)}^{\text{coste de frontera}}, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^N \times [0,T[$$

$$\overbrace{a(\cdot) \in D(\Phi) \subset \mathbb{R}^N}^{\text{controles}} \quad \Downarrow \quad \overbrace{\begin{cases} \mathcal{X}'(s;a(\cdot)) = a(s), & \mathcal{X}(0) = x \in \mathbb{R}^N \\ \mathcal{T}'(s;a(\cdot)) = -1, & \mathcal{T}(0) = t \in \mathbb{R}_+ \end{cases}}^{\text{sistema dinámico determinista}}$$

$$\boxed{\mathcal{U}(x,t) = \sup_{a(\cdot)} J(x,t,a(\cdot))} \quad \text{(función coste óptimo)} \tag{3}$$

$$\mathcal{U}(x,t) = \sup_{a(\cdot)} \left\{ \int_0^h \Phi(a(s))ds + \mathcal{U}\left(x + \int_0^h a(s)ds, t-h\right) \right\} \quad 0 \le h \le t. \tag{4}$$

$$J(x,t,a(\cdot)) = \overbrace{\int_0^t \Phi(a(s))ds}^{\text{coste interior}} + \overbrace{u_0\left(\mathcal{X}(t;x,a(\cdot))\right)}^{\text{coste de frontera}}, \quad (x,t)\in\mathbb{R}^{\mathrm{N}}\times[0,\mathrm{T}[$$

$$\overbrace{a(\cdot)\in D(\Phi)\subset\mathbb{R}^{\mathrm{N}}}^{\text{controles}} \quad \Downarrow \quad \overbrace{\begin{cases} \mathcal{X}'(s;a(\cdot)) = a(s), & \mathcal{X}(0) = x\in\mathbb{R}^{\mathrm{N}} \\ \mathcal{T}'(s;a(\cdot)) = -1, & \mathcal{T}(0) = t\in\mathbb{R}_+ \end{cases}}^{\text{sistema dinámico determinista}}$$

$$\boxed{\mathcal{U}(x,t) = \sup_{a(\cdot)} J(x,t,a(\cdot))} \quad \text{(función coste óptimo)} \tag{3}$$

$$\mathcal{U}(x,t) = \sup_{a(\cdot)}\left\{\int_0^h \Phi(a(s))ds + \mathcal{U}\left(x+\int_0^h a(s)ds, t-h\right)\right\} \quad 0\le h\le t. \tag{4}$$

$$J(x,t,a(\cdot)) = \overbrace{\int_0^t \Phi(a(s))ds}^{\text{coste interior}} + \overbrace{u_0\left(\mathcal{X}(t;x,a(\cdot))\right)}^{\text{coste de frontera}}, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \times [0,\mathrm{T}[$$

$$\overbrace{a(\cdot) \in D(\Phi) \subset \mathbb{R}^{\mathrm{N}}}^{\text{controles}} \quad \Downarrow \quad \overbrace{\left\{ \begin{array}{ll} \mathcal{X}'(s;a(\cdot)) = a(s), & \mathcal{X}(0) = x \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \\ \mathcal{T}'(s;a(\cdot)) = -1, & \mathcal{T}(0) = t \in \mathbb{R}_+ \end{array} \right.}^{\text{sistema dinámico determinista}}$$

$$\boxed{\mathcal{U}(x,t) = \sup_{a(\cdot)} J(x,t,a(\cdot))} \quad (\text{función coste óptimo}) \tag{3}$$

$$\mathcal{U}(x,t) = \sup_{a(\cdot)} \left\{ \int_0^h \Phi(a(s))ds + \mathcal{U}\left(x + \int_0^h a(s)ds, t-h\right) \right\} \quad 0 \le h \le t. \tag{4}$$

$$\boxed{-\Phi(\eta) \overbrace{\geq}^{a(s)\equiv\eta} \frac{\mathcal{U}(x+\eta h, t-h)-\mathcal{U}(x,t)}{h}) \overbrace{\to}^{\mathcal{U}\in\mathcal{C}^1} -\mathcal{U}_t(x,t)+\langle\eta,\nabla_x\mathcal{U}(x,t)\rangle}$$

$$-\int_0^{\varepsilon}\Phi(a_\varepsilon(\sigma))d\sigma \leq \mathcal{U}\left(x+\int_0^{\varepsilon}a_\varepsilon(\sigma)d\sigma, t-\varepsilon\right)-\mathcal{U}(x,t)+\varepsilon^2$$

$$\overbrace{=}^{\mathcal{U}\in\mathcal{C}^1} -\varepsilon\mathcal{U}_t(x,t)+\int_0^{\varepsilon}\langle a_\varepsilon(\sigma)d\sigma,\nabla_x\mathcal{U}(x,t)\rangle+\varepsilon^2+o(\varepsilon)$$

$$\Downarrow$$

$$\mathcal{U}_t(x,t) \leq \frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\varepsilon}\left(\langle a_\varepsilon(\sigma)d\sigma,\nabla_x\mathcal{U}(x,t)\rangle+\Phi(a_\varepsilon(\sigma))\right)d\sigma+\varepsilon+\frac{o(\varepsilon)}{\varepsilon}$$

$$\leq \sup_{\xi\in D(\Phi)}\{\langle\xi,\nabla_x\mathcal{U}(x,t)\rangle+\Phi(\xi)\}+\varepsilon+\frac{o(\varepsilon)}{\varepsilon}$$

$$\overbrace{\to}^{\varepsilon\to 0} \sup_{\xi\in D(\Phi)}\{\langle\xi,\nabla_x\mathcal{U}(x,t)\rangle+\Phi(\xi)\}$$

$$\boxed{-\Phi(\eta) \overbrace{\geq}^{a(s)\equiv\eta} \frac{\mathcal{U}(x+\eta h, t-h) - \mathcal{U}(x,t)}{h}) \overbrace{\rightarrow}^{\mathcal{U}\in\mathcal{C}^1} -\mathcal{U}_t(x,t) + \langle \eta, \nabla_x \mathcal{U}(x,t)\rangle}$$

$$-\int_0^\varepsilon \Phi(a_\varepsilon(\sigma))d\sigma \leq \ \mathcal{U}\left(x + \int_0^\varepsilon a_\varepsilon(\sigma)d\sigma, t-\varepsilon\right) - \mathcal{U}(x,t) + \varepsilon^2$$

$$\overbrace{=}^{\mathcal{U}\in\mathcal{C}^1} \quad -\varepsilon\mathcal{U}_t(x,t) + \int_0^\varepsilon \langle a_\varepsilon(\sigma)d\sigma, \nabla_x\mathcal{U}(x,t)\rangle + \varepsilon^2 + o(\varepsilon)$$

$$\Downarrow$$

$$\mathcal{U}_t(x,t) \leq \ \frac{1}{\varepsilon}\int_0^\varepsilon \left(\langle a_\varepsilon(\sigma)d\sigma, \nabla_x\mathcal{U}(x,t)\rangle + \Phi(a_\varepsilon(\sigma))\right) d\sigma + \varepsilon + \frac{o(\varepsilon)}{\varepsilon}$$

$$\leq \quad \sup_{\xi\in D(\Phi)} \left\{\langle \xi, \nabla_x\mathcal{U}(x,t)\rangle + \Phi(\xi)\right\} + \varepsilon + \frac{o(\varepsilon)}{\varepsilon}$$

$$\overbrace{\rightarrow}^{\varepsilon\to 0} \quad \sup_{\xi\in D(\Phi)} \left\{\langle \xi, \nabla_x\mathcal{U}(x,t)\rangle + \Phi(\xi)\right\}$$

$$\boxed{-\Phi(\eta) \overbrace{\geq}^{a(s)\equiv\eta} \frac{\mathcal{U}(x+\eta h, t-h)-\mathcal{U}(x,t)}{h}) \overbrace{\to}^{\mathcal{U}\in\mathcal{C}^1} -\mathcal{U}_t(x,t)+\langle \eta, \nabla_x \mathcal{U}(x,t)\rangle}$$

$$\begin{aligned} -\int_0^{\varepsilon}\Phi(a_\varepsilon(\sigma))d\sigma &\leq \ \mathcal{U}\left(x+\int_0^{\varepsilon}a_\varepsilon(\sigma)d\sigma, t-\varepsilon\right)-\mathcal{U}(x,t)+\varepsilon^2 \\ &\overbrace{=}^{\mathcal{U}\in\mathcal{C}^1} \ -\varepsilon\mathcal{U}_t(x,t)+\int_0^{\varepsilon}\langle a_\varepsilon(\sigma)d\sigma, \nabla_x\mathcal{U}(x,t)\rangle+\varepsilon^2+o(\varepsilon) \end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_t(x,t) &\leq \ \frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\varepsilon}\left(\langle a_\varepsilon(\sigma)d\sigma, \nabla_x\mathcal{U}(x,t)\rangle+\Phi(a_\varepsilon(\sigma))\right)d\sigma+\varepsilon+\frac{o(\varepsilon)}{\varepsilon} \\ &\leq \ \sup_{\xi\in D(\Phi)}\{\langle\xi, \nabla_x\mathcal{U}(x,t)\rangle+\Phi(\xi)\}+\varepsilon+\frac{o(\varepsilon)}{\varepsilon} \\ &\overbrace{\to}^{\varepsilon\to 0} \ \sup_{\xi\in D(\Phi)}\{\langle\xi, \nabla_x\mathcal{U}(x,t)\rangle+\Phi(\xi)\} \end{aligned}$$

$$\boxed{-\Phi(\eta) \overbrace{\geq}^{a(s)\equiv\eta} \frac{\mathcal{U}(x+\eta h, t-h) - \mathcal{U}(x,t)}{h}) \overbrace{\rightarrow}^{\mathcal{U}\in\mathcal{C}^1} -\mathcal{U}_t(x,t) + \langle \eta, \nabla_x \mathcal{U}(x,t)\rangle}$$

$$-\int_0^\varepsilon \Phi(a_\varepsilon(\sigma))d\sigma \leq \ \mathcal{U}\left(x + \int_0^\varepsilon a_\varepsilon(\sigma)d\sigma, t-\varepsilon\right) - \mathcal{U}(x,t) + \varepsilon^2$$

$$\overbrace{=}^{\mathcal{U}\in\mathcal{C}^1} \ -\varepsilon\mathcal{U}_t(x,t) + \int_0^\varepsilon \langle a_\varepsilon(\sigma)d\sigma, \nabla_x\mathcal{U}(x,t)\rangle + \varepsilon^2 + o(\varepsilon)$$

$$\Downarrow$$

$$\mathcal{U}_t(x,t) \leq \ \frac{1}{\varepsilon}\int_0^\varepsilon \left(\langle a_\varepsilon(\sigma)d\sigma, \nabla_x\mathcal{U}(x,t)\rangle + \Phi(a_\varepsilon(\sigma))\right) d\sigma + \varepsilon + \frac{o(\varepsilon)}{\varepsilon}$$

$$\leq \ \sup_{\xi\in D(\Phi)} \{\langle \xi, \nabla_x\mathcal{U}(x,t)\rangle + \Phi(\xi)\} + \varepsilon + \frac{o(\varepsilon)}{\varepsilon}$$

$$\overbrace{\rightarrow}^{\varepsilon\to 0} \ \sup_{\xi\in D(\Phi)} \{\langle \xi, \nabla_x\mathcal{U}(x,t)\rangle + \Phi(\xi)\}$$

$$\boxed{-\Phi(\eta) \overbrace{\geq}^{a(s)\equiv\eta} \frac{\mathcal{U}(x+\eta h, t-h) - \mathcal{U}(x,t)}{h}) \overbrace{\rightarrow}^{\mathcal{U}\in\mathcal{C}^1} -\mathcal{U}_t(x,t) + \langle \eta, \nabla_x \mathcal{U}(x,t)\rangle}$$

$$-\int_0^\varepsilon \Phi(a_\varepsilon(\sigma))d\sigma \leq \ \mathcal{U}\left(x + \int_0^\varepsilon a_\varepsilon(\sigma)d\sigma, t-\varepsilon\right) - \mathcal{U}(x,t) + \varepsilon^2$$

$$\overbrace{=}^{\mathcal{U}\in\mathcal{C}^1} \ -\varepsilon\mathcal{U}_t(x,t) + \int_0^\varepsilon \langle a_\varepsilon(\sigma)d\sigma, \nabla_x\mathcal{U}(x,t)\rangle + \varepsilon^2 + o(\varepsilon)$$

$$\Downarrow$$

$$\mathcal{U}_t(x,t) \leq \ \frac{1}{\varepsilon}\int_0^\varepsilon \left(\langle a_\varepsilon(\sigma)d\sigma, \nabla_x\mathcal{U}(x,t)\rangle + \Phi(a_\varepsilon(\sigma))\right)d\sigma + \varepsilon + \frac{o(\varepsilon)}{\varepsilon}$$

$$\leq \ \sup_{\xi\in D(\Phi)} \{\langle \xi, \nabla_x\mathcal{U}(x,t)\rangle + \Phi(\xi)\} + \varepsilon + \frac{o(\varepsilon)}{\varepsilon}$$

$$\overbrace{\rightarrow}^{\varepsilon\rightarrow 0} \ \sup_{\xi\in D(\Phi)} \{\langle \xi, \nabla_x\mathcal{U}(x,t)\rangle + \Phi(\xi)\}$$

$$\boxed{-\Phi(\eta) \overbrace{\geq}^{a(s)\equiv\eta} \frac{\mathcal{U}(x+\eta h, t-h) - \mathcal{U}(x,t)}{h}) \overbrace{\rightarrow}^{\mathcal{U}\in\mathcal{C}^1} -\mathcal{U}_t(x,t) + \langle \eta, \nabla_x \mathcal{U}(x,t)\rangle}$$

$$\begin{aligned}
-\int_0^\varepsilon \Phi(a_\varepsilon(\sigma))d\sigma \leq \ & \mathcal{U}\left(x + \int_0^\varepsilon a_\varepsilon(\sigma)d\sigma, t-\varepsilon\right) - \mathcal{U}(x,t) + \varepsilon^2 \\
\overbrace{=}^{\mathcal{U}\in\mathcal{C}^1} \ & -\varepsilon\mathcal{U}_t(x,t) + \int_0^\varepsilon \langle a_\varepsilon(\sigma)d\sigma, \nabla_x\mathcal{U}(x,t)\rangle + \varepsilon^2 + o(\varepsilon)
\end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{U}_t(x,t) \leq \ & \frac{1}{\varepsilon}\int_0^\varepsilon \left(\langle a_\varepsilon(\sigma)d\sigma, \nabla_x\mathcal{U}(x,t)\rangle + \Phi(a_\varepsilon(\sigma))\right) d\sigma + \varepsilon + \frac{o(\varepsilon)}{\varepsilon} \\
\leq \ & \sup_{\xi\in D(\Phi)} \{\langle \xi, \nabla_x\mathcal{U}(x,t)\rangle + \Phi(\xi)\} + \varepsilon + \frac{o(\varepsilon)}{\varepsilon} \\
\overbrace{\rightarrow}^{\varepsilon\rightarrow 0} \ & \sup_{\xi\in D(\Phi)} \{\langle \xi, \nabla_x\mathcal{U}(x,t)\rangle + \Phi(\xi)\}
\end{aligned}$$

$$\boxed{-\Phi(\xi) \overbrace{\geq}^{a(s)\equiv\xi} \frac{\mathcal{U}(x+\xi h, t-h) - \mathcal{U}(x,t)}{h}) \overbrace{\to}^{\mathcal{U}\in\mathcal{C}^1} -\mathcal{U}_t(x,t) + \langle \xi, \nabla_x \mathcal{U}(x,t)\rangle}$$

$$\boxed{\mathcal{U}_t(x,t) \leq \sup_{\xi\in D(\Phi)} \{\langle \xi, \nabla_x \mathcal{U}(x,t)\rangle + \Phi(\xi)\}}$$

$$\langle \eta, \nabla_x \mathcal{U}(x,t)\rangle + \Phi(\eta) \leq \mathcal{U}_t(x,t) \leq \sup_{\xi\in D(\Phi)} \{\langle \xi, \nabla_x \mathcal{U}(x,t)\rangle + \Phi(\xi)\}, \quad \eta \in D($$

$$\boxed{\mathcal{U}_t(x,t) = \sup_{\xi\in D(\Phi)} \{\langle \xi, \nabla_x \mathcal{U}(x,t)\rangle + \Phi(\xi)\}}$$

$$\boxed{-\Phi(\xi) \overbrace{\geq}^{a(s)\equiv\xi} \frac{\mathcal{U}(x+\xi h, t-h)-\mathcal{U}(x,t)}{h}) \overbrace{\longrightarrow}^{\mathcal{U}\in\mathcal{C}^1} -\mathcal{U}_t(x,t)+\langle \xi, \nabla_x \mathcal{U}(x,t)\rangle}$$

$$\boxed{\mathcal{U}_t(x,t) \leq \sup_{\xi\in D(\Phi)} \left\{\langle \xi, \nabla_x \mathcal{U}(x,t)\rangle + \Phi(\xi)\right\}}$$

$$\langle \eta, \nabla_x \mathcal{U}(x,t)\rangle + \Phi(\eta) \leq \mathcal{U}_t(x,t) \leq \sup_{\xi\in D(\Phi)} \left\{\langle \xi, \nabla_x \mathcal{U}(x,t)\rangle + \Phi(\xi)\right\}, \quad \eta \in D($$

$$\boxed{\mathcal{U}_t(x,t) = \sup_{\xi\in D(\Phi)} \left\{\langle \xi, \nabla_x \mathcal{U}(x,t)\rangle + \Phi(\xi)\right\}}$$

$$-\Phi(\xi) \overbrace{\geq}^{a(s)\equiv\xi} \frac{\mathcal{U}(x+\xi h, t-h) - \mathcal{U}(x,t)}{h}) \overbrace{\to}^{\mathcal{U}\in\mathcal{C}^1} -\mathcal{U}_t(x,t) + \langle \xi, \nabla_x \mathcal{U}(x,t)\rangle$$

$$\boxed{\mathcal{U}_t(x,t) \leq \sup_{\xi\in D(\Phi)} \{\langle \xi, \nabla_x \mathcal{U}(x,t)\rangle + \Phi(\xi)\}}$$

$$\langle \eta, \nabla_x \mathcal{U}(x,t)\rangle + \Phi(\eta) \leq \mathcal{U}_t(x,t) \leq \sup_{\xi\in D(\Phi)} \{\langle \xi, \nabla_x \mathcal{U}(x,t)\rangle + \Phi(\xi)\}, \quad \eta \in D($$

$$\boxed{\mathcal{U}_t(x,t) = \sup_{\xi\in D(\Phi)} \{\langle \xi, \nabla_x \mathcal{U}(x,t)\rangle + \Phi(\xi)\}}$$

Análisis Convexo

$$\sup_{\xi \in D(\Phi)} \{\langle z, \xi \rangle + \Phi(\xi)\} \overbrace{=}^{\text{dual convexo}} (-\Phi)^\star(z)$$

Si $-\Phi = \mathcal{H}^\star$, siendo $\mathcal{H}$ convexo $\overbrace{\Rightarrow}^{\text{Fenchel–Moreau}}$ $\mathcal{H} = \mathcal{H}^{\star\star}$

$$\boxed{\mathcal{U}_t(x,t) = \mathcal{H}(\nabla_x \mathcal{U}(x,t))}$$

para

$$\boxed{\mathcal{U}(x,t) = \sup_{z \in x + tD(\mathcal{H}^\star)} \left\{ u_0(z) - t\mathcal{H}\left(\frac{z-x}{t}\right)\right\}},$$

Fórmula de Lax–Oleinik

(ver (3))

Análisis Convexo

$$\sup_{\xi \in D(\Phi)} \{\langle z, \xi \rangle + \Phi(\xi)\} \overbrace{=}^{\text{dual convexo}} (-\Phi)^\star(z)$$

$$\text{Si } -\Phi = \mathcal{H}^\star, \text{ siendo } \mathcal{H} \text{ convexo} \overbrace{\Rightarrow}^{\text{Fenchel–Moreau}} \mathcal{H} = \mathcal{H}^{\star\star}$$

$$\boxed{\mathcal{U}_t(x,t) = \mathcal{H}(\nabla_x \mathcal{U}(x,t))}$$

para

$$\boxed{\mathcal{U}(x,t) = \sup_{z \in x + tD(\mathcal{H}^\star)} \left\{ u_0(z) - t\mathcal{H}\left(\frac{z-x}{t}\right) \right\}}, \quad \text{Fórmula de Lax–Oleinik}$$

(ver (3))

Análisis Convexo

$$\sup_{\xi \in D(\Phi)} \{\langle z, \xi \rangle + \Phi(\xi)\} \overbrace{=}^{\text{dual convexo}} (-\Phi)^{\star}(z)$$

Si $-\Phi = \mathcal{H}^{\star}$, siendo $\mathcal{H}$ convexo $\overbrace{\Rightarrow}^{\text{Fenchel–Moreau}}$ $\mathcal{H} = \mathcal{H}^{\star\star}$

$$\boxed{\mathcal{U}_t(x,t) = \mathcal{H}(\nabla_x \mathcal{U}(x,t))}$$

para

$$\boxed{\mathcal{U}(x,t) = \sup_{z \in x + tD(\mathcal{H}^{\star})} \left\{ u_0(z) - t\mathcal{H}\left(\frac{z-x}{t}\right) \right\}},$$

Fórmula de Lax–Oleinik

(ver (3))

Recordemos

$u_t + f(u_x) = 0$	$\overbrace{\rightsquigarrow}^{v=u_x}$	$v_t + (f(v))_x = 0$
Hamilton–Jacobi		ley de conservación
	(ec. no viscosas)	

sol. de entropía

Recordemos

$u_t + f(u_x) = 0$	$\overbrace{\rightsquigarrow}^{v=u_x}$	$v_t + (f(v))_x = 0$
Hamilton–Jacobi		ley de conservación
	(ec. no viscosas)	
		sol. de entropía

Recordemos

$u_t + f(u_x) = 0$ Hamilton–Jacobi	$\overbrace{\rightsquigarrow}^{v=u_x}$	$v_t + (f(v))_x = 0$ ley de conservación
	(ec. no viscosas)	
sol. de viscosidad	$\longleftarrow$	sol. de entropía

$$\begin{cases} \mathbb{F}(y,u,\mathrm{D}u) = 0 & \text{en } \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^{\mathrm{M}}, \\ u = g & \text{en } \partial\mathcal{O}, \end{cases}$$

$\mathbb{F}: \ \mathcal{O} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{\mathrm{M}} \to \mathbb{R}, \ g: \ \partial\mathcal{O} \to \mathbb{R}.$

Dos ejemplos:

• El problema de Cauchy

$$\begin{cases} u_t + \mathrm{H}(x,t,\nabla_x u) = 0 & \text{en } \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \times \mathbb{R}_+ \ , \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{en } \mathbb{R}^{\mathrm{N}}, \end{cases}$$

se corresponde con

$$\mathcal{O} = \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \times \mathbb{R}_+ \quad \text{y} \quad \mathbb{F}(y,r,\widetilde{p}) = p_{\mathrm{N}+1} + \mathrm{H}(y,p), \ y = (x,t), \ \widetilde{p} = (p, p_{\mathrm{N}+1}).$$

$$\begin{cases} \mathbb{F}(y,u,\mathrm{D}u)=0 & \text{en } \mathcal{O}\subset\mathbb{R}^{\mathrm{M}}, \\ u=g & \text{en } \partial\mathcal{O}, \end{cases}$$

$\mathbb{F}:\ \mathcal{O}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{\mathrm{M}}\to\mathbb{R},\ g:\ \partial\mathcal{O}\to\mathbb{R}.$

Dos ejemplos:

- El problema de Cauchy

$$\begin{cases} u_t+\mathrm{H}(x,t,\nabla_x u)=0 & \text{en } \mathbb{R}^{\mathrm{N}}\times\mathbb{R}_+\ , \\ u(x,0)=u_0(x) & \text{en } \mathbb{R}^{\mathrm{N}}, \end{cases}$$

se corresponde con

$\mathcal{O}=\mathbb{R}^{\mathrm{N}}\times\mathbb{R}_+$ y $\mathbb{F}(y,r,\widetilde{p})=p_{\mathrm{N}+1}+\mathrm{H}(y,p),\ y=(x,t),\ \widetilde{p}=(p,p_{\mathrm{N}+1}).$

$$\begin{cases} \mathbb{F}(y,u,\mathrm{D}u)=0 & \text{en } \mathcal{O}\subset\mathbb{R}^{\mathrm{M}}, \\ u=g & \text{en } \partial\mathcal{O}, \end{cases}$$

$\mathbb{F}:\ \mathcal{O}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{\mathrm{M}}\to\mathbb{R},\ g:\ \partial\mathcal{O}\to\mathbb{R}.$
Dos ejemplos:

• El problema de Cauchy

$$\begin{cases} u_t+\mathrm{H}(x,t,\nabla_x u)=0 & \text{en } \mathbb{R}^{\mathrm{N}}\times\mathbb{R}_+\ , \\ u(x,0)=u_0(x) & \text{en } \mathbb{R}^{\mathrm{N}}, \end{cases}$$

se corresponde con

$$\mathcal{O}=\mathbb{R}^{\mathrm{N}}\times\mathbb{R}_+ \quad \text{y} \quad \mathbb{F}(y,r,\widetilde{p})=p_{\mathrm{N}+1}+\mathrm{H}(y,p),\ y=(x,t),\ \widetilde{p}=(p,p_{\mathrm{N}+1}).$$

$$\begin{cases} \mathbb{F}(y, u, \mathrm{D}u) = 0 & \text{en } \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^{\mathrm{M}}, \\ u = g & \text{en } \partial\mathcal{O}, \end{cases}$$

$\mathbb{F}: \ \mathcal{O} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{\mathrm{M}} \to \mathbb{R}, \ g: \ \partial\mathcal{O} \to \mathbb{R}.$

Dos ejemplos:

• El problema de contorno

$$\begin{cases} |\nabla_x u| = f & \text{en } \Omega \subset \mathbb{R}^{\mathrm{N}}, \\ u = g & \text{en } \partial\Omega, \end{cases}$$

se corresponde con

$$\mathcal{O} = \Omega \quad \text{y} \quad \mathbb{F}(x, r, p) = |p| - f(x).$$

$$\mathbb{F}(y, u, \mathrm{D}u) \leq 0 \quad \text{en } \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^{\mathrm{M}}$$

Para $\varphi \in \mathcal{C}_c(\mathcal{O})$, se introduce

$$\mathbb{E}_+(\varphi) = \{y \in \mathcal{O} : \ \varphi(y) = \max_{\mathcal{O}} \varphi > 0\} \quad (\text{vacio para } \varphi \leq 0)$$

$u \in \mathcal{C}(\mathcal{O})$ es solución de

$$\mathbb{F}(y, u, \mathrm{D}u) \leq 0 \quad \text{en } \mathcal{O}$$

si

$$\begin{cases} \forall \varphi \in \mathcal{D}_+(\mathcal{O}), \ \forall k \in \mathbb{R} \text{ con } \mathbb{E}_+(\varphi(u-k)) \neq \emptyset, \ \exists y_0 \in \mathbb{E}_+(\varphi(u-k)) \text{ tal qu} \\ \mathbb{F}(y_0, u(y_0), -\frac{\mathrm{D}\varphi}{\varphi}(u-k)(y_0) \leq 0 \end{cases}$$

$$\mathbb{F}(y, u, \mathrm{D}u) \leq 0 \quad \text{en } \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^{\mathrm{M}}$$

Para $\varphi \in \mathcal{C}_c(\mathcal{O})$, se introduce

$$\mathbb{E}_+(\varphi) = \{y \in \mathcal{O} : \ \varphi(y) = \max_{\mathcal{O}} \varphi > 0\} \quad \text{(vacio para } \varphi \leq 0)$$

$u \in \mathcal{C}(\mathcal{O})$ es solución de

$$\mathbb{F}(y, u, \mathrm{D}u) \leq 0 \quad \text{en } \mathcal{O}$$

si

$$\begin{cases} \forall \varphi \in \mathcal{D}_+(\mathcal{O}), \ \forall k \in \mathbb{R} \text{ con } \mathbb{E}_+(\varphi(u-k)) \neq \emptyset, \ \exists y_0 \in \mathbb{E}_+(\varphi(u-k)) \text{ tal qu} \\ \mathbb{F}(y_0, u(y_0), -\dfrac{\mathrm{D}\varphi}{\varphi}(u-k)(y_0)) \leq 0 \end{cases}$$

$$\mathbb{F}(y, u, \mathrm{D}u) \leq 0 \quad \text{en } \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^{\mathrm{M}}$$

Para $\varphi \in \mathcal{C}_c(\mathcal{O})$, se introduce

$$\mathbb{E}_+(\varphi) = \{y \in \mathcal{O} : \ \varphi(y) = \max_{\mathcal{O}} \varphi > 0\} \quad \text{(vacio para } \varphi \leq 0\text{)}$$

$u \in \mathcal{C}(\mathcal{O})$ es solución de

$$\mathbb{F}(y, u, \mathrm{D}u) \leq 0 \quad \text{en } \mathcal{O}$$

si

$$\begin{cases} \forall \varphi \in \mathcal{D}_+(\mathcal{O}),\ \forall k \in \mathbb{R} \text{ con } \mathbb{E}_+(\varphi(u-k)) \neq \emptyset,\ \exists y_0 \in \mathbb{E}_+(\varphi(u-k)) \text{ tal qu} \\ \mathbb{F}(y_0, u(y_0), -\dfrac{\mathrm{D}\varphi}{\varphi}(u-k)(y_0)) \leq 0 \end{cases}$$

$$\mathbb{F}(y, u, \mathrm{D}u) \leq 0 \quad \text{en } \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^{\mathrm{M}}$$

Para $\varphi \in \mathcal{C}_c(\mathcal{O})$, se introduce

$$\mathbb{E}_+(\varphi) = \{y \in \mathcal{O} : \ \varphi(y) = \max_{\mathcal{O}} \varphi > 0\} \quad (\text{vacio para } \varphi \leq 0)$$

$u \in \mathcal{C}(\mathcal{O})$ es solución de

$$\mathbb{F}(y, u, \mathrm{D}u) \leq 0 \quad \text{en } \mathcal{O}$$

si

$$\left\{ \begin{array}{c} \forall \varphi \in \mathcal{D}_+(\mathcal{O}), \ \forall k \in \mathbb{R} \text{ con } \mathbb{E}_+(\varphi(u-k)) \neq \emptyset, \ \exists y_0 \in \mathbb{E}_+(\varphi(u-k)) \text{ tal qu} \\ \mathbb{F}(y_0, u(y_0), -\dfrac{\mathrm{D}\varphi}{\varphi}(u-k)(y_0) \leq 0 \end{array} \right.$$

$$\mathbb{F}(y, u, \mathrm{D}u) \leq 0 \quad \text{en } \mathcal{O}$$

Sea $u \in \mathcal{C}^1(\mathcal{O})$ es solución clásica de

$$\mathbb{F}(y, u(y), \mathrm{D}u(y)) \leq 0 \quad y \in \mathcal{O}$$

y $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathcal{O})$ tal que $u - \varphi$ tiene un máximo local en $y_0 \in \mathcal{O}$. Entonces reemplazando φ por

$$\widehat{\varphi}(y) = \varphi(y) + (u - \varphi)(y_0) + |y - y_0|^2$$

si fuese necesario, se puede suponer

$$0 = (u - \varphi)(y_0) > (u - \varphi)(y), \quad |y - y_0| \ll 1 \quad \text{y} \quad \mathrm{D}\varphi(y_0) = \mathrm{D}u(y_0)$$

con lo que

$$\mathbb{F}(y_0, u(y_0), \mathrm{D}\varphi(y_0)) \leq 0.$$

Naturaleza de los problemas de Hamilton–Jacobi

Soluciones de viscosidad. Por acretividad [Crandall, Evans & Lions]

$$\mathbb{F}(y, u, \mathrm{D}u) \leq 0 \quad \text{en } \mathcal{O}$$

Sea $u \in \mathcal{C}^1(\mathcal{O})$ es solución clásica de

$$\mathbb{F}(y, u(y), \mathrm{D}u(y)) \leq 0 \quad y \in \mathcal{O}$$

y $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathcal{O})$ tal que $u - \varphi$ tiene un máximo local en $y_0 \in \mathcal{O}$. Entonces reemplazando φ por

$$\widehat{\varphi}(y) = \varphi(y) + (u - \varphi)(y_0) + |y - y_0|^2$$

si fuese necesario, se puede suponer

$$0 = (u - \varphi)(y_0) > (u - \varphi)(y), \quad |y - y_0| \ll 1 \quad \text{y} \quad \mathrm{D}\varphi(y_0) = \mathrm{D}u(y_0)$$

con lo que

$$\mathbb{F}(y_0, u(y_0), \mathrm{D}\varphi(y_0)) \leq 0.$$

$$\mathbb{F}(y, u, \mathrm{D}u) \leq 0 \quad \text{en } \mathcal{O}$$

Sea $u \in \mathcal{C}^1(\mathcal{O})$ es solución clásica de

$$\mathbb{F}(y, u(y), \mathrm{D}u(y)) \leq 0 \quad y \in \mathcal{O}$$

y $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathcal{O})$ tal que $u - \varphi$ tiene un máximo local en $y_0 \in \mathcal{O}$. Entonces reemplazando φ por

$$\widehat{\varphi}(y) = \varphi(y) + (u - \varphi)(y_0) + |y - y_0|^2$$

si fuese necesario, se puede suponer

$$0 = (u - \varphi)(y_0) > (u - \varphi)(y), \quad |y - y_0| \ll 1 \quad \text{y} \quad \mathrm{D}\varphi(y_0) = \mathrm{D}u(y_0)$$

con lo que

$$\mathbb{F}(y_0, u(y_0), \mathrm{D}\varphi(y_0)) \leq 0.$$

$$\mathbb{F}(y, u, \mathrm{D}u) \leq 0 \quad \text{en } \mathcal{O}$$

Sea $u \in \mathcal{C}^1(\mathcal{O})$ es solución clásica de

$$\mathbb{F}(y, u(y), \mathrm{D}u(y)) \leq 0 \quad y \in \mathcal{O}$$

y $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathcal{O})$ tal que $u - \varphi$ tiene un máximo local en $y_0 \in \mathcal{O}$. Entonces reemplazando φ por

$$\widehat{\varphi}(y) = \varphi(y) + (u - \varphi)(y_0) + |y - y_0|^2$$

si fuese necesario, se puede suponer

$$0 = (u - \varphi)(y_0) > (u - \varphi)(y), \quad |y - y_0| \ll 1 \quad \text{y} \quad \mathrm{D}\varphi(y_0) = \mathrm{D}u(y_0)$$

con lo que

$$\mathbb{F}(y_0, u(y_0), \mathrm{D}\varphi(y_0)) \leq 0.$$

$$\mathbb{F}(y, u, \mathrm{D}u) \leq 0 \quad \text{en } \mathcal{O}$$

Sea $u \in \mathcal{C}^1(\mathcal{O})$ es solución clásica de

$$\mathbb{F}(y, u(y), \mathrm{D}u(y)) \leq 0 \quad y \in \mathcal{O}$$

y $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathcal{O})$ tal que $u - \varphi$ tiene un máximo local en $y_0 \in \mathcal{O}$. Entonces reemplazando φ por

$$\widehat{\varphi}(y) = \varphi(y) + (u - \varphi)(y_0) + |y - y_0|^2$$

si fuese necesario, se puede suponer

$$0 = (u - \varphi)(y_0) > (u - \varphi)(y), \quad |y - y_0| \ll 1 \quad \text{y} \quad \mathrm{D}\varphi(y_0) = \mathrm{D}u(y_0)$$

con lo que

$$\mathbb{F}(y_0, u(y_0), \mathrm{D}\varphi(y_0)) \leq 0.$$

$u \in \mathcal{C}(\mathcal{O})$ es solución de

$$\mathbb{F}(y, u, \mathrm{D}u) \leq 0 \quad \text{en } \mathcal{O}$$

cuando para cada $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathcal{O})$ tal que $u - \varphi$ tiene un máximo local en $y_0 \in \mathcal{O}$ se verifica

$$\mathbb{F}(y_0, u(y_0), \mathrm{D}\varphi(y_0)) \leq 0.$$

$u \in \mathcal{C}(\mathcal{O})$ es solución de

$$\mathbb{F}(y, u, \mathrm{D}u) \leq 0 \quad \text{en } \mathcal{O}$$

cuando para cada $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathcal{O})$ tal que $u - \varphi$ tiene un máximo local en $y_0 \in \mathcal{O}$ se verifica

$$\mathbb{F}(y_0, u(y_0), \mathrm{D}\varphi(y_0)) \leq 0.$$

Todo marcha si $u \in \mathcal{UB}_{loc}(\mathcal{O})$ y se trabaja con u^*

$u \in \mathcal{C}(\mathcal{O})$ es solución de

$$\mathbb{F}(y, u, \mathrm{D}u) \leq 0 \quad \text{en } \mathcal{O}$$

cuando para cada $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathcal{O})$ tal que $u - \varphi$ tiene un máximo local en $y_0 \in \mathcal{O}$ se verifica

$$\mathbb{F}(y_0, u(y_0), \mathrm{D}\varphi(y_0)) \leq 0.$$

Todo marcha si $u \in \mathcal{UB}_{loc}(\mathcal{O})$ y se trabaja con u^*

$u \in \mathcal{UB}_{loc}(\mathcal{O})$ es solución de

$$\mathbb{F}(y, u, \mathrm{D}u) \leq 0 \quad \text{en } \mathcal{O}$$

cuando para cada $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathcal{O})$ tal que $u^* - \varphi$ tiene un máximo local en $y_0 \in \mathcal{O}$ se verifica

$$\mathbb{F}(y_0, u^*(y_0), \mathrm{D}\varphi(y_0)) \leq 0.$$

Nótese que

$$(u^* - \varphi)(y_0) \geq (u^* - \varphi)(y), \quad |y - y_0| \ll 1$$

determina

$$u^*(y) \leq u^*(y_0) + \varphi(y) - \varphi(y_0) = u^*(y_0) + \langle \mathrm{D}\varphi(y_0), y - y_0 \rangle + o(|y - y_0|)$$

con lo que

$$\mathrm{D}\varphi(y_0) \in \mathrm{D}^+_{\mathcal{O}} u^*(y_0) \doteq \{p \in \mathbb{R}^{\mathrm{M}} : \ u^*(y) \leq u^*(y_0) + \langle p, y - y_0 \rangle + o(|y - y_0|)\}$$

De hecho, se prueba

$$\mathrm{D}^+_{\mathcal{O}} u^*(y_0) = \{\mathrm{D}\varphi(y_0) : \ \varphi \in \mathcal{C}^1(\mathcal{O}) \text{ y } u^* - \varphi \text{ tiene un máximo local en } y_0 \in \mathcal{O}$$

Nótese que

$$(u^* - \varphi)(y_0) \geq (u^* - \varphi)(y), \quad |y - y_0| \ll 1$$

determina

$$u^*(y) \leq u^*(y_0) + \varphi(y) - \varphi(y_0) = u^*(y_0) + \langle \mathrm{D}\varphi(y_0), y - y_0 \rangle + o(|y - y_0|)$$

con lo que

$$\mathrm{D}\varphi(y_0) \in \mathrm{D}^+_{\mathcal{O}} u^*(y_0) \doteq \{p \in \mathbb{R}^{\mathrm{M}} : \; u^*(y) \leq u^*(y_0) + \langle p, y - y_0 \rangle + o(|y - y_0|)\}$$

De hecho, se prueba

$$\mathrm{D}^+_{\mathcal{O}} u^*(y_0) = \{\mathrm{D}\varphi(y_0) : \; \varphi \in \mathcal{C}^1(\mathcal{O}) \text{ y } u^* - \varphi \text{ tiene un máximo local en } y_0 \in \mathcal{O}$$

Nótese que

$$(u^* - \varphi)(y_0) \geq (u^* - \varphi)(y), \quad |y - y_0| \ll 1$$

determina

$$u^*(y) \leq u^*(y_0) + \varphi(y) - \varphi(y_0) = u^*(y_0) + \langle \mathrm{D}\varphi(y_0), y - y_0 \rangle + o(|y - y_0|)$$

con lo que

$$\mathrm{D}\varphi(y_0) \in \mathrm{D}^+_{\mathcal{O}} u^*(y_0) \doteq \{p \in \mathbb{R}^{\mathrm{M}} : \ u^*(y) \leq u^*(y_0) + \langle p, y - y_0 \rangle + o(|y - y_0|)\}$$

De hecho, se prueba

$$\mathrm{D}^+_{\mathcal{O}} u^*(y_0) = \{\mathrm{D}\varphi(y_0) : \ \varphi \in \mathcal{C}^1(\mathcal{O}) \text{ y } u^* - \varphi \text{ tiene un máximo local en } y_0 \in \mathcal{O}$$

$u \in \mathcal{UB}_{loc}(\mathcal{O})$ es solución de

$$\mathbb{F}(y, u, \mathrm{D}u) \leq 0 \quad \text{en } \mathcal{O}$$

cuando

$$\mathbb{F}(y_0, u^*(y_0), p) \leq 0, \;\; p \in \mathrm{D}^+_{\mathcal{O}} u^*(y_0), \;\; y_0 \in \mathcal{O}.$$

Análogamente con las soluciones de

$$\mathbb{F}(y, u, \mathrm{D}u) \geq 0 \quad \text{en } \mathcal{O}$$

dadas por $u \in \mathcal{LB}_{loc}(\mathcal{O})$ para las que

$$\mathbb{F}(y_0, u_*(y_0), p) \geq 0, \;\; p \in \mathrm{D}^-_{\mathcal{O}} u_*(y_0), \;\; y_0 \in \mathcal{O}.$$

$u \in \mathcal{UB}_{loc}(\mathcal{O})$ es solución de

$$\mathbb{F}(y, u, \mathrm{D}u) \leq 0 \quad \text{en } \mathcal{O}$$

cuando

$$\mathbb{F}(y_0, u^*(y_0), p) \leq 0, \; p \in \mathrm{D}^+_{\mathcal{O}} u^*(y_0), \; y_0 \in \mathcal{O}.$$

Análogamente con las soluciones de

$$\mathbb{F}(y, u, \mathrm{D}u) \geq 0 \quad \text{en } \mathcal{O}$$

dadas por $u \in \mathcal{LB}_{loc}(\mathcal{O})$ para las que

$$\mathbb{F}(y_0, u_*(y_0), p) \geq 0, \; p \in \mathrm{D}^-_{\mathcal{O}} u_*(y_0), \; y_0 \in \mathcal{O}.$$

Algunas propiedades que interesa destacar de la ecuación

$$\mathbb{F}(y, u, \mathrm{D}u) = 0 \quad \text{en } \mathcal{O}$$

- Consistencia Toda solución clásica es de viscosidad y toda solución de viscosidad de clase $\mathcal{C}^1$ es solución clásica.
- Estabilidad El límite uniforme de subsoluciones de viscosidad es una subsolución de viscosidad.

Algunas propiedades que interesa destacar de la ecuación

$$\mathbb{F}(y, u, \mathrm{D}u) = 0 \quad \text{en } \mathcal{O}$$

- **Consistencia** Toda solución clásica es de viscosidad y toda solución de viscosidad de clase $\mathcal{C}^1$ es solución clásica.
- **Estabilidad** El límite uniforme de subsoluciones de viscosidad es una subsolución de viscosidad.

Algunas propiedades que interesa destacar de la ecuación

$$\mathbb{F}(y, u, \mathrm{D}u) = 0 \quad \text{en } \mathcal{O}$$

• Consistencia Toda solución clásica es de viscosidad y toda solución de viscosidad de clase $\mathcal{C}^1$ es solución clásica.

• Estabilidad El límite uniforme de subsoluciones de viscosidad es una subsolución de viscosidad.

Algunas propiedades que interesa destacar de la ecuación

$$\mathbb{F}(y, u, \mathrm{D}u) = 0 \quad \text{en } \mathcal{O}$$

• Consistencia Toda solución clásica es de viscosidad y toda solución de viscosidad de clase $\mathcal{C}^1$ es solución clásica.

• Estabilidad El límite uniforme de subsoluciones de viscosidad es una subsolución de viscosidad.

Algunas propiedades que interesa destacar de la ecuación

$$\mathbb{F}(y, u, \mathrm{D}u) = 0 \quad \text{en } \mathcal{O}$$

• Consistencia Toda solución clásica es de viscosidad y toda solución de viscosidad de clase $\mathcal{C}^1$ es solución clásica.
• Estabilidad El límite uniforme de subsoluciones de viscosidad es una subsolución de viscosidad.

Algunas propiedades que interesa destacar de la ecuación

$$\mathbb{F}(y, u, \mathrm{D}u) = 0 \quad \text{en } \mathcal{O} \text{ acotado}$$

- Comparación Si u es una subsolución y v es una supersolución entonces

$$(u^* - v_*)(y) \leq \sup_{\partial\mathcal{O}}(u^* - v_*), \quad y \in \overline{\mathcal{O}},$$

supuesto que $\mathbb{F}$ es continua,

$$\mathbb{F}(y, r, p) - \mathbb{F}(y, s, p) \geq \gamma_{\mathrm{R}}(r - s) \qquad (\gamma_{\mathrm{R}} > 0)$$

para $y \in \mathcal{O}$, $-\mathrm{R} \leq s \leq r \leq \mathrm{R}$ y $p \in \mathbb{R}^{\mathrm{M}}$, $\forall \mathrm{R} > 0$ y

$$|\mathbb{F}(y, r, p) - \mathbb{F}(z, r, p)| \leq m_{\mathrm{R}}(|y - z|)(1 + |p|)$$

donde $m_{\mathrm{R}}(t) \to 0$ cuando $t \to 0$ para todo $y, z \in \mathcal{O}$, $-\mathrm{R} \leq s \leq r \leq \mathrm{R}$ y $p \in \mathbb{R}^{\mathrm{M}}$, $\forall \mathrm{R} > 0$.

Algunas propiedades que interesa destacar de la ecuación

$$\mathbb{F}(y, u, \mathrm{D}u) = 0 \quad \text{en } \mathcal{O} \text{ acotado}$$

- Comparación Si u es una subsolución y v es una supersolución entonces

$$(u^* - v_*)(y) \leq \sup_{\partial\mathcal{O}}(u^* - v_*), \quad y \in \overline{\mathcal{O}},$$

supuesto que $\mathbb{F}$ es continua,

$$\mathbb{F}(y, r, p) - \mathbb{F}(y, s, p) \geq \gamma_{\mathrm{R}}(r - s) \qquad (\gamma_{\mathrm{R}} > 0)$$

para $y \in \mathcal{O}$, $-\mathrm{R} \leq s \leq r \leq \mathrm{R}$ y $p \in \mathbb{R}^{\mathrm{M}}$, $\forall \mathrm{R} > 0$ y

$$|\mathbb{F}(y, r, p) - \mathbb{F}(z, r, p)| \leq m_{\mathrm{R}}(|y - z|)(1 + |p|)$$

donde $m_{\mathrm{R}}(t) \to 0$ cuando $t \to 0$ para todo $y, z \in \mathcal{O}$, $-\mathrm{R} \leq s \leq r \leq \mathrm{R}$ y $p \in \mathbb{R}^{\mathrm{M}}$, $\forall \mathrm{R} > 0$.

Algunas propiedades que interesa destacar de la ecuación

$$\mathbb{F}(y, u, \mathrm{D}u) = 0 \quad \text{en } \mathcal{O} \text{ acotado}$$

- Comparación Si u es una subsolución y v es una supersolución entonces

$$(u^* - v_*)(y) \leq \sup_{\partial\mathcal{O}}(u^* - v_*), \quad y \in \overline{\mathcal{O}},$$

supuesto que $\mathbb{F}$ es continua,

$$\mathbb{F}(y, r, p) - \mathbb{F}(y, s, p) \geq \gamma_{\mathrm{R}}(r - s) \qquad (\gamma_{\mathrm{R}} > 0)$$

para $y \in \mathcal{O}, \ -\mathrm{R} \leq s \leq r \leq \mathrm{R}$ y $p \in \mathbb{R}^{\mathrm{M}}, \ \forall \mathrm{R} > 0$ y

$$|\mathbb{F}(y, r, p) - \mathbb{F}(z, r, p)| \leq m_{\mathrm{R}}(|y - z|)(1 + |p|)$$

donde $m_{\mathrm{R}}(t) \to 0$ cuando $t \to 0$ para todo $y, z \in \mathcal{O}, \ -\mathrm{R} \leq s \leq r \leq \mathrm{R}$ y $p \in \mathbb{R}^{\mathrm{M}}, \ \forall \mathrm{R} > 0$.

Algunas propiedades que interesa destacar de la ecuación

$$\mathbb{F}(y, u, \mathrm{D}u) = 0 \quad \text{en } \mathcal{O} \text{ acotado}$$

- Comparación Si u es una subsolución y v es una supersolución entonces

$$(u^* - v_*)(y) \leq \sup_{\partial\mathcal{O}}(u^* - v_*), \quad y \in \overline{\mathcal{O}},$$

supuesto que $\mathbb{F}$ es continua,

$$\mathbb{F}(y, r, p) - \mathbb{F}(y, s, p) \geq \gamma_{\mathrm{R}}(r - s) \qquad (\gamma_{\mathrm{R}} > 0)$$

para $y \in \mathcal{O}, \ -\mathrm{R} \leq s \leq r \leq \mathrm{R}$ y $p \in \mathbb{R}^{\mathrm{M}}, \ \forall \mathrm{R} > 0$ y

$$|\mathbb{F}(y, r, p) - \mathbb{F}(z, r, p)| \leq m_{\mathrm{R}}(|y - z|)(1 + |p|)$$

donde $m_{\mathrm{R}}(t) \to 0$ cuando $t \to 0$ para todo $y, z \in \mathcal{O}, \ -\mathrm{R} \leq s \leq r \leq \mathrm{R}$ y $p \in \mathbb{R}^{\mathrm{M}}, \ \forall \mathrm{R} > 0$.

- Para $\mathbb{F}(y,r,p) = \mathrm{H}(p) - f(y)$ la primera condición falla, pero puede reemplazarse por

$$\begin{cases} p \mapsto \mathrm{H}(p) & \text{convexa,} \\ f > 0 \end{cases}$$

- la ultima condición puede reemplazarse por $u, v \in \mathcal{W}^{1,\infty}(\mathcal{O})$.
- Todo marcha si $\mathbb{F}$ es uniformemente continua para el caso $\mathcal{O}$ no acotado.

- Para $\mathbb{F}(y, r, p) = \mathrm{H}(p) - f(y)$ la primera condición falla, pero puede reemplazarse por
$$\begin{cases} p \mapsto \mathrm{H}(p) & \text{convexa,} \\ f > 0 & \end{cases}$$
- la ultima condición puede reemplazarse por $u, v \in \mathcal{W}^{1,\infty}(\mathcal{O})$.
- Todo marcha si $\mathbb{F}$ es uniformemente continua para el caso $\mathcal{O}$ no acotado.

- Para $\mathbb{F}(y,r,p) = \mathrm{H}(p) - f(y)$ la primera condición falla, pero puede reemplazarse por
$$\begin{cases} p \mapsto \mathrm{H}(p) & \text{convexa,} \\ f > 0 & \end{cases}$$
- la ultima condición puede reemplazarse por $u, v \in \mathcal{W}^{1,\infty}(\mathcal{O})$.
- Todo marcha si $\mathbb{F}$ es uniformemente continua para el caso $\mathcal{O}$ no acotado.

- unicidad Si u y v son dos soluciones de

$$\begin{cases} \mathbb{F}(y, u, \mathrm{D}u) = 0 & \text{en } \mathcal{O} \\ u = g & \text{en } \partial\mathcal{O} \end{cases}$$

entonces

$$(u^* - v_*)(y) \leq \sup_{\partial\mathcal{O}}(g^* - g_*) \overbrace{=}^{g\in\mathcal{C}} 0, \quad y \in \overline{\mathcal{O}}.$$

luego, a lo sumo, existe una única solución continua.

- existencia: Método de la viscosidad evanescente, Método de Perron (extensión del método de las funciones subarmónicas)

- unicidad Si u y v son dos soluciones de

$$\begin{cases} \mathbb{F}(y, u, \mathrm{D}u) = 0 & \text{en } \mathcal{O} \\ u = g & \text{en } \partial\mathcal{O} \end{cases}$$

entonces

$$(u^* - v_*)(y) \leq \sup_{\partial\mathcal{O}}(g^* - g_*) \overbrace{=}^{g \in \mathcal{C}} 0, \quad y \in \overline{\mathcal{O}}.$$

luego, a lo sumo, existe una única solución continua.

- existencia: Método de la viscosidad evanescente, Método de Perron (extensión del método de las funciones subarmónicas)

- unicidad Si u y v son dos soluciones de

$$\begin{cases} \mathbb{F}(y, u, \mathrm{D}u) = 0 & \text{en } \mathcal{O} \\ u = g & \text{en } \partial\mathcal{O} \end{cases}$$

entonces

$$(u^* - v_*)(y) \leq \sup_{\partial\mathcal{O}}(g^* - g_*) \overbrace{=}^{g \in \mathcal{C}} 0, \quad y \in \overline{\mathcal{O}}.$$

luego, a lo sumo, existe una única solución continua.

- existencia: Método de la viscosidad evanescente, Método de Perron (extensión del método de las funciones subarmónicas)

- unicidad Si u y v son dos soluciones de

$$\begin{cases} \mathbb{F}(y, u, \mathrm{D}u) = 0 & \text{en } \mathcal{O} \\ u = g & \text{en } \partial\mathcal{O} \end{cases}$$

entonces

$$(u^* - v_*)(y) \le \sup_{\partial\mathcal{O}}(g^* - g_*)\overbrace{=}^{g\in\mathcal{C}} 0, \quad y \in \overline{\mathcal{O}}.$$

luego, a lo sumo, existe una única solución continua.

- existencia: Método de la viscosidad evanescente, Método de Perron (extensión del método de las funciones subarmónicas)

- unicidad Si u y v son dos soluciones de

$$\begin{cases} \mathbb{F}(y, u, \mathrm{D}u) = 0 & \text{en } \mathcal{O} \\ u = g & \text{en } \partial\mathcal{O} \end{cases}$$

entonces

$$(u^* - v_*)(y) \leq \sup_{\partial\mathcal{O}}(g^* - g_*) \overbrace{=}^{g\in\mathcal{C}} 0, \quad y \in \overline{\mathcal{O}}.$$

luego, a lo sumo, existe una única solución continua.

- existencia: Método de la viscosidad evanescente, Método de Perron (extensión del método de las funciones subarmónicas)

Crandall, M.G., Evans, L.C. and Lions,P.L. (1984). Some properties of viscosity solutions of Hamilton–Jacobi equations, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **282**, 487–502.

Crandall, M.G., Ishii, H., L.C. and Lions,P.L. (1992). User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **27**, 1–67.

Crandall, M.G. and Lions,P.L. (1983). Viscosity solutions of Hamilton–Jacobi equations, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **277**, 1-42.

Fleming, W. and H. Mete Soner, H. M. (1993). *Controlled Markov Processes and Viscosity Solutions*, Springer–Verlag.

Kruzkov, S.N. (1970). First order quasilinar equations in several indeoendent variables, *Math. URSS–Sb*, **10**, 217–243.

Lions, P.L. (1982). *Generalized solutions of Hamilton–Jacobi Equtions*, Pitman.

Problemas admisibles

Problemas admisibles

El objetivo aquí es abordar el problema de Cauchy

$$\begin{cases} u_t = \mathrm{H}(\mathrm{D}u) & \text{en } \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \times]0, \mathrm{T}[, \ \mathrm{T} \leq +\infty, \\ u(\cdot, 0) = u_0(\cdot)) & \text{en } \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \end{cases}$$

Siguiendo [Díaz & Rey], nos interesamos por la comprensión y resolución del problema.¿Cómo entender la EDP?,¿Cómo entender la "juntura" entre la EDP y el dato inicial?,¿Cómo entender el comportamiento inicial y final de sus soluciones?, que siempre serán entendidas en el sentido de la viscosidad.

Objetivos parecidos para la ecuación

$$u_t = \mathrm{H}(x, \mathrm{D}u) \quad \text{en } \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \times]0, +\infty[,$$

abordados desde otros puntos de vista, pueden encontrarse en la referencia [Siconolfi].

Problemas admisibles

El objetivo aquí es abordar el problema de Cauchy

$$\begin{cases} u_t = \mathrm{H}(\mathrm{D}u) & \text{en } \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \times]0, \mathrm{T}[, \ \mathrm{T} \leq +\infty, \\ u(\cdot, 0) = u_0(\cdot)) & \text{en } \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \end{cases}$$

Siguiendo [Díaz & Rey], nos interesamos por la comprensión y resolución del problema.¿Cómo entender la EDP?,¿Cómo entender la "juntura" entre la EDP y el dato inicial?,¿Cómo entender el comportamiento inicial y final de sus soluciones?, que siempre serán entendidas en el sentido de la viscosidad.

Objetivos parecidos para la ecuación

$$u_t = \mathrm{H}(x, \mathrm{D}u) \quad \text{en } \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \times]0, +\infty[,$$

abordados desde otros puntos de vista, pueden encontrarse en la referencia [Siconolfi].

El objetivo aquí es abordar el problema de Cauchy

$$\begin{cases} u_t = \mathrm{H}(\mathrm{D}u) & \text{en } \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \times]0, \mathrm{T}[, \ \mathrm{T} \leq +\infty, \\ u(\cdot, 0) = u_0(\cdot)) & \text{en } \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \end{cases}$$

Siguiendo [Díaz & Rey], nos interesamos por la comprensión y resolución del problema.¿Cómo entender la EDP?,¿Cómo entender la "juntura" entre la EDP y el dato inicial?,¿Cómo entender el comportamiento inicial y final de sus soluciones?, que siempre serán entendidas en el sentido de la viscosidad.

Objetivos parecidos para la ecuación

$$u_t = \mathrm{H}(x, \mathrm{D}u) \quad \text{en } \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \times]0, +\infty[,$$

abordados desde otros puntos de vista, pueden encontrarse en la referencia [Siconolfi].

Problemas admisibles

El objetivo aquí es abordar el problema de Cauchy

$$\begin{cases} u_t = \mathrm{H}(\mathrm{D}u) & \text{en } \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \times]0, \mathrm{T}[, \ \mathrm{T} \leq +\infty, \\ u(\cdot, 0) = u_0(\cdot)) & \text{en } \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \end{cases}$$

Siguiendo [Díaz & Rey], nos interesamos por la comprensión y resolución del problema.¿Cómo entender la EDP?,¿Cómo entender la "juntura" entre la EDP y el dato inicial?,¿Cómo entender el comportamiento inicial y final de sus soluciones?, que siempre serán entendidas en el sentido de la viscosidad.

Objetivos parecidos para la ecuación

$$u_t = \mathrm{H}(x, \mathrm{D}u) \quad \text{en } \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \times]0, +\infty[,$$

abordados desde otros puntos de vista, pueden encontrarse en la referencia [Siconolfi].

Problemas admisibles

El objetivo aquí es abordar el problema de Cauchy

$$\begin{cases} u_t = \mathrm{H}(\mathrm{D}u) & \text{en } \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \times]0, \mathrm{T}[, \ \mathrm{T} \leq +\infty, \\ u(\cdot, 0) = u_0(\cdot)) & \text{en } \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \end{cases}$$

Siguiendo [Díaz & Rey], nos interesamos por la comprensión y resolución del problema.¿Cómo entender la EDP?,¿Cómo entender la "juntura" entre la EDP y el dato inicial?,¿Cómo entender el comportamiento inicial y final de sus soluciones?, que siempre serán entendidas en el sentido de la viscosidad.

Objetivos parecidos para la ecuación

$$u_t = \mathrm{H}(x, \mathrm{D}u) \quad \text{en } \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \times]0, +\infty[,$$

abordados desde otros puntos de vista, pueden encontrarse en la referencia [Siconolfi].

Problemas admisibles

El objetivo aquí es abordar el problema de Cauchy

$$\begin{cases} u_t = \mathrm{H}(\mathrm{D}u) & \text{en } \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \times]0, \mathrm{T}[, \ \ \mathrm{T} \leq +\infty, \\ u(\cdot, 0) = u_0(\cdot)) & \text{en } \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \end{cases}$$

Siguiendo [Díaz & Rey], nos interesamos por la comprensión y resolución del problema.¿Cómo entender la EDP?,¿Cómo entender la "juntura" entre la EDP y el dato inicial?,¿Cómo entender el comportamiento inicial y final de sus soluciones?, que siempre serán entendidas en el sentido de la viscosidad.

Objetivos parecidos para la ecuación

$$u_t = \mathrm{H}(x, \mathrm{D}u) \quad \text{en } \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \times]0, +\infty[,$$

abordados desde otros puntos de vista, pueden encontrarse en la referencia [Siconolfi].

$$\mathcal{C}(\mathbb{R}^N) \ni \mathrm{H} \quad \mapsto \quad \mathrm{H}^\star(\xi) = \sup_{p \in \mathbb{R}^N} \left\{ \langle p, \xi \rangle - \mathrm{H}(p) \right\}, \; \xi \in \mathcal{D}(\mathrm{H}^\star) \subseteq \mathbb{R}^N,$$

(transformada de Legendre)

Algunos ejemplos de hamiltonianos convexos:

- esféricamente simétricos

$$\mathcal{H}_m(p) = \mathrm{R}\left([|p| - k_0]_+\right)^m, \quad (\mathrm{R} > 0,\ m \geq 1,\ k_0 \geq 0)$$

con

$$\begin{cases} \mathcal{H}_1^\star(\xi) = \begin{cases} k_0|\xi|, & \text{si } |\xi| \leq \mathrm{R}, \\ +\infty, & \text{en caso contrario} \end{cases} \\ \mathcal{H}_m^\star(\xi) = k_0|\xi| + (m-1)\left(\dfrac{|\xi|^m}{\mathrm{R}m^m}\right)^{\frac{1}{m-1}}, \; \xi \in \mathbb{R}^N \quad (m > 1). \end{cases}$$

$$\mathcal{C}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}}) \ni \mathrm{H} \quad \mapsto \quad \mathrm{H}^{\star}(\xi) = \sup_{p \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}}} \left\{ \langle p, \xi \rangle - \mathrm{H}(p) \right\}, \ \xi \in \mathcal{D}(\mathrm{H}^{\star}) \subseteq \mathbb{R}^{\mathrm{N}},$$

(transformada de Legendre)

Algunos ejemplos de hamiltonianos convexos:

- esféricamente simétricos

$$\mathcal{H}_m(p) = \mathrm{R}\left([|p| - k_0]_+ \right)^m, \quad (\mathrm{R} > 0,\ m \geq 1,\ k_0 \geq 0)$$

con

$$\begin{cases} \mathcal{H}_1^{\star}(\xi) = \begin{cases} k_0|\xi|, & \text{si } |\xi| \leq \mathrm{R}, \\ +\infty, & \text{en caso contrario} \end{cases} \\ \mathcal{H}_m^{\star}(\xi) = k_0|\xi| + (m-1)\left(\dfrac{|\xi|^m}{\mathrm{R} m^m} \right)^{\frac{1}{m-1}}, \ \xi \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \quad (m > 1). \end{cases}$$

$$\mathcal{C}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}}) \ni \mathrm{H} \quad \mapsto \quad \mathrm{H}^{\star}(\xi) = \sup_{p\in\mathbb{R}^{\mathrm{N}}} \{\langle p,\xi\rangle - \mathrm{H}(p)\}\,,\ \xi \in \mathcal{D}(\mathrm{H}^{\star}) \subseteq \mathbb{R}^{\mathrm{N}},$$

(transformada de Legendre)

Algunos ejemplos de hamiltonianos convexos:

- de tipo eikonal

$$\mathcal{H}_e(p) = \langle \mathcal{A}p, p\rangle, \quad \left(\mathcal{A} \in \mathcal{M}(\mathbb{R},\mathrm{N}),\ \inf_{p\neq 0} \frac{\langle \mathcal{A}p, p\rangle}{|p|^2} > 0\right)$$

con

$$\mathcal{H}_e^{\star}(\xi) = \frac{1}{4}\langle \xi, \mathcal{A}^{-1}\xi\rangle,\ \xi \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}}.$$

$$\mathcal{C}(\mathbb{R}^N) \ni \mathrm{H} \quad \mapsto \quad \mathrm{H}^\star(\xi) = \sup_{p \in \mathbb{R}^N} \{\langle p, \xi\rangle - \mathrm{H}(p)\}\,,\ \xi \in \mathcal{D}(\mathrm{H}^\star) \subseteq \mathbb{R}^N,$$

(transformada de Legendre)

Algunos ejemplos de hamiltonianos convexos:

- no simétricos *Osher's formulas*

$$\mathcal{H}_{Os}(p) = \begin{cases} \mathcal{H}^l\langle p, a\rangle + \langle p, b\rangle & \text{si} \ \ \langle p, a\rangle \leq 0 \\ \mathcal{H}^r\langle p, a\rangle + \langle p, b\rangle & \text{si} \ \ \langle p, a\rangle \geq 0 \end{cases} \qquad (\mathcal{H}^l \leq \mathcal{H}^r,\ a, b \in \mathbb{R}^N)$$

con

$$\mathcal{H}^\star_{Os}(\xi) = 0,\ \xi \in \mathcal{D}(\mathcal{H}_{Os}) = \left\{\lambda a + b :\ \mathcal{H}^l \leq \lambda \leq \mathcal{H}^r\right\}.$$

Teorema (Verificación)

Sea $u \in \mathcal{LB}_{loc}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}} \times]0, \mathrm{T}[)$, $\mathrm{T} \leq +\infty$ *tal que*

$$u_t \geq \mathrm{H}(\mathrm{D}u) \quad \textit{en } \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \times]0, \mathrm{T}[.$$

Entonces

$$t \mapsto u_*(x - t\xi, t) + t\mathrm{H}^\star(\xi) \quad \text{propiedad de verificación (PV)}$$

es no decreciente, para cada $\xi \in \mathcal{D}(\mathrm{H}^\star)$, $x \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}}$.

Prueba

$$u_*(z - \tau\xi, \tau) \geq u_*(z - \sigma\xi, \sigma) + (\sigma - \tau)\Big[\langle p_1, \xi\rangle - \mathrm{H}(p_1)\Big] + o(\tau - \sigma).$$

Teorema (Verificación)

Sea $u \in \mathcal{LB}_{loc}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}} \times]0, \mathrm{T}[)$, $\mathrm{T} \leq +\infty$ *tal que*

$$u_t \geq \mathrm{H}(\mathrm{D}u) \quad \textit{en } \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \times]0, \mathrm{T}[.$$

Entonces

$$t \mapsto u_*(x - t\xi, t) + t\mathrm{H}^\star(\xi) \quad \text{propiedad de verificación (PV)}$$

es no decreciente, para cada $\xi \in \mathcal{D}(\mathrm{H}^\star)$, $x \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}}$.

Prueba

$$u_*(z - \tau\xi, \tau) \geq u_*(z - \sigma\xi, \sigma) + (\sigma - \tau)\Big[\langle p_1, \xi\rangle - \mathrm{H}(p_1)\Big] + o(\tau - \sigma).$$

Teorema (Verificación)

Sea $u \in \mathcal{LB}_{loc}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}} \times]0, \mathrm{T}[)$, $\mathrm{T} \leq +\infty$ *tal que*

$$u_t \geq \mathrm{H}(\mathrm{D}u) \quad \text{en } \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \times]0, \mathrm{T}[.$$

Entonces

$$t \mapsto u_*(x - t\xi, t) + t\mathrm{H}^\star(\xi) \quad \text{propiedad de verificación (PV)}$$

es no decreciente, para cada $\xi \in \mathcal{D}(\mathrm{H}^\star)$, $x \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}}$.

Observación (Organización intrínseca)

$$u_*(x, t) \geq u_*(x + (t - s)\xi, s) - (t - s)\mathrm{H}^\star(\xi), \quad 0 < s < t < \mathrm{T}.$$

Nótese $(\mathcal{H}_1^\star)^{-1}(0) = \mathbf{B}_{\mathrm{R}}(0)$, si $k_0 = 0$. Cono de dependencia.

Teorema (Caracterización de supersoluciones)

Sea $u \in \mathcal{LB}_{loc}(\mathbb{R}^N \times]0,T[)$, $T \leq +\infty$.

$$u_t \geq H^{\star\star}(Du) \quad \text{en } \mathbb{R}^N \times]0,T[\quad \Leftrightarrow \quad \text{(PV) para } u_* \text{ y } H^\star.$$

Recordemos que las supersoluciones usan u_* y sus subdiferenciales $D^- u_*$, mientras que las subsoluciones usan u^* y sus superdiferenciales $D^+ u_*$.

Proposición

Si u^* *y* $H^\star$ *verifican* (PV) *entonces*

$$p_2 \geq H^{\star\star}(p_1), \quad (p_1, p_2) \in D^+ u^*(x,t), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^N \times]0,T[$$

Teorema (Caracterización de supersoluciones)

Sea $u \in \mathcal{LB}_{loc}(\mathbb{R}^N \times]0,T[)$, $T \leq +\infty$.

$$u_t \geq H^{\star\star}(Du) \quad \text{en } \mathbb{R}^N \times]0,T[\quad \Leftrightarrow \quad (PV) \text{ para } u_* \text{ y } H^\star.$$

Recordemos que las supersoluciones usan u_* y sus subdiferenciales $D^- u_*$, mientras que las subsoluciones usan u^* y sus superdiferenciales $D^+ u_*$.

Proposición

Si u^* *y* $H^\star$ *verifican* (PV) *entonces*

$$p_2 \geq H^{\star\star}(p_1), \quad (p_1, p_2) \in D^+ u^*(x,t), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^N \times]0,T[$$

Teorema (Caracterización de supersoluciones)

Sea $u \in \mathcal{LB}_{loc}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}} \times]0,\mathrm{T}[)$, $\mathrm{T} \leq +\infty$.

$$u_t \geq \mathrm{H}^{\star\star}(\mathrm{D}u) \quad en\ \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \times]0,\mathrm{T}[\quad \Leftrightarrow \quad (\mathrm{PV}) \text{ para } u_* \text{ y } \mathrm{H}^\star.$$

Recordemos que las supersoluciones usan u_* y sus subdiferenciales $\mathrm{D}^- u_*$, mientras que las subsoluciones usan u^* y sus superdiferenciales $\mathrm{D}^+ u_*$.

Proposición

Si u^* *y* $\mathrm{H}^\star$ *verifican* (PV) *entonces*

$$p_2 \geq \mathrm{H}^{\star\star}(p_1), \quad (p_1, p_2) \in \mathrm{D}^+ u^*(x,t), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \times]0,\mathrm{T}[$$

Teorema (Caracterización de supersoluciones)

Sea $u \in \mathcal{LB}_{loc}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}} \times]0, \mathrm{T}[)$, $\mathrm{T} \leq +\infty$.

$$u_t \geq \mathrm{H}^{\star\star}(\mathrm{D}u) \quad \text{en } \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \times]0, \mathrm{T}[\quad \Leftrightarrow \quad (\mathrm{PV}) \text{ para } u_* \text{ y } \mathrm{H}^{\star}.$$

Recordemos que las supersoluciones usan u_* y sus subdiferenciales $\mathrm{D}^- u_*$, mientras que las subsoluciones usan u^* y sus superdiferenciales $\mathrm{D}^+ u_*$.

Proposición

Si u^* *y* $\mathrm{H}^{\star}$ *verifican* (PV) *entonces*

$$p_2 \geq \mathrm{H}^{\star\star}(p_1), \quad (p_1, p_2) \in \mathrm{D}^+ u^*(x, t), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \times]0, \mathrm{T}[$$

Corolario

Sea $u \in \mathcal{B}_{loc}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}} \times]0, \mathrm{T}[), \ \mathrm{T} \leq +\infty$ *verificando*

$$u_t = \mathcal{H}(\mathrm{D}u) \quad \textit{en } \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \times]0, \mathrm{T}[.$$

Entonces

$(u_*)^* = u^*$ (regularidad mínima) (PRM) $\Rightarrow \quad p_2 = \mathcal{H}(p_1), \quad (p_1, p_2) \in \mathrm{D}^+ u^*(x, t)$

Definición (D^+ soluciones)

Son funciones $u \in \mathcal{UB}_{loc}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}} \times]0, \mathrm{T}[), \ \mathrm{T} \leq +\infty$ *verificando*

$$p_2 = \mathrm{H}(p_1), \quad (p_1, p_2) \in \mathrm{D}^+ u^*(x, t), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \times]0, \mathrm{T}[.$$

Corolario

Sea $u \in \mathcal{B}_{loc}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}} \times]0, \mathrm{T}[)$, $\mathrm{T} \leq +\infty$ *verificando*

$$u_t = \mathcal{H}(\mathrm{D}u) \quad \text{en } \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \times]0, \mathrm{T}[.$$

Entonces

$$\begin{array}{l} (u_*)^* = u^* \\ (\text{regularidad mínima})\ (\mathrm{PRM}) \end{array} \Rightarrow \quad p_2 = \mathcal{H}(p_1), \quad (p_1, p_2) \in \mathrm{D}^+ u^*(x, t)$$

Definición (D^+ soluciones)

Son funciones $u \in \mathcal{UB}_{loc}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}} \times]0, \mathrm{T}[)$, $\mathrm{T} \leq +\infty$ *verificando*

$$p_2 = \mathrm{H}(p_1), \quad (p_1, p_2) \in \mathrm{D}^+ u^*(x, t), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \times]0, \mathrm{T}[.$$

Observación

• semicontinua inferiormente $\Rightarrow$ regularidad mínima $((u_*)^* = u^*)$

$\mathbb{1}_{\overline{A}}$ no es semicontinua inferiormente pero tiene la regularidad mínima.

Observación

• semicontinua inferiormente $\Rightarrow$ regularidad mínima $((u_*)^* = u^*)$

$\mathbb{1}_{\overline{A}}$ no es semicontinua inferiormente pero tiene la regularidad mínima.

Problemas admisibles
Propiedades intrínsecas

Observación

- semicontinua inferiormente $\Rightarrow$ regularidad mínima $((u_*)^* = u^*)$
- Si $u \in \mathcal{UB}_{loc}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}}\times]0,\mathrm{T}[)$ es una D^+ solución entonces

$$t \mapsto u_*(x - t\xi, t) + t\mathrm{H}^\star(\xi) \qquad \text{es no decreciente,}$$

de donde si u es una D^+ solución con la regularidad entonces u^* es una solución.

- **Consitencia** Sea $u \in \mathcal{B}_{loc}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}}\times]0,\mathrm{T}[)$. Para la ecuación

$$u_t = \mathcal{H}(\mathrm{D}u) \quad \text{en } \mathbb{R}^{\mathrm{N}}\times]0,\mathrm{T}[,$$

en la clase $((u^*)_*)^* = u^*$, se tiene la equivalencia

$$u^* \quad \text{es una } \mathrm{D}^+ \text{ solución} \quad \Leftrightarrow \quad u^* \quad \text{es una solución}$$

Observación

- semicontinua inferiormente $\Rightarrow$ regularidad mínima $((u_*)^* = u^*)$
- Si $u \in \mathcal{UB}_{loc}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}} \times]0, \mathrm{T}[)$ es una D^+ solución entonces

$$t \mapsto u_*(x - t\xi, t) + t\mathrm{H}^\star(\xi) \quad \text{es no decreciente,}$$

de donde si u es una D^+ solución con la regularidad entonces u^* es una solución.

- **Consitencia** Sea $u \in \mathcal{B}_{loc}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}} \times]0, \mathrm{T}[)$. Para la ecuación

$$u_t = \mathcal{H}(\mathrm{D}u) \quad \text{en } \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \times]0, \mathrm{T}[,$$

en la clase $((u^*)_*)^* = u^*$, se tiene la equivalencia

$$u^* \quad \text{es una } \mathrm{D}^+ \text{ solución} \quad \Leftrightarrow \quad u^* \quad \text{es una solución}$$

Observación

- semicontinua inferiormente $\Rightarrow$ regularidad mínima $((u_*)^* = u^*)$
- Si $u \in \mathcal{UB}_{loc}(\mathbb{R}^N \times]0, T[)$ es una D^+ solución entonces

$$t \mapsto u_*(x - t\xi, t) + t\mathrm{H}^\star(\xi) \quad \text{es no decreciente,}$$

de donde si u es una D^+ solución con la regularidad entonces u^* es una solución.

- **Consitencia** Sea $u \in \mathcal{B}_{loc}(\mathbb{R}^N \times]0, T[)$. Para la ecuación

$$u_t = \mathcal{H}(\mathrm{D}u) \quad \text{en } \mathbb{R}^N \times]0, T[,$$

en la clase $((u^*)_*)^* = u^*$, se tiene la equivalencia

$$u^* \quad \text{es una } D^+ \text{ solución} \quad \Leftrightarrow \quad u^* \quad \text{es una solución}$$

Observación

- semicontinua inferiormente $\Rightarrow$ regularidad mínima $((u_*)^* = u^*)$
- Si $u \in \mathcal{UB}_{loc}(\mathbb{R}^N \times]0, T[)$ es una D^+ solución entonces

$$t \mapsto u_*(x - t\xi, t) + tH^\star(\xi) \quad \text{es no decreciente,}$$

de donde si u es una D^+ solución con la regularidad entonces u^* es una solución.

- **Consitencia** Sea $u \in \mathcal{B}_{loc}(\mathbb{R}^N \times]0, T[)$. Para la ecuación

$$u_t = \mathcal{H}(Du) \quad \text{en } \mathbb{R}^N \times]0, T[,$$

en la clase $((u^*)_*)^* = u^*$, se tiene la equivalencia

$$u^* \quad \text{es una } D^+ \text{ solución} \quad \Leftrightarrow \quad u^* \quad \text{es una solución}$$

Recuérdese la orgnización intrínseca

$$u_*(x,t) \geq u_*(x+(t-s)\xi, s) - (t-s)\mathrm{H}^\star(\xi), \quad 0<s<t<\mathrm{T}.$$

de las supersoluciones, lo que permite formar

$$u_*(x,t) \geq \sup_\xi \{u_*(x+t\xi, 0^+) - t\mathrm{H}^\star(\xi)\}, \quad 0<t<\mathrm{T}.$$

El objetivo ahora es estudiar la fórmula de Lax–Oleinik

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(x,t;\varphi) &= \sup_{\xi\in\mathcal{D}(\mathrm{H}^\star)} \{\varphi(x+t\xi) - t\mathrm{H}^\star(\xi)\} \\ &= \sup_{y\in x+t\mathcal{D}(\mathrm{H}^\star)} \left\{\varphi(y) - t\mathrm{H}^\star\left(\frac{y-x}{t}\right)\right\} \quad (x,t)\in\mathbb{R}^N\times[0,\mathrm{T}_\infty[\end{aligned}$$

para algún horizonte maximal $\mathrm{T}_\infty \leq +\infty$ por precisar.

Recuérdese la orgnización intrínseca

$$u_*(x,t) \geq u_*(x+(t-s)\xi, s) - (t-s)\mathrm{H}^\star(\xi), \quad 0 < s < t < \mathrm{T}.$$

de las supersoluciones, lo que permite formar

$$u_*(x,t) \geq \sup_{\xi}\{u_*(x+t\xi, 0^+) - t\mathrm{H}^\star(\xi)\}, \quad 0 < t < \mathrm{T}.$$

El objetivo ahora es estudiar la fórmula de Lax–Oleinik

$$\begin{aligned}\mathcal{U}(x,t;\varphi) &= \sup_{\xi\in\mathcal{D}(\mathrm{H}^\star)}\{\varphi(x+t\xi) - t\mathrm{H}^\star(\xi)\} \\ &= \sup_{y\in x+t\mathcal{D}(\mathrm{H}^\star)}\left\{\varphi(y) - t\mathrm{H}^\star\left(\frac{y-x}{t}\right)\right\} \quad (x,t)\in\mathbb{R}^{\mathrm{N}}\times[0,\mathrm{T}_\infty[\end{aligned}$$

para algún horizonte maximal $\mathrm{T}_\infty \leq +\infty$ por precisar.

Recuérdese la orgnización intrínseca

$$u_*(x,t) \geq u_*(x+(t-s)\xi, s) - (t-s)\mathrm{H}^\star(\xi), \quad 0 < s < t < \mathrm{T}.$$

de las supersoluciones, lo que permite formar

$$u_*(x,t) \geq \sup_{\xi}\{u_*(x+t\xi, 0^+) - t\mathrm{H}^\star(\xi)\}, \quad 0 < t < \mathrm{T}.$$

El objetivo ahora es estudiar la fórmula de Lax–Oleinik

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(x,t;\varphi) &= \sup_{\xi\in\mathcal{D}(\mathrm{H}^\star)} \{\varphi(x+t\xi) - t\mathrm{H}^\star(\xi)\} \\ &= \sup_{y\in x+t\mathcal{D}(\mathrm{H}^\star)} \left\{\varphi(y) - t\mathrm{H}^\star\left(\frac{y-x}{t}\right)\right\} \quad (x,t)\in\mathbb{R}^{\mathrm{N}}\times[0,\mathrm{T}_\infty[\end{aligned}$$

para algún horizonte maximal $\mathrm{T}_\infty \leq +\infty$ por precisar.

Proposición (Conservación de la regularidad inicial)

- $\varphi \in \mathcal{LB}_{loc}(\mathbb{R}^N) \Rightarrow \mathcal{U}(\cdot,\cdot;\varphi_*) \in \mathcal{LSC}\left(\mathbb{R}^N \times]0,T[\right)$.
- $\varphi \in \mathcal{UB}_{loc}(\mathbb{R}^N) \Rightarrow \mathcal{U}(\cdot,\cdot;\varphi^*) \in \mathcal{USC}\left(\mathbb{R}^N \times]0,T[\right)$.
- $\varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^N) \Rightarrow \mathcal{U}(\cdot,\cdot;\varphi) \in \mathcal{C}\left(\mathbb{R}^N \times]0,T[\right)$.
- $(\varphi_*)^* = \varphi^* \Rightarrow (\mathcal{U}_*)^*(\cdot,\cdot;\varphi^*) = \mathcal{U}^*(\cdot,\cdot;\varphi^*) = \mathcal{U}(\cdot,\cdot;\varphi^*)$.

Ejemplo

Para $\mathcal{H}_1(p) = R|p|,\ p \in \mathbb{R}^N \quad (R > 0)$ se verifica

$$\mathcal{U}\left(x,t;\mathbb{1}_{B_\sigma(0)}\right) = \mathbb{1}_{B_{\sigma+Rt}(0)}(x) \ \text{ and } \ \mathcal{U}\left(x,t;\mathbb{1}_{\overline{B}_\sigma(0)}\right) = \mathbb{1}_{\overline{B}_{\sigma+Rt}(0)}(x).$$

Además ambas funciones verifican (PRM).

Proposición (Conservación de la regularidad inicial)

- $\varphi \in \mathcal{LB}_{loc}(\mathbb{R}^N) \Rightarrow \mathcal{U}(\cdot,\cdot;\varphi_*) \in \mathcal{LSC}\left(\mathbb{R}^N \times]0,T[\right)$.
- $\varphi \in \mathcal{UB}_{loc}(\mathbb{R}^N) \Rightarrow \mathcal{U}(\cdot,\cdot;\varphi^*) \in \mathcal{USC}\left(\mathbb{R}^N \times]0,T[\right)$.
- $\varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^N) \Rightarrow \mathcal{U}(\cdot,\cdot;\varphi) \in \mathcal{C}\left(\mathbb{R}^N \times]0,T[\right)$.
- $(\varphi_*)^* = \varphi^* \Rightarrow (\mathcal{U}_*)^*(\cdot,\cdot;\varphi^*) = \mathcal{U}^*(\cdot,\cdot;\varphi^*) = \mathcal{U}(\cdot,\cdot;\varphi^*)$.

Ejemplo

Para $\mathcal{H}_1(p) = \mathrm{R}|p|$, $p \in \mathbb{R}^N$ $\quad (\mathrm{R} > 0)$ se verifica

$$\mathcal{U}\left(x,t;\mathbb{1}_{\mathbf{B}_\sigma(0)}\right) = \mathbb{1}_{\mathbf{B}_{\sigma+\mathrm{R}t}(0)}(x) \text{ and } \mathcal{U}\left(x,t;\mathbb{1}_{\overline{\mathbf{B}}_\sigma(0)}\right) = \mathbb{1}_{\overline{\mathbf{B}}_{\sigma+\mathrm{R}t}(0)}(x),$$

Además ambas funciones verifican (PRM).

Proposición (Conservación de la regularidad inicial)

- $\varphi \in \mathcal{LB}_{loc}(\mathbb{R}^N) \Rightarrow \mathcal{U}\left(\cdot,\cdot;\varphi_*\right) \in \mathcal{LSC}\left(\mathbb{R}^N\times]0,T[\right)$.
- $\varphi \in \mathcal{UB}_{loc}(\mathbb{R}^N) \Rightarrow \mathcal{U}\left(\cdot,\cdot;\varphi^*\right) \in \mathcal{USC}\left(\mathbb{R}^N\times]0,T[\right)$.
- $\varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^N) \Rightarrow \mathcal{U}\left(\cdot,\cdot;\varphi\right) \in \mathcal{C}\left(\mathbb{R}^N\times]0,T[\right)$.
- $(\varphi_*)^* = \varphi^* \Rightarrow (\mathcal{U}_*)^*\left(\cdot,\cdot;\varphi^*\right) = \mathcal{U}^*\left(\cdot,\cdot;\varphi^*\right) = \mathcal{U}\left(\cdot,\cdot;\varphi^*\right)$.

Ejemplo

Para $\mathcal{H}_1(p) = \mathrm{R}|p|,\ p \in \mathbb{R}^N \quad (\mathrm{R} > 0)$ se verifica

$$\mathcal{U}\left(x,t;\mathbb{1}_{\mathbf{B}_\sigma(0)}\right) = \mathbb{1}_{\mathbf{B}_{\sigma+\mathrm{R}t}(0)}(x) \ \text{ and } \ \mathcal{U}\left(x,t;\mathbb{1}_{\overline{\mathbf{B}}_\sigma(0)}\right) = \mathbb{1}_{\overline{\mathbf{B}}_{\sigma+\mathrm{R}t}(0)}(x),$$

Además ambas funciones verifican (PRM).

Proposición (Conservación de la regularidad inicial)

- $\varphi \in \mathcal{LB}_{loc}(\mathbb{R}^N) \Rightarrow \mathcal{U}(\cdot,\cdot;\varphi_*) \in \mathcal{LSC}\left(\mathbb{R}^N \times]0,T[\right)$.
- $\varphi \in \mathcal{UB}_{loc}(\mathbb{R}^N) \Rightarrow \mathcal{U}(\cdot,\cdot;\varphi^*) \in \mathcal{USC}\left(\mathbb{R}^N \times]0,T[\right)$.
- $\varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^N) \Rightarrow \mathcal{U}(\cdot,\cdot;\varphi) \in \mathcal{C}\left(\mathbb{R}^N \times]0,T[\right)$.
- $(\varphi_*)^* = \varphi^* \Rightarrow (\mathcal{U}_*)^*(\cdot,\cdot;\varphi^*) = \mathcal{U}^*(\cdot,\cdot;\varphi^*) = \mathcal{U}(\cdot,\cdot;\varphi^*)$.

Ejemplo

Para $\mathcal{H}_1(p) = \mathrm{R}|p|$, $p \in \mathbb{R}^N$ $\quad (\mathrm{R} > 0)$ se verifica

$$\mathcal{U}\left(x,t;\mathbb{1}_{\mathbf{B}_\sigma(0)}\right) = \mathbb{1}_{\mathbf{B}_{\sigma+\mathrm{R}t}(0)}(x) \text{ and } \mathcal{U}\left(x,t;\mathbb{1}_{\overline{\mathbf{B}}_\sigma(0)}\right) = \mathbb{1}_{\overline{\mathbf{B}}_{\sigma+\mathrm{R}t}(0)}(x),$$

Además ambas funciones verifican (PRM).

Proposición (Conservación de la regularidad inicial)

- $\varphi \in \mathcal{LB}_{loc}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}}) \Rightarrow \mathcal{U}(\cdot,\cdot;\varphi_*) \in \mathcal{LSC}\left(\mathbb{R}^{\mathrm{N}} \times]0,\mathrm{T}[\right)$.
- $\varphi \in \mathcal{UB}_{loc}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}}) \Rightarrow \mathcal{U}(\cdot,\cdot;\varphi^*) \in \mathcal{USC}\left(\mathbb{R}^{\mathrm{N}} \times]0,\mathrm{T}[\right)$.
- $\varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}}) \Rightarrow \mathcal{U}(\cdot,\cdot;\varphi) \in \mathcal{C}\left(\mathbb{R}^{\mathrm{N}} \times]0,\mathrm{T}[\right)$.
- $(\varphi_*)^* = \varphi^* \Rightarrow (\mathcal{U}_*)^*(\cdot,\cdot;\varphi^*) = \mathcal{U}^*(\cdot,\cdot;\varphi^*) = \mathcal{U}(\cdot,\cdot;\varphi^*)$.

Ejemplo

Para $\mathcal{H}_1(p) = \mathrm{R}|p|,\ p \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \quad (\mathrm{R} > 0)$ se verifica

$$\mathcal{U}\left(x,t;\mathbb{1}_{\mathbf{B}_\sigma(0)}\right) = \mathbb{1}_{\mathbf{B}_{\sigma+\mathrm{R}t}(0)}(x) \text{ and } \mathcal{U}\left(x,t;\mathbb{1}_{\overline{\mathbf{B}}_\sigma(0)}\right) = \mathbb{1}_{\overline{\mathbf{B}}_{\sigma+\mathrm{R}t}(0)}(x),$$

Además ambas funciones verifican (PRM).

Proposición (Conservación de la regularidad inicial)

- $\varphi \in \mathcal{LB}_{loc}(\mathbb{R}^N) \Rightarrow \mathcal{U}(\cdot,\cdot;\varphi_*) \in \mathcal{LSC}\left(\mathbb{R}^N \times]0,T[\right)$.
- $\varphi \in \mathcal{UB}_{loc}(\mathbb{R}^N) \Rightarrow \mathcal{U}(\cdot,\cdot;\varphi^*) \in \mathcal{USC}\left(\mathbb{R}^N \times]0,T[\right)$.
- $\varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^N) \Rightarrow \mathcal{U}(\cdot,\cdot;\varphi) \in \mathcal{C}\left(\mathbb{R}^N \times]0,T[\right)$.
- $(\varphi_*)^* = \varphi^* \Rightarrow (\mathcal{U}_*)^*(\cdot,\cdot;\varphi^*) = \mathcal{U}^*(\cdot,\cdot;\varphi^*) = \mathcal{U}(\cdot,\cdot;\varphi^*)$.

Proposición (Semiconvexidad)

Si φ es semiconvexa en $\mathbb{R}^N$ también lo es la función

$$x \mapsto \mathcal{U}(x,t;\varphi) \quad \text{en } \mathbb{R}^N,$$

Proposición (Conservación de la regularidad inicial)

- $\varphi \in \mathcal{LB}_{loc}(\mathbb{R}^N) \Rightarrow \mathcal{U}(\cdot,\cdot;\varphi_*) \in \mathcal{LSC}\left(\mathbb{R}^N \times]0,T[\right)$.
- $\varphi \in \mathcal{UB}_{loc}(\mathbb{R}^N) \Rightarrow \mathcal{U}(\cdot,\cdot;\varphi^*) \in \mathcal{USC}\left(\mathbb{R}^N \times]0,T[\right)$.
- $\varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^N) \Rightarrow \mathcal{U}(\cdot,\cdot;\varphi) \in \mathcal{C}\left(\mathbb{R}^N \times]0,T[\right)$.
- $(\varphi_*)^* = \varphi^* \Rightarrow (\mathcal{U}_*)^*(\cdot,\cdot;\varphi^*) = \mathcal{U}^*(\cdot,\cdot;\varphi^*) = \mathcal{U}(\cdot,\cdot;\varphi^*)$.

Proposición (Semiconvexidad)

Si φ es semiconvexa en $\mathbb{R}^N$ también lo es la función

$$x \mapsto \mathcal{U}(x,t;\varphi) \quad \textit{en } \mathbb{R}^N,$$

Se define

$$\mathcal{U}_0(x;\varphi) \doteq \lim_{t \searrow 0} \mathcal{U}(x,t;\varphi) \quad \text{traza inicial.}$$

De la expresión

$$\mathcal{U}(x,t;\varphi) = \sup_{\xi \in \mathcal{D}(\mathrm{H}^\star)} \left\{ \varphi(x+t\xi) - t\mathrm{H}^\star(\xi) \right\}, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \times [0, \mathrm{T}_\infty[,$$

deducimos

$$\mathcal{U}(x,0;\varphi) = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}}.$$

En general

$$\varphi_*(x) \leq \liminf_{t \searrow 0} \mathcal{U}(x,t;\varphi) \leq \limsup_{t \searrow 0} \mathcal{U}(x,t;\varphi) \leq \varphi^*(x), \quad x \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}}.$$

Observamos que la propiedad básica de la traza inicial (PBTI) debe ser

$$\mathcal{U}_0(x;\varphi) = \varphi^*(x), \quad x \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}}.$$

Se define

$$\mathcal{U}_0(x;\varphi) \doteq \lim_{t\searrow 0} \mathcal{U}(x,t;\varphi) \quad \text{traza inicial.}$$

De la expresión

$$\mathcal{U}(x,t;\varphi) = \sup_{\xi\in\mathcal{D}(\mathrm{H}^\star)} \{\varphi(x+t\xi) - t\mathrm{H}^\star(\xi)\}, \quad (x,t)\in\mathbb{R}^{\mathrm{N}}\times[0,\mathrm{T}_\infty[,$$

deducimos

$$\mathcal{U}(x,0;\varphi) = \varphi(x), \quad x\in\mathbb{R}^{\mathrm{N}}.$$

En general

$$\varphi_*(x) \le \liminf_{t\searrow 0} \mathcal{U}(x,t;\varphi) \le \limsup_{t\searrow 0} \mathcal{U}(x,t;\varphi) \le \varphi^*(x), \quad x\in\mathbb{R}^{\mathrm{N}}.$$

Observamos que la propiedad básica de la traza inicial (PBTI) debe ser

$$\mathcal{U}_0(x;\varphi) = \varphi^*(x), \quad x\in\mathbb{R}^{\mathrm{N}}.$$

Se define

$$\mathcal{U}_0(x;\varphi) \doteq \lim_{t\searrow 0} \mathcal{U}(x,t;\varphi) \quad \text{traza inicial.}$$

De la expresión

$$\mathcal{U}(x,t;\varphi) = \sup_{\xi\in\mathcal{D}(\mathrm{H}^\star)} \{\varphi(x+t\xi) - t\mathrm{H}^\star(\xi)\}, \quad (x,t)\in\mathbb{R}^{\mathrm{N}}\times[0,\mathrm{T}_\infty[,$$

deducimos

$$\mathcal{U}(x,0;\varphi) = \varphi(x), \quad x\in\mathbb{R}^{\mathrm{N}}.$$

En general

$$\varphi_*(x) \leq \liminf_{t\searrow 0} \mathcal{U}(x,t;\varphi) \leq \limsup_{t\searrow 0} \mathcal{U}(x,t;\varphi) \leq \varphi^*(x), \quad x\in\mathbb{R}^{\mathrm{N}}.$$

Observamos que la propiedad básica de la traza inicial (PBTI) debe ser

$$\mathcal{U}_0(x;\varphi) = \varphi^*(x), \quad x\in\mathbb{R}^{\mathrm{N}}.$$

Se define

$$\mathcal{U}_0(x;\varphi) \doteq \lim_{t\searrow 0} \mathcal{U}(x,t;\varphi) \quad \text{traza inicial.}$$

De la expresión

$$\mathcal{U}(x,t;\varphi) = \sup_{\xi\in\mathcal{D}(\mathrm{H}^\star)} \{\varphi(x+t\xi) - t\mathrm{H}^\star(\xi)\}, \quad (x,t)\in\mathbb{R}^{\mathrm{N}}\times[0,\mathrm{T}_\infty[,$$

deducimos

$$\mathcal{U}(x,0;\varphi) = \varphi(x), \quad x\in\mathbb{R}^{\mathrm{N}}.$$

En general

$$\varphi_*(x) \le \liminf_{t\searrow 0} \mathcal{U}(x,t;\varphi) \le \limsup_{t\searrow 0} \mathcal{U}(x,t;\varphi) \le \varphi^*(x), \quad x\in\mathbb{R}^{\mathrm{N}}.$$

Observamos que la propiedad básica de la traza inicial (PBTI) debe ser

$$\mathcal{U}_0(x;\varphi) = \varphi^*(x), \quad x\in\mathbb{R}^{\mathrm{N}}.$$

Como mostraremos, (PBTI)

$$\mathcal{U}_0(x;\varphi) = \varphi^*(x), \quad x \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}},$$

es una condición de compatibilidad entre el Hamiltoniano y el dato inicial.

- $0 \in \mathcal{D}(\mathrm{H}^\star) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{U}_0(x;\varphi^*) = \varphi^*(x), \quad x \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}}.$
- $\partial \mathbf{B}_\varrho(0) \subseteq \mathcal{D}(\mathrm{H}^\star)$ y $\mathrm{H}^\star(0) \leq 0 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{U}_0(x;\varphi) = \varphi^*(x), \quad x \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}}.$ Por ejemplo $\mathcal{H}_m$, $m \geq 1$ y $\mathcal{H}_e$. Además, para $\mathcal{H}_1$ se verifica

$$\mathcal{U}_0(x;\varphi) = \varphi^*(x), \quad x \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}},$$

para $\varphi \in \mathcal{UB}_{loc}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}})$.

- Para $\mathcal{H}_{Os}$, $\mathrm{N} = 1$, $a = b = 1$, $\mathcal{H}_l = 0 < 1 = \mathcal{H}_r$ el dato $\varphi = 1\!\!1_{\mathbb{R}_+}$ no verifica (PBTI), pues

$$\mathcal{U}_0(x;\varphi) = \lim_{t \searrow 0} \sup_{\theta \in [1,2]} \varphi(t\theta) = 0 < 1 = \varphi^*(0).$$

Como mostraremos, (PBTI)

$$\mathcal{U}_0(x;\varphi) = \varphi^*(x), \quad x \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}},$$

es una condición de compatibilidad entre el Hamiltoniano y el dato inicial.

- $0 \in \mathcal{D}(\mathrm{H}^\star) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{U}_0(x;\varphi^*) = \varphi^*(x), \quad x \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}}.$
- $\partial \mathbf{B}_\varrho(0) \subseteq \mathcal{D}(\mathrm{H}^\star)$ y $\mathrm{H}^\star(0) \leq 0 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{U}_0(x;\varphi) = \varphi^*(x), \quad x \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}}.$ Por ejemplo $\mathcal{H}_m$, $m \geq 1$ y $\mathcal{H}_e$. Además, para $\mathcal{H}_1$ se verifica

  $$\mathcal{U}_0(x;\varphi) = \varphi^*(x), \quad x \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}},$$

  para $\varphi \in \mathcal{UB}_{loc}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}})$.
- Para $\mathcal{H}_{Os}$, $\mathrm{N} = 1$, $a = b = 1$, $\mathcal{H}_l = 0 < 1 = \mathcal{H}_r$ el dato $\varphi = 1\!\!1_{\mathbb{R}_+}$ no verifica (PBTI), pues

  $$\mathcal{U}_0(x;\varphi) = \lim_{t \searrow 0} \sup_{\theta \in [1,2]} \varphi(t\theta) = 0 < 1 = \varphi^*(0).$$

Problemas admisibles
La fórmula de Lax–Oleinik. La traza inicial

Como mostraremos, (PBTI)

$$\mathcal{U}_0(x;\varphi) = \varphi^*(x), \quad x \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}},$$

es una condición de compatibilidad entre el Hamiltoniano y el dato inicial.

- $0 \in \mathcal{D}(\mathrm{H}^\star) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{U}_0(x;\varphi^*) = \varphi^*(x), \quad x \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}}.$
- $\partial \mathbf{B}_\varrho(0) \subseteq \mathcal{D}(\mathrm{H}^\star)$ y $\mathrm{H}^\star(0) \leq 0 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{U}_0(x;\varphi) = \varphi^*(x), \quad x \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}}.$
  Por ejemplo $\mathcal{H}_m$, $m \geq 1$ y $\mathcal{H}_e$. Además, para $\mathcal{H}_1$ se verifica

  $$\mathcal{U}_0(x;\varphi) = \varphi^*(x), \quad x \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}},$$

  para $\varphi \in \mathcal{UB}_{loc}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}})$.
- Para $\mathcal{H}_{Os}$, $\mathrm{N} = 1$, $a = b = 1$, $\mathcal{H}_l = 0 < 1 = \mathcal{H}_r$ el dato $\varphi = 1\!\!1_{\mathbb{R}_+}$ no verifica (PBTI), pues

  $$\mathcal{U}_0(x;\varphi) = \lim_{t \searrow 0} \sup_{\theta \in [1,2]} \varphi(t\theta) = 0 < 1 = \varphi^*(0).$$

Como mostraremos, (PBTI)

$$\mathcal{U}_0(x;\varphi) = \varphi^*(x), \quad x \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}},$$

es una condición de compatibilidad entre el Hamiltoniano y el dato inicial.

- $0 \in \mathcal{D}(\mathrm{H}^\star) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{U}_0(x;\varphi^*) = \varphi^*(x), \quad x \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}}.$
- $\partial \mathbf{B}_\varrho(0) \subseteq \mathcal{D}(\mathrm{H}^\star)$ y $\mathrm{H}^\star(0) \le 0 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{U}_0(x;\varphi) = \varphi^*(x), \quad x \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}}.$
  Por ejemplo $\mathcal{H}_m,\ m \ge 1$ y $\mathcal{H}_e$. Además, para $\mathcal{H}_1$ se verifica

  $$\mathcal{U}_0(x;\varphi) = \varphi^*(x), \quad x \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}},$$

  para $\varphi \in \mathcal{UB}_{loc}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}})$.
- Para $\mathcal{H}_{Os},\ \mathrm{N} = 1,\ a = b = 1,\ \mathcal{H}_l = 0 < 1 = \mathcal{H}_r$ el dato $\varphi = 1\!\mathrm{I}_{\mathbb{R}_+}$ no verifica (PBTI), pues

  $$\mathcal{U}_0(x;\varphi) = \lim_{t \searrow 0} \sup_{\theta \in [1,2]} \varphi(t\theta) = 0 < 1 = \varphi^*(0).$$

Como mostraremos, (PBTI)

$$\mathcal{U}_0(x;\varphi) = \varphi^*(x), \quad x \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}},$$

es una condición de compatibilidad entre el Hamiltoniano y el dato inicial.

- $0 \in \mathcal{D}(\mathrm{H}^\star) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{U}_0(x;\varphi^*) = \varphi^*(x), \quad x \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}}.$
- $\partial \mathbf{B}_\varrho(0) \subseteq \mathcal{D}(\mathrm{H}^\star)$ y $\mathrm{H}^\star(0) \leq 0 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{U}_0(x;\varphi) = \varphi^*(x), \quad x \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}}.$ Por ejemplo $\mathcal{H}_m,\ m \geq 1$ y $\mathcal{H}_e$. Además, para $\mathcal{H}_1$ se verifica

$$\mathcal{U}_0(x;\varphi) = \varphi^*(x), \quad x \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}},$$

  para $\varphi \in \mathcal{UB}_{loc}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}})$.
- Para $\mathcal{H}_{Os},\ \mathrm{N} = 1,\ a = b = 1,\ \mathcal{H}_l = 0 < 1 = \mathcal{H}_r$ el dato $\varphi = 1\!\mathrm{I}_{\mathbb{R}_+}$ no verifica (PBTI), pues

$$\mathcal{U}_0(x;\varphi) = \lim_{t \searrow 0} \sup_{\theta \in [1,2]} \varphi(t\theta) = 0 < 1 = \varphi^*(0).$$

Como mostraremos, (PBTI)

$$\mathcal{U}_0(x;\varphi) = \varphi^*(x), \quad x \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}},$$

es una condición de compatibilidad entre el Hamiltoniano y el dato inicial.

- $0 \in \mathcal{D}(\mathrm{H}^\star) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{U}_0(x;\varphi^*) = \varphi^*(x), \quad x \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}}.$
- $\partial \mathbf{B}_\varrho(0) \subseteq \mathcal{D}(\mathrm{H}^\star)$ y $\mathrm{H}^\star(0) \leq 0 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{U}_0(x;\varphi) = \varphi^*(x), \quad x \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}}.$
  Por ejemplo $\mathcal{H}_m$, $m \geq 1$ y $\mathcal{H}_e$. Además, para $\mathcal{H}_1$ se verifica

  $$\mathcal{U}_0(x;\varphi) = \varphi^*(x), \quad x \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}},$$

  para $\varphi \in \mathcal{UB}_{loc}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}})$.
- Para $\mathcal{H}_{Os}$, $\mathrm{N} = 1$, $a = b = 1$, $\mathcal{H}_l = 0 < 1 = \mathcal{H}_r$ el dato $\varphi = 1\!\mathrm{I}_{\mathbb{R}_+}$ no verifica (PBTI), pues

  $$\mathcal{U}_0(x;\varphi) = \lim_{t \searrow 0} \sup_{\theta \in [1,2]} \varphi(t\theta) = 0 < 1 = \varphi^*(0).$$

$$\mathcal{U}(x, t; \varphi) < +\infty \quad x \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \quad \text{para algún } t \in]0, \mathrm{T}[.$$

$$\varphi(t\xi) \leq \mathcal{U}(0,t;\varphi) + t\mathrm{H}^\star(\xi) \leq \mathcal{U}(x,t;\varphi) < +\infty$$

Teorema (Horizonte maximal)

Supuesto $\mathcal{D}(\mathrm{H}^\star) = \mathbb{R}^\mathrm{N}$, $\limsup\limits_{|\xi|\to+\infty} \mathrm{H}^\star(\xi) = +\infty$.

$$\mathcal{U}(x,t;\varphi) < +\infty,\ \forall x \in \mathbb{R}^\mathrm{N} \quad \Rightarrow \quad \limsup_{|\xi|\to+\infty} \frac{\varphi(\xi)}{t\mathrm{H}^\star\left(\dfrac{\xi}{t}\right)} \leq 1.$$

$$\limsup_{|\xi|\to+\infty} \frac{\varphi(\xi)}{t\mathrm{H}^\star\left(\dfrac{\xi}{t}\right)} \leq 1 \quad \overbrace{\Rightarrow}^{\varphi\in\mathcal{UB}_{loc}} \quad \mathcal{U}(x,t;\varphi) < +\infty,\ \forall x \in \mathbb{R}^\mathrm{N}.$$

$$\varphi(t\xi) \leq \mathcal{U}(0,t;\varphi) + t\mathrm{H}^\star(\xi) \leq \mathcal{U}(x,t;\varphi) < +\infty$$

Teorema (Horizonte maximal)

Supuesto $\mathcal{D}(\mathrm{H}^\star) = \mathbb{R}^{\mathrm{N}}$, $\limsup_{|\xi|\to+\infty} \mathrm{H}^\star(\xi) = +\infty$.

$$\mathcal{U}(x,t;\varphi) < +\infty,\ \forall x \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \quad \Rightarrow \quad \limsup_{|\xi|\to+\infty} \frac{\varphi(\xi)}{t\mathrm{H}^\star\left(\dfrac{\xi}{t}\right)} \leq 1.$$

$$\limsup_{|\xi|\to+\infty} \frac{\varphi(\xi)}{t\mathrm{H}^\star\left(\dfrac{\xi}{t}\right)} \leq 1 \quad \overset{\varphi\in\mathcal{UB}_{loc}}{\Rightarrow} \quad \mathcal{U}(x,t;\varphi) < +\infty,\ \forall x \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}}.$$

$$\varphi(t\xi) \leq \mathcal{U}(0,t;\varphi) + t\mathrm{H}^\star(\xi) \leq \mathcal{U}(x,t;\varphi) < +\infty$$

Teorema (Horizonte maximal)

Supuesto $\mathcal{D}(\mathrm{H}^\star) = \mathbb{R}^\mathrm{N}$, $\limsup_{|\xi|\to+\infty} \mathrm{H}^\star(\xi) = +\infty$.

$$\mathcal{U}(x,t;\varphi) < +\infty, \ \forall x \in \mathbb{R}^\mathrm{N} \quad \Rightarrow \quad \limsup_{|\xi|\to+\infty} \frac{\varphi(\xi)}{t\mathrm{H}^\star\left(\dfrac{\xi}{t}\right)} \leq 1.$$

$$\limsup_{|\xi|\to+\infty} \frac{\varphi(\xi)}{t\mathrm{H}^\star\left(\dfrac{\xi}{t}\right)} \leq 1 \quad \overbrace{\Rightarrow}^{\varphi\in\mathcal{UB}_{loc}} \quad \mathcal{U}(x,t;\varphi) < +\infty, \ \forall x \in \mathbb{R}^\mathrm{N}.$$

$$\mathrm{T}_\infty \doteq \sup \left\{ \mathrm{T} > 0 : \quad \limsup_{|\xi|\to+\infty} \frac{\varphi(\xi)}{t\mathrm{H}^\star\left(\dfrac{\xi}{t}\right)} \leq 1 \quad \text{para } t \in [0, \mathrm{T}[\right\} \leq +\infty.$$

Teorema (Comportamiento asintótico espacial)

Para $\ell_\infty \doteq \limsup_{|\xi|\to+\infty} \dfrac{\varphi(\xi)}{\mathrm{T}_\infty \mathrm{H}^\star\left(\dfrac{\xi}{\mathrm{T}_\infty}\right)} \leq 1$, $\mathrm{T}_\infty < +\infty$ *se verifica*

$$\mathrm{T}_\infty \ell_\infty - t \leq \limsup_{|x|\to+\infty} \frac{\mathcal{U}(x,t;\varphi)}{\mathrm{H}^\star\left(\dfrac{x}{\mathrm{T}_\infty - t}\right)} = \mathrm{T}_\infty - t, \quad 0 \leq t < \mathrm{T}_\infty.$$

$$\mathrm{T}_\infty \doteq \sup \left\{ \mathrm{T} > 0 : \limsup_{|\xi|\to+\infty} \frac{\varphi(\xi)}{t\mathrm{H}^\star\left(\frac{\xi}{t}\right)} \leq 1 \quad \text{para } t \in [0, \mathrm{T}[\right\} \leq +\infty.$$

Teorema (Comportamiento asintótico espacial)

Para $\ell_\infty \doteq \limsup_{|\xi|\to+\infty} \dfrac{\varphi(\xi)}{\mathrm{T}_\infty \mathrm{H}^\star\left(\frac{\xi}{\mathrm{T}_\infty}\right)} \leq 1$, $\mathrm{T}_\infty < +\infty$ *se verifica*

$$\mathrm{T}_\infty \ell_\infty - t \leq \limsup_{|x|\to+\infty} \frac{\mathcal{U}(x,t;\varphi)}{\mathrm{H}^\star\left(\frac{x}{\mathrm{T}_\infty - t}\right)} = \mathrm{T}_\infty - t, \quad 0 \leq t < \mathrm{T}_\infty.$$

$$\mathrm{T}_\infty \doteq \sup \left\{ \mathrm{T} > 0 : \ \limsup_{|\xi| \to +\infty} \frac{\varphi(\xi)}{t \mathrm{H}^\star\left(\dfrac{\xi}{t}\right)} \leq 1 \quad \text{para } t \in [0, \mathrm{T}[\right\} \leq +\infty.$$

Teorema (Comportamiento asintótico espacial)

Para $\ell_\infty \doteq \limsup_{|\xi| \to +\infty} \dfrac{\varphi(\xi)}{\mathrm{T}_\infty \mathrm{H}^\star\left(\dfrac{\xi}{\mathrm{T}_\infty}\right)} \leq 1, \ \mathrm{T}_\infty < +\infty$ *se verifica*

$$\mathrm{T}_\infty \ell_\infty - t \leq \limsup_{|x| \to +\infty} \frac{\mathcal{U}(x, t; \varphi)}{\mathrm{H}^\star\left(\dfrac{x}{\mathrm{T}_\infty - t}\right)} = \mathrm{T}_\infty - t, \quad 0 \leq t < \mathrm{T}_\infty.$$

$$\mathrm{T}_\infty \doteq \sup \left\{ \mathrm{T} > 0 : \quad \limsup_{|\xi|\to+\infty} \frac{\varphi(\xi)}{t\mathrm{H}^\star\left(\dfrac{\xi}{t}\right)} \leq 1 \quad \text{para } t \in [0, \mathrm{T}[\right\} \leq +\infty.$$

- Para $\mathcal{H}_m$, $m > 1$,

$$\limsup_{|\xi|\to+\infty} \frac{\varphi(\xi)}{|\xi|^{\frac{m}{m-1}}} = \ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \quad \rightsquigarrow \quad \mathrm{T}_\infty = \frac{1}{\mathrm{R}m^m}\left(\frac{m-1}{\ell_+}\right)^{m-1}.$$

- Para $\mathcal{H}_e$

$$\limsup_{|\xi|\to+\infty} \frac{\varphi(\xi)}{\langle \xi, \mathcal{A}^{-1}\xi \rangle} = \ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \quad \rightsquigarrow \quad \mathrm{T}_\infty = \frac{1}{4\ell_+}.$$

$$\mathrm{T}_\infty \doteq \sup \left\{ \mathrm{T} > 0 : \ \limsup_{|\xi|\to+\infty} \frac{\varphi(\xi)}{t\mathrm{H}^\star\left(\frac{\xi}{t}\right)} \leq 1 \quad \text{para } t \in [0, \mathrm{T}[\right\} \leq +\infty.$$

- Para $\mathcal{H}_m, \ m > 1$,

$$\limsup_{|\xi|\to+\infty} \frac{\varphi(\xi)}{|\xi|^{\frac{m}{m-1}}} = \ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \quad \rightsquigarrow \quad \mathrm{T}_\infty = \frac{1}{\mathrm{R}m^m}\left(\frac{m-1}{\ell_+}\right)^{m-1}.$$

- Para $\mathcal{H}_e$

$$\limsup_{|\xi|\to+\infty} \frac{\varphi(\xi)}{\langle \xi, \mathcal{A}^{-1}\xi\rangle} = \ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \quad \rightsquigarrow \quad \mathrm{T}_\infty = \frac{1}{4\ell_+}.$$

$$\mathrm{T}_\infty \doteq \sup \left\{ \mathrm{T} > 0 : \ \limsup_{|\xi|\to+\infty} \frac{\varphi(\xi)}{t\mathrm{H}^\star\left(\dfrac{\xi}{t}\right)} \leq 1 \quad \text{para } t \in [0, \mathrm{T}[\right\} \leq +\infty.$$

- Para $\mathcal{H}_m$, $m > 1$,

$$\limsup_{|\xi|\to+\infty} \frac{\varphi(\xi)}{|\xi|^{\frac{m}{m-1}}} = \ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \quad \rightsquigarrow \quad \mathrm{T}_\infty = \frac{1}{\mathrm{R}m^m}\left(\frac{m-1}{\ell_+}\right)^{m-1}.$$

- Para $\mathcal{H}_e$

$$\limsup_{|\xi|\to+\infty} \frac{\varphi(\xi)}{\langle \xi, \mathcal{A}^{-1}\xi\rangle} = \ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \quad \rightsquigarrow \quad \mathrm{T}_\infty = \frac{1}{4\ell_+}.$$

Problemas admisibles
El problema de Cauchy

$$\begin{cases} u_t = \mathrm{H}(\mathrm{D}u) & \text{en } \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \times]0,\mathrm{T}[\\ u = u_0 & \text{en } \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \times \{0\} \end{cases}$$

- La teoría de soluciones fuertes separa el comportamiento interior $\mathbb{R}^{\mathrm{N}} \times]0,\mathrm{T}[$ del de contorno $\mathbb{R}^{\mathrm{N}} \times \{0\}$.
- La teoría de soluciones débiles estudia el comportamiento global de un operador discontinuo en $\left(\mathbb{R}^{\mathrm{N}} \times]0,\mathrm{T}[\right) \cup \left(\mathbb{R}^{\mathrm{N}} \times \{0\}\right)$.
- Por la estructura del problema, aquí sólo son posibles aquellas soluciones débiles que son fuertes.

Se presenta la ambigüedad del comportamiento inicial

$$(u_0)_*(x) \leq u_*(x,0) \leq u(x,0) \leq u^*(x,0) \leq (u_0)^*(x), \quad x \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}}$$

por precisar.

- Si u_0 es continua en x_0 sólo son posibles las soluciones continuas en $(x_0, 0)$.
- Usaremos la fórmula de Lax–Oleinik en el caso de datos discontinuos.

Problemas admisibles
El problema de Cauchy

$$\begin{cases} u_t = \mathrm{H}(\mathrm{D}u) & \text{en } \mathbb{R}^{\mathrm{N}}\times]0,\mathrm{T}[\\ u = u_0 & \text{en } \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \times \{0\} \end{cases}$$

- La teoría de soluciones fuertes separa el comportamiento interior $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}\times]0,\mathrm{T}[$ del de contorno $\mathbb{R}^{\mathrm{N}} \times \{0\}$.
- La teoría de soluciones débiles estudia el comportamiento global de un operador discontinuo en $(\mathbb{R}^{\mathrm{N}}\times]0,\mathrm{T}[) \cup (\mathbb{R}^{\mathrm{N}} \times \{0\})$.
- Por la estructura del problema, aquí sólo son posibles aquellas soluciones débiles que son fuertes.

Se presenta la ambigüedad del comportamiento inicial

$$(u_0)_*(x) \leq u_*(x,0) \leq u(x,0) \leq u^*(x,0) \leq (u_0)^*(x), \quad x \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}}$$

por precisar.

- Si u_0 es continua en x_0 sólo son posibles las soluciones continuas en $(x_0,0)$.
- Usaremos la fórmula de Lax–Oleinik en el caso de datos discontinuos.

$$\begin{cases} u_t = \mathrm{H}(\mathrm{D}u) & \text{en } \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \times]0, \mathrm{T}[\\ u = u_0 & \text{en } \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \times \{0\} \end{cases}$$

- La teoría de soluciones fuertes separa el comportamiento interior $\mathbb{R}^{\mathrm{N}} \times]0, \mathrm{T}[$ del de contorno $\mathbb{R}^{\mathrm{N}} \times \{0\}$.
- La teoría de soluciones débiles estudia el comportamiento global de un operador discontinuo en $\left(\mathbb{R}^{\mathrm{N}} \times]0, \mathrm{T}[\right) \cup \left(\mathbb{R}^{\mathrm{N}} \times \{0\}\right)$.
- Por la estructura del problema, aquí sólo son posibles aquellas soluciones débiles que son fuertes.

Se presenta la ambigüedad del comportamiento inicial

$$(u_0)_*(x) \leq u_*(x,0) \leq u(x,0) \leq u^*(x,0) \leq (u_0)^*(x), \quad x \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}}$$

por precisar.

- Si u_0 es continua en x_0 sólo son posibles las soluciones continuas en $(x_0, 0)$.
- Usaremos la fórmula de Lax–Oleinik en el caso de datos discontinuos

$$\begin{cases} u_t = \mathrm{H}(\mathrm{D}u) & \text{en } \mathbb{R}^{\mathrm{N}}\times]0,\mathrm{T}[\\ u = u_0 & \text{en } \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \times \{0\} \end{cases}$$

- La teoría de soluciones fuertes separa el comportamiento interior $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}\times]0,\mathrm{T}[$ del de contorno $\mathbb{R}^{\mathrm{N}} \times \{0\}$.
- La teoría de soluciones débiles estudia el comportamiento global de un operador discontinuo en $\left(\mathbb{R}^{\mathrm{N}}\times]0,\mathrm{T}[\right) \cup \left(\mathbb{R}^{\mathrm{N}} \times \{0\}\right)$.
- Por la estructura del problema, aquí sólo son posibles aquellas soluciones débiles que son fuertes.

Se presenta la ambigüedad del comportamiento inicial

$$(u_0)_*(x) \leq u_*(x,0) \leq u(x,0) \leq u^*(x,0) \leq (u_0)^*(x), \quad x \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}}$$

por precisar.

- Si u_0 es continua en x_0 sólo son posibles las soluciones continuas en $(x_0, 0)$.
- Usaremos la fórmula de Lax–Oleinik en el caso de datos discontinuos.

$$\begin{cases} u_t = \mathrm{H}(\mathrm{D}u) & \text{en } \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \times]0,\mathrm{T}[\\ u = u_0 & \text{en } \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \times \{0\} \end{cases}$$

- La teoría de soluciones fuertes separa el comportamiento interior $\mathbb{R}^{\mathrm{N}} \times]0,\mathrm{T}[$ del de contorno $\mathbb{R}^{\mathrm{N}} \times \{0\}$.
- La teoría de soluciones débiles estudia el comportamiento global de un operador discontinuo en $\left(\mathbb{R}^{\mathrm{N}} \times]0,\mathrm{T}[\right) \cup \left(\mathbb{R}^{\mathrm{N}} \times \{0\}\right)$.
- Por la estructura del problema, aquí sólo son posibles aquellas soluciones débiles que son fuertes.

Se presenta la ambigüedad del comportamiento inicial

$$(u_0)_*(x) \leq u_*(x,0) \leq u(x,0) \leq u^*(x,0) \leq (u_0)^*(x), \quad x \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}}$$

por precisar.

- Si u_0 es continua en x_0 sólo son posibles las soluciones continuas en $(x_0, 0)$.
- Usaremos la fórmula de Lax–Oleinik en el caso de datos discontinuos.

Problemas admisibles

El problema de Cauchy

$$\begin{cases} u_t = \mathrm{H}(\mathrm{D}u) & \text{en } \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \times]0,\mathrm{T}[\\ u = u_0 & \text{en } \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \times \{0\} \end{cases}$$

- La teoría de soluciones fuertes separa el comportamiento interior $\mathbb{R}^{\mathrm{N}} \times]0,\mathrm{T}[$ del de contorno $\mathbb{R}^{\mathrm{N}} \times \{0\}$.
- La teoría de soluciones débiles estudia el comportamiento global de un operador discontinuo en $\left(\mathbb{R}^{\mathrm{N}} \times]0,\mathrm{T}[\right) \cup \left(\mathbb{R}^{\mathrm{N}} \times \{0\}\right)$.
- Por la estructura del problema, aquí sólo son posibles aquellas soluciones débiles que son fuertes.

Se presenta la ambigüedad del comportamiento inicial

$$(u_0)_*(x) \leq u_*(x,0) \leq u(x,0) \leq u^*(x,0) \leq (u_0)^*(x), \quad x \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}}$$

por precisar.

- Si u_0 es continua en x_0 sólo son posibles las soluciones continuas en $(x_0, 0)$.
- Usaremos la fórmula de Lax–Oleinik en el caso de datos discontinuos.

$$\begin{cases} u_t = \mathrm{H}(\mathrm{D}u) & \text{en } \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \times]0,\mathrm{T}[\\ u = u_0 & \text{en } \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \times \{0\} \end{cases}$$

- La teoría de soluciones fuertes separa el comportamiento interior $\mathbb{R}^{\mathrm{N}} \times]0,\mathrm{T}[$ del de contorno $\mathbb{R}^{\mathrm{N}} \times \{0\}$.
- La teoría de soluciones débiles estudia el comportamiento global de un operador discontinuo en $\left(\mathbb{R}^{\mathrm{N}} \times]0,\mathrm{T}[\right) \cup \left(\mathbb{R}^{\mathrm{N}} \times \{0\}\right)$.
- Por la estructura del problema, aquí sólo son posibles aquellas soluciones débiles que son fuertes.

Se presenta la ambigüedad del comportamiento inicial

$$(u_0)_*(x) \le u_*(x,0) \le u(x,0) \le u^*(x,0) \le (u_0)^*(x), \quad x \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}}$$

por precisar.

- Si u_0 es continua en x_0 sólo son posibles las soluciones continuas en $(x_0, 0)$.
- Usaremos la fórmula de Lax–Oleinik en el caso de datos discontinuos.

Por lo comentado si $u \in \mathcal{LB}_{loc}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}} \times]0, \mathrm{T}[)$ verifica

$$u_t \geq \mathrm{H}(\mathrm{D}u) \quad \text{en } \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \times]0, \mathrm{T}[$$

entonces

$$(u_*)^*(x,t) \geq \mathcal{U}(x,t;(u_*(\cdot,0^+))^*), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \times]0, \mathrm{T}[,$$

para

$$u_*(x,0^+) \doteq \lim_{(y,t)\to(x,0^+)} u_*(y,t), \quad x \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}}.$$

Teorema (Prescripción del dato inicial)

Sea $u \in \mathcal{B}_{loc}(\mathbb{R}^N \times [0, T[)$, $T \leq +\infty$, *verifica*

$$\begin{cases} u_t = H(Du) & \text{en } \mathbb{R}^N \times]0, T[\\ u(\cdot, 0) = u_0(\cdot) & \text{en } \mathbb{R}^N \end{cases}$$

para $u_0 \in \mathcal{B}_{loc}(\mathbb{R}^N)$ *satisfaciendo* (PBTI) *y* (PRM), *entonces*

$$\lim_{t \to 0^+} u(x, t) = (u_0)^*(x), \; x \in \mathbb{R}^N.$$

Además el horizonte maximal asociado es

$$T_\infty \doteq \sup \left\{ T > 0 : \; \limsup_{|\xi| \to +\infty} \frac{(u_0)_*(\xi)}{tH^\star\left(\dfrac{\xi}{t}\right)} \leq 1 \quad \text{para } t \in [0, T[\right\} \leq +\infty.$$

Teorema (Prescripción del dato inicial)

Sea $u \in \mathcal{B}_{loc}(\mathbb{R}^N \times [0, T[)$, $T \leq +\infty$, *verifica*

$$\begin{cases} u_t = H(Du) & \textit{en } \mathbb{R}^N \times]0, T[\\ u(\cdot, 0) = u_0(\cdot) & \textit{en } \mathbb{R}^N \end{cases}$$

para $u_0 \in \mathcal{B}_{loc}(\mathbb{R}^N)$ *satisfaciendo* (PBTI) *y* (PRM),*entonces*

$$\lim_{t \to 0^+} u(x, t) = (u_0)^*(x), \; x \in \mathbb{R}^N.$$

Además el horizonte maximal asociado es

$$T_\infty \doteq \sup \left\{ T > 0 : \limsup_{|\xi| \to +\infty} \frac{(u_0)_*(\xi)}{tH^\star\left(\frac{\xi}{t}\right)} \leq 1 \quad \textit{para } t \in [0, T[\right\} \leq +\infty.$$

Teorema (Prescripción del dato inicial)

Sea $u \in \mathcal{B}_{loc}(\mathbb{R}^N \times [0,T[)$, $T \leq +\infty$, *verifica*

$$\begin{cases} u_t = H(Du) & en\ \mathbb{R}^N \times]0,T[\\ u(\cdot,0) = u_0(\cdot) & en\ \mathbb{R}^N \end{cases}$$

para $u_0 \in \mathcal{B}_{loc}(\mathbb{R}^N)$ *satisfaciendo* (PBTI) *y* (PRM),*entonces*

$$\lim_{t \to 0^+} u(x,t) = (u_0)^*(x),\ x \in \mathbb{R}^N.$$

Además el horizonte maximal asociado es

$$T_\infty \doteq \sup \left\{ T > 0 :\ \limsup_{|\xi| \to +\infty} \frac{(u_0)_*(\xi)}{tH^\star\left(\dfrac{\xi}{t}\right)} \leq 1 \quad para\ t \in [0,T[\right\} \leq +\infty.$$

El Principio de la Programación Dinámica y el Teorema de Fenchel–Moreau permiten un primer resultado

Proposición (Minimalidad)

Dado $u_0 \in \mathcal{B}_{loc}(\mathbb{R}^N)$, cualquier solución, $u \in \mathcal{B}_{loc}(\mathbb{R}^N \times]0,T[)$ de

$$\begin{cases} u_t \geq \mathrm{H}^{\star\star}(\mathrm{D}u) & \text{en } \mathbb{R}^N \times]0,T[, \\ u(\cdot,0) \geq u_0(\cdot) & \text{en } \mathbb{R}^N, \end{cases}$$

verifica

$$(u_*)^*(x,t) \geq \mathcal{U}(x,t;(u_0)^*), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^N \times]0,T[,$$

para la fórmula de the Lax–Oleinik $\mathcal{U}(x,t;(u_0)^*)$, que, por tanto, es la mínima solución del problema

El Principio de la Programación Dinámica y el Teorema de Fenchel–Moreau permiten un primer resultado

Proposición (Minimalidad)

Dado $u_0 \in \mathcal{B}_{loc}(\mathbb{R}^N)$, *cualquier solución,* $u \in \mathcal{B}_{loc}(\mathbb{R}^N \times]0,T[)$ *de*

$$\begin{cases} u_t \geq H^{\star\star}(Du) & \text{en } \mathbb{R}^N \times]0,T[, \\ u(\cdot,0) \geq u_0(\cdot) & \text{en } \mathbb{R}^N, \end{cases}$$

verifica

$$(u_*)^*(x,t) \geq \mathcal{U}\left(x,t;(u_0)^*\right), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^N \times]0,T[,$$

para la fórmula de the Lax–Oleinik $\mathcal{U}\left(x,t;(u_0)^*\right)$, *que, por tanto, es la mínima solución del problema*

Tambíen la Programación Dinámica lleva a

Teorema (Solución minimal)

Para $u_0 \in \mathcal{B}_{loc}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}})$ *verificando* (PBTI) *y* (PRM), *la correspondiente fórmula de Lax–Oleinik* $\mathcal{U}\,(x,t;(u_0)^*)$ *es una solución minimal del problema de Cauchy*

$$\begin{cases} u_t = \mathrm{H}^{\star\star}(\mathrm{D}u) & \text{en } \mathbb{R}^{\mathrm{N}}\times]0,\mathrm{T}_\infty[, \\ u(\cdot,0) = u_0(\cdot) & \text{en } \mathbb{R}^{\mathrm{N}}. \end{cases}$$

Además, si $\mathrm{H} = \mathcal{H}$ *se trata de una* D^+*–solución.*

Teorema

Si $u \in \mathcal{UB}_{loc}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}} \times]0, \mathrm{T}[)$ *es una* D^+*–solución de*

$$u_t = \mathcal{H}(\mathrm{D}u) \quad \textit{en } \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \times]0, \mathrm{T}[$$

supuesto que $\mathcal{H}$ *es un hamiltoniano estrictamente convexo. Entonces*

$$(u^*)_t(x,t) = \mathcal{H}(\mathrm{D}u^*(x,t)), \quad \textit{si } \mathrm{D}^+ u^*(x,t) \neq \emptyset.$$

Teorema

Si $\mathrm{H} \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}})$ *verifica* $\liminf_{r \to +\infty} \dfrac{\mathrm{H}(rp)}{r} \geq 1$ *para* $0 < |p| \leq 1$*. Entonces cualquier solución* $u \in \mathcal{LB}_{loc}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}} \times]0, \mathrm{T}[)$ *de*

$$u_t \geq \mathrm{H}(\mathrm{D}u) \quad \textit{en } \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \times]0, \mathrm{T}[$$

tiene la regularidad $u_* \in \mathcal{W}^{1,\infty}_{loc}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}} \times]0, \mathrm{T}[)$.

Teorema

Si $u \in \mathcal{UB}_{loc}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}} \times]0, \mathrm{T}[)$ *es una* D^{+}*–solución de*

$$u_t = \mathcal{H}(\mathrm{D}u) \quad \text{en } \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \times]0, \mathrm{T}[$$

supuesto que $\mathcal{H}$ *es un hamiltoniano estrictamente convexo. Entonces*

$$(u^*)_t(x,t) = \mathcal{H}(\mathrm{D}u^*(x,t)), \quad \text{si } \mathrm{D}^{+}u^*(x,t) \neq \emptyset.$$

Teorema

Si $\mathrm{H} \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}})$ *verifica* $\liminf_{r \to +\infty} \dfrac{\mathrm{H}(rp)}{r} \geq 1$ *para* $0 < |p| \leq 1$*. Entonces cualquier solución* $u \in \mathcal{LB}_{loc}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}} \times]0, \mathrm{T}[)$ *de*

$$u_t \geq \mathrm{H}(\mathrm{D}u) \quad \text{en } \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \times]0, \mathrm{T}[$$

tiene la regularidad $u_* \in \mathcal{W}^{1,\infty}_{loc}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}} \times]0, \mathrm{T}[)$.

La condición

$$\liminf_{r \to +\infty} \frac{\mathrm{H}(rp)}{r} \geq 1 \text{ para } 0 < |p| \leq 1$$

es verificada por $\mathcal{H}_m^*$, $m > 1$, y $\mathcal{H}_e$, para los que

$$\boxed{\begin{array}{ccc} \mathcal{B}_{loc}(\mathbb{R}^\mathrm{N}) & \rightarrow & \mathcal{W}^{1,\infty}_{loc}(\mathbb{R}^\mathrm{N} \times]0, \mathrm{T}_\infty[) \\ u_0 & \mapsto & \mathcal{U}^*\left(\cdot, \cdot; (u_0)^*\right) \end{array}}$$

Además,

$$u_0 \text{ con } (PRM) \Rightarrow \mathcal{U}_*\left(\cdot, \cdot; (u_0)^*\right) = \left(\mathcal{U}_*\right)^*\left(\cdot, \cdot; (u_0)^*\right) = \mathcal{U}^*\left(\cdot, \cdot; (u_0)^*\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\begin{array}{ccc} \mathcal{B}_{loc}(\mathbb{R}^\mathrm{N}) + (\mathrm{PRM}) & \rightarrow & \mathcal{W}^{1,\infty}_{loc}(\mathbb{R}^\mathrm{N} \times]0, \mathrm{T}_\infty[) \\ u_0 & \mapsto & \mathcal{U}\left(\cdot, \cdot; (u_0)^*\right) \end{array}}$$

y resuelve, para esos hamiltonianos $\mathcal{H}_m$, $m > 1$ y $\mathcal{H}_e$,

$$u_t = \mathcal{H}(\mathrm{D}u) \quad \text{a.e. en } \mathbb{R}^\mathrm{N} \times]0, \mathrm{T}_\infty[$$

La condición

$$\liminf_{r \to +\infty} \frac{\mathrm{H}(rp)}{r} \geq 1 \quad \text{para } 0 < |p| \leq 1$$

es verificada por $\mathcal{H}_m^*$, $m > 1$, y $\mathcal{H}_e$, para los que

$$\boxed{\begin{array}{ccc} \mathcal{B}_{loc}(\mathbb{R}^\mathrm{N}) & \rightarrow & \mathcal{W}_{loc}^{1,\infty}(\mathbb{R}^\mathrm{N} \times]0, \mathrm{T}_\infty[) \\ u_0 & \mapsto & \mathcal{U}^* \left(\cdot, \cdot; (u_0)^* \right) \end{array}}$$

Además,

$$u_0 \text{ con } (PRM) \Rightarrow \mathcal{U}_* \left(\cdot, \cdot; (u_0)^* \right) = (\mathcal{U}_*)^* \left(\cdot, \cdot; (u_0)^* \right) = \mathcal{U}^* \left(\cdot, \cdot; (u_0)^* \right)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\begin{array}{ccc} \mathcal{B}_{loc}(\mathbb{R}^\mathrm{N}) + (\mathrm{PRM}) & \rightarrow & \mathcal{W}_{loc}^{1,\infty}(\mathbb{R}^\mathrm{N} \times]0, \mathrm{T}_\infty[) \\ u_0 & \mapsto & \mathcal{U} \left(\cdot, \cdot; (u_0)^* \right) \end{array}}$$

y resuelve, para esos hamiltonianos $\mathcal{H}_m$, $m > 1$ y $\mathcal{H}_e$,

$$u_t = \mathcal{H}(\mathrm{D}u) \quad \text{a.e. en } \mathbb{R}^\mathrm{N} \times]0, \mathrm{T}_\infty[$$

La condición

$$\liminf_{r\to+\infty} \frac{\mathrm{H}(rp)}{r} \geq 1 \quad \text{para } 0 < |p| \leq 1$$

es verificada por $\mathcal{H}_m^*$, $m > 1$, y $\mathcal{H}_e$, para los que

$$\boxed{\begin{array}{ccc} \mathcal{B}_{loc}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}}) & \rightarrow & \mathcal{W}^{1,\infty}_{loc}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}}\times]0,\mathrm{T}_\infty[) \\ u_0 & \mapsto & \mathcal{U}^*\left(\cdot,\cdot;(u_0)^*\right) \end{array}}$$

Además,

$$u_0 \text{ con } (PRM) \Rightarrow \mathcal{U}_*\left(\cdot,\cdot;(u_0)^*\right) = (\mathcal{U}_*)^*\left(\cdot,\cdot;(u_0)^*\right) = \mathcal{U}^*\left(\cdot,\cdot;(u_0)^*\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\begin{array}{ccc} \mathcal{B}_{loc}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}}) + (\mathrm{PRM}) & \rightarrow & \mathcal{W}^{1,\infty}_{loc}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}}\times]0,\mathrm{T}_\infty[) \\ u_0 & \mapsto & \mathcal{U}\left(\cdot,\cdot;(u_0)^*\right) \end{array}}$$

y resuelve, para esos hamiltonianos $\mathcal{H}_m$, $m > 1$ y $\mathcal{H}_e$,

$$u_t = \mathcal{H}(\mathrm{D}u) \quad a.e. \text{ en } \mathbb{R}^{\mathrm{N}}\times]0,\mathrm{T}_\infty[$$

La condición

$$\liminf_{r\to+\infty} \frac{\mathrm{H}(rp)}{r} \geq 1 \quad \text{para } 0 < |p| \leq 1$$

es verificada por $\mathcal{H}_m^*$, $m > 1$, y $\mathcal{H}_e$, para los que

$$\boxed{\begin{array}{ccc} \mathcal{B}_{loc}(\mathbb{R}^N) & \rightarrow & \mathcal{W}_{loc}^{1,\infty}(\mathbb{R}^N \times]0, \mathrm{T}_\infty[) \\ u_0 & \mapsto & \mathcal{U}^*\left(\cdot, \cdot; (u_0)^*\right) \end{array}}$$

Además,

$$u_0 \text{ con } (PRM) \Rightarrow \mathcal{U}_*\left(\cdot, \cdot; (u_0)^*\right) = (\mathcal{U}_*)^*\left(\cdot, \cdot; (u_0)^*\right) = \mathcal{U}^*\left(\cdot, \cdot; (u_0)^*\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\begin{array}{ccc} \mathcal{B}_{loc}(\mathbb{R}^N) + (\mathrm{PRM}) & \rightarrow & \mathcal{W}_{loc}^{1,\infty}(\mathbb{R}^N \times]0, \mathrm{T}_\infty[) \\ u_0 & \mapsto & \mathcal{U}\left(\cdot, \cdot; (u_0)^*\right) \end{array}}$$

y resuelve, para esos hamiltonianos $\mathcal{H}_m$, $m > 1$ y $\mathcal{H}_e$,

$$u_t = \mathcal{H}(\mathrm{D}u) \quad a.e. \text{ en } \mathbb{R}^N \times]0, \mathrm{T}_\infty[.$$

Con la regularidad podemos usar técnicas de convolución

Teorema (Unicidad de soluciones)

Sea $u_0 \in \mathcal{B}_{loc}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}})$ *verificando* (PRM) *y* $\mathcal{H}$*, con*

$$\mathcal{D}(\mathcal{H}^\star) = \mathbb{R}^{\mathrm{N}}, \quad \limsup_{|\xi| \to +\infty} \mathcal{H}^\star(\xi) = +\infty$$

y

$$\liminf_{r \to +\infty} \frac{\mathcal{H}(rp)}{r} \geq 1 \quad \textit{para } 0 < |p| \leq 1,$$

tal que existe $\delta > 0$ *tal que para cada* $x \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ *y* $0 < r < \mathrm{T}_\infty + \delta$ *satisfaciendo*

$$\limsup_{|x| \to +\infty} \frac{r\mathcal{H}^\star\left(\frac{x}{r}\right)}{(r-\delta)\mathcal{H}^\star\left(\frac{x}{r-\delta}\right)} < 1,$$

Entonces, bajo (PBTI)*, la fórmula de Lax–Oleinik proporciona la única solución del correspondiente problema de Cauchy.*

Nótese

$$\limsup_{|x|\to+\infty} \frac{r\mathcal{H}_m^{\star}\left(\frac{x}{r}\right)}{(r-\delta)\mathcal{H}_m^{\star}\left(\frac{x}{r-\delta}\right)} = \left(\frac{r-\delta}{r}\right)^{\frac{1}{m-1}} < 1, \qquad m > 1,$$

$$\limsup_{|x|\to+\infty} \frac{r\mathcal{H}_e^{\star}\left(\frac{x}{r}\right)}{(r-\delta)\mathcal{H}_e^{\star}\left(\frac{x}{r-\delta}\right)} = \frac{r-\delta}{r} < 1.$$

Nótese

$$\limsup_{|x|\to+\infty} \frac{r\mathcal{H}_m^\star\left(\frac{x}{r}\right)}{(r-\delta)\mathcal{H}_m^\star\left(\frac{x}{r-\delta}\right)} = \left(\frac{r-\delta}{r}\right)^{\frac{1}{\mathrm{m}-1}} < 1, \qquad m > 1,$$

$$\limsup_{|x|\to+\infty} \frac{r\mathcal{H}_e^\star\left(\frac{x}{r}\right)}{(r-\delta)\mathcal{H}_e^\star\left(\frac{x}{r-\delta}\right)} = \frac{r-\delta}{r} < 1.$$

Corolario (Caso $\mathcal{H}_m$, $m > 1$)

Sea $u_0 \in \mathcal{B}_{loc}(\mathbb{R}^N)$ *verificando* (PRM) *y* $\ell = \limsup_{|x|\to+\infty} \dfrac{u_0(x)}{|x|^{\frac{m}{m-1}}} \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

Entonces la fórmula de Lax–Oleinik

$$\mathcal{U}(x,t;(u_0)^*) = \sup_{y\in\mathbb{R}^N} \left\{ (u_0)^*(y) - (m-1)\left(\frac{|y-x|^m}{\mathrm{R}m^m t}\right)^{\frac{1}{m-1}} \right\}$$

para $(x,t) \in \mathbb{R}^N \times [0, \mathrm{T}_\infty[$, *donde*

$$\mathrm{T}_\infty = \frac{1}{\mathrm{R}m^m}\left(\frac{m-1}{\ell_+}\right)^{m-1},$$

es la única solución del correspondiente problema de Cauchy.

Corolario (Caso $\mathcal{H}_m$, $m > 1$)

Sea $u_0 \in \mathcal{B}_{loc}(\mathrm{R}^{\mathrm{N}})$ *verificando* (PRM) *y* $\ell = \limsup_{|x|\to+\infty} \frac{u_0(x)}{|x|^{\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{m}-1}}} \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

Entonces la fórmula de Lax–Oleinik

$$\mathcal{U}(x,t;(u_0)^*) = \sup_{y \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}}} \left\{ (u_0)^*(y) - (m-1)\left(\frac{|y-x|^m}{\mathrm{R}m^m t}\right)^{\frac{1}{m-1}} \right\}$$

para $(x,t) \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \times [0, \mathrm{T}_\infty[$, *donde*

$$\mathrm{T}_\infty = \frac{1}{\mathrm{R}m^m}\left(\frac{m-1}{\ell_+}\right)^{m-1},$$

es la única solución del correspondiente problema de Cauchy.

Corolario (Case $\mathcal{H}_e$)

Sea $u_0 \in \mathcal{B}_{loc}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}})$ *verificando* (PRM) *y*

$$\ell = \limsup_{|x|\to+\infty} \frac{u_0(x)}{\langle x, \mathcal{A}^{-1}x\rangle} \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}.$$

Entonces la fórmula de Lax–Oleinik

$$\mathcal{U}(x,t;(u_0)^*) = \sup_{y\in\mathbb{R}^{\mathrm{N}}} \left\{ (u_0)^*(y) - \frac{\langle y-x, \mathcal{A}^{-1}(y-x)\rangle}{4t} \right\}$$

para $(x,t) \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \times [0, \mathrm{T}_\infty[$, *donde* $\mathrm{T}_\infty = \dfrac{1}{4\ell_+}$, *es la única solución del correspondiente problema de Cauchy.*

Corolario (Case $\mathcal{H}_e$)

Sea $u_0 \in \mathcal{B}_{loc}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}})$ *verificando* (PRM) *y*

$$\ell = \limsup_{|x| \to +\infty} \frac{u_0(x)}{\langle x, \mathcal{A}^{-1} x \rangle} \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}.$$

Entonces la fórmula de Lax–Oleinik

$$\mathcal{U}(x, t; (u_0)^*) = \sup_{y \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}}} \left\{ (u_0)^*(y) - \frac{\langle y - x, \mathcal{A}^{-1}(y - x) \rangle}{4t} \right\}$$

para $(x, t) \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \times [0, \mathrm{T}_\infty[$, *donde* $\mathrm{T}_\infty = \dfrac{1}{4\ell_+}$, *es la única solución del correspondiente problema de Cauchy.*

- Bardi, M. and Capuzzo Dolzetta, I. (1998). *Optimal Control and Viscosity Solutions of Hamilton–Jacobi–Bellman Equations*, Birkhaüser, Boston.
- Díaz, G. and Rey, J.M. (2003). Discontinuous solutions to Hamilton–Jacobi equations, *To appear in Actas del Homenaje a Jos María Fraile*.
- Lions, P. L., Souganidis, P. E. and Vázquez, J. L. (1987). The relation between the porous medium and the eikonal equations in several space dimensions, *Revista Mat. Iberoamericana*, **3**, 275–310.
- Rey, J.M. (1996). *Algunos Tópicos sobre Soluciones de Viscosidad en Ecuaciones de Hamilton–Jacobi*, Tesis Doctoral, Universidad Complutense de Madrid.
- Siconolfi, A. (2003). Almost continuous solutions of geometric Hamilon–Jacobi, *Ann. I.H. Poincaré– AN*, **2**, 237–269.