

# Formulación variacional de la estimación del movimiento en fluidos incompresibles a partir de secuencias PIV

Luis Alvarez

Univ. Las Palmas de G.C.

Mayo 2009

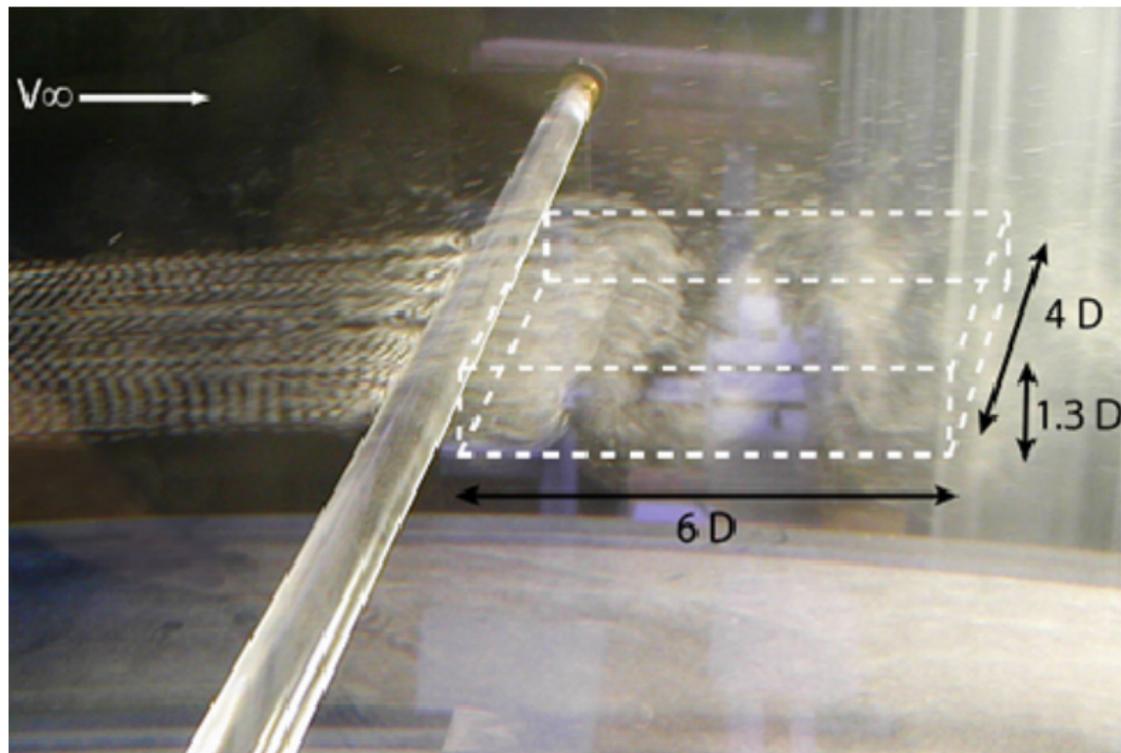
- 1 Introducción
- 2 Métodos basados en la correlación a ventanas de estimación del flujo
- 3 Métodos variacionales de estimación del flujo
- 4 Estimación del flujo en campos solenoidales
- 5 Experimentos
- 6 Conclusiones

# Formulación variacional de la estimación del movimiento en fluidos incompresibles

PIV ("Particle Image Velocimetry") es una técnica que permite capturar imágenes de un conjunto de partículas que se mueven dentro de un fluido. Una aplicación habitual de esta técnica es el análisis en laboratorio del comportamiento aerodinámico de un objeto. Para cada instante de tiempo se adquiere un volumen 3D de datos donde se encuentran las partículas. El objetivo de esta presentación es analizar el problema de estimar el movimiento que se produce en el volumen 3D de datos entre 2 instantes consecutivos. En particular se presentará un modelo basado en una formulación variacional del problema adaptada al caso de fluidos incompresibles (es decir  $\operatorname{div}(\mathbf{u}) = 0$ ), así como diversos experimentos realizados en secuencias PIV reales y sintéticas.

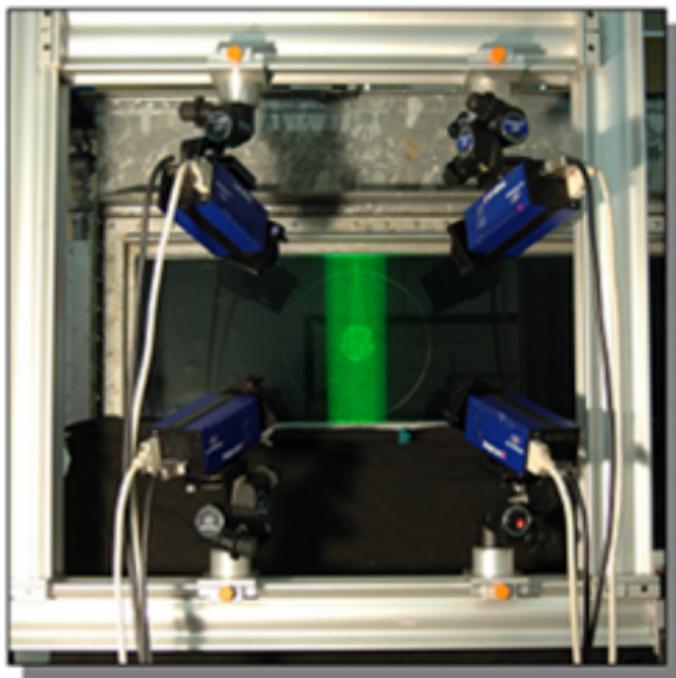
# PIV Particle Image Velocimetry. Diseño de Experimentos

Imagen cortesía de LaVision GmbH



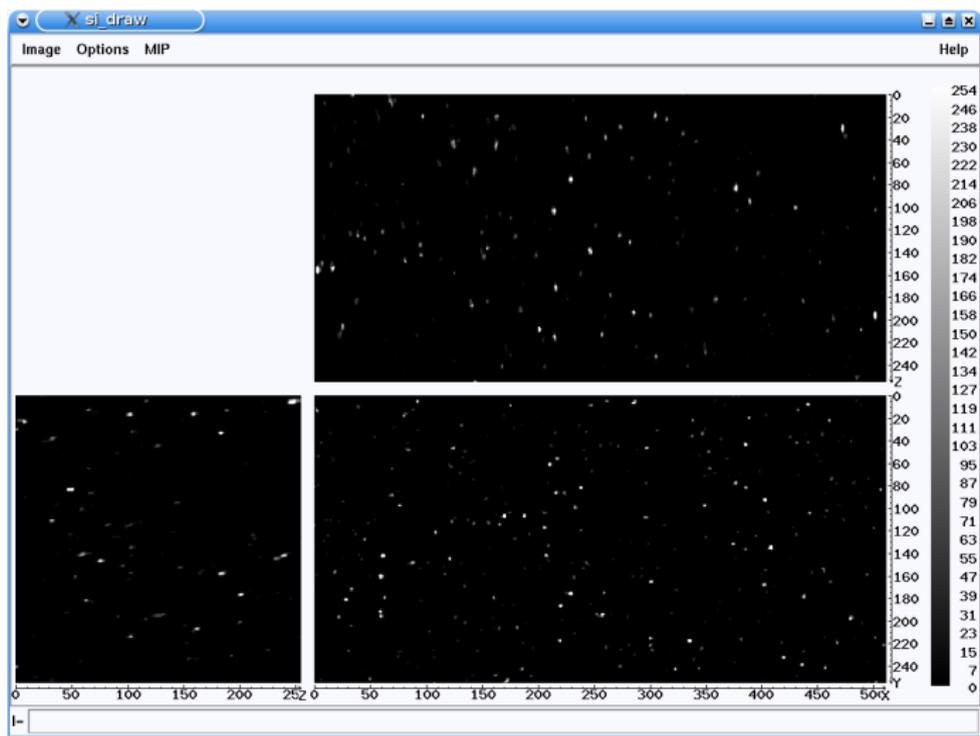
# PIV Particle Image Velocimetry. Sistema de adquisición.

Imagen cortesía de LaVision GmbH



# PIV Particle Image Velocimetry.

Volúmenes 3D adquiridos por LaVision GmbH



# Contenido

- 1 Introducción
- 2 Métodos basados en la correlación a ventanas de estimación del flujo
- 3 Métodos variacionales de estimación del flujo
- 4 Estimación del flujo en campos solenoidales
- 5 Experimentos
- 6 Conclusiones

# Estimación del movimiento entre 2 volúmenes 3D consecutivos

El método Standard : La correlación a ventanas

Se consideran 2 volúmenes 3D dados por  $I_1, I_2 : \Omega \subset R^3 \rightarrow R$ . Dado un punto  $\bar{x} \in \Omega$  se considera un cubo  $\Omega_{\bar{x}}^l \subset \Omega$  centrado en  $\bar{x}$  de lado  $l$ . Denotamos por  $\bar{u}(\bar{x})$  el desplazamiento del punto  $\bar{x}$  al pasar de  $I_1$  a  $I_2$ . El método de correlación a ventanas estima el valor de  $\bar{u}(\bar{x})$  maximizando el funcional de correlación :

(Funcional del método de correlación a ventanas)

$$E(\bar{u}(\bar{x})) = \frac{\int_{\Omega_{\bar{x}}^l} I_1(\bar{y}) I_2(\bar{y} + \bar{u}(\bar{x})) d\bar{y}}{\left( \int_{\Omega_{\bar{x}}^l} I_1(\bar{y})^2 d\bar{y} \right)^{1/2} \left( \int_{\Omega_{\bar{x}}^l} I_2(\bar{y} + \bar{u}(\bar{x}))^2 d\bar{y} \right)^{1/2}}$$

Este método es local (independiente para cada punto  $\bar{x}$ ) y supone  $\bar{u}(\bar{x})$  es constante en  $\Omega_{\bar{x}}^l$ .

# Estimación del movimiento entre 2 volúmenes 3D consecutivos

El método standard : la correlación a ventanas

El procedimiento standard para estimar el flujo de partículas entre 2 volúmenes 3D es elegir un tamaño de lado  $l$  para el cubo  $\Omega_{\bar{x}}^l$ , elegir un conjunto de puntos  $\bar{x}_i$  en  $\Omega$  de tal forma que  $\Omega = \cup_i \Omega_{\bar{x}_i}^l$ . A continuación se elige para cada  $\bar{x}_i$  una estimación inicial del flujo  $\bar{u}_0(\bar{x}_i)$  (habitualmente 0) y a continuación se refina por iteraciones :  $\bar{u}_{n+1}(\bar{x}_i) = \bar{u}_n(\bar{x}_i) + \delta_n^i$  donde  $\delta_n^i$  es el máximo de

$$E(\delta) = \frac{\int_{\Omega_{\bar{x}_i}^l} l_1(\bar{y}) l_2(\bar{y} + \bar{u}_n(\bar{x}_i) + \delta) d\bar{y}}{\left( \int_{\Omega_{\bar{x}_i}^l} l_1(\bar{y})^2 d\bar{y} \right)^{1/2} \left( \int_{\Omega_{\bar{x}_i}^l} l_2(\bar{y} + \bar{u}_n(\bar{x}_i))^2 d\bar{y} \right)^{1/2}}$$

suponiendo que  $l_2(\bar{y} + \bar{u}_n(\bar{x}_i) + \delta)$  es periódica.

# Estimación del movimiento entre 2 volúmenes 3D consecutivos

El método standard : la correlación a ventanas

El procedimiento standard para estimar el flujo de partículas entre 2 volúmenes 3D es elegir un tamaño de lado  $l$  para el cubo  $\Omega_{\bar{x}}^l$ , elegir un conjunto de puntos  $\bar{x}_i$  en  $\Omega$  de tal forma que  $\Omega = \cup_i \Omega_{\bar{x}_i}^l$ . A continuación se elige para cada  $\bar{x}_i$  una estimación inicial del flujo  $\bar{u}_0(\bar{x}_i)$  (habitualmente 0) y a continuación se refina por iteraciones :  $\bar{u}_{n+1}(\bar{x}_i) = \bar{u}_n(\bar{x}_i) + \delta_n^i$  donde  $\delta_n^i$  es el máximo de

$$E(\delta) = \frac{\int_{\Omega_{\bar{x}_i}^l} l_1(\bar{y}) l_2(\bar{y} + \bar{u}_n(\bar{x}_i) + \delta) d\bar{y}}{\left( \int_{\Omega_{\bar{x}_i}^l} l_1(\bar{y})^2 d\bar{y} \right)^{1/2} \left( \int_{\Omega_{\bar{x}_i}^l} l_2(\bar{y} + \bar{u}_n(\bar{x}_i))^2 d\bar{y} \right)^{1/2}}$$

suponiendo que  $l_2(\bar{y} + \bar{u}_n(\bar{x}_i) + \delta)$  es periódica. Una vez obtenidos  $\bar{u}(\bar{x}_i)$  se calcula  $\bar{u}(\bar{x})$  en cualquier otro punto por interpolación

- 1 Introducción
- 2 Métodos basados en la correlación a ventanas de estimación del flujo
- 3 Métodos variacionales de estimación del flujo**
- 4 Estimación del flujo en campos solenoidales
- 5 Experimentos
- 6 Conclusiones

# Estimación del movimiento entre 2 volúmenes 3D consecutivos

Método variacional básico

(Modelo variacional básico)

$$E(\bar{u}) = \int_{\Omega} (I_1(\bar{x}) - I_2(\bar{x} + \bar{u}(\bar{x})))^2 d\bar{x} + \alpha \int_{\Omega} \|\nabla u(\bar{x})\|^2 d\bar{x}$$

(Ecuaciones de Euler-Lagrange)

$$\nabla E(\bar{u})(\bar{x}) = -(I_1(\bar{x}) - I_2(\bar{x} + \bar{u}(\bar{x})) \cdot \nabla I_2(\bar{x} + \bar{u}(\bar{x})) - \alpha \Delta \bar{u}(\bar{x}) = 0$$

donde  $\Delta \bar{u} = (\Delta \bar{u}^x, \Delta \bar{u}^y, \Delta \bar{u}^z)^T$

## (Ecuación parabólica asociada)

$$\begin{cases} \frac{d\hat{u}}{dt} + A\hat{u} = F(\hat{u}) & \text{en } H \quad \forall t \in [0, T] \\ \hat{u}(0) = \bar{u}_0 & \text{en } H. \end{cases}$$

donde

- $H = L^2(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$

## (Ecuación parabólica asociada)

$$\begin{cases} \frac{d\hat{u}}{dt} + A\hat{u} = F(\hat{u}) & \text{en } H \quad \forall t \in [0, T] \\ \hat{u}(0) = \bar{u}_0 & \text{en } H. \end{cases}$$

donde

- $H = L^2(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$
- $\hat{u}(t, \bar{x}) = (u(t, \bar{x}), v(t, \bar{x}), w(t, \bar{x}))^T$  es la solución de la ecuación parabólica

## (Ecuación parabólica asociada)

$$\begin{cases} \frac{d\hat{u}}{dt} + A\hat{u} = F(\hat{u}) & \text{en } H \quad \forall t \in [0, T] \\ \hat{u}(0) = \bar{u}_0 & \text{en } H. \end{cases}$$

donde

- $H = L^2(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$
- $\hat{u}(t, \bar{x}) = (u(t, \bar{x}), v(t, \bar{x}), w(t, \bar{x}))^T$  es la solución de la ecuación parabólica
- $A\hat{u} = -(\Delta u, \Delta v, \Delta w)^T$

## (Ecuación parabólica asociada)

$$\begin{cases} \frac{d\hat{u}}{dt} + A\hat{u} = F(\hat{u}) & \text{en } H \quad \forall t \in [0, T] \\ \hat{u}(0) = \bar{u}_0 & \text{en } H. \end{cases}$$

donde

- $H = L^2(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$
- $\hat{u}(t, \bar{x}) = (u(t, \bar{x}), v(t, \bar{x}), w(t, \bar{x}))^T$  es la solución de la ecuación parabólica
- $A\hat{u} = -(\Delta u, \Delta v, \Delta w)^T$
- $F(\hat{u}) = (I_1(\bar{x}) - I_2(\bar{x} + \bar{u}(\bar{x})) \cdot \nabla I_2(\bar{x} + \bar{u}(\bar{x})))$

# Existencia de soluciones de la ecuación parabólica asociada

(Teorema: existencia de soluciones de la ecuación parabólica)

Si  $S(t)\bar{u}_0$  es la solución del problema homogéneo

$$\begin{cases} \frac{d\hat{u}}{dt} + A\hat{u} = 0 & \text{en } H \quad \forall t \in [0, T] \\ \hat{u}(0) = \bar{u}_0 & \text{en } H. \end{cases}$$

y  $F(\hat{u})$  es Lipschitz entonces la solución de la ecuación completa satisface

$$\hat{u}(t) = S(t)\bar{u}_0 + \int_0^t S(t-s)F(\hat{u}(s))ds,$$

que es una ecuación de punto fijo que tiene una solución única.

(Lema: Condición Lipschitz de  $F(\hat{u})$ )

Si  $l_1(\bar{x}) \in L^2(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$  y  $l_2(\bar{x}) \in L^2(\Omega) \cap W^{2,\infty}(\Omega)$ , entonces la función

$$F(\hat{u})(\bar{x}) = (l_1(\bar{x}) - l_2(\bar{x} + \bar{u}(\bar{x})) \cdot \nabla l_2(\bar{x} + \bar{u}(\bar{x})))$$

es Lipschitz respecto a  $\hat{u}$ , es decir existe  $C > 0$  tal que

$$\|F(\hat{u}) - F(\hat{v})\|_H \leq C \|\hat{u} - \hat{v}\|_H$$

- 1 Introducción
- 2 Métodos basados en la correlación a ventanas de estimación del flujo
- 3 Métodos variacionales de estimación del flujo
- 4 Estimación del flujo en campos solenoidales**
- 5 Experimentos
- 6 Conclusiones

(Flujos solenoidales (incompresibles))

$$H_s \equiv \{ \bar{u}_s \in C^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}) : \operatorname{div}(\bar{u}_s) = 0 \text{ in } \Omega \quad \text{and} \quad \bar{u}_s \cdot \bar{n} = 0 \text{ in } \partial\Omega \}$$

(Flujos conservativos)

$$H_r \equiv \{ \bar{u}_r \in C^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}) : \exists p \in H^1(\Omega) \text{ such that } \bar{u}_r = \nabla p \text{ in } \Omega \}$$

## (Descomposición de Helmholtz de un campo de vectores)

Sea  $\bar{u} \in C^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$  un campo de vectores 3D, entonces existen  $\bar{u}_s \in H_s$ ,  $\bar{u}_r \in H_r$  tal que

$$\bar{u} = \bar{u}_s + \bar{u}_r$$

además  $\bar{u}_s$  y  $\bar{u}_r$  son ortogonales en  $L^2(\Omega)$ , i.e.

$$\int_{\Omega} \bar{u}_s(\bar{x})^T \bar{u}_r(\bar{x}) d\bar{x} = 0$$

y  $\bar{u}_r = \nabla p$  donde  $p$  es una solución del problema de Poisson :

$$\Delta p = \operatorname{div}(\bar{u}) \quad \text{en } \Omega$$

$$\frac{\partial p}{\partial n} = \bar{u} \cdot \bar{n} \quad \text{en } \partial\Omega.$$

# Minimización de funcionales en $H_s$ .

nos planteamos el problema de minimizar el funcional

$$E(\bar{u}) = \int_{\Omega} (I_1(\bar{x}) - I_2(\bar{x} + \bar{u}(\bar{x})))^2 d\bar{x} + \alpha \int_{\Omega} \|\nabla u(\bar{x})\|^2 d\bar{x}$$

con la restricción de que  $\bar{u} \in H_s$

# Minimización de funcionales en $H_s$ .

nos planteamos el problema de minimizar el funcional

$$E(\bar{u}) = \int_{\Omega} (I_1(\bar{x}) - I_2(\bar{x} + \bar{u}(\bar{x})))^2 d\bar{x} + \alpha \int_{\Omega} \|\nabla u(\bar{x})\|^2 d\bar{x}$$

con la restricción de que  $\bar{u} \in H_s$

(Teorema: Multiplicadores de Lagrange Generalizados)

Sea  $\bar{u}(\bar{x})$  un mínimo local de  $E(\bar{u})$  con la restricción  $\bar{u} \in H_s$  entonces

$$\nabla E(\bar{u}) \in H_r$$

## (Multiplicadores de Lagrange (versión standard))

*Si  $\bar{x}$  es un mínimo local de  $E(\bar{x})$  con la restricción  $F(\bar{x}) = 0$ , entonces existe  $\lambda \in R$  tal que*

$$\nabla E(\bar{x}) + \lambda \nabla F(\bar{x}) = 0$$

## (Multiplicadores de Lagrange (versión standard))

*Si  $\bar{x}$  es un mínimo local de  $E(\bar{x})$  con la restricción  $F(\bar{x}) = 0$ , entonces existe  $\lambda \in R$  tal que*

$$\nabla E(\bar{x}) + \lambda \nabla F(\bar{x}) = 0$$

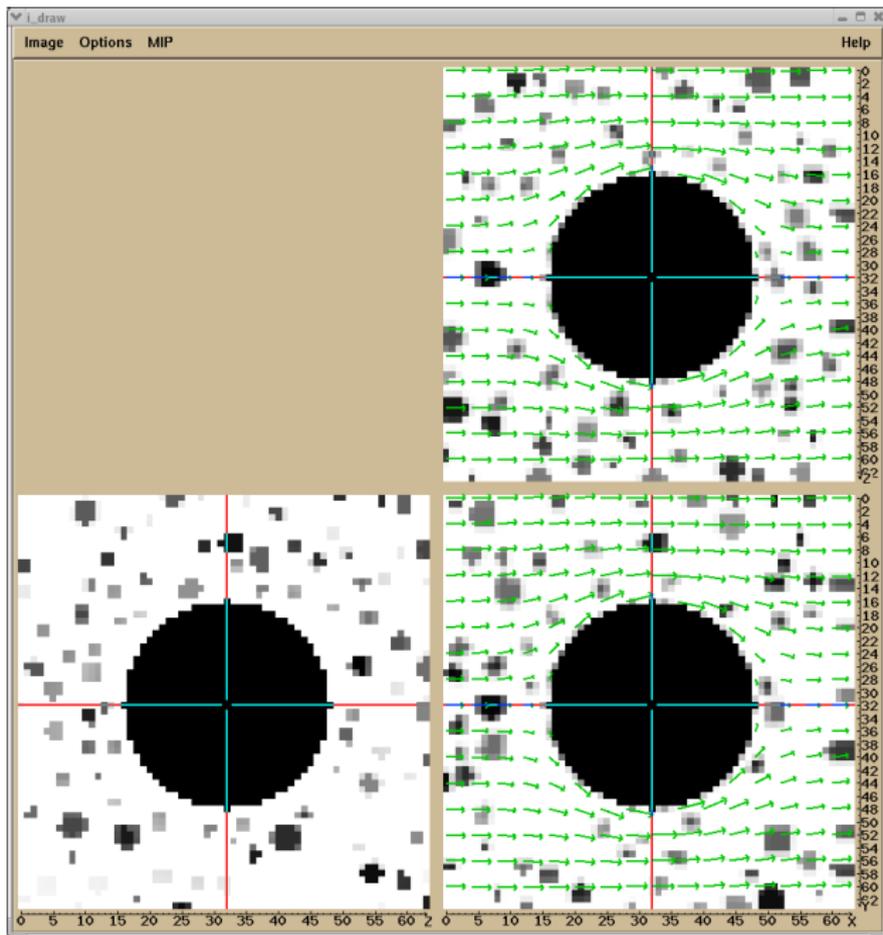
Ahora bien, el espacio ortogonal a la superficie de nivel  $F(\bar{x}) = 0$  en punto está orientado en la dirección  $\nabla F(\bar{x})$  por ello la igualdad anterior clásica sobre los multiplicadores de lagrange puede interpretarse como

$\nabla E(\bar{x}) \in \{\text{espacio direcciones ortogonales a la superficie de nivel } F(\bar{x}) = 0\}$

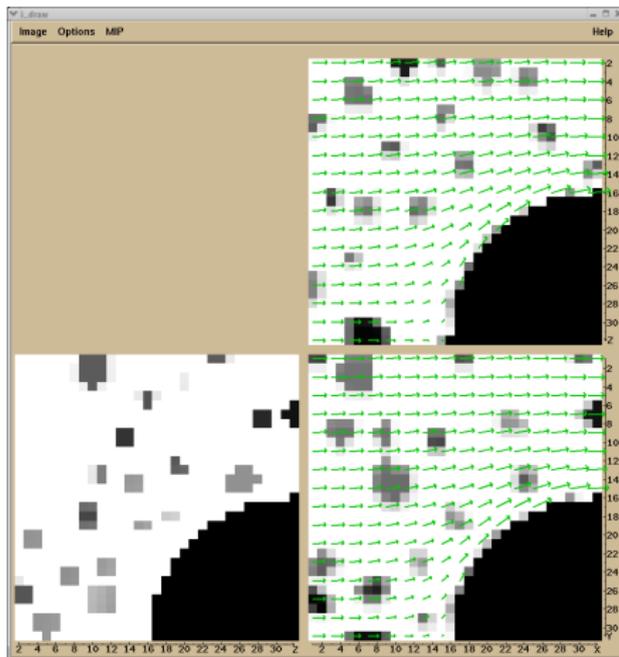
- 1 Introducción
- 2 Métodos basados en la correlación a ventanas de estimación del flujo
- 3 Métodos variacionales de estimación del flujo
- 4 Estimación del flujo en campos solenoidales
- 5 Experimentos**
- 6 Conclusiones

Solución ecuación de Stokes para un flujo constante en el infinito que se encuentra una esfera de radio  $\alpha$  como obstáculo

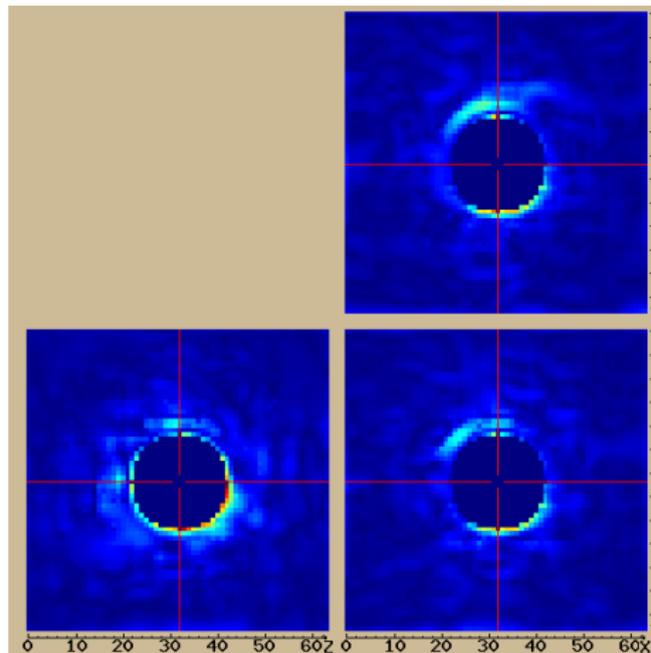
$$\bar{u}(\bar{x}) = U \begin{pmatrix} 1 - \frac{3\alpha}{4r^3}(2x^2 + y^2 + z^2) + \frac{\alpha^3}{4r^5}(2x^2 - y^2 - z^2) \\ -\frac{3\alpha}{4r^3}xy + \frac{3\alpha^3}{4r^5}xy \\ -\frac{3\alpha}{4r^3}xz + \frac{3\alpha^3}{4r^5}xz \end{pmatrix}$$



# Imagen de detalle y errores en la estimación



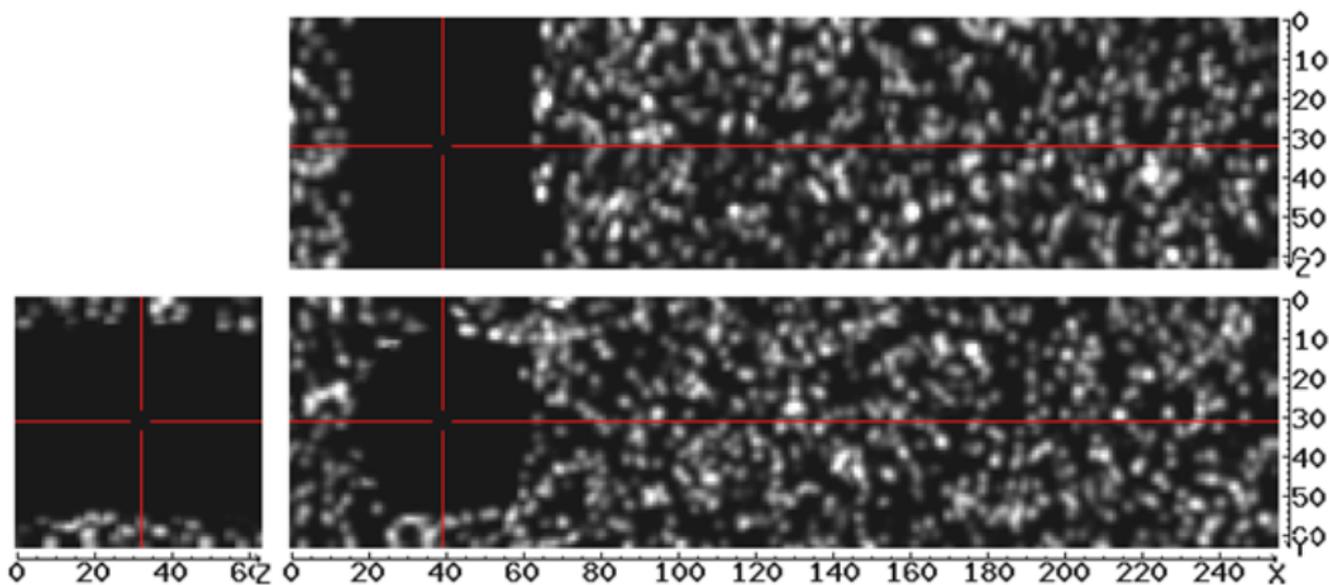
detalles del flujo



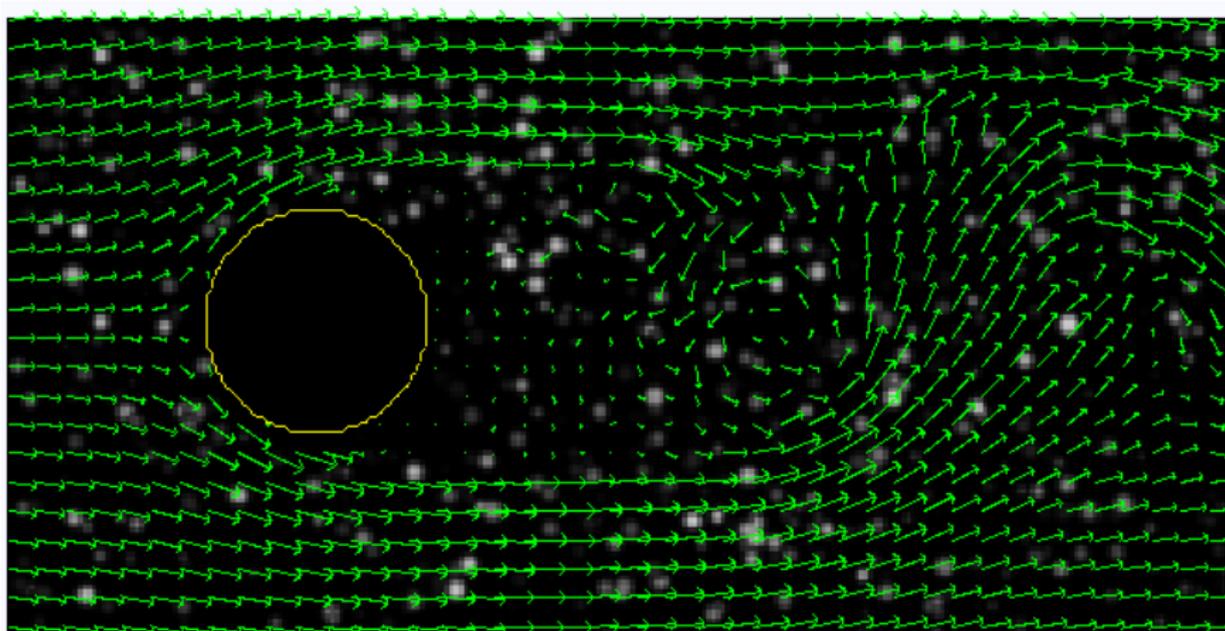
Representación gráfica errores

# Experimentos realizados a partir de soluciones numéricas de las ecuaciones de Navier-Stokes.

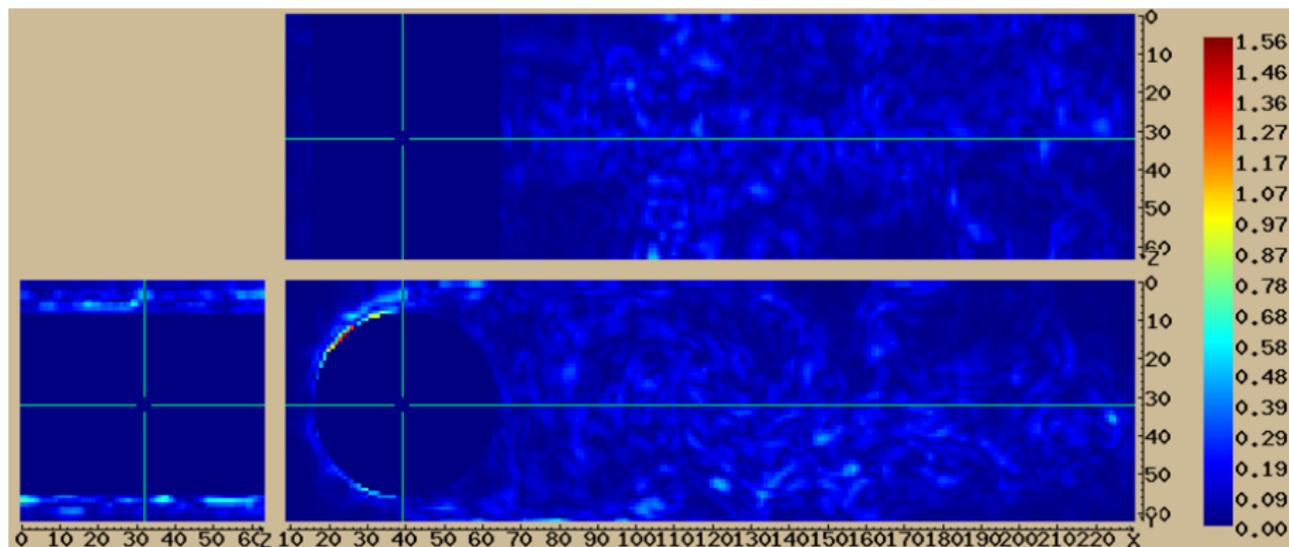
Volumenes 3D suministrados por el laboratorio Cemagref.



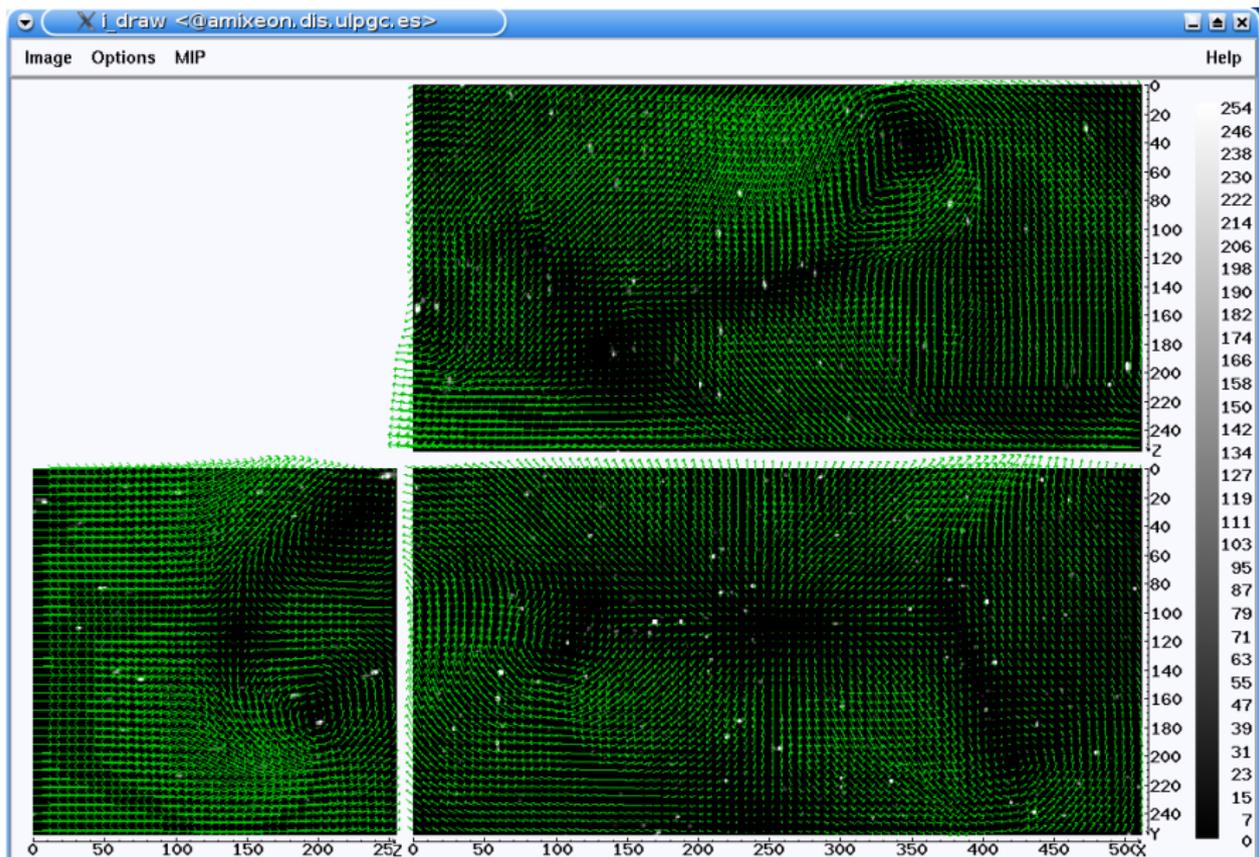
# Resultados del cálculo del flujo



# Representación gráfica del error



# Flujo calculado para el experimento real.



- 1 Introducción
- 2 Métodos basados en la correlación a ventanas de estimación del flujo
- 3 Métodos variacionales de estimación del flujo
- 4 Estimación del flujo en campos solenoidales
- 5 Experimentos
- 6 Conclusiones**

- 1 Las secuencias PIV 3D son una fuente muy interesante de información para el estudio de fenómenos aerodinámicos y de validación experimental de modelos.

- 1 Las secuencias PIV 3D son una fuente muy interesante de información para el estudio de fenómenos aerodinámicos y de validación experimental de modelos.
- 2 La principal novedad de esta presentación es el estudio de la incorporación de la incompresibilidad ( $\operatorname{div}(\bar{u}) = 0$ ) a la estimación del flujo entre 2 volúmenes 3D mediante técnicas variacionales

- 1 Las secuencias PIV 3D son una fuente muy interesante de información para el estudio de fenómenos aerodinámicos y de validación experimental de modelos.
- 2 La principal novedad de esta presentación es el estudio de la incorporación de la incompresibilidad ( $\text{div}(\bar{u}) = 0$ ) a la estimación del flujo entre 2 volúmenes 3D mediante técnicas variacionales
- 3 La incorporación a los modelos de estimación del flujo entre 2 volúmenes 3D de leyes de comportamiento más complejas como las ecuaciones de Navier-Stokes es una cuestión de gran interés y complejidad y que probablemente tenga un desarrollo significativo en el futuro por sus numerosas aplicaciones.