Modélos Matemáticos en Visión por Ordenador

Aplicación de las transformadas integrales a la Visión por Ordenador

Luis Alvarez

Univ. Las Palmas de G.C.

Mayo 2009

Contenido

1. Transformada de Fourier
2. Muestreo de señales
3. Ondículas (wavelets - ondelettes)
4. Bibliografía y problemas seleccionados

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. La transformada de Fourier de f se define como:

$$\hat{f}(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(s) e^{-2\pi i w s} ds$$

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. La transformada de Fourier de f se define como:

$$\hat{f}(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(s) e^{-2\pi i w s} ds \qquad \underbrace{f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(w) e^{2\pi i w x} dw}_{\text{Transformada inversa}}$$

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. La transformada de Fourier de f se define como:

$$\hat{f}(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(s) e^{-2\pi i w s} ds \qquad \underbrace{f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(w) e^{2\pi i w x} dw}_{\text{Transformada inversa}}$$

Igualdades notables

- $g(x) = f(\lambda x) \quad \to \quad \hat{g}(w) = \frac{1}{|\lambda|} \hat{f}\left(\frac{w}{\lambda}\right)$

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. La transformada de Fourier de f se define como:

$$\hat{f}(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(s) e^{-2\pi i w s} ds \qquad \underbrace{f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(w) e^{2\pi i w x} dw}_{\text{Transformada inversa}}$$

Igualdades notables

- $g(x) = f(\lambda x) \quad \rightarrow \quad \hat{g}(w) = \frac{1}{|\lambda|} \hat{f}\left(\frac{w}{\lambda}\right)$
- $g(x) = f(x - \lambda) \quad \rightarrow \quad \hat{g}(w) = e^{-2\pi i \lambda w} \hat{f}(w)$

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. La transformada de Fourier de f se define como:

$$\hat{f}(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(s) e^{-2\pi i w s} ds \qquad \underbrace{f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(w) e^{2\pi i w x} dw}_{\text{Transformada inversa}}$$

Igualdades notables

- $g(x) = f(\lambda x) \quad \rightarrow \quad \hat{g}(w) = \frac{1}{|\lambda|} \hat{f}\left(\frac{w}{\lambda}\right)$
- $g(x) = f(x - \lambda) \quad \rightarrow \quad \hat{g}(w) = e^{-2\pi i \lambda w} \hat{f}(w)$
- $g(x) = f^{k)}(x) \quad \rightarrow \quad \hat{g}(w) = (2\pi i w)^k \hat{f}(w)$

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. La transformada de Fourier de f se define como:

$$\hat{f}(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(s) e^{-2\pi i w s} ds \qquad \underbrace{f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(w) e^{2\pi i w x} dw}_{\text{Transformada inversa}}$$

Igualdades notables

- $g(x) = f(\lambda x) \quad \rightarrow \quad \hat{g}(w) = \frac{1}{|\lambda|} \hat{f}\left(\frac{w}{\lambda}\right)$
- $g(x) = f(x - \lambda) \quad \rightarrow \quad \hat{g}(w) = e^{-2\pi i \lambda w} \hat{f}(w)$
- $g(x) = f^{k)}(x) \quad \rightarrow \quad \hat{g}(w) = (2\pi i w)^k \hat{f}(w)$
- Principio de incertidumbre

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 |f(x)|^2 dx \int_{-\infty}^{+\infty} w^2 |\hat{f}(w)|^2 dw \geq \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx$$

Josep Fourier

Joseph Fourier, matemático francés (1768-1830), nacido en Auxerre, hijo de un sastre, huérfano a los 9 años. Estudio bajo el mecenazgo del Obispo de Auxerre. Alumno/Profesor de la Ecole Politechnique, vivió en la época de la revolución francesa, donde participó actívamente, participó en la campaña de Napoleón a Egipto en 1798

Origen de la teoría de Fourier

Joseph Fourier, Mémoire sur la propagation de la chaleur dans les corps solides (1807).

$$\varphi(y) = a\cos\tfrac{\pi y}{2} + a'\cos 3\tfrac{\pi y}{2} + a''\cos 5\tfrac{\pi y}{2} + \cdots .$$

Multiplying both sides by $\cos(2i+1)\frac{\pi y}{2}$, and integrating in $[-1,1]$:

$$a_i = \int_{-1}^{1} \varphi(y)\cos\left((2i+1)\frac{\pi y}{2}\right)\, dy.$$

Origen de la teoría de Fourier

Joseph Fourier, Mémoire sur la propagation de la chaleur dans les corps solides (1807).

$$\varphi(y) = a\cos\frac{\pi y}{2} + a'\cos 3\frac{\pi y}{2} + a''\cos 5\frac{\pi y}{2} + \cdots.$$

Multiplying both sides by $\cos(2i+1)\frac{\pi y}{2}$, and integrating in $[-1,1]$:

$$a_i = \int_{-1}^{1} \varphi(y)\cos\left((2i+1)\frac{\pi y}{2}\right) dy.$$

Comentario editores publicación (Lagrange,Laplace,Legendre) : the manner in which the author arrives at these equations is not exempt of difficulties and [...] his analysis to integrate them still leaves something to be desired on the score of generality and even rigour.

$$\varphi(y) = a\cos\tfrac{\pi y}{2} + a'\cos 3\tfrac{\pi y}{2} + a''\cos 5\tfrac{\pi y}{2} + \cdots.$$

Multiplying both sides by $\cos(2i+1)\frac{\pi y}{2}$, and integrating in $[-1,1]$:

$$a_i = \int_{-1}^{1} \varphi(y)\cos\left((2i+1)\frac{\pi y}{2}\right) dy.$$

Comentario editores publicación (Lagrange,Laplace,Legendre) : the manner in which the author arrives at these equations is not exempt of difficulties and [...] his analysis to integrate them still leaves something to be desired on the score of generality and even rigour.

Relación con la ecuación del calor. Si buscamos soluciones de variable separada $u(t,x) = T(t)X(x)$ de la ecuación del calor en $[-1,1]$:

$$\begin{array}{c} \frac{\partial u}{\partial t}(t,y) = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(t,y) \\ u(t,-1) = u(t,1) = 0 \end{array}$$

Origen de la teoría de Fourier

Joseph Fourier, Mémoire sur la propagation de la chaleur dans les corps solides (1807).

$$\varphi(y) = a\cos\frac{\pi y}{2} + a'\cos 3\frac{\pi y}{2} + a''\cos 5\frac{\pi y}{2} + \cdots .$$

Multiplying both sides by $\cos(2i+1)\frac{\pi y}{2}$, and integrating in $[-1,1]$:

$$a_i = \int_{-1}^{1} \varphi(y)\cos\left((2i+1)\frac{\pi y}{2}\right) dy.$$

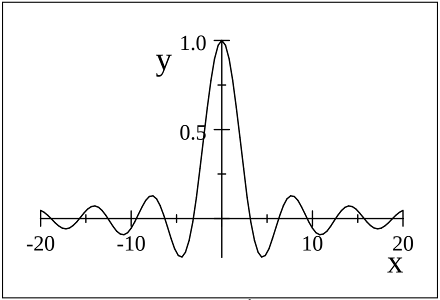
Comentario editores publicación (Lagrange,Laplace,Legendre) : the manner in which the author arrives at these equations is not exempt of difficulties and [...] his analysis to integrate them still leaves something to be desired on the score of generality and even rigour.

Relación con la ecuación del calor. Si buscamos soluciones de variable separada $u(t,x) = T(t)X(x)$ de la ecuación del calor en $[-1,1]$:

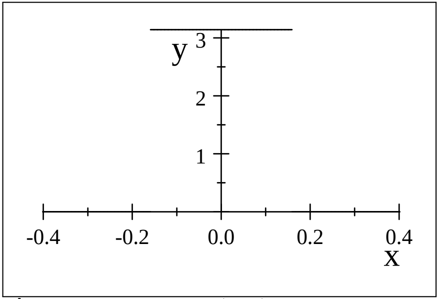
$$\begin{array}{c} \frac{\partial u}{\partial t}(t,y) = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(t,y) \\ u(t,-1) = u(t,1) = 0 \end{array} \quad \to \quad u_i(t,x) = e^{-t\left(\frac{(2i+1)\pi}{2}\right)^2}\cos\left(\frac{(2i+1)\pi y}{2}\right)$$

Transformada de Fourier del seno cardinal

$$f(x) = \frac{\sin(\lambda x)}{\lambda x} \quad \longrightarrow \quad \hat{f}(w) = \begin{cases} \frac{\pi}{\lambda} & \text{si} \quad w \in \left[\frac{-\lambda}{2\pi}, \frac{\lambda}{2\pi}\right] \\ 0 & \text{si} \quad w \notin \left[\frac{-\lambda}{2\pi}, \frac{\lambda}{2\pi}\right] \end{cases}$$



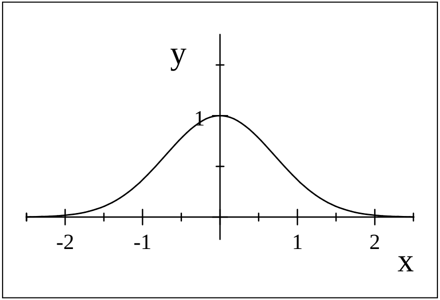
$f(x) = \frac{\sin x}{x}$



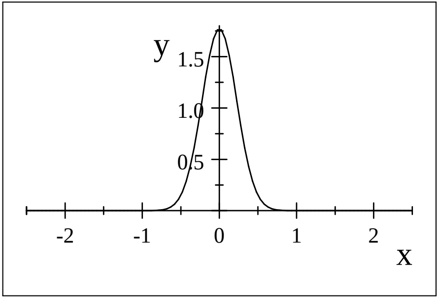
$\hat{f}(w) = \pi$ en $\left[\frac{-1}{2\pi}, \frac{1}{2\pi}\right]$ y 0 fuera

Transformada de Fourier de una función gaussiana

$$f(x) = e^{-\lambda x^2} \quad \longrightarrow \quad \hat{f}(w) = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} e^{-\frac{\pi^2}{\lambda} w^2}$$

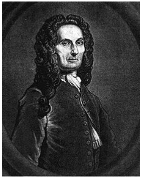


$f(x) = e^{-x^2}$



$\hat{f}(w) = \sqrt{\pi} e^{-\pi^2 w^2}$

La función Gaussiana versus la distribución normal



Abraham de Moivre (1667-1754), matemático francés, vivió la mayor parte de su vida en Inglaterra, su status social no es muy claro, no tuvo un gran reconocimiento en vida, vivió siempre de forma humilde (ganaba dinero jugando al ajedrez) y predijo el día de su muerte. Trabajó en la distribución normal

Johann Carl Friedrich Gauss (1777–1855), "el príncipe de las matemáticas", científico alemán, hijo de una familia humilde, fue un niño prodigio, pudo estudiar gracias al mecenazgo del duque de Braunschweig Era muy perfeccionista, tuvo pocos alumnos (Riemann, Bessel) y no le gustaba enseñar.

Transformada de Fourier de la delta de Dirac

$$f(x) = \delta_a(x) \equiv \delta(x-a)$$

$$\hat{\delta}_a(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_a(s) e^{-2\pi i w s} ds = e^{-2\pi i w a}$$

Transformada de Fourier de la delta de Dirac

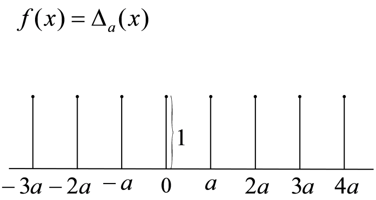
$$f(x) = \delta_a(x) \equiv \delta(x-a)$$

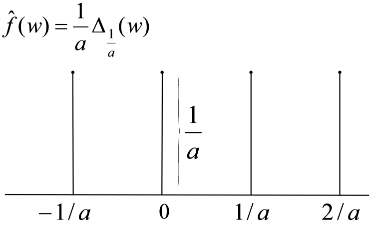
$$\hat{\delta}_a(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_a(s) e^{-2\pi i w s} ds = e^{-2\pi i w a}$$

Tomar una muestra de una función $f(x)$ en un punto a puede interpretarse formalmente como

$$f_a(x) = f(x) \cdot \delta_a(x)$$

$$f(x) = \Delta_a(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \delta(x - na) \quad \rightarrow \quad \hat{f}(w) = \frac{1}{a}\Delta_{\frac{1}{a}}(w)$$





Las distribuciones. Generalización del concepto de función.

Definition

Sea $\mathcal{D}$ el conjunto de funciones C^∞ con soporte compacto, una distribución es una aplicación lineal $T : \varphi \in \mathcal{D} \rightarrow < T, \varphi > \in \mathbb{C}$

Algunas propiedades de las distribuciones :

1. $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}) \quad \rightarrow \quad < T_f, \varphi >= \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)dx$

Definition

Sea $\mathcal{D}$ el conjunto de funciones C^∞ con soporte compacto, una distribución es una aplicación lineal $T : \varphi \in \mathcal{D} \rightarrow < T, \varphi > \in \mathbb{C}$

Algunas propiedades de las distribuciones :

1. $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}) \quad \rightarrow \quad < T_f, \varphi > = \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)dx$
2. $T = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \lambda_n \delta(x - na) \quad \rightarrow \quad < T, \varphi > = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \lambda_n \varphi(na)$

Definition

Sea $\mathcal{D}$ el conjunto de funciones C^∞ con soporte compacto, una distribución es una aplicación lineal $T : \varphi \in \mathcal{D} \rightarrow < T, \varphi > \in \mathbb{C}$

Algunas propiedades de las distribuciones :

1. $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}) \quad \rightarrow \quad < T_f, \varphi >= \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)dx$
2. $T = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \lambda_n \delta(x - na) \quad \rightarrow \quad < T, \varphi >= \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \lambda_n \varphi(na)$
3. $< T', \varphi > \equiv - < T, \varphi' >$

Las distribuciones. Generalización del concepto de función.

Definition

Sea $\mathcal{D}$ el conjunto de funciones C^{∞} con soporte compacto, una distribución es una aplicación lineal $T : \varphi \in \mathcal{D} \rightarrow < T, \varphi > \in \mathbb{C}$

Algunas propiedades de las distribuciones :

1. $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}) \quad \rightarrow \quad < T_f, \varphi >= \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)dx$
2. $T = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \lambda_n \delta(x - na) \quad \rightarrow \quad < T, \varphi >= \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \lambda_n \varphi(na)$
3. $< T', \varphi > \equiv - < T, \varphi' >$
4. Si $f \in C^1(\mathbb{R})$ salvo en un número aislado de discontinuidades x_n en forma de saltos de tamaño λ_n entonces

$$T'_f = T_{f'} + \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \lambda_n \delta(x - x_n)$$

Transformada de Fourier de una distribución

Definition

La transformada de Fourier de una distribución T se define como

$$<\hat{T}, \varphi> = <T, \hat{\varphi}>$$

Definition

La transformada de Fourier de una distribución T se define como

$$<\hat{T},\varphi>=<T,\hat{\varphi}>$$

justificación :

$$\begin{aligned} < \quad T_f,\hat{\varphi}> &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(z)\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(s)e^{-2\pi izs}dsdz = \\ = \quad & \int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(s)\int_{-\infty}^{+\infty} f(z)e^{-2\pi izs}dzds =< T_{\hat{f}},\varphi > \end{aligned}$$

Las distribuciones temperadas. El espacio de Schwart

$\mathcal{S}$

Definition

Sea $\mathcal{S}$ el conjunto de funciones C^∞ con decrecimiento rápido en el infinito, es decir

$$\mathcal{S} = \{\varphi \in C^\infty : \quad \forall \alpha, \beta \quad Lim\, |x|^\alpha \left| D^\beta \varphi(x) \right| = 0\}$$

una distribución temperada es una aplicación lineal
$T : \varphi \in \mathcal{S} \rightarrow < T, \varphi > \in \mathbb{C}$

Propiedad fundamental de $\mathcal{S}$: Si $\varphi \in \mathcal{S}$ entonces $\hat{\varphi} \in S$

Noción de convergencia en el espacio de distribuciones

$$T_n \rightarrow T \quad sii \quad \forall \varphi \in \mathcal{S} \quad < T_n, \varphi > \rightarrow < T, \varphi >$$

1. La función $f(x) = \frac{x}{a}$ de periodo a se puede desarrollar en serie de Fourier como

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{i}{2\pi} \sum_{n \neq 0} e^{2i\pi n \frac{x}{a}}$$

1. La función $f(x) = \frac{x}{a}$ de periodo a se puede desarrollar en serie de Fourier como

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{i}{2\pi} \sum_{n \neq 0} e^{2i\pi n \frac{x}{a}}$$

1. La función $f(x) = \frac{x}{a}$ de periodo a se puede desarrollar en serie de Fourier como

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{i}{2\pi} \sum_{n \neq 0} e^{2i\pi n \frac{x}{a}} \quad \longrightarrow \quad f'(x) = -\frac{1}{a} \sum_{n \neq 0} e^{2i\pi n \frac{x}{a}}$$

2. $$T'_f = \frac{1}{a} - \Delta_a(x)$$

La teoría de distribuciones

Justificación de la transformada de Fourier de un tren de deltas

1. La función $f(x) = \frac{x}{a}$ de periodo a se puede desarrollar en serie de Fourier como

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{i}{2\pi} \sum_{n \neq 0} e^{2i\pi n \frac{x}{a}} \quad \rightarrow \quad f'(x) = -\frac{1}{a} \sum_{n \neq 0} e^{2i\pi n \frac{x}{a}}$$

2. $$T'_f = \frac{1}{a} - \Delta_a(x)$$

3. $$f' = T'_f \quad \rightarrow \quad \Delta_a(x) = \frac{1}{a} \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} e^{2i\pi n \frac{x}{a}}$$

1. La función $f(x) = \frac{x}{a}$ de periodo a se puede desarrollar en serie de Fourier como

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{i}{2\pi} \sum_{n \neq 0} e^{2i\pi n \frac{x}{a}} \quad \rightarrow \quad f'(x) = -\frac{1}{a} \sum_{n \neq 0} e^{2i\pi n \frac{x}{a}}$$

2. $$T_f' = \frac{1}{a} - \Delta_a(x)$$

3. $$f' = T_f' \quad \rightarrow \quad \Delta_a(x) = \frac{1}{a} \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} e^{2i\pi n \frac{x}{a}}$$

4. $$\hat{\Delta}_a(w) = \frac{1}{a} \Delta_{\frac{1}{a}}$$

Laurent Schwartz (1915-2002), matemático francés, recibió la medalla Fields en 1950, profesor de l'Ecole Politechnique, desarrolló la teoría de las distribuciones sobre los años 40 (de forma independiente Sergei Sobolev desarrolló el mismo tipo de ideas), fue un activista político

Dadas dos funciones f y g se define su producto de convolución a través de la siguiente expresión

$$k * f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} k(x-s) f(s) ds$$

Dadas dos funciones f y g se define su producto de convolución a través de la siguiente expresión

$$k * f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} k(x-s)f(s)ds$$

Igualdades notables

- $g(x) = k * f(x) \quad \rightarrow \quad \hat{g}(w) = \hat{k}(w)\hat{f}(w)$

Dadas dos funciones f y g se define su producto de convolución a través de la siguiente expresión

$$k * f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} k(x-s)f(s)ds$$

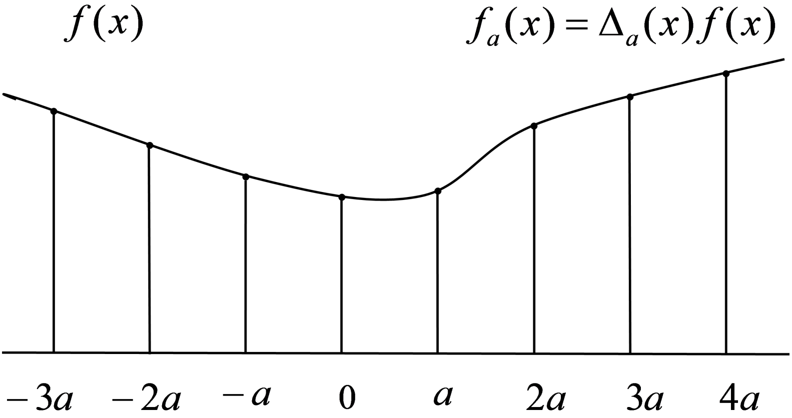
Igualdades notables

- $g(x) = k * f(x) \quad \rightarrow \quad \hat{g}(w) = \hat{k}(w)\hat{f}(w)$
- $g(x) = k(x)f(x) \quad \rightarrow \quad \hat{g}(w) = \hat{k} * \hat{f}(w)$

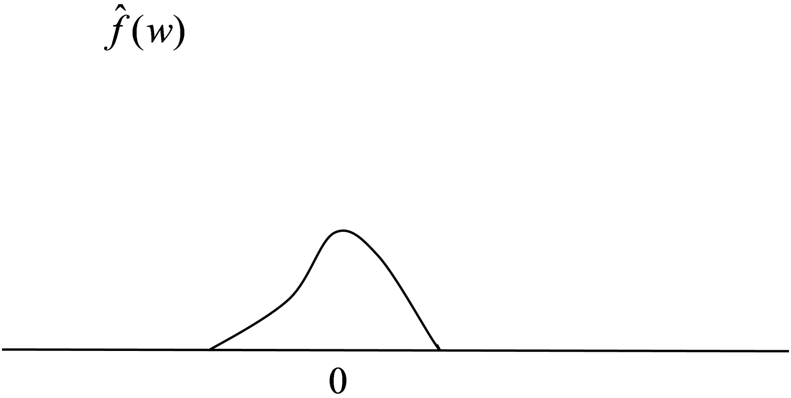
Contenido

Muestreo de señales

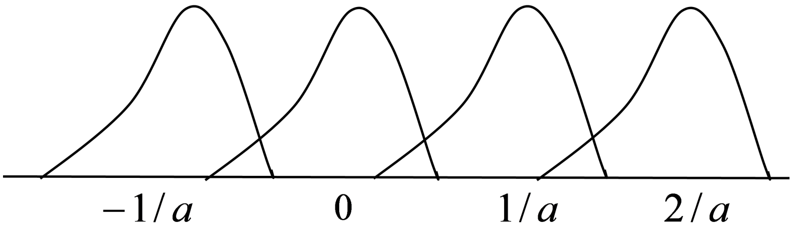
$f_a(x) = \Delta_a(x) f(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} f(na)\delta(s - na)$



Efecto del muestreo sobre la transformada de Fourier



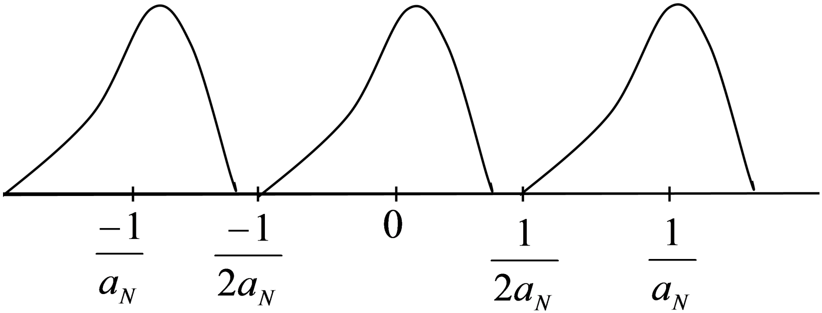
$$\hat{f}_a(w) = \hat{f} * \frac{1}{a}\Delta_{\frac{1}{a}}(w) = \int \hat{f}(s)\frac{1}{a}\Delta_{\frac{1}{a}}(w-s)ds = \frac{1}{a}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\hat{f}\left(w-\frac{n}{a}\right)$$



Efecto del muestreo sobre la transformada de Fourier

Frecuencia de muestreo de Nyquist

$$\hat{f}_{a_N}(w) = \frac{1}{a_N}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\hat{f}\left(w - \frac{n}{a_N}\right)$$



Como recuperar una señal a partir de una muestra

Theorem (Shannon)

Si el soporte de $\hat{f}(w)$ *está incluido en* $[-1/2a, 1/2a]$ *entonces*

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} f(na) \frac{\sin\left(\frac{\pi}{a}(x - na)\right)}{\frac{\pi}{a}(x - na)}$$

Como recuperar una señal a partir de una muestra

Theorem (Shannon)

Si el soporte de $\hat{f}(w)$ está incluido en $[-1/2a, 1/2a]$ entonces

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} f(na) \frac{\sin\left(\frac{\pi}{a}(x - na)\right)}{\frac{\pi}{a}(x - na)}$$

Demostración : Si el soporte de $\hat{f}(w)$ está incluido en $[-1/2a, 1/2a]$ tenemos

$$\hat{f}(w) = \hat{f}_a(w) \cdot \widehat{\frac{\sin(\frac{\pi}{a}x)}{\frac{\pi}{a}x}}(w)$$

Por tanto

$$f(x) = f_a * \frac{\sin(\frac{\pi}{a}x)}{\frac{\pi}{a}x} = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} f(na) \frac{\sin\left(\frac{\pi}{a}(x - na)\right)}{\frac{\pi}{a}(x - na)}$$

Proceso básico de codificación/decodificación de señales

- Paso 1: Se filtra la señal para eliminar las frecuencias altas y evitar el recubrimiento del espectro al muestrear

$$\tilde{f}(x) = f * \frac{\sin(\frac{\pi}{a}x)}{\frac{\pi}{a}x}$$

Proceso básico de codificación/decodificación de señales

- Paso 1: Se filtra la señal para eliminar las frecuencias altas y evitar el recubrimiento del espectro al muestrear

$$\tilde{f}(x) = f * \frac{\sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)}{\frac{\pi}{a}x}$$

- Paso 2 : Se muestrea la señal y codifica la señal muestreada de forma digital $\tilde{f}_a(x) = \tilde{f}(x)\Delta_a(x)$

Proceso básico de codificación/decodificación de señales

- Paso 1: Se filtra la señal para eliminar las frecuencias altas y evitar el recubrimiento del espectro al muestrear

$$\tilde{f}(x) = f * \frac{\sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)}{\frac{\pi}{a}x}$$

- Paso 2 : Se muestrea la señal y codifica la señal muestreada de forma digital $\tilde{f}_a(x) = \tilde{f}(x)\Delta_a(x)$
- Paso 3: Se decodifica y reconstruye la señal continua a partir del teorema de Shannon

$$\tilde{f}(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \tilde{f}(na) \frac{\sin\left(\frac{\pi}{a}(x - na)\right)}{\frac{\pi}{a}(x - na)}$$

Proceso básico de codificación/decodificación de señales

- Paso 1: Se filtra la señal para eliminar las frecuencias altas y evitar el recubrimiento del espectro al muestrear

$$\tilde{f}(x) = f * \frac{\sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)}{\frac{\pi}{a}x}$$

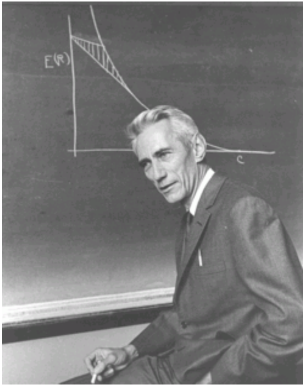
- Paso 2 : Se muestrea la señal y codifica la señal muestreada de forma digital $\tilde{f}_a(x) = \tilde{f}(x)\Delta_a(x)$
- Paso 3: Se decodifica y reconstruye la señal continua a partir del teorema de Shannon

$$\tilde{f}(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \tilde{f}(na) \frac{\sin\left(\frac{\pi}{a}(x-na)\right)}{\frac{\pi}{a}(x-na)}$$

- Aplicación clásica : Codificación de una señal de sonido.

Teoría de la información. Muestreo de Señales

Claude Shannon



Claude Shannon (1916-2001), hijo de un empresario y una profesora, matemático e ingeniero eléctrico estadounidense, se doctoró en el MIT y trabajó 15 años en los laboratorios AT&T Bell. Es el padre de la denominada teoría de la información, de enorme importancia en las telecomunicaciones que establece los fundamentos matemáticos de la transmisión de datos digitales.

Filtrado de las altas frecuencias.

Para eliminar las frecuencias altas de una función $f(x)$ se convoluciona $f(x)$ con la función

$$\Pi_a(x) = \frac{\sin(a\pi x)}{\pi x}$$

que corta las frecuencias que estén fuera de $[-1/2a, 1/2a]$.

Filtrado de las altas frecuencias.

Para eliminar las frecuencias altas de una función $f(x)$ se convoluciona $f(x)$ con la función

$$\Pi_a(x) = \frac{\sin(a\pi x)}{\pi x}$$

que corta las frecuencias que estén fuera de $[-1/2a, 1/2a]$.

Lo mismo se aplica en el caso, habitual en la práctica, de tener ya muestrada la función : $f_a(x) = f(x)\Delta_a(x)$ y queremos submuestrarla a una tasa diferente b, en ese caso filtraríamos haciendo

$$\Pi_b * f_a(mb) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(na) \frac{\sin(b\pi(mb - na))}{\pi(mb - na)} \qquad m \in \mathbb{Z}$$

Transformada de Fourier de funciones periódicas

Una función periódica, de periodo a, se puede expresar como

$$f(x) = \Delta_a * f_{[0,a]}(x)$$

donde $f_{[0,a]}(x)$ es $f(x)$ restringida al intervalo $[0, a]$.

Transformada de Fourier de funciones periódicas

Una función periódica, de periodo a, se puede expresar como

$$f(x) = \Delta_a * f_{[0,a]}(x)$$

donde $f_{[0,a]}(x)$ es $f(x)$ restringida al intervalo $[0, a]$. Aplicando las fórmulas vistas obtenemos

$$\hat{f}(w) = \frac{1}{a}\Delta_{\frac{1}{a}}(w)\hat{f}_{[0,a]}(w) = \frac{1}{a}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\hat{f}_{[0,a]}(\frac{n}{a})\delta(w - \frac{n}{a})$$

Transformada de Fourier de funciones periódicas

Una función periódica, de periodo a, se puede expresar como

$$f(x) = \Delta_a * f_{[0,a]}(x)$$

donde $f_{[0,a]}(x)$ es $f(x)$ restringida al intervalo $[0, a]$. Aplicando las fórmulas vistas obtenemos

$$\hat{f}(w) = \frac{1}{a}\Delta_{\frac{1}{a}}(w)\hat{f}_{[0,a]}(w) = \frac{1}{a}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\hat{f}_{[0,a]}(\frac{n}{a})\delta(w-\frac{n}{a})$$

lo que lleva a definir la transformada de Fourier de una función periódica como

$$\hat{f}_n = \int_0^a f(x)e^{-2\pi i\frac{n}{a}x}dx$$

Transformada de Fourier en dimensiones superiores

Transformada directa

$$\hat{f}(w_1, ..., w_N) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x_1, ..., x_N) e^{-2\pi i (w_1 x_1 + ... + w_N x_N)} dx_1 ... dx_N$$

Transformada inversa

$$f(x_1, ..., x_N) = \int_{\mathbb{R}^N} \hat{f}(w_1, ..., w_N)) e^{2\pi i (w_1 x_1 + ... + w_N x_N)} dw_1 ... dw_N$$

Contenido

Transformada de Fourier.

Transformada de Fourier. base de funciones : $\left\{e^{2\pi iwx}\right\}_{w\in\mathbb{R}}$

Transformada de Fourier. base de funciones : $\left\{e^{2\pi iwx}\right\}_{w\in\mathbb{R}}$

$$\underbrace{\hat{f}(w)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(s)e^{-2\pi iws}ds}_{\text{Codificación } f(x)}$$

Transformada de Fourier. base de funciones : $\{e^{2\pi iwx}\}_{w\in\mathbb{R}}$

$$\underbrace{\hat{f}(w)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(s)e^{-2\pi iws}ds}_{\text{Codificación } f(x)}\longrightarrow\underbrace{f(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(w)e^{2\pi iwx}dw}_{\text{Reconstrucción } f(x)}$$

Transformada de Fourier. base de funciones : $\left\{e^{2\pi iwx}\right\}_{w\in\mathbb{R}}$

$$\underbrace{\hat{f}(w)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(s)e^{-2\pi iws}ds}_{\text{Codificación } f(x)}\longrightarrow\underbrace{f(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(w)e^{2\pi iwx}dw}_{\text{Reconstrucción } f(x)}$$

Ondículas.

Transformada de Fourier. base de funciones : $\left\{e^{2\pi iwx}\right\}_{w\in\mathbb{R}}$

$$\underbrace{\hat{f}(w)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(s)e^{-2\pi iws}ds}_{\text{Codificación } f(x)}\rightarrow\underbrace{f(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(w)e^{2\pi iwx}dw}_{\text{Reconstrucción } f(x)}$$

Ondículas. base de funciones : $\left\{\psi_{a,b}(x)=\frac{1}{\sqrt{a}}\psi\left(\frac{x-b}{a}\right)\right\}_{a,b\in\mathbb{R}}$

Transformada de Fourier. base de funciones : $\{e^{2\pi iwx}\}_{w\in\mathbb{R}}$

$$\underbrace{\hat{f}(w)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(s)e^{-2\pi iws}ds}_{\text{Codificación } f(x)} \rightarrow \underbrace{f(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(w)e^{2\pi iwx}dw}_{\text{Reconstrucción } f(x)}$$

Ondículas. base de funciones : $\{\psi_{a,b}(x)=\frac{1}{\sqrt{a}}\psi\left(\frac{x-b}{a}\right)\}_{a,b\in\mathbb{R}}$

$$\underbrace{C_f(a,b)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(s)\psi_{a,b}(s)ds}_{\text{Codificación } f(x)}$$

Transformada de Fourier. base de funciones : $\{e^{2\pi iwx}\}_{w\in\mathbb{R}}$

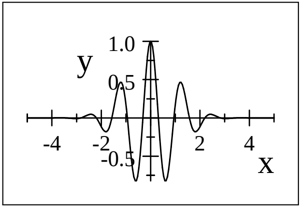
$$\underbrace{\hat{f}(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(s)e^{-2\pi iws}ds}_{\text{Codificación } f(x)} \to \underbrace{f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(w)e^{2\pi iwx}dw}_{\text{Reconstrucción } f(x)}$$

Ondículas. base de funciones : $\{\psi_{a,b}(x) = \frac{1}{\sqrt{a}}\psi\left(\frac{x-b}{a}\right)\}_{a,b\in\mathbb{R}}$

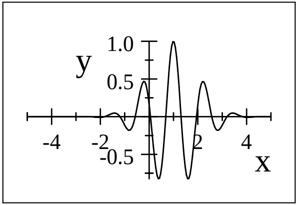
$$\underbrace{C_f(a,b) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(s)\psi_{a,b}(s)ds}_{\text{Codificación } f(x)} \to \underbrace{f(x) = K\int_{\mathbb{R}^2} \frac{C_f(a,b)\psi_{a,b}(x)}{a^2}dadb}_{\text{Reconstrucción } f(x)}$$

La ondícula de Goupillaud, Grossmann y Morlet (1984)

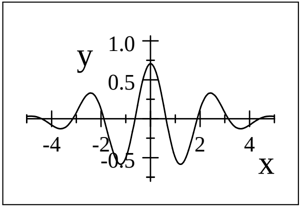
$\psi(x) = e^{-x^2/2}\cos(5x) \quad \rightarrow \quad \psi_{a,b}(x) = \frac{1}{\sqrt{a}}\psi\left(\frac{x-b}{a}\right)$



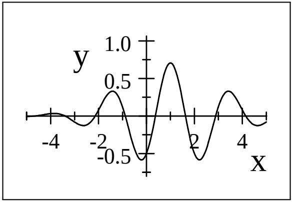
$\psi_{1,0}(x)$



$\psi_{1,1}(x)$



$\psi_{2,0}(x)$



$\psi_{2,1}(x)$

Condiciones que debe verificar una ondícula para que la fórmula de reconstrucción sea correcta.

Si $\psi(x)$ verifica

$$(i) \quad 0 < \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(w)|^2}{|w|} dw = \frac{1}{K} < \infty$$

$$(ii) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)^2 dx = 1$$

Condiciones que debe verificar una ondícula para que la fórmula de reconstrucción sea correcta.

Si $\psi(x)$ verifica

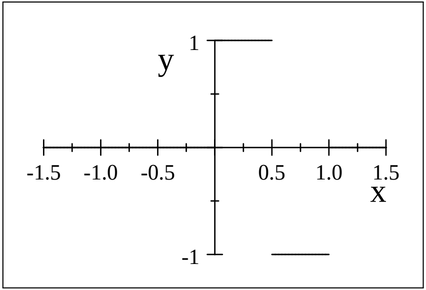
$$(i) \quad 0 < \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(w)|^2}{|w|} dw = \frac{1}{K} < \infty$$

$$(ii) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)^2 dx = 1$$

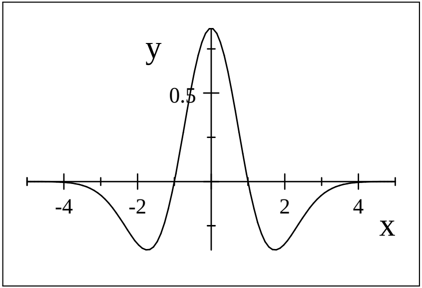
entonces

$$f(x) = K \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} C_f(a,b)\psi_{a,b}(x) \frac{dadb}{a^2}$$

Ejemplos de ondículas



Ondicula de Haar



$$\psi(x) = \frac{2}{\pi^{1/4}\sqrt{3}}(1 - x^2)e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

Para ciertas ondículas "madre" $\psi(x)$ es posible elegir $a_m = 2^{-m}$ y $b_n = n2^{-m}$, con $m, n \in \mathbb{Z}$ de tal manera que el conjunto

$$\psi_{a_m,b_n}(x) = 2^{\frac{m}{2}}\psi(2^m x - n)$$

forma una base ortonormal de $L^2(\mathbb{R})$.

Para ciertas ondículas "madre" $\psi(x)$ es posible elegir $a_m = 2^{-m}$ y $b_n = n2^{-m}$, con $m, n \in \mathbb{Z}$ de tal manera que el conjunto

$$\psi_{a_m,b_n}(x) = 2^{\frac{m}{2}}\psi(2^m x - n)$$

forma una base ortonormal de $L^2(\mathbb{R})$. Algunos ejemplos notables de ondículas generadoras de este tipo son :

- La ondícula de Haar (1.909),

Para ciertas ondículas "madre" $\psi(x)$ es posible elegir $a_m = 2^{-m}$ y $b_n = n2^{-m}$, con $m, n \in \mathbb{Z}$ de tal manera que el conjunto

$$\psi_{a_m,b_n}(x) = 2^{\frac{m}{2}}\psi(2^m x - n)$$

forma una base ortonormal de $L^2(\mathbb{R})$. Algunos ejemplos notables de ondículas generadoras de este tipo son :

- La ondícula de Haar (1.909),
- Las ondículas de Ingrid Daubechies

Para ciertas ondículas "madre" $\psi(x)$ es posible elegir $a_m = 2^{-m}$ y $b_n = n2^{-m}$, con $m, n \in \mathbb{Z}$ de tal manera que el conjunto

$$\psi_{a_m, b_n}(x) = 2^{\frac{m}{2}} \psi(2^m x - n)$$

forma una base ortonormal de $L^2(\mathbb{R})$. Algunos ejemplos notables de ondículas generadoras de este tipo son :

- La ondícula de Haar (1.909),
- Las ondículas de Ingrid Daubechies
- La ondícula C^∞ de Yves Meyer.

Yves Meyer, matemático francés (1939), alumno de la Ecole Normale. Vivió en Argelia hasta los 17 años Ha sido uno de los fundadores de la teoría matemática de las ondículas (wavelets) y más recientemente de los cuasicristales. Es miembro de la Academia de Ciencias Francesa y profesor emérito de la ENSC. Tuvo mucho contacto con matemáticos españoles como Miguel de Guzmán.

Extractos entrevista Meyer

http://www.amarun.org/pdf/entrevistas/Meyer.pdf

La calidad de la escuela matemática francesa depende de tres cosas: la calidad de la enseñanza, las becas, indispensables porque sino se pierden las oportunidades de reconocer los talentos del país, y la tercera es que los graduados tengan un empleo. Sin estas tres condiciones no se puede crear una escuela matemática. Hacer ciencia es una actividad muy difícil y es necesario a la vez tener una convicción muy fuerte que si no es sostenida por la política no permite ir muy lejos.

Miguel de Guzmán era un matemático muy amigo mío, quien pertenecía a la gran aristocracia española, y cuyo amor, cultura y dedicación a su país han sido lo más sorprendente que he podido ver. Era un espíritu prácticamente universal, era un teólogo, un gran humanista y jugó un papel importante en el desarrollo de la escuela matemática española.

Contenido

Bibliografía

1. C. Gasquet and P. Witomski. *Fourier Analysis and Applications: Filtering, Numerical Computation*, Wavelets. Springer, 1998.

Bibliografía

1. C. Gasquet and P. Witomski. *Fourier Analysis and Applications: Filtering, Numerical Computation*, Wavelets. Springer, 1998.
2. Y. Meyer. *Ondelettes et operateurs I*. Hermann, 1990

Bibliografía

1. C. Gasquet and P. Witomski. *Fourier Analysis and Applications: Filtering, Numerical Computation*, Wavelets. Springer, 1998.
2. Y. Meyer. *Ondelettes et operateurs I*. Hermann, 1990
3. C. Shannon. *A mathematical theory of communication*. Bell System Technical Journal, 27:379-423 and 623-656, 1948.

Problemas

1. Demostrar que si $f_a(x) = f(x)\Delta_a(x)$ entonces

$$\hat{f}_a(w) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \frac{1}{a}\hat{f}\left(w - \frac{n}{a}\right)$$

2. Demostrar que si el soporte de $\hat{f}(w)$ está incluido en $[-1/2a, 1/2a]$ entonces

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} f(na)\frac{\sin\left(\frac{\pi}{a}(x-na)\right)}{\frac{\pi}{a}(x-na)}$$

3. Demostrar la siguiente afirmación: si $\hat{\psi}(w)$ es continua

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(w)|^2}{|w|}dw < \infty \quad \Rightarrow \quad \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)dx = 0$$