

Modelos Matemáticos en Visión por Ordenador

Fundamentación Matemática del Análisis Multiescala

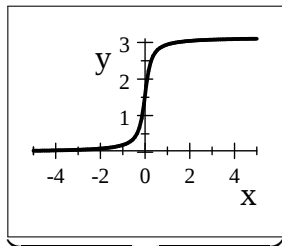
Luis Alvarez

Univ. Las Palmas de G.C.

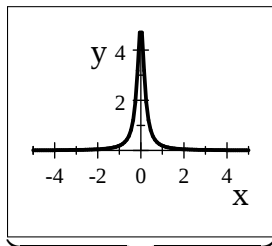
Mayo 2009

- 1 Introducción. El análisis multiescala Gaussiano
- 2 Análisis multiescala y teoría de semigrupos
- 3 Principios del Análisis Multiescala
- 4 Invariantes en la percepción visual y análisis multiescala
- 5 Bibliografía y problemas seleccionados

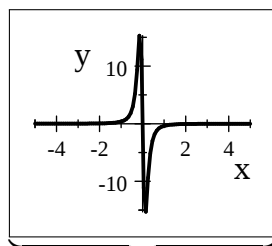
David Marr (1982): Los bordes corresponden a cruces por cero del laplaciano



$I(x)$



$I'(x)$



$I''(x)$

El uso del análisis multiescala Gaussiano en Visión

David Marr (1.945-1.980)
matemático y neuro-psicólogo
británico. Es uno de los
fundadores de la denominada
"NeuroCiencia
Computacional". Estudió en el
Trinity College en Cambridge y
trabajó en el MIT. Describió la
visión como un proceso en 3
etapas : (i) detección de
bordes, regiones, etc., (ii)
análisis de estructuras más
complejas: texturas, etc.. y
(iii) reconstrucción 3D de la
escena.

Extracto del libro "La Vision"
de David Marr (1982):
*Para detectar de forma
eficiente los cambios de
intensidad es preciso buscar un
filtro con las siguientes
propiedades : (i) que extraiga
la primera o segunda derivada
de la imagen y (ii) que se
pueda sintonizar para actuar a
cualquier escala. El operador
más satisfactorio que cumple
estas condiciones es ΔG_t .*

El Análisis MultiEscala Gaussiano



Cruces por cero del laplaciano a diferentes escalas



Operadores diferenciales habitualmente utilizados en visión



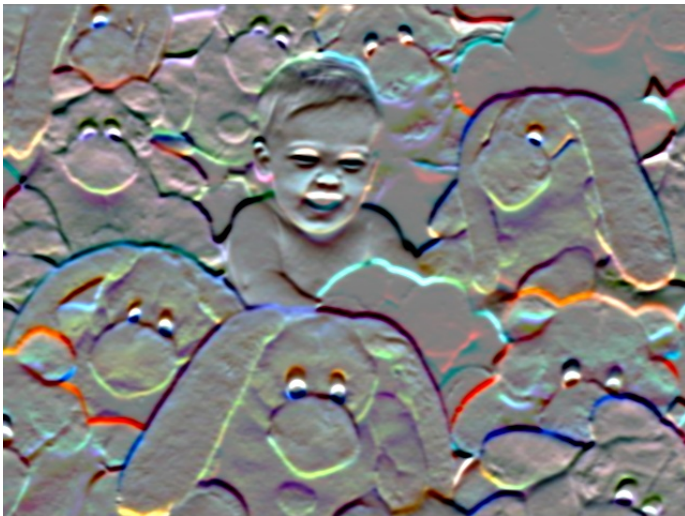
Operadores diferenciales habitualmente utilizados en vision.

La derivada parcial respecto a x : $\frac{\partial f}{\partial x}$



Operadores diferenciales habitualmente utilizados en vision.

La derivada parcial respecto a y : $\frac{\partial f}{\partial y}$



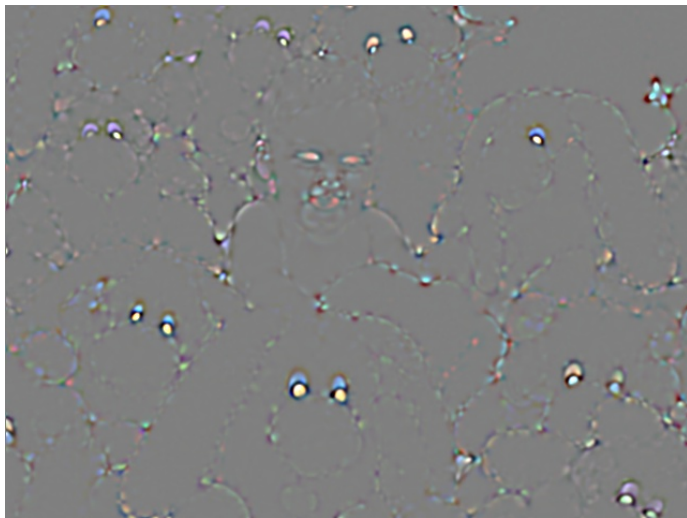
Operadores diferenciales habitualmente utilizados en vision.

El laplaciano : $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$



Operadores diferenciales habitualmente utilizados en vision.

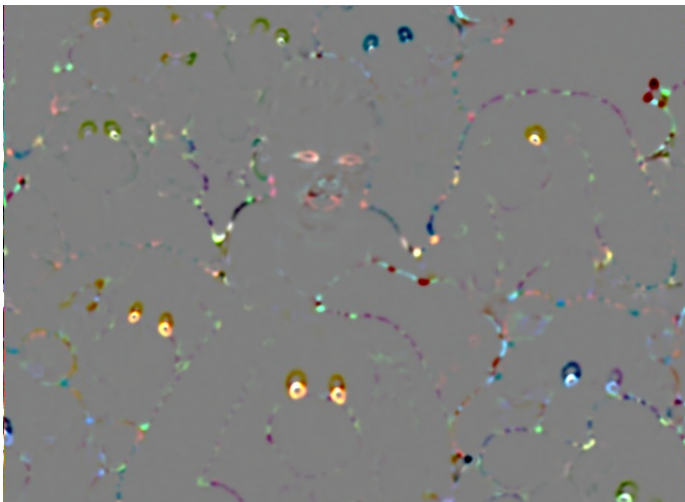
El determinante del Hessiano : $|D^2 u| = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)^2$



Operadores diferenciales habitualmente utilizados en vision.

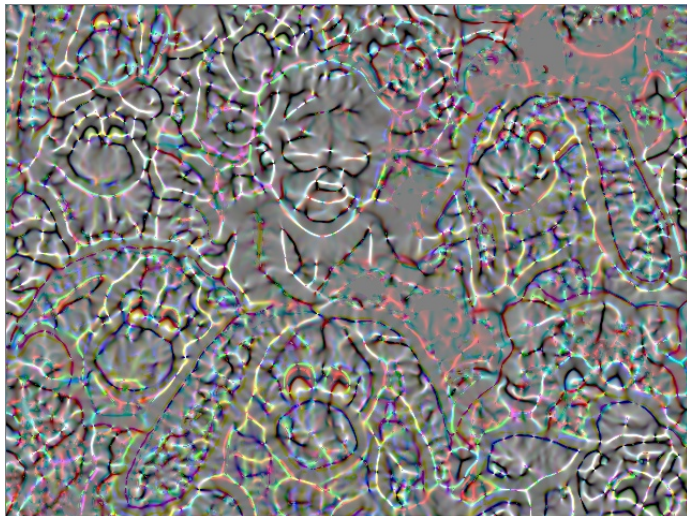
El operador direccional

$$\left((Du)^\perp \right)^T D^2 u (Du)^\perp = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 - 2 \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2$$



Operadores diferenciales habitualmente utilizados en vision.

La curvatura de las líneas de nivel :
$$\text{curv}(u) = \frac{((Du)^\perp)^T D^2 u (Du)^\perp}{\|Du\|^{3/2}}$$



- 1 Introducción. El análisis multiescala Gaussiano
- 2 Análisis multiescala y teoría de semigrupos**
- 3 Principios del Análisis Multiescala
- 4 Invariantes en la percepción visual y análisis multiescala
- 5 Bibliografía y problemas seleccionados

Concepto de análisis multiescala

Un análisis multiescala viene definido por una familia de operadores $\{T_t\}_{t \geq 0}$ que a una función $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ le hace corresponder otra función del mismo tipo $T_t(f) : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$.

Ejemplos usuales de análisis multiescala en dimensión N .

- **Análisis Multiescala Gaussiano**

$$T_t^G(f)(x) = G_t * f(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{N}{2}}} e^{-\frac{\|x-s\|^2}{4t}} f(s) ds$$

Concepto de análisis multiescala

Un análisis multiescala viene definido por una familia de operadores $\{T_t\}_{t \geq 0}$ que a una función $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ le hace corresponder otra función del mismo tipo $T_t(f) : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$.

Ejemplos usuales de análisis multiescala en dimensión N .

- Análisis Multiescala Gaussiano

$$T_t^G(f)(x) = G_t * f(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{N}{2}}} e^{-\frac{\|x-s\|^2}{4t}} f(s) ds$$

- Análisis Multiescala Morfológico

$$T_t^S(f)(x) = \sup_{\|y-x\| < t} f(y)$$

Análisis Multiescala Morfológico



- 1 Introducción. El análisis multiescala Gaussiano
- 2 Análisis multiescala y teoría de semigrupos
- 3 Principios del Análisis Multiescala**
- 4 Invariantes en la percepción visual y análisis multiescala
- 5 Bibliografía y problemas seleccionados

Principio de Causalidad : Dados, $t, h \geq 0$, existe un operador de transición $T_{t,t+h}$, tal que para cualquier función f , se tiene :

$$T_{t+h}(f) = T_{t,t+h} \circ T_t(f) \quad y \quad T_0(f) = f$$

Principio de Causalidad : Dados, $t, h \geq 0$, existe un operador de transición $T_{t,t+h}$, tal que para cualquier función f , se tiene :

$$T_{t+h}(f) = T_{t,t+h} \circ T_t(f) \quad y \quad T_0(f) = f$$

Principio de Causalidad Fuerte:

$$T_{t,t+h} = T_h$$

Principio de Causalidad : Dados, $t, h \geq 0$, existe un operador de transición $T_{t,t+h}$, tal que para cualquier función f , se tiene :

$$T_{t+h}(f) = T_{t,t+h} \circ T_t(f) \quad y \quad T_0(f) = f$$

Principio de Causalidad Fuerte:

$$T_{t,t+h} = T_h$$

$T_t^G(f)$ y $T_t^S(f)$ verifican este principio debido a que

- $G_t * G_h = G_{t+h}$

Principio de Causalidad : Dados, $t, h \geq 0$, existe un operador de transición $T_{t,t+h}$, tal que para cualquier función f , se tiene :

$$T_{t+h}(f) = T_{t,t+h} \circ T_t(f) \quad y \quad T_0(f) = f$$

Principio de Causalidad Fuerte:

$$T_{t,t+h} = T_h$$

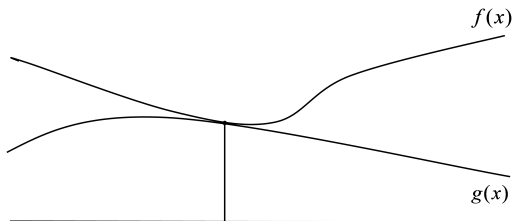
$T_t^G(f)$ y $T_t^S(f)$ verifican este principio debido a que

- $G_t * G_h = G_{t+h}$
- $\sup_{\|y-x\| < t+h} f(y) = \sup_{\|z-x\| < h} \left(\sup_{\|y-z\| < h} f(y) \right)$

Principio de Comparación Local : Si $f(x) < g(x)$ en un entorno de un punto x_0 , salvo en el propio punto x_0 , entonces $\forall t \geq 0$ y h suficientemente pequeño se tiene que $T_{t,t+h}(u)(x_0) \leq T_{t,t+h}(v)(x_0)$

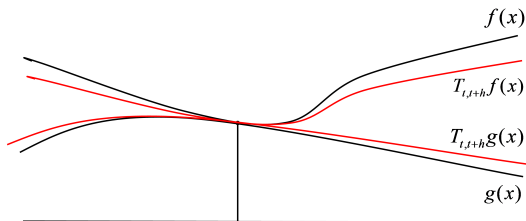
Principios del análisis multiescala

Principio de Comparación Local : Si $f(x) < g(x)$ en un entorno de un punto x_0 , salvo en el propio punto x_0 , entonces $\forall t \geq 0$ y h suficientemente pequeño se tiene que $T_{t,t+h}(u)(x_0) \leq T_{t,t+h}(v)(x_0)$



Principios del análisis multiescala

Principio de Comparación Local : Si $f(x) < g(x)$ en un entorno de un punto x_0 , salvo en el propio punto x_0 , entonces $\forall t \geq 0$ y h suficientemente pequeño se tiene que $T_{t,t+h}(f)(x_0) \leq T_{t,t+h}(g)(x_0)$



Generador infinitesimal : Existe una función $F(A, p, c, x, t)$ continua con respecto a A , tal que si $f(x) = c + p^t(x - x_0) + \frac{1}{2}(x - x_0)^t A(x - x_0)$ en un entorno de x_0 , entonces:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{T_{t,t+h}(f) - f}{h}(x_0) = F(A, p, c, x_0, t)$$

Generador infinitesimal : Existe una función $F(A, p, c, x, t)$ continua con respecto a A , tal que si $f(x) = c + p^t(x - x_0) + \frac{1}{2}(x - x_0)^t A(x - x_0)$ en un entorno de x_0 , entonces:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{T_{t,t+h}(f) - f}{h}(x_0) = F(A, p, c, x_0, t)$$

$$\bullet \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{T_h^G(f) - f}{h}(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{G_h * f - f}{h}(x_0) = \text{traza}(A)$$

Generador infinitesimal : Existe una función $F(A, p, c, x, t)$ continua con respecto a A , tal que si $f(x) = c + p^t(x - x_0) + \frac{1}{2}(x - x_0)^t A(x - x_0)$ en un entorno de x_0 , entonces:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{T_{t,t+h}(f) - f}{h}(x_0) = F(A, p, c, x_0, t)$$

- $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{T_h^G(f) - f}{h}(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{G_h * f - f}{h}(x_0) = \text{traza}(A)$
- $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{T_h^S(f) - f}{h}(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\sup_{\|x_0 - y\| < h} f - f(x_0)}{h} = \|p\|$

Demostración generador infinitesimal análisis Gaussiano

Vamos a demostrar que

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{G_h * f - f}{h} = \Delta f$$

Demostración generador infinitesimal análisis Gaussiano

Vamos a demostrar que

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{G_h * f - f}{h} = \Delta f$$

para ello utilizaremos que la transformada de Fourier $\hat{G}_t(w)$ es

$$\hat{G}_t(w) = e^{-4t\pi^2(w_1^2 \dots + w_N^2)}$$

Demostración generador infinitesimal análisis Gaussiano

Vamos a demostrar que

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{G_h * f - f}{h} = \Delta f$$

para ello utilizaremos que la transformada de Fourier $\hat{G}_t(w)$ es

$$\hat{G}_t(w) = e^{-4t\pi^2(w_1^2 \dots + w_N^2)}$$

Por tanto calculando el límite en Fourier obtenemos

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\hat{G}_h \hat{f} - \hat{f}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{e^{-4h\pi^2(w_1^2 \dots + w_N^2)} - 1}{h} \hat{f} = -(2\pi)^2 (w_1^2 \dots + w_N^2) \hat{f}$$

de donde deducimos el resultado buscado teniendo en cuenta que

$$\frac{\partial \hat{f}}{\partial x_k} = 2\pi i w_k \hat{f}(w)$$

Demostración generador infinitesimal análisis morfológico

Para cualquier función regular $f(x)$ se tiene que la dirección de máxima variación de la función es $Df(x_0)$

Demostración generador infinitesimal análisis morfológico

Para cualquier función regular $f(x)$ se tiene que la dirección de máxima variación de la función es $Df(x_0)$ por tanto cuando h es suficientemente pequeño

$$\sup_{\|x_0 - y\| < h} f(y) = f(x_0) + Df(x_0)^T h \frac{Df(x_0)}{\|Df(x_0)\|} + \mathcal{O}(h^2)$$

Demostración generador infinitesimal análisis morfológico

Para cualquier función regular $f(x)$ se tiene que la dirección de máxima variación de la función es $Df(x_0)$ por tanto cuando h es suficientemente pequeño

$$\sup_{\|x_0 - y\| < h} f(y) = f(x_0) + Df(x_0)^T h \frac{Df(x_0)}{\|Df(x_0)\|} + \mathcal{O}(h^2)$$

y por tanto

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\sup_{\|x_0 - y\| < h} f(y) - f(x_0)}{h} = Df(x_0)^T \frac{Df(x_0)}{\|Df(x_0)\|} = \|Df(x_0)\|$$

de donde deducimos el resultado buscado.

Los análisis multiescala y las ecuaciones en derivadas parciales

Theorem

Si un análisis multiescala verifica los principios anteriores, entonces si llamamos $u(t, x) = T_t(f)(x)$ es una solución del problema de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = F(D^2 u, Du, u, x) & \text{en } \mathbb{R}^N \times [0, \infty) \\ u(0, x) = f(x) & \text{en } \mathbb{R}^N \end{cases}$$

Los análisis multiescala y las ecuaciones en derivadas parciales

Theorem

Si un análisis multiescala verifica los principios anteriores, entonces si llamamos $u(t, x) = T_t(f)(x)$ es una solución del problema de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = F(D^2 u, Du, u, x) & \text{en } \mathbb{R}^N \times [0, \infty) \\ u(0, x) = f(x) & \text{en } \mathbb{R}^N \end{cases}$$

además $F(\cdot)$ es no decreciente con respecto a su primer argumento. Es decir

$$B \leq A \quad \Rightarrow \quad F(B, p, c, x_0, t) \leq F(A, p, c, x_0, t)$$

Los análisis multiescala y las ecuaciones en derivadas parciales

Theorem

Si un análisis multiescala verifica los principios anteriores, entonces si llamamos $u(t, x) = T_t(f)(x)$ es una solución del problema de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = F(D^2 u, Du, u, x) & \text{en } \mathbb{R}^N \times [0, \infty) \\ u(0, x) = f(x) & \text{en } \mathbb{R}^N \end{cases}$$

además $F(\cdot)$ es no decreciente con respecto a su primer argumento. Es decir

$$B \leq A \quad \Rightarrow \quad F(B, p, c, x_0, t) \leq F(A, p, c, x_0, t)$$

Nota: $B \leq A \Leftrightarrow x^T(A - B)x \geq 0 \quad \forall \quad x \in \mathbb{R}^N$

- 1 Introducción. El análisis multiescala Gaussiano
- 2 Análisis multiescala y teoría de semigrupos
- 3 Principios del Análisis Multiescala
- 4 Invariantes en la percepción visual y análisis multiescala**
- 5 Bibliografía y problemas seleccionados

Principio de invarianza Euclídea

Sea $B \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ una matriz ortonormal y $b \in \mathbb{R}^n$ un vector. Se considera la transformación $h_{B,b} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida por $h_{B,b}(x) = Bx + b$. Entonces se verifica:

$$T_t(f \circ h_{B,b}) = T_t(f) \circ h_{B,b}$$

es decir, es lo mismo trasladar y rotar antes o después de aplicar el análisis $T_t(f)$. Este principio nos indica que no hay preferencia por ninguna posición u orientación en el espacio.

Principio de invarianza Euclídea

Sea $B \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ una matriz ortonormal y $b \in \mathbb{R}^n$ un vector. Se considera la transformación $h_{B,b} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida por $h_{B,b}(x) = Bx + b$. Entonces se verifica:

$$T_t(f \circ h_{B,b}) = T_t(f) \circ h_{B,b}$$

es decir, es lo mismo trasladar y rotar antes o después de aplicar el análisis $T_t(f)$. Este principio nos indica que no hay preferencia por ninguna posición u orientación en el espacio.

- El análisis multiescala gaussiano verifica este principio

Principio de invarianza Euclídea

Sea $B \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ una matriz ortonormal y $b \in \mathbb{R}^n$ un vector. Se considera la transformación $h_{B,b} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida por $h_{B,b}(x) = Bx + b$. Entonces se verifica:

$$T_t(f \circ h_{B,b}) = T_t(f) \circ h_{B,b}$$

es decir, es lo mismo trasladar y rotar antes o después de aplicar el análisis $T_t(f)$. Este principio nos indica que no hay preferencia por ninguna posición u orientación en el espacio.

- El análisis multiescala gaussiano verifica este principio
- El análisis multiescala morfológico verifica este principio

Theorem

Dado un análisis multiescala generado por la EDP

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = F(D^2 u, Du, u, x) & \text{en } \mathbb{R}^N \times [0, \infty) \\ u(0, x) = f(x) & \text{en } \mathbb{R}^N \end{cases}$$

con $F(\cdot)$ no decreciente respecto a su primer argumento, si el análisis verifica el principio de invarianza euclídea y además es lineal, entonces el análisis está generado por la ecuación del calor:

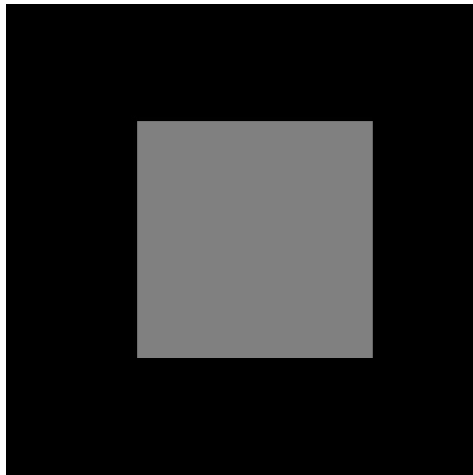
$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u & \text{en } \mathbb{R}^N \times [0, \infty) \\ u(0, x) = f(x) & \text{en } \mathbb{R}^N \end{cases}$$

es decir es el análisis Gaussiano

Invarianza morfológica de la visión



Invarianza morfológica de la visión



Sea $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función estrictamente creciente o estrictamente decreciente, entonces dada cualquier función $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ se verifica:

$$T_t(g \circ f) = g \circ T_t(f)$$

Sea $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función estrictamente creciente o estrictamente decreciente, entonces dada cualquier función $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ se verifica:

$$T_t(g \circ f) = g \circ T_t(f)$$

- El análisis multiescala gaussiano no verifica este principio

Sea $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función estrictamente creciente o estrictamente decreciente, entonces dada cualquier función $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ se verifica:

$$T_t(g \circ f) = g \circ T_t(f)$$

- El análisis multiescala gaussiano no verifica este principio
- El análisis multiescala morfológico si cumple este principio

Theorem

Dado un análisis multiescala generado por la EDP

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = F(D^2 u, Du, u, x) & \text{en } \mathbb{R}^2 \times [0, \infty) \\ u(0, x) = f(x) & \text{en } \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

con $F(\cdot)$ no decreciente respecto a su primer argumento, si el análisis verifica el principio de invarianza euclídea y morfológica, entonces el análisis está generado por la ecuación :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \| Du \| G \left(\operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{\|\nabla u\|} \right) \right) & \text{en } \mathbb{R}^2 \times [0, \infty) \\ u(0, x) = f(x) & \text{en } \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

donde $G(\cdot)$ es una función no decreciente.

Líneas de nivel y curvatura

La curvatura de una curva expresada en forma paramétrica viene dada por

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\arctan\left(\frac{y'(s_0+h)}{x'(s_0+h)}\right) - \arctan\left(\frac{y'(s_0)}{x'(s_0)}\right)}{\int_{s_0}^{s_0+h} \sqrt{x'(s)^2 + y'(s)^2} ds} = \frac{y''(s_0)x'(s_0) - y'(s_0)x''(s_0)}{(x'(s_0)^2 + y'(s_0)^2)^{\frac{3}{2}}}$$

cuando $(x(s), y(s))$ es una curva de nivel $u(t, x(s), y(s)) = C \quad \forall s$, la curvatura se expresa como

$$\text{curv}(u)(t_0, x_0, y_0) = \text{div} \left(\frac{\nabla u}{\|\nabla u\|} \right) (t_0, x_0, y_0)$$

La ecuación de curvatura media

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \|Du\| \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{\|\nabla u\|} \right)$$



$A \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ una matriz no singular y $b \in \mathbb{R}^n$ un vector. Se considera la transformación $h_{A,b} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida por $h_{A,b}(x) = Ax + b$. Entonces se verifica que existe una función $t'(t, A)$ tal que

$$T_t(f \circ h_{A,b}) = T_{t'(t,A)}(f) \circ h_{A,b}$$

además $\frac{\partial t'}{\partial \lambda}(t, \lambda Id) > 0$.

Theorem

Dado un análisis multiescala generado por la EDP

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = F(D^2 u, Du, u, x) & \text{en } \mathbb{R}^2 \times [0, \infty) \\ u(0, x) = f(x) & \text{en } \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

con $F()$ no decreciente respecto a su primer argumento, si el análisis verifica el principio de invarianza afín y morfológica, entonces el análisis está generado por la ecuación :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \| Du \| \left(\frac{((Du)^\perp)^T D^2 u (Du)^\perp}{\| Du \|^3} \right)^{\frac{1}{3}} & \text{en } \mathbb{R}^2 \times [0, \infty) \\ u(0, x) = f(x) & \text{en } \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

Análisis multiescala invariante afín

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \|Du\| \left(\operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{\|\nabla u\|} \right) \right)^{1/3}$$



La teoría de las soluciones de viscosidad



Pierre Louis Lions, matemático francés (1956), hijo del también ilustre matemático Jacques Louis Lions, alumno de l'École Normale, profesor de l'Ecole Polytechnique y del Colegio de Francia. Recibió la medalla Field en 1.994. fue uno de los creadores de la teoría de soluciones de viscosidad que ha tenido un gran impacto en el estudio de las ecuaciones en derivadas parciales no-lineales.

Contenido

- 1 Introducción. El análisis multiescala Gaussiano
- 2 Análisis multiescala y teoría de semigrupos
- 3 Principios del Análisis Multiescala
- 4 Invariantes en la percepción visual y análisis multiescala
- 5 Bibliografía y problemas seleccionados

- 1 D. Marr. La Vision. Alianza Editorial, 1982.

- 1 D. Marr. La Vision. Alianza Editorial, 1982.
- 2 T. Lindeberg. Scale-Space Theory in Computer Vision. Kluwer Academic Publishers, 1994

- ① D. Marr. La Vision. Alianza Editorial, 1982.
- ② T. Lindeberg. Scale-Space Theory in Computer Vision. Kluwer Academic Publishers, 1994
- ③ L. Alvarez, F. Guichard, P-L. Lions, and J-M. Morel. Axioms and Fundamental Equations of Image Processing. Archive for rational mechanics and analysis, 123(3):199-257, 1993.

- Demostrar que si $f \in L^2(\mathbb{R}^N)$.

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}^N} (G_t * f(x) - f(x))^2 dx = 0$$

Problemas seleccionados

- Demostrar que si $f \in L^2(\mathbb{R}^N)$.

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}^N} (G_t * f(x) - f(x))^2 dx = 0$$

- Demostrar que $\frac{((Df)^\perp)^T D^2 f (Df)^\perp}{\|Df\|^3}(x_0, y_0)$ es la curvatura de la curva de nivel que pasa por (x_0, y_0)

Problemas seleccionados

- Demostrar que si $f \in L^2(\mathbb{R}^N)$.

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}^N} (G_t * f(x) - f(x))^2 dx = 0$$

- Demostrar que $\frac{((Df)^\perp)^T D^2 f (Df)^\perp}{\|Df\|^3}(x_0, y_0)$ es la curvatura de la curva de nivel que pasa por (x_0, y_0)
- Demostrar que si $u(t, x, y)$ es una solución de $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{((Du)^\perp)^T D^2 u (Du)^\perp}{\|Du\|^2}$ entonces para todo $\lambda \neq 0$ $v(t, x, y) = u(\lambda^2 t, \lambda x, \lambda y)$ es una solución de la misma ecuación.

Problemas seleccionados

- Demostrar que si $f \in L^2(\mathbb{R}^N)$.

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}^N} (G_t * f(x) - f(x))^2 dx = 0$$

- Demostrar que $\frac{((Df)^\perp)^T D^2 f (Df)^\perp}{\|Df\|^3} (x_0, y_0)$ es la curvatura de la curva de nivel que pasa por (x_0, y_0)
- Demostrar que si $u(t, x, y)$ es una solución de $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{((Du)^\perp)^T D^2 u (Du)^\perp}{\|Du\|^2}$ entonces para todo $\lambda \neq 0$ $v(t, x, y) = u(\lambda^2 t, \lambda x, \lambda y)$ es una solución de la misma ecuación.
- Sea $f(x, y) = \phi(\sqrt{x^2 + y^2})$ donde $\phi(\cdot)$ es una función regular y con $\phi' > 0$. Calcular el operador diferencial

$$\frac{((Df)^\perp)^T D^2 f (Df)^\perp}{\|Df\|^3} (x, y)$$