Modélos Matemáticos en Visión por Ordenador

Análisis numérico y algoritmos

Luis Alvarez

Univ. Las Palmas de G.C.

Mayo 2009

Contenido

Método de Cholesky para factorizar matrices simétricas y definidas positivas

$$A = B \cdot B^T$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 & . & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 & . & . \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & . & . \\ . & . & . & . & 0 \\ b_{N1} & b_{N2} & b_{N3} & . & b_{NN} \end{pmatrix}}_{B}$$

Método de Cholesky para factorizar matrices simétricas y definidas positivas

$$A = B \cdot B^T$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 & . & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 & . & . \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & . & . \\ . & . & . & . & 0 \\ b_{N1} & b_{N2} & b_{N3} & . & b_{NN} \end{pmatrix}}_{B}$$

Algoritmo

Para $i = 1, ..., N$

$$b_{ii} = \sqrt{\left(a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} b_{ik}^2\right)}$$

Para $j = i + 1, ..., N$

$$b_{ji} = \frac{1}{b_{ii}} \left(a_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1} b_{jk} b_{ik}\right)$$

Fin Para j

Fin Para i

Utilidades del método de Cholesky

1. Verificar si una matriz simétrica es definida positiva

Utilidades del método de Cholesky

1. Verificar si una matriz simétrica es definida positiva
2. Resolver el sistema $A\bar{u} = \bar{b}$ resolviendo los 2 sistemas triangulares

$$\begin{aligned} B\bar{z} &= \bar{b} \\ B^T\bar{u} &= \bar{u} \end{aligned}$$

Utilidades del método de Cholesky

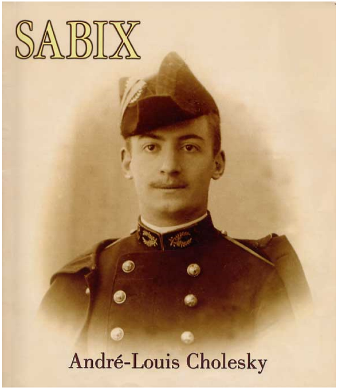
1. Verificar si una matriz simétrica es definida positiva
2. Resolver el sistema $A\bar{u} = \bar{b}$ resolviendo los 2 sistemas triangulares

$$\begin{aligned} B\bar{z} &= \bar{b} \\ B^T\bar{u} &= \bar{u} \end{aligned}$$

3. Calcular el determinante de una matriz simétrica y definida positiva

$$|A| = \left(\prod_{i=0}^{N} b_{ii} \right)^2$$

André-Louis Cholesky



André-Louis Cholesky (1875 - 1918), matemático francés. Estudió en l'École Polytechnique y trabajó en geodesia y cartografía además de desarrollar la descomposición matricial que lleva su nombre. Sirvió en el ejército francés como oficial de ingeniería y murió en una batalla durante la Primera Guerra Mundial, siendo su trabajo publicado póstumamente.

Sistemas con mayor número de ecuaciones que de incógnitas

(Sistemas con mayor número de ecuaciones que de incógnitas)

$$A_{N\times M}\bar{u}_M = \bar{b}_N$$

Sistemas con mayor número de ecuaciones que de incógnitas

(Sistemas con mayor número de ecuaciones que de incógnitas)

$$A_{N\times M}\bar{u}_M = \bar{b}_N$$

(Estimación por mínimos cuadrados)

Se minimiza el error :

$$E(\bar{u}_M) = \left\|A_{N\times M}\bar{u}_M - \bar{b}_N\right\|^2$$

Sistemas con mayor número de ecuaciones que de incógnitas

(Sistemas con mayor número de ecuaciones que de incógnitas)

$$A_{N\times M}\bar{u}_M = \bar{b}_N$$

(Estimación por mínimos cuadrados)

Se minimiza el error :

$$E(\bar{u}_M) = \left\| A_{N\times M}\bar{u}_M - \bar{b}_N \right\|^2$$

cuya solución lleva a la ecuación normal

$$A^T_{M\times N}A_{N\times M}\bar{u}_M = A^T_{M\times N}\bar{b}_N$$

Pseudoinversa de una matriz

La matriz $B = A^T_{M\times N}A_{N\times M}$ es semidefinida positiva, es decir :

$$\bar{x}^T A^T_{M\times N}A_{N\times M}\bar{x} = \|A_{N\times M}\bar{x}\|_2^2 \geq 0$$

por tanto todos sus autovalores λ son mayores o iguales que cero y para cualquier $\epsilon > 0$ la matriz $\epsilon Id + A^T_{M\times N}A_{N\times M}$ es invertible.

Pseudoinversa de una matriz

La matriz $B = A^T_{M\times N}A_{N\times M}$ es semidefinida positiva, es decir :

$$\bar{x}^T A^T_{M\times N}A_{N\times M}\bar{x} = \|A_{N\times M}\bar{x}\|_2^2 \geq 0$$

por tanto todos sus autovalores λ son mayores o iguales que cero y para cualquier $\epsilon > 0$ la matriz $\epsilon Id + A^T_{M\times N}A_{N\times M}$ es invertible.

(Solución generaliza de la ecuación normal)

Definimos la solución generalizada de la ecuación normal

$$A^T_{M\times N}A_{N\times M}\bar{u}_M = A^T_{M\times N}\bar{b}_N$$

como

$$\bar{u}_M = \underbrace{Lim_{\epsilon\to 0^+}\left(\epsilon Id + A^T_{M\times N}A_{N\times M}\right)^{-1} A^T_{M\times N}}_{pseudoinversa\ de\ A_{N\times M}}\bar{b}_N$$

Representación algebráica de las rotaciones utilizando cuaterniones

(El espacio de los cuaterniones)

$$q = (a, b, c, d) = (a, \mathbf{u}) = a + i\mathbf{u}$$

con la operación producto $\mathbf{u}_0\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_0^T\mathbf{u}_1 - i\mathbf{u}_0 \times \mathbf{u}_1$

(Representación de una rotación en base a los cuaterniones)

Dada una matriz de rotación R *de eje* $\bar{u} = (u_x, u_y, u_z)$ *y ángulo* θ. *Si llamamos*

$$(a, b, c, d) = \left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)u_x, \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)u_y, \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)u_z\right)$$

entonces $\forall \mathbf{v}$

$$iR\mathbf{v} = (a + i\mathbf{u})(0 + i\mathbf{v})(a - i\mathbf{u})$$

Representación algebráica de las rotaciones utilizando cuaterniones

(El espacio de los cuaterniones)

$$q = (a, b, c, d) = (a, \mathbf{u}) = a + i\mathbf{u}$$

con la operación producto $\mathbf{u}_0\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_0^T\mathbf{u}_1 - i\mathbf{u}_0 \times \mathbf{u}_1$

(Representación de una rotación en base a los cuaterniones)

$$R = \begin{pmatrix} a^2+b^2-c^2-d^2 & 2(bc-ad) & 2(bd+ac) \\ 2(bc+ad) & a^2-b^2+c^2-d^2 & 2(dc-ab) \\ 2(bd-ac) & 2(dc+ab) & a^2-b^2-c^2+d^2 \end{pmatrix}$$

Cálculo de autovalores / autovectores

(Método de la potencia (Valoración impacto páginas Web Google))

Sea una matriz A que posee una base de autovectores tal que en módulo su autovalor máximo $\lambda_{\max}$ es único. Sea un vector u^1 no ortogonal al subespacio engendrado por los autovectores del autovalor $\lambda_{\max}$, entonces, si definimos la secuencia

$$u^n = A\frac{u^{n-1}}{\| u^{n-1} \|}$$

Cálculo de autovalores / autovectores

(Método de la potencia (Valoración impacto páginas Web Google))

Sea una matriz A que posee una base de autovectores tal que en módulo su autovalor máximo $\lambda_{\max}$ es único. Sea un vector u^1 no ortogonal al subespacio engendrado por los autovectores del autovalor $\lambda_{\max}$, entonces, si definimos la secuencia

$$u^n = A\frac{u^{n-1}}{\| u^{n-1} \|}$$

se verifica que

$$Lim_{n\to\infty} sign\left(\left(u^n, u^{n-1}\right)\right) \| u^n \| = \lambda_{\max}$$

Cálculo de autovalores / autovectores

(Método de la potencia (Valoración impacto páginas Web Google))

Sea una matriz A que posee una base de autovectores tal que en módulo su autovalor máximo $\lambda_{\max}$ es único. Sea un vector u^1 no ortogonal al subespacio engendrado por los autovectores del autovalor $\lambda_{\max}$, entonces, si definimos la secuencia

$$u^n = A\frac{u^{n-1}}{\| u^{n-1} \|}$$

se verifica que

$$Lim_{n\to\infty} sign\left(\left(u^n, u^{n-1}\right)\right) \| u^n \| = \lambda_{\max}$$

$$Lim_{n\to\infty}\left(sign\left(\left(u^n, u^{n-1}\right)\right)\right)^n \frac{u^n}{\| u^n \|} \text{ es un autovector de } \lambda_{\max}$$

Contenido

(Minimización por mínimos cuadrados no-lineales)

Dado un vector de parámetros $\bar{x}$ *de tamaño* N *y una función* $\bar{f}(\bar{x}) = (f_1(\bar{x}), f_2(\bar{x}), ..., f_M(\bar{x}))^T$ *a minimizar, se plantea la busqueda del mínimo de la función*

$$E(\bar{x}) = \frac{1}{2}\left\|\bar{f}(\bar{x})\right\|_2^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{M}(f_i(\bar{x}))^2$$

(Minimización por mínimos cuadrados no-lineales)

Dado un vector de parámetros $\bar{x}$ de tamaño N y una función $\bar{f}(\bar{x}) = (f_1(\bar{x}), f_2(\bar{x}), ..., f_M(\bar{x}))^T$ a minimizar, se plantea la busqueda del mínimo de la función

$$E(\bar{x}) = \frac{1}{2} \|\bar{f}(\bar{x})\|_2^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{M} (f_i(\bar{x}))^2$$

(Aproximación local de la función $E(\bar{x})$.)

$$E(\bar{x}) = E(\bar{x}_n) + \nabla E(\bar{x}_n)(\bar{x} - \bar{x}_n) + \frac{1}{2}(\bar{x} - \bar{x}_n)^T D^2 E(\bar{x}_n)(\bar{x} - \bar{x}_n) + ...+$$

(Minimización por mínimos cuadrados no-lineales)

Dado un vector de parámetros $\bar{x}$ *de tamaño* N *y una función* $\bar{f}(\bar{x}) = (f_1(\bar{x}), f_2(\bar{x}), ..., f_M(\bar{x}))^T$ *a minimizar, se plantea la busqueda del mínimo de la función*

$$E(\bar{x}) = \frac{1}{2}\|\bar{f}(\bar{x})\|_2^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{M}(f_i(\bar{x}))^2$$

(Aproximación local de la función $E(\bar{x})$.)

$$E(\bar{x}) = E(\bar{x}_n) + \nabla E(\bar{x}_n)(\bar{x}-\bar{x}_n) + \frac{1}{2}(\bar{x}-\bar{x}_n)^T D^2 E(\bar{x}_n)(\bar{x}-\bar{x}_n) + ...+$$

(Método de gradiente descendente)

$$\bar{x}_{n+1} = \bar{x}_n - \rho\nabla E(\bar{x}_n)$$

Minimización por mínimos cuadrados no-lineales

(Método de Newton-Raphson)

$$E(\bar{x}) \approx \tilde{E}(\bar{x}) = E(\bar{x}_n) + \nabla E(\bar{x}_n)(\bar{x} - \bar{x}_n) + \frac{1}{2}(\bar{x} - \bar{x}_n)^T D^2 E(\bar{x}_n)(\bar{x} - \bar{x}_n)$$

Minimización por mínimos cuadrados no-lineales

(Método de Newton-Raphson)

$$E(\bar{x}) \approx \tilde{E}(\bar{x}) = E(\bar{x}_n) + \nabla E(\bar{x}_n)(\bar{x} - \bar{x}_n) + \frac{1}{2}(\bar{x} - \bar{x}_n)^T D^2 E(\bar{x}_n)(\bar{x} - \bar{x}_n)$$

Si $D^2 E(\bar{x}_n) > 0$ *entonces el mínimo de* $\tilde{E}(\bar{x})$ *se alcanza en* $\bar{x}_{n+1}$ *donde*

$$D^2 E(\bar{x}_n)(\bar{x}_{n+1} - \bar{x}_n) = -\nabla E(\bar{x}_n)$$

Minimización por mínimos cuadrados no-lineales

(Método de Newton-Raphson)

$$E(\bar{x}) \approx \tilde{E}(\bar{x}) = E(\bar{x}_n) + \nabla E(\bar{x}_n)(\bar{x} - \bar{x}_n) + \frac{1}{2}(\bar{x} - \bar{x}_n)^T D^2 E(\bar{x}_n)(\bar{x} - \bar{x}_n)$$

Si $D^2 E(\bar{x}_n) > 0$ *entonces el mínimo de* $\tilde{E}(\bar{x})$ *se alcanza en* $\bar{x}_{n+1}$ *donde*

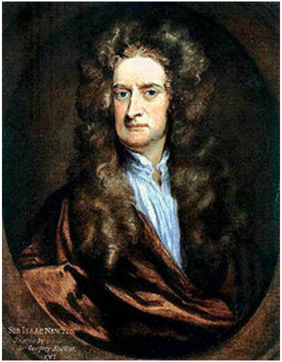
$$D^2 E(\bar{x}_n)(\bar{x}_{n+1} - \bar{x}_n) = -\nabla E(\bar{x}_n)$$

(Combinación de métodos de primer y segundo orden)

Si $D^2 E(\bar{x}_n) \not> 0$ *ó* $E(\bar{x}_{n+1}) > E(\bar{x}_{n+1})$ *hacemos*

$$\left(\lambda I + D^2 E(\bar{x}_n)\right)(\bar{x}_{n+1} - \bar{x}_n) = -\nabla E(\bar{x}_n)$$

Sir Isaac Newton



Sir Isaac Newton (1643 - 1727), "el científico universal". Tuvo una infancia difícil, su padre falleció antes de que naciera, su madre quería que fuese granjero, pero el director del Colegio King's School, Henry Stokes, la convenció para que estudiase. En 1661, fue admitido en el Trinity College, Cambridge como becario. No fué un estudiante brillante pues era muy autodidacta. Sufrió crisis psicológicas. Tenía un interés muy profundo por la alquimia y la religión.

(Expresión de las derivadas de $E(\bar{x})$ en función del Jacobiano)

Dada $E(\bar{x}) = \frac{1}{2}\left\|\bar{f}(\bar{x})\right\|_2^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{M}(f_i(\bar{x}))^2$ *se tiene que*

$$\nabla E(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{M} f_i(\bar{x})\nabla f_i(\bar{x}) = J^T(\bar{x})\bar{f}(\bar{x})$$

$$D^2E(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{M} f_i(\bar{x})D^2 f_i(\bar{x}) + J(\bar{x})^T J(\bar{x})$$

Método de Levenberg–Marquardt

(Expresión de las derivadas de $E(\bar{x})$ en función del Jacobiano)

Dada $E(\bar{x}) = \frac{1}{2}\|\bar{f}(\bar{x})\|_2^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{M}(f_i(\bar{x}))^2$ *se tiene que*

$$\nabla E(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{M} f_i(\bar{x})\nabla f_i(\bar{x}) = J^T(\bar{x})\bar{f}(\bar{x})$$

$$D^2E(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{M} f_i(\bar{x})D^2 f_i(\bar{x}) + J(\bar{x})^T J(\bar{x})$$

(Combinación de métodos de primer y segundo orden)

Si $D^2E(\bar{x}_n) \not> 0$ *ó* $E(\bar{x}_{n+1}) > E(\bar{x}_{n+1})$ *hacemos*

$$\left(\lambda I + D^2E(\bar{x}_n)\right)(\bar{x}_{n+1} - \bar{x}_n) = -\nabla E(\bar{x}_n)$$

Método de Levenberg–Marquardt

(Expresión de las derivadas de $E(\bar{x})$ en función del Jacobiano)

Dada $E(\bar{x}) = \frac{1}{2}\|\bar{f}(\bar{x})\|_2^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{M}(f_i(\bar{x}))^2$ *se tiene que*

$$\nabla E(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{M} f_i(\bar{x}) \nabla f_i(\bar{x}) = J^T(\bar{x})\bar{f}(\bar{x})$$

$$D^2 E(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{M} f_i(\bar{x}) D^2 f_i(\bar{x}) + J(\bar{x})^T J(\bar{x})$$

(Método de Levenberg-Marquardt)

$$\left(\lambda I + J(\bar{x}_0)^T J(\bar{x}_0)\right)(\bar{x}_{n+1} - \bar{x}_n) = -J^T(\bar{x}_0)\bar{f}(\bar{x}_0)$$

Historia del método de Levenberg–Marquardt

El método de Levenberg-Marquardt ha tenido una enorme trascendencia práctica en problemas de ajuste de parámetros y es el algoritmo de referencia para optimizar la calibración de cámaras. Fué publicado en primer lugar por Kenneth Levenberg (trabajó en la empresa Frankford Arsenal (diseño y producción de munición de armas)) en 1944 y redescubierto por Donald Marquardt (estadístico que trabajó en la empresa Dupont (empresa química)) en 1963.

Contenido

La transformada rápida de Fourier

(Transformada de Fourier discreta de $\{f_n\}_{n=0,\ldots,N-1}$)

$$\hat{f}_k = \sum_{n=0}^{N-1} f_n e^{-2\pi i \frac{n}{N} k} \qquad k = -\frac{N}{2}, \ldots, \frac{N}{2}$$

(Algoritmo de Cooley and Tukey (1965). Lema de Danielson and Lanczos (1942))

$$\begin{aligned} \hat{f}_k &= \sum_{n=0}^{N/2-1} f_{2n} e^{-2\pi i \frac{2n}{N} k} + \sum_{n=0}^{N/2-1} f_{2n+1} e^{-2\pi i \frac{2n+1}{N} k} = \\ &= \sum_{n=0}^{N/2-1} f_{2n} e^{-2\pi i \frac{n}{N/2} k} + e^{-2\pi i \frac{k}{N}} \sum_{n=0}^{N/2-1} f_{2n+1} e^{-2\pi i \frac{n}{N/2} k} \end{aligned}$$

Es decir la transformada de una señal de tamaño N se puede descomponer en 2 transformadas de señales de tamaño $N/2$.

John Tukey

John Tukey (1915 - 2000), hijo de profesores, científico americano, estudio Químicas en la Universidad de Brown e hizo el doctorado en matemáticas en la Universidad de Princeton, donde trabajó como profesor compartiendo este trabajo con sus actividades en los laboratorios Bell. Es conocido principalmente por sus actividades en el area de estadística y por el algoritmo de FFT. Trabajo para el ejercito durante la segunda guerra mundial

Contenido

(Ecuaciones Euler-Lagrange Regularización de funciones)

$$-\nu \,\mathrm{div}(\nabla u)(x) + \mu(u(x) - I(x)) = 0$$

Métodos de diferencias finitas

(Ecuaciones Euler-Lagrange Regularización de funciones)

$$-\nu\,\mathrm{div}(\nabla u)(x) + \mu(u(x) - I(x)) = 0$$

(Discretización por diferencias finitas $u^h_{i,j} \simeq u(ih, jh)$)

$$(\mu + \frac{4\nu}{h^2})u^h_{i,j} - \frac{\nu}{h^2}u^h_{i+1,j} - \frac{\nu}{h^2}u^h_{i-1,j} - \frac{\nu}{h^2}u^h_{i,j+1} - \frac{\nu}{h^2}u^h_{i,j-1} = I(ih, jh)$$

Métodos de diferencias finitas

(Ecuaciones Euler-Lagrange Regularización de funciones)

$$-\nu \operatorname{div}(\nabla u)(x) + \mu(u(x) - I(x)) = 0$$

(Discretización por diferencias finitas $u^h_{i,j} \simeq u(ih, jh)$)

$$(\mu + \frac{4\nu}{h^2})u^h_{i,j} - \frac{\nu}{h^2}u^h_{i+1,j} - \frac{\nu}{h^2}u^h_{i-1,j} - \frac{\nu}{h^2}u^h_{i,j+1} - \frac{\nu}{h^2}u^h_{i,j-1} = I(ih, jh)$$

(Si $\mu, \nu > 0$ los métodos iterativos standard son convergentes)

$$u^{h,n+1}_{i,j} = \frac{\frac{\nu}{h^2}u^{h,n}_{i+1,j} + \frac{\nu}{h^2}u^{h,n}_{i-1,j} + \frac{\nu}{h^2}u^{h,n}_{i,j+1} + \frac{\nu}{h^2}u^{h,n}_{i,j-1} + I(ih, jh)}{(\mu + \frac{4\nu}{h^2})}$$

Métodos multimalla (multigrid methods) para acelerar la convergencia

$$L(\{u_{i,j}^h\}) \equiv (\mu + \frac{4\nu}{h^2})u_{i,j}^h - \frac{\nu}{h^2}u_{i+1,j}^h - \frac{\nu}{h^2}u_{i-1,j}^h - \frac{\nu}{h^2}u_{i,j+1}^h - \frac{\nu}{h^2}u_{i,j-1}^h$$

Métodos multimalla (multigrid methods) para acelerar la convergencia

$$L(\{u_{i,j}^h\}) \equiv (\mu + \frac{4\nu}{h^2})u_{i,j}^h - \frac{\nu}{h^2}u_{i+1,j}^h - \frac{\nu}{h^2}u_{i-1,j}^h - \frac{\nu}{h^2}u_{i,j+1}^h - \frac{\nu}{h^2}u_{i,j-1}^h$$

$$L(\{u_{i,j}^{2^N h}\}) = I(i2^N h, j2^N h)$$

$$\downarrow$$

$$u_{i,j}^{2^{N-1}h} = u_{i,j}^{2^N h} + R_{i,j}^{2^{N-1}}$$

Métodos multimalla (multigrid methods) para acelerar la convergencia

$$L(\{u_{i,j}^h\}) \equiv (\mu + \frac{4\nu}{h^2})u_{i,j}^h - \frac{\nu}{h^2}u_{i+1,j}^h - \frac{\nu}{h^2}u_{i-1,j}^h - \frac{\nu}{h^2}u_{i,j+1}^h - \frac{\nu}{h^2}u_{i,j-1}^h$$

$$L(\{u_{i,j}^{2^N h}\}) = I(i2^N h, j2^N h)$$

$$\downarrow$$

$$u_{i,j}^{2^{N-1}h} = u_{i,j}^{2^N h} + R_{i,j}^{2^{N-1}}$$

$$\downarrow$$

$$L(\{R_{i,j}^{2^{N-1}h}\}) = I(i2^{N-1}h, j2^{N-1}h) - L(\{u_{i,j}^{2^N h}\})$$

Contenido

1. Abordar los problemas actuales que se presentan en visión por ordenador requiere de una sólida formación matemática.

1. Abordar los problemas actuales que se presentan en visión por ordenador requiere de una sólida formación matemática.
2. Dicha formación matemática tiene un caracter multidisciplinar : Algebra, Análisis, Geometría, Ecuaciones diferenciales, Análisis Numérico, Optimización, Modelos Estadísticos, Análisis Discriminante, Arboles de Decisión, etc..

1. Abordar los problemas actuales que se presentan en visión por ordenador requiere de una sólida formación matemática.
2. Dicha formación matemática tiene un caracter multidisciplinar : Algebra, Análisis, Geometría, Ecuaciones diferenciales, Análisis Numérico, Optimización, Modelos Estadísticos, Análisis Discriminante, Arboles de Decisión, etc..
3. El area científica de la Visión por Ordenador no para de crecer estimulada por los problemas y aplicaciones que van surgiendo constantemente con el desarrollo de nuevas tecnologías.

1. Abordar los problemas actuales que se presentan en visión por ordenador requiere de una sólida formación matemática.
2. Dicha formación matemática tiene un caracter multidisciplinar : Algebra, Análisis, Geometría, Ecuaciones diferenciales, Análisis Numérico, Optimización, Modelos Estadísticos, Análisis Discriminante, Arboles de Decisión, etc..
3. El area científica de la Visión por Ordenador no para de crecer estimulada por los problemas y aplicaciones que van surgiendo constantemente con el desarrollo de nuevas tecnologías.
4. Para hacerse una idea del volumen de actividades puede visitarse el sitio web **http://lists.diku.dk/mailman/listinfo/imageworld** que utilizan muchos laboratorios para anunciar cursos, congresos, ofertas de trabajo,etc..