

Universidad Complutense
Madrid, 24–25, October 2013

Mathematical models for gas transport networks.
Optimization of gas networks

Alfredo Bermúdez de Castro¹, Julio González Díaz², Francisco
González Diéguez¹

(1) Departamento de Matemática Aplicada,
(2) Departamento de Estadística e Investigación Operativa.

UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE COMPOSTELA.



1 Introducción.

- Objetivos del proyecto para la empresa REGANOSA
- Equipo de trabajo

2 Modelización de una red de transporte de gas

- Grafo dirigido asociado a una red
- Tipos de nudos y aristas. Matriz de incidencia

3 Modelización del flujo de fluidos compresibles viscosos en un conducto

- Pérdida de carga: factor de fricción, ecuación de Colebrook
- Gases reales: cálculo del factor de compresibilidad
- Modelos simplificados para redes de transporte. El caso estacionario.

4 Simulación numérica del flujo estacionario de gas en una red

- Análisis del modelo: datos y resultados, existencia y unicidad de solución
- Resolución numérica: el algoritmo de Newton

5 Optimización de una red de transporte de gas

- Planteamiento general de un problema de optimización
- Variables de diseño
- Variables de estado
- Función objetivo: consumo de gas en un compresor
- Restricciones

6 Algoritmos de optimización

- Métodos de gradiente para optimización sin restricciones
- Métodos para optimización con restricciones
- Ejemplo: programación lineal sucesiva ("sequential linear programming")

7 El programa GANESO

- Descripción general del programa
- Interfaz gráfica
- Descripción de los ficheros de datos
- Visualización de resultados

8 Aplicación a la red troncal española

INTRODUCCIÓN

Descripción general de una red de transporte de gas



- Elaborar un programa de ordenador para **simular y optimizar** una red de transporte de gas
- Dotar al programa de un **interfaz de usuario** para la introducción de datos y la visualización de los resultados

Financiado por la empresa **reganosa** 

Simulación basada en un **modelo matemático** del **comportamiento físico** de la red en **estado estacionario**. Se incluyen

- estaciones de compresión,
- válvulas de control de flujo,
- válvulas de control de presión,
- válvulas de seccionamiento
- depósitos de almacenamiento

- **Minimizar** el coste de operación de la red **garantizando** el suministro
- Hasta el momento, **la función de coste** del programa de optimización solo incluye los **costes de compresión del gas**
- Las restricciones o **condiciones** del problema de optimización se refieren, principalmente, a
 - **la seguridad del suministro**: caudales impuestos en los puntos de consumo, valores máximos y mínimos de las presiones en cada punto de la red, etc.
 - **los valores máximos de las razones de compresión** en las estaciones

- **POR PARTE DE LA UNIVERSIDAD DE SANTIAGO**

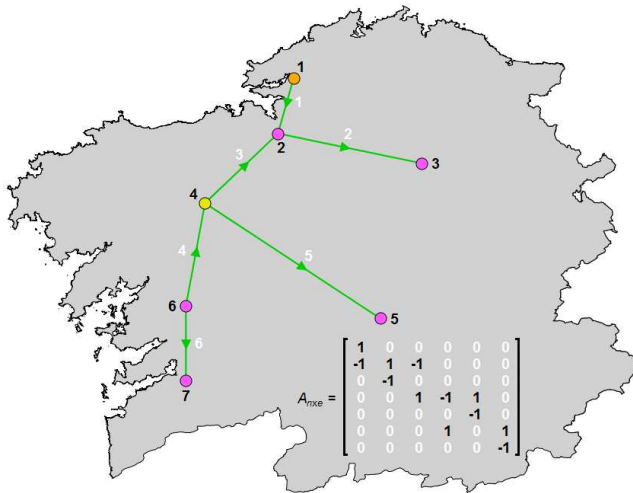
- **Alfredo Bermúdez de Castro.** Departamento de Matemática Aplicada.
- **Julio González Díaz.** Departamento de Estadística e I.O.
- **Francisco González Diéguez.** Departamento de Matemática Aplicada.
- **Paula Raña Míguez.** Departamento de Estadística e I.O.
- **Ángel González Rueda.** Departamento de Estadística e I.O.

- **POR PARTE DE reganosa**

- **Carlos Vales Fernández.** Director de Explotación
- **Laurent Moriceau.** Director de Control Técnico y Proyectos
- **José Pazos Esperante.** Responsable de Operación

MODELO MATEMÁTICO DE UNA RED DE TRANSPORTE DE GAS

- La **red** se modeliza mediante un **grafo dirigido**
- En el **grafo** se distinguen:
 - las *aristas orientadas* (**conductos**)
 - los *nudos* (**puntos de conexión entre conductos**).



Los nudos son de distintos tipos:

- Los puntos de suministro a la red
- Los puntos de consumo
- Los depósitos de almacenamiento
- Los puntos de entrada y salida a una estación de compresión
- Los puntos de interconexión de dos o más conductos
- Los puntos donde las propiedades (sección, rugosidad) de un conducto cambian

Las **aristas** conectan los nudos. Son de distintos tipos:

- conducto
- compresor
- válvula de control de flujo (FCV)
- válvula de seccionamiento cerrada
- válvula de seccionamiento abierta
- baipás de una estación de compresión
- válvula de control de presión (PCV)

Una **estación de compresión** tendrá asociadas **varias aristas** que unen los nudos de entrada y salida a la misma

Topología de la red:

- número de nudos: n
- número de aristas: e
- lista de nudos con su tipo
- lista de aristas con su tipo
- matriz de conectividades

Matriz de conectividades:

- Indica cuáles son los **dos vértices** de cada arista.
- Se denotan por $m(1, j)$ y $m(2, j)$ los números de los vértices primero y segundo, respectivamente, de la arista número j .
- La matriz m , de dimensiones $2 \times e$, se llama **matriz de conectividades** del grafo.

MODELIZACIÓN DEL FLUJO DE FLUIDOS COMPRESIBLES VISCOSOS EN UN CONDUCTO

- Ecuación de **conservación de la masa**
- Ecuación del **movimiento** (conservación de los momentos lineal y angular)
- Ecuación de **conservación de la energía**
- **Leyes constitutivas**: ecuación de los gases reales, viscosidad Newtoniana, ley de Fourier

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0.$$

siendo

- ρ la *densidad de masa* (kg/m^3)
- $\mathbf{v}$ la *velocidad* (m/s)

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{v})}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} - \mathbf{T}) = \mathbf{b}.$$

- $\mathbf{T}$ es el *tensor de tensiones o esfuerzos de Cauchy* (N/m²)
- $\mathbf{b}$ es la *densidad de la fuerza volúmica* (gravedad) (N/m³)

$$\frac{\partial(\rho e)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho e \mathbf{v}) = \mathbf{T} \cdot \mathbf{D} - \operatorname{div} \mathbf{q} + f$$

- e es la *energía interna específica* (J/kg)

-

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^t)$$

es el tensor de la *tasa de deformación* (s^{-1})

- $\mathbf{q}$ es el vector *densidad de flujo de calor* (W/m^2)
- f *tasa de densidad (volumétrica) de calor* (W/m^3)

TENSOR DE TENSIONES PARA UN FLUIDO VISCOSO:

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau}$$

- p es la *presión* termodinámica
- $\boldsymbol{\tau}$ el tensor que representa los *esfuerzos viscosos* (viscous stress):

$$\boldsymbol{\tau} = 2\eta\mathbf{D} + \xi \operatorname{div} \mathbf{v}\mathbf{I}$$

siendo η el *coeficiente de viscosidad dinámica* y ξ el *segundo coeficiente de viscosidad*

ECUACIÓN DE ESTADO PARA UN GAS REAL:

$$p = Z\rho R\theta,$$

donde

$$R = \frac{\mathcal{R}}{M},$$

siendo

- Z es el *factor de compresión* (adimensional); más adelante se verá la forma de calcularlo.
- R es la *constante del gas* (J/(kg K))
- $\mathcal{R}$ la *constante universal* de los gases ($\mathcal{R} = 8314,34$ J/(k-mol K),
- M la *masa molecular* (kg/k-mol) y
- θ la *temperatura absoluta* (K).

LEY DE FOURIER PARA EL FLUJO DE CALOR:

$$\mathbf{q} = -k \nabla \theta$$

siendo

- k la *conductividad térmica* (W/(mK))

- Se supone **conocida la temperatura** del gas en cada posición y tiempo. Esto permite suprimir la ecuación de la energía en el modelo.
- Además, como los conductos son largos frente a su diámetro, se integran la ecuaciones anteriores en la sección para obtener **un modelo 1D** aproximado

- En primer lugar se elige un **sistema de coordenadas** tal que el eje x_3 tiene la dirección de la fuerza gravitatoria y sentido contrario, y el eje x_1 coincide con el eje longitudinal del conducto.
- Se supone además que en cada conducto **todas las secciones son iguales** aunque pueden tener cotas diferentes

Integrando la ecuación de conservación de la masa en una sección del conducto se obtiene

$$A \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t}(x_1, t) + \frac{\partial q}{\partial x_1}(x_1, t) = 0,$$

donde

- A es el *área de la sección* (m^2)
- $\bar{\rho}(x_1, t)$ es la *densidad media* en la sección x_1 en el tiempo t :

$$\bar{\rho}(x_1, t) := \frac{1}{A} \int_{\omega} \rho(x, t) dx_2 dx_3 \quad (\text{kg}/\text{m}^3)$$

- $q(x_1, t)$ es el *caudal másico* que atraviesa la sección x_1 en el instante t :

$$q(x_1, t) := \int_{\omega} \rho(x, t) v_1(x, t) dx_2 dx_3 \quad (\text{kg}/\text{s})$$

Nótese que esta ecuación es **exacta**, es decir, para obtenerla no se ha hecho ninguna aproximación.

Análogamente, integrando la ecuación del movimiento en una sección del conducto se obtiene, **tras realizar algunas aproximaciones,**

$$\frac{\partial q}{\partial t}(x_1, t) + A \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_1}(x_1, t) + \frac{\lambda(q(x_1, t))}{2DA} \frac{1}{\bar{\rho}(x_1, t)} |q(x_1, t)| q(x_1, t) + Ag\bar{\rho}(x_1, t) \frac{dh(x_1)}{dx_1} = 0.$$

donde

- $\bar{p}(x_1, t)$ es la *presión media* en la sección x_1 en el instante t :

$$\bar{p}(x_1, t) := \frac{1}{A} \int_{\omega} p(x, t) dx_2 dx_3.$$

- g es la *aceleración de la gravedad* (m/s^2)
- $h(x_1)$ es la *cota* de la sección x_1 (m)
- D es el *diámetro* del conducto (m)
- λ es el *factor de fricción* entre el gas y las paredes del conducto, que es un número adimensional dependiente de la *rugosidad* interior de este y del *número de Reynolds*.

El cálculo de λ se verá a continuación

- El valor de λ depende de si el régimen es laminar o turbulento.
- Régimen laminar:

$$\lambda = \frac{64}{\text{Re}},$$

siendo Re el *número de Reynolds*:

$$\text{Re} = \frac{\bar{\rho}|\bar{v}_1|D}{\eta} = \frac{|q|D}{A\eta} = \frac{|q|D}{\pi D^2/(4\eta)} = \frac{4|q|}{\pi D\eta}.$$

- Régimen turbulento:

Existen varias ecuaciones semiempíricas que permiten calcularlo. Una de ellas, utilizada frecuentemente en las redes de gas, es la *ecuación de Colebrook*.

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log_{10} \left(\frac{2,51}{\text{Re} \sqrt{\lambda}} + \frac{k}{3,7D} \right),$$

donde

- k el *coeficiente de rugosidad* (m) del conducto
- D es el *diámetro* del conducto (m)
- Re es el *número de Reynolds* (adimensional)

Nótese que λ , además de depender de k , D y η , es función de q a través del número de Reynolds, es decir,

$$\lambda = \lambda(q)$$

.

- Para resolver la ecuación de Colebrook, que es una ecuación numérica no lineal, deben emplearse **métodos iterativos** como el algoritmo de Newton o el de la *regula falsi*.
- Previamente, conviene hacer un **cambio de incógnita**: λ se reemplaza por $\mu(q) := \lambda(q)q^2$. Así resulta la ecuación

$$\frac{|q|}{\sqrt{\mu}} = -2 \log_{10} \left(\frac{2,51 \pi D \eta}{4 \sqrt{\mu}} + \frac{k}{3,7D} \right).$$

Existen diversas fórmulas empíricas para determinar Z , como la propuesta por la **American Gas Association** (AGA):

$$Z = Z(p, \theta) = 1 + 0,257p_r - 0,533\frac{p_r}{\theta_r},$$

donde

- $p_r := p/p_c$
- $\theta_r := \theta/\theta_c$,
- p_c es la *presión crítica* del gas,
- θ_c es la *temperatura crítica* del gas.

La **temperatura crítica** es aquella por encima de la cual es imposible licuar el gas. La **presión crítica** es la presión mínima requerida para licuar un gas a su temperatura crítica.

Para el **gas natural** la temperatura crítica es alrededor de 170 K y la presión crítica en torno a 5 MPa

- En adelante supondremos que el flujo es **estacionario**, lo que significa que los campos no dependen del tiempo y, por tanto, las **derivadas parciales temporales son nulas**.
- Con objeto de simplificar la notación suprimiremos las barras sobre los campos. Se tiene el sistema de ecuaciones,

$$\begin{aligned}\frac{dq}{dx_1}(x_1) &= 0, \\ A \frac{dp}{dx_1}(x_1) + \frac{\lambda(q(x_1))}{2DA} \frac{1}{\rho(x_1)} |q(x_1)|q(x_1) + Ag\rho(x_1) \frac{dh(x_1)}{dx_1} &= 0, \\ p(x_1) &= Z(p(x_1), \theta(x_1))\rho(x_1)R\theta(x_1),\end{aligned}$$

donde θ es la *temperatura absoluta*, que se supone conocida a lo largo del conducto.

- Nótese que la primera ecuación del modelo estacionario, que es exacta, implica que el **caudal másico es constante a lo largo del conducto**, $q(x_1) = q \quad \forall x_1 \in (0, L)$.
- Por otra parte, la resolución de las otras dos ecuaciones requiere, por una parte, conocer **condiciones de contorno** (por ejemplo las presiones en los extremos del conducto) y, por otra, el uso de **métodos numéricos**, ya que constituyen un **problema no lineal**.
- Sin embargo, en la modelización de redes de transporte de gas se utiliza una **solución aproximada** que se obtiene al integrar la ecuación del movimiento entre los extremos del conducto, $x_1 = 0$ y $x_1 = L$ y hacer determinadas aproximaciones.

Primeramente, se reemplaza la densidad media en una sección, en la ecuación del movimiento, por la expresión siguiente, deducida de la ecuación de estado para un gas real:

$$\rho(x_1) = \frac{p(x_1)}{Z(p(x_1), \theta(x_1)) R \theta(x_1)}.$$

Así se obtiene,

$$\begin{aligned} Ap(x_1) \frac{dp}{dx_1}(x_1) + \frac{\lambda(q)}{2DA} Z(p(x_1), \theta(x_1)) R \theta(x_1) |q|q \\ + Ag \frac{p^2(x_1)}{Z(p(x_1), \theta(x_1)) R \theta(x_1)} \frac{dh(x_1)}{dx_1} = 0. \end{aligned}$$

Integrando esta ecuación de $x_1 = 0$ a $x_1 = L$ y dividiendo por $A/2$ resulta,

$$p^2(L) - p^2(0) = -\frac{\lambda(q)}{DA^2} R|q|q \int_0^L Z(p(x_1), \theta(x_1))\theta(x_1) dx_1 \\ - \frac{2g}{R} \int_0^L \frac{p^2(x_1)}{Z(p(x_1), \theta(x_1))\theta(x_1)} \frac{dh(x_1)}{dx_1} dx_1.$$

Ahora se **aproximan** las integrales del segundo miembro utilizando **valores medios** de la presión y la temperatura en el conducto, p_a , θ_a , cuya expresión se precisará más adelante:

$$\int_0^L Z(p(x_1), \theta(x_1))\theta(x_1) dx_1 \approx Z(p_a, \theta_a)\theta_a L \\ \int_0^L \frac{p^2(x_1)}{Z(p(x_1), \theta(x_1))\theta(x_1)} \frac{dh(x_1)}{dx_1} dx_1 \approx \frac{p_a^2}{Z(p_a, \theta_a)\theta_a} (h(L) - h(0)).$$

Reemplazando se obtiene, finalmente,

$$\begin{aligned} p(L)^2 - p(0)^2 = & -\frac{\lambda(q)L}{DA^2} R \theta_a |q| q Z(p_a, \theta_a) \\ & - \frac{2g}{R\theta_a} \frac{p_a^2}{Z(p_a, \theta_a)} (h(L) - h(0)), \end{aligned}$$

SIMULACIÓN NUMÉRICA DEL FLUJO ESTACIONARIO DE GAS EN UNA RED

Se supone que el grafo es **conexo**.

Las **incógnitas** del modelo son

- Las **presiones en los nudos**: $\{p_i : i = 1, n\}$.

Denotamos por $\mathbf{p}$ el vector columna de n componentes,

$$\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)^t$$

- Los **caudales másicos en las aristas**: $\{q_j : j = 1, e\}$.

Denotamos por $\mathbf{q}$ el vector columna de e componentes,

$$\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_e)^t$$

Hay **dos familias de ecuaciones**: unas asociadas a los nudos y otras asociadas a las aristas (conductos).

- En cada **nudo** se escribe la ecuación de **conservación de la masa**
- En cada **arista** se escribe la ecuación de la **caída de presión**

- Se define la **matriz de incidencia de la red** (grafo), $\mathcal{A} = (a_{ij})$, como sigue:

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si el nudo } i \text{ no pertenece a la arista } j \\ 1 & \text{si } i = m(1, j) \\ -1 & \text{si } i = m(2, j) \end{cases}$$

- Como el grafo se supone conexo, es fácil probar que

$$\text{rango}(\mathcal{A}) = n - 1, \quad \text{Im}(\mathcal{A}) = \langle \mathbf{e} \rangle^\perp = \{ \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n v_i = 0 \},$$

$$\text{Ker}(\mathcal{A}^t) = \langle \mathbf{e} \rangle,$$

siendo $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{e} := (1, \dots, 1)^t$.

Conservación de la masa en los nudos

Sea c_i (kg/s), el **caudal másico intercambiado con el exterior** en el nudo i .

- Se toma positivo si es un nudo de suministro y negativo si es un nudo de consumo
- c_i puede ser nulo

Conservación de la masa

En cada nudo la suma de los caudales entrantes debe coincidir con la suma de los caudales salientes

- Ecuación análoga a la **primera ley de Kirchhoff** para un circuito eléctrico.
- Como no se conoce a priori el sentido del flujo, esta ley se formula mediante la **de incidencia**:

$$\sum_{j=1}^e a_{ij} q_j = c_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

En forma vectorial:

$$\mathcal{A} \mathbf{q} = \mathbf{c},$$

siendo

$$\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_n)^t,$$

el vector columna de los caudales intercambiados con el exterior (**suministros o consumos**), que es un dato del problema.

Observación

Condición necesaria para que exista solución es que $\mathbf{c} \in \text{Im}(\mathcal{A})$, es decir,

$$\sum_{i=1}^n c_i = 0.$$

- En cada conducto se impone la ecuación de la caída de presión entre sus nudos
- Los dos nudos de la arista j son $m(1, j)$ y $m(2, j)$, por este orden.

Se tiene:

Caída de presión

$$p_{m(1,j)}^2 - p_{m(2,j)}^2 = \frac{16\lambda(q_j)|q_j|q_j L_j}{\pi^2 D_j^5} R \theta_a Z(p_a, \theta_a) + \frac{2g}{R\theta_a} \frac{p_a^2}{Z(p_a, \theta_a)} (H_{m(2,j)} - H_{m(1,j)}).$$

o bien, en función de μ ,

Caída de presión

$$p_{m(1,j)}^2 - p_{m(2,j)}^2 = 16\mu(q_j)\text{sign}(q_j)\frac{L_j}{\pi^2 D_j^5} R \theta_a Z(p_a, \theta_a) \\ + \frac{2g}{R\theta_a Z(p_a, \theta_a)} p_a^2 (H_{m(2,j)} - H_{m(1,j)}).$$

Ecuación de un compresor

- Si la arista j representa un **compresor o una válvula de control de presión**, la ecuación de la pérdida de carga se reemplaza por la siguiente:

$$\frac{p_{m(2,j)}}{p_{m(1,j)}} = \alpha_j,$$

siendo α_j la **razón de compresión (o de descompresión)**

- Esta ecuación conviene escribirla de la forma

$$p_{m(1,j)}^2 - p_{m(2,j)}^2 = (1 - \alpha_j^2) p_{m(1,j)}^2,$$

para mantener la estructura del sistema de ecuaciones.

Para escribir el modelo de **forma compacta** se introduce la notación:

$$\begin{aligned}
 G_j(H_{m(1,j)}, H_{m(2,j)}, L_j, D_j, p_{m(1,j)}, p_{m(2,j)}, q_j) \\
 = \frac{16\lambda(q_j)|q_j|q_j L_j}{\pi^2 D_j^5} R\theta_a Z(p_a, \theta_a) \\
 + \frac{2gp_a^2}{R\theta_a Z(p_a, \theta_a)} (H_{m(2,j)} - H_{m(1,j)}),
 \end{aligned}$$

o bien

$$G_j(\alpha_j, p_{m(1,j)}) = (1 - \alpha_j^2)p_{m(1,j)}^2,$$

o bien, en función de μ ,

$$\begin{aligned}
 G_j(H_{m(1,j)}, H_{m(2,j)}, L_j, D_j, p_{m(1,j)}, p_{m(2,j)}, q_j) \\
 = 16\mu(q_j)\text{sign}(q_j)\frac{L_j}{\pi^2 D_j^5} R\theta_a Z(p_a, \theta_a) \\
 + \frac{2gp_a^2}{R\theta_a Z(p_a, \theta_a)} (H_{m(2,j)} - H_{m(1,j)}).
 \end{aligned}$$

Por tanto, las ecuaciones anteriores se escriben en forma vectorial como sigue

$$\mathcal{A}^t \mathbf{p}^2 = \mathbf{G}(H, L, D, \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{p}, \mathbf{q}),$$

donde $(\mathbf{p}^2)_i := p_i^2$.

Problema $\mathcal{P}$

$$\begin{pmatrix} 0 & \mathcal{A} \\ \mathcal{A}^t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{p}^2 \\ \mathbf{q} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{G}(H, L, D, \alpha, \mathbf{p}, \mathbf{q}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{c} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

Conviene cambiar la incógnita $\mathbf{p}$ por $\mathbf{u} := \mathbf{p}^2$. Se obtiene el problema auxiliar:

Problema $\mathcal{PA}$

$$\begin{pmatrix} 0 & \mathcal{A} \\ \mathcal{A}^t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{q} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \hat{\mathbf{G}}(H, L, D, \alpha, \mathbf{u}, \mathbf{q}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{c} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

- En adelante supondremos que $\mathbf{c} \in \text{Im}(\mathcal{A})$, que es una **condición necesaria** para la existencia de solución.
- Además, consideraremos una **forma simplificada** de las funciones G_i , introducida por

T.R. WEYMOUTH, Problems in natural gas engineering.
Transact. ASME, 34, (1913) 185-234.

$$G_i(q_i) = k_i |q_i| q_i + b_i, \quad i = 1, \dots, e,$$

para valores dados de k_i y b_i , $i = 1, \dots, e$

Teorema de existencia y unicidad

- 1 Existen $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ y $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^e$ solución del problem $\mathcal{PA}$
- 2 Si $(\mathbf{u}_1, \mathbf{q}_1)$ y $(\mathbf{u}_2, \mathbf{q}_2)$ son dos soluciones entonces
 - $\mathbf{q}_1 = \mathbf{q}_2$ y
 - $\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 \in \langle \mathbf{e} \rangle$, es decir, existirá $a \in \mathbb{R}$ tal que

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2 + (a, \dots, a)^t.$$

Corolario

- Si se prescribe la presión en un nudo (y por tanto la respectiva componente de $\mathbf{u}$), el problema $\mathcal{PA}$ tiene solución única.
- Sea $(\mathbf{u}, \mathbf{q})$ una solución del problema $\mathcal{PA}$. Si $u_i \geq 0 \quad \forall i$ entonces $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ con $p_i = \sqrt{u_i}$ es solución del problema $\mathcal{P}$.
- Si la presión prescrita es suficientemente grande entonces el problema $\mathcal{P}$ tiene solución única

Demostración

Se definen la función primitiva de G_j

$$\varphi_j(q_j) := \frac{k_j}{3}|q_j|^3 + b_j q_j, \quad j = 1, \dots, e$$

y la función $\Psi : \mathbb{R}^e \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$\Psi(\mathbf{q}) := \sum_{j=1}^e \varphi_j(q_j).$$

La función Ψ tiene las siguientes propiedades:

- Ψ es diferenciable,
- Ψ es estrictamente convexa,
- Crecimiento en el infinito:

$$\lim_{|\mathbf{q}| \rightarrow \infty} \Psi(\mathbf{q}) = \infty.$$

Demostración (cont)

Como además hemos supuesto que el conjunto **convexo**

$$\{\mathbf{q} : \mathcal{A}\mathbf{q} = \mathbf{c}\}$$

es **no vacío**, el problema

$$\min_{\{\mathbf{q} \in \mathbb{R}^e : \mathcal{A}\mathbf{q} = \mathbf{c}\}} \Psi(\mathbf{q}),$$

tiene **solución única**.

Demostración (cont)

Como $\mathcal{A}^t$ es un isomorfismo entre el espacio cociente

$$\hat{\mathcal{U}} := \mathbb{R}^n / \langle \mathbf{e} \rangle,$$

y su espacio imagen, $\text{Im}(\mathcal{A}^t)$, existe un único *multiplicador de Lagrange* $\hat{\mathbf{u}} \in \hat{\mathcal{U}}$ tal que

$$\mathcal{A}^t \mathbf{u} - \mathbf{G}(\mathbf{q}) = 0 \quad \forall \mathbf{u} \in \hat{\mathbf{u}}.$$

Observaciones

- Nótese que siempre es posible elegir una infinidad de representantes de la clase $\hat{\mathbf{u}}$ con componentes positivas.
- Para cada uno de ellos se obtiene una solución del problema $\mathcal{P}$.
- Por otra parte, si se impone la presión en un nudo, sea este el i -ésimo, entonces es necesario elegir $\mathbf{u}$, el representante de la clase $\hat{\mathbf{u}}$, tal que $u_i = p_i^2$, lo que conduce a la unicidad de solución del problema en $(\mathbf{u}, \mathbf{q})$.
- Sin embargo, nada garantiza que todas las componentes de este $\mathbf{u}$ sean no negativas, de modo que el problema $\mathcal{P}$ podría no tener solución.
- Naturalmente, tal condición se tendrá si p_i es suficientemente grande.

- El modelo matemático del flujo en la red es un **sistema de ecuaciones no lineales** (debido a los términos de pérdida de carga). Se puede resolver con métodos iterativos.
- **Algoritmo de Newton modificado**

$$\mathbf{u}^{m+1} = \mathbf{u}^m - \delta \mathbf{u}^m$$

$$\mathbf{q}^{m+1} = \mathbf{q}^m - \delta \mathbf{q}^m$$

siendo $\delta \mathbf{u}^m$ y $\delta \mathbf{q}^m$ la solución del **sistema lineal** con matriz simétrica:

$$\begin{pmatrix} 0 & \mathcal{A} \\ \mathcal{A}^t & -\frac{\partial \hat{\mathbf{G}}}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{u}^m, \mathbf{q}^m) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta \mathbf{u}^m \\ \delta \mathbf{q}^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{A} \mathbf{q}^m - \mathbf{c} \\ \mathcal{A}^t \mathbf{u}^m - \hat{\mathbf{G}}(\mathbf{u}^m, \mathbf{q}^m) \end{pmatrix}$$

INTRODUCCIÓN A LOS PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN

- Antes de introducir el problema de optimización de la red de transporte de gas, se recuerdan unas **nociones generales** sobre los problemas de optimización.
- Los **elementos fundamentales** en un problema de optimización son los siguientes:
 - Las variables de diseño
 - La función objetivo o coste
 - Las restricciones

- Son las **variables independientes del problema** cuyos valores deben determinarse para que la función objetivo alcance un valor mínimo o máximo, según el caso.
- Pueden ser variables **continuas** (números reales) o **discretas** (números enteros).
- Si estas últimas solo pueden tomar los valores 0 o 1, se llaman variables **binarias**

- Es una **función de las variables de diseño** cuyo valor se quiere **minimizar o maximizar**, según los casos
- Puede ser una función lineal, cuadrática, o simplemente no lineal
- Puede ser derivable o no derivable

Delimitan un conjunto al que tienen que pertenecer las variables de diseño, llamado **conjunto factible** (*feasible set*). Pueden ser de dos tipos:

- **Restricciones de cota:** la variable de diseño debe estar entre dos valores especificados
- **Restricciones funcionales:** se definen mediante funciones de las variables de diseño. Estas funciones puede ser lineales o no lineales. Las restricciones pueden ser de igualdad o de desigualdad

Se consideran

- Una **función objetivo** que depende de d **variables de diseño**

$$f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$$

- Unas **funciones de restricción de tipo desigualdad**, r en total, que también dependen de las variables de diseño

$$g_i : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}, \quad i = 1, \dots, r$$

- Unas **funciones de restricción de tipo igualdad**, s en total, que también dependen de las d variables de diseño

$$h_i : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}, \quad i = 1, \dots, s$$

- Unos números que son las **cotas inferiores** de las variables de diseño: $\{a_i, i = 1, \dots, d\}$
- Unos números que son las **cotas superiores** de las variables de diseño: $\{b_i, i = 1, \dots, d\}$

El problema de optimización consiste en

minimizar $f(\mathbf{x})$

bajo las restricciones:

de cota $a_i \leq x_i \leq b_i, \quad i = 1, \dots, d$

funcionales de desigualdad $g_j(\mathbf{x}) \leq 0, \quad j = 1, \dots, r$

funcionales de igualdad $h_j(\mathbf{x}) = 0, \quad j = 1, \dots, s$

donde $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d)^t$ es el vector de las variables de diseño

- En ocasiones la optimización se aplica a un **sistema físico** cuyo estado está caracterizado por los valores de ciertas magnitudes llamadas **variables de estado**.
- Sobre este sistema se puede actuar mediante unas **variables de diseño o control**.
- Un modelo matemático más o menos complejo, **la ecuación de estado**, permite calcular las variables de estado correspondientes a una elección concreta de las variables de diseño.

- Generalmente, la función objetivo así como las funciones de las restricciones funcionales **dependen de las variables de estado**.
- Las **derivadas** de estas funciones con respecto a las variables de diseño pueden ser requeridas por el **algoritmo de optimización**.
- Se calculan con técnicas especiales que requieren la introducción del llamado **estado adjunto**.

OPTIMIZACIÓN DE UNA RED DE TRANSPORTE DE GAS

- La función objetivo se obtiene calculando el consumo energético necesario para la compresión en términos de cantidad de gas consumido
- La referencia es la energía necesaria para la compresión isentrópica, que se corrige dividiendo por las tasas de eficiencia de los procesos involucrados

Además de algunos de los descritos para el modelo de simulación, es necesario suministrar

- Los valores máximos y mínimos de las presiones en los nudos, de los caudales en los conductos y de los caudales en los puntos de emisión.
- Los valores máximos de las razones de compresión en las estaciones de compresión.
- Las presiones y los caudales mínimos a la entrada de las estaciones de compresión.
- Los coeficientes de eficiencia de las estaciones de compresión.

Se han implementando en paralelo **dos metodologías** matemáticas para **plantear** el problema de optimización:

Una basada en técnicas de la **teoría de control óptimo**:

- Las **variables de estado** se consideran **función** de las variables de diseño a través de la **ecuación de estado**.
- La función objetivo y las restricciones se consideran función de las variables de diseño, solamente
- Las **derivadas** de la función objetivo y de las restricciones con respecto a las variables de diseño se calculan mediante la introducción de un **estado adjunto**.

Otra basada en técnicas estándar de **programación matemática**

- Las **variables de estado** se consideran como variables de diseño
- La **ecuación de estado** es una restricción más del problema
- Tanto la función objetivo como las restricciones se aproximan mediante **funciones lineales** que se van modificando en el curso de las iteraciones.

Se obtiene un alto rendimiento al usar estas metodologías de **forma complementaria**

- Pueden elegirse **diferentes criterios** (funciones objetivo) para optimizar una red de transporte de gas.
- En nuestro caso supondremos que **se imponen los consumos** (seguridad del suministro) y que se quieren minimizar los **costes de operación** derivados de los **autoconsumos** en las estaciones de compresión
- Asumiremos que la **red se encuentra en estado estacionario**, pero cabría plantearse problemas de **optimización dinámica**, lo que llevaría a utilizar **modelos transitorios** para el flujo de gas en la red

- La función objetivo a minimizar es el coste derivado del uso de las estaciones de compresión. En concreto, el **precio del gas consumido** para efectuar la compresión.
- Para determinar el consumo de gas se supone inicialmente que el proceso de compresión es **isentrópico** y después se hacen correcciones dividiendo por **factores de eficiencia**.

- Finalmente, si el motor del compresor emplea gas como combustible, el consumo de este por unidad de tiempo es,

Consumo de gas en un compresor

$$Q = \frac{1}{\varepsilon \xi \zeta LCV} \left\{ \frac{\gamma}{\gamma - 1} Z(p_1, \theta_1) R \theta_1 \left(\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right) q \right\}, \quad \text{kg/s,}$$

donde ε , ξ , y ζ son factores de eficiencia y LCV (J/kg) es el poder calorífico inferior del gas.

Se consideran como variables de diseño las siguientes:

- La **razón de compresión** en cada estación de compresión
- Los **caudales máxicos** suministrados a la red desde las diferentes plantas de regasificación
- La **presión** en cada nudo de la red donde se impone esta variable (para una red conexas se trataría, en general, de un solo nudo)
- El **caudal máxico** en cada válvula de control de flujo (FCV)
- La **razón de descompresión** en cada válvula de control de presión (PCV)

Son las variables solución de la ecuación de estado, es decir,

- 1 Las **presiones** (p_i) en los nudos (salvo en aquellos donde se impone la presión).
- 2 Los **caudales máxicos** (q_i) en las aristas (salvo en aquellas donde haya válvulas de control de flujo).
- 3 Los **caudales máxicos** (c_i) intercambiado con el exterior en los puntos donde se impone la presión.

Restricciones de cota sobre las **variables de diseño**:

- Sobre las **razones de compresión** en las estaciones de compresión.
- Sobre los **caudales** introducidos en la red por los **nodos emisores** (plantas de regasificación y otros).
- Sobre los **caudales** en las válvulas de control de flujo.
- Sobre las **presiones** en los puntos donde se impone la presión.
- Sobre las **razones de descompresión** en las válvulas de control de presión.

Involucran también a las **variables de estado**:

- **Cotas superior e inferior** sobre la **presión en cada nudo** de la red donde no se impone la presión (pueden ser diferentes entre los nudos).
- **Relación de coherencia** entre el sentido de recorrido del flujo y la razón de compresión en cada **estación de compresión** (se comprime en el sentido del flujo).
- **Relación de coherencia** entre el sentido de recorrido del flujo y la razón de descompresión en cada **válvula de control de presión** (se descomprime en el sentido del flujo).

- La **aplicación** que transforma las variables de diseño en las variables de estado por medio de la ecuación de estado es **continua**
- Por tanto la **función objetivo** y las **restricciones** son funciones **continuas**
- El **conjunto factible** es **acotado**
- En consecuencia el **problema de optimización tiene solución**

La unicidad es un problema abierto

INTRODUCCIÓN A LOS ALGORITMOS DE OPTIMIZACIÓN

- Dependen del tipo de las variables de diseño: continuas o discretas.
- Dependen de si se trata de problemas lineales, cuadráticos o no lineales.
- Dependen de si hay restricciones o no.

- Se trata del caso en que tanto la función objetivo como las restricciones funcionales son **lineales**.
- Existen algoritmos robustos que resuelven el problema, incluso para un número muy elevado de variables de diseño, como son el **algoritmo del simplex** y los de **puntos interiores**.
- Pueden tratarse simultáneamente **variables continuas y enteras** (programación mixta).
- Existe **software libre** para resolver estos problemas como por ejemplo el programa **LPSOLVE**.

- Si las variables son continuas y no hay restricciones pueden utilizarse métodos de descenso, como el **método del gradiente** (orden uno), o los **métodos de Newton** (orden dos) y **quasi-Newton**.
- El primero se basa en que la dirección opuesta al gradiente de una función en un punto es una **dirección de descenso** partiendo de dicho punto

$$\mathbf{x}^{m+1} = \mathbf{x}^m - \delta^m \nabla f(\mathbf{x}^m),$$

siendo δ^m un número real a determinar mediante un método de **búsqueda lineal** (line search).

Si las variables son continuas existen varias técnicas. Por ejemplo:

- Las basadas en el uso multiplicadores de Lagrange, como los métodos de **Lagrangiana aumentada**.
- Los métodos de **programación cuadrática sucesiva** (*sequential quadratic programming*, SQP): en cada iteración el problema se aproxima por uno de **programación cuadrática**, es decir, la función objetivo se aproxima por una función cuadrática y las restricciones por funciones lineales.
- Los métodos de **programación lineal sucesiva** (*sequential linear programming*, SLP): en cada iteración el problema se aproxima por uno de **programación lineal**, es decir, la función objetivo y las restricciones se aproximan por funciones lineales.

En primer lugar se recuerda la forma general del problema de optimización:

minimizar $f(\mathbf{x})$

bajo las restricciones:

de cota $a_i \leq x_i \leq b_i, \quad i = 1, \dots, d$

funcionales de desigualdad $g_j(\mathbf{x}) \leq 0, \quad j = 1, \dots, r$

funcionales de igualdad $h_j(\mathbf{x}) = 0, \quad j = 1, \dots, s$

donde $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d)^t$ es el vector de las variables de diseño

- Para calcular el iterante $m + 1$ -ésimo, $\mathbf{x}^{m+1}$, se parte del m -ésimo recién calculado, $\mathbf{x}^m$.
- Se obtienen **aproximaciones lineales** de la función objetivo y de las restricciones, utilizando sus derivadas en el punto $\mathbf{x}^m$:

$$\begin{aligned}f(\mathbf{x}) &\simeq f(\mathbf{x}^m) + \nabla f(\mathbf{x}^m)^t(\mathbf{x} - \mathbf{x}^m) \\g_j(\mathbf{x}) &\simeq g_j(\mathbf{x}^m) + \nabla g_j(\mathbf{x}^m)^t(\mathbf{x} - \mathbf{x}^m), \quad j = 1, \dots, r \\h_j(\mathbf{x}) &\simeq h_j(\mathbf{x}^m) + \nabla h_j(\mathbf{x}^m)^t(\mathbf{x} - \mathbf{x}^m), \quad j = 1, \dots, s\end{aligned}$$

- Se resuelve a continuación el problema de **programación lineal** ($\mathbf{s} = \mathbf{x}^{m+1} - \mathbf{x}^m$):

minimizar $\nabla f(\mathbf{x}^m)^t \mathbf{s}$

bajo las restricciones:

de cota $a_i \leq x_i^m + s_i \leq b_i, \quad i = 1, \dots, d$

de desigualdad $g_j(\mathbf{x}^m) + \nabla g_j(\mathbf{x}^m)^t \mathbf{s} \leq 0,$
 $j = 1, \dots, r$

de igualdad $h_j(\mathbf{x}^m) + \nabla h_j(\mathbf{x}^m)^t \mathbf{s} = 0,$
 $j = 1, \dots, s,$

paso restringido (región de confianza):

$$-\varepsilon_i^m \leq s_i \leq \varepsilon_i^m, \quad i = 1, \dots, d.$$

DESCRIPCIÓN DEL PROGRAMA INFORMÁTICO

- Se ha desarrollado un paquete informático llamado **GANESO** (*Gas Network Simulation and Optimization*).
- Está escrito en lenguaje **FORTRAN (versión 2003)**, empleando **orientación a objetos y técnicas de vectorización**.
- Actualmente se dispone de versiones para sistemas **Windows y Linux**.
- **Interfaz de usuario** realizada por el **Instituto de Investigaciones Tecnológicas** de la USC (Juan Arias y Rafael Varela)

Para resolver el problema de optimización el programa combina las dos estrategias mencionadas:

PRIMERA ETAPA:

- La **ecuación de estado** es una restricción de igualdad en el problema de optimización
- Se **linealizan** tanto la función objetivo como las restricciones
- Se utiliza una variante de la **programación lineal sucesiva** con llamadas al programa **LPSOLVE**
- Se mejoran las linealizaciones y se **itera**

SEGUNDA ETAPA:

- Se utiliza la estrategia de **teoría de control**.
- El algoritmo arranca del **último iterante** de la primera etapa
- Se emplean dos métodos:
 1. Algoritmos de **programación no lineal** incluidos en el programa **NLOPT**.
 2. Un algoritmo de **programación lineal sucesiva** con llamadas al programa **LPSOLVE**.

La **combinación de las dos estrategias** conduce a un programa que optimiza escenarios de la red gasista española en tiempos de cálculo en torno a **5-10 minutos en un ordenador de sobremesa**

Realiza las siguientes tareas:

- **lee** los datos de la red y sus condiciones de operación,
- **resuelve** el modelo de la red,
- **evalúa** la función de coste y **calcula** sus derivadas,
- **llama** al programa de optimización y **controla** su convergencia,
- **escribe** los resultados en archivos .csv
- **escribe** los resultados para la visualización con *Google Earth* en archivos .kml

- La totalidad de los **ficheros** de entrada, y la gran mayoría de los ficheros de salida, son de tipo **.csv** (valores separados por comas).
- Este tipo de archivo es un documento en **formato abierto** para la **representación sencilla** de datos de una **tabla**.
- Su naturaleza **abierto** permite que los ficheros .csv sean leídos y/o editados por paquetes de software comerciales, como **Microsoft Excel**, y por paquetes de software libre, como **Open Office**.

- Día **laborable** de **enero** de rango bajo
- Reparto **convencional - eléctrico**: 80 % - 20 %
- Exportación por **Tui**: 30 GWh/día
- Exportación por **Almendralejo**: 111 GWh/día
- Extracción de gas de los **almacenes subterráneos**

Escenario RA-01 - ENAGAS



Escenario RA-01 - Optimización con AGA



[GWh/d]	ENAGAS	AGA	SGERG88
Barcelona	131.8407	241.6383	241.8906
Bilbao	113.8560	90.6997	90.1576
Cartagena	85.3920	38.2229	38.0753
Huelva	170.7840	83.6432	83.7950
Mugardos	114.1571	106.4408	106.2378
Sagunto	56.9280	112.3129	112.8015

[GWh/d]	AGA		SGERG88	
	ENAGAS	Opt.	ENAGAS	Opt.
Alcazar	0.2909	-	0.3222	-
Algete	-	-	-	-
Almendralejo	0.2650	0.1587	0.2965	0.1798
Bañeras	-	-	-	-
Chinchilla	-	-	-	-
Córdoba 1	-	-	-	-
Córdoba 2	-	-	-	-
Crevillente	-	-	-	-
Denia	-	-	-	-
Haro	-	-	-	-
Montesa	-	-	-	-
Navarra	-	-	-	-
Paterna	-	-	-	-
Puertollano	-	-	-	-
Sevilla	-	-	-	-
Tivisa	0.2229	-	0.2450	-
V. Arnedo	-	-	-	-
Zamora	0.1516	-	0.1652	-
Zaragoza	-	-	-	-
TOTAL	0.9304	0.1587	1.0289	0.1798

- La modelización matemática y la optimización permiten gestionar de manera eficiente una red de transporte de gas, reduciendo los costes de operación (autoconsumo de gas en los compresores).
- El trabajo presentado se refiere a la optimización de un estado estacionario.
- La modelización de los estados transitorios y las técnicas de la teoría de control óptimo deberían permitir la gestión dinámica de la red.
- Naturalmente, el coste computacional en ese caso sería muy alto por lo que habría que utilizar técnicas numéricas e implementaciones informáticas muy eficientes.

-  J. André, J. F. Bonnans, Optimal structure of gas transmission trunklines. *Optim Eng* 12: 175–198 (2011).
-  A. Bermúdez, *Continuum Thermomechanics*. Birkhauser, Basel, 2005.
-  K. Ehrhardt, M.C. Steinbach, *Nonlinear Optimization in Gas Networks*. ZIB-Report 03-46. Konrad-Zuse-Zentrum für Informationstechnik. Berlin 2003.
-  T. van der Hoeven, *Math in Gas and the art of linearization*. PhD Thesis. Rijksuniversiteit Groningen. 2004.
-  D. Mahlke, A. Martin, S. Moritz, A mixed integer approach for timedependent gas network optimization. *Optimization Methods and Software*, 25:4, 625-644 (2010).
-  C.H.J. Meuleman, *Measurement and Unsteady Flow Modelling of Centrifugal Compressor Surge*. PhD Thesis. Technische Universiteit Eindhoven, 2002. ISBN 90-386-2564-2.

-  E. S. Menon, *Gas Pipeline Hydraulics*. Taylor&Francis. Boca Raton. 2005.
-  M. Möller, *Mixed Integer Models for the Optimisation of Gas Networks in the Stationary Case*. PhD Thesis. Technischen Universität Darmstadt. 2004.
-  K. T. Midthun *Optimization models for liberalized natural gas markets*. PhD Thesis. Norwegian University of Science and Technology. Trondheim. 2007.
-  A.J. Osiadacz *Simulation and Analysis of Gas Networks* Gulf Publishing Company. Houston. 1897.
-  J. M. Smith, H. C. Van Ness, M. M. Abbott, *Introduction to Chemical Engineering Thermodynamics*. Mc Graw-Hill. New York. 2001.
-  F. Tabkhi, *Optimisation de Réseaux de Transport de Gaz*. PhD Thesis. Institut National Polytechnique de Toulouse. 2007.