

## Análisis de un problema de frontera libre que modela el flujo de hielo polar en un entorno de la *grounding line*

MARCO A. FONTELOS<sup>1</sup> Y ANA I. MUÑOZ.<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Dpto. de Matemáticas, Instituto de Matemáticas y Física Fundamental, C.S.I.C., C/Serrano 123, 28006 Madrid, España. E-mail: marco.fontelos@uam.es.

<sup>2</sup> Dpto. de Matemática Aplicada, E.S.C.E.T., Universidad Rey Juan Carlos, C/ Tulipán, s/n, 28933, Móstoles, Madrid, España. E-mail: anaisabel.munoz@urjc.es.

**Palabras clave:** Problema de frontera libre, Glaciología, Fluido Newtoniano, Teorema de Lax-Milgram, Transformadas de Mellin.

### Resumen

En esta comunicación presentaremos el estudio de flujo del hielo en un tipo particular de manto de hielo, denominado en la bibliografía inglesa *marine ice sheet*. Consideraremos un régimen de flujo estacionario modelado por un problema de Stokes en un dominio bidimensional acotado. Analizaremos el comportamiento del flujo en un entorno de la *grounding line*, que es la zona donde tiene lugar la transición entre la parte del manto polar que desliza sobre una base sólida rocosa y la parte que flota en el mar. Probaremos la existencia de soluciones para *grounding lines* con ángulo de contacto nulo, vía el teorema de Lax-Milgram. También determinaremos la geometría y propiedades asintóticas de la frontera libre utilizando una formulación en términos de funciones de corriente y transformadas de Mellin.

## 1. Introducción

En este trabajo estudiaremos un problema de frontera libre que nace en el ámbito de la Glaciología y que implica el movimiento de una línea de contacto, denominada *grounding line*, que separa dos fases, la sólida que se corresponde con el hielo y la líquida que será el agua del mar. La existencia de *grounding lines* suele darse en unos mantos de hielo particulares, denominados en la bibliografía inglesa *marine ice sheets*, en cuyos márgenes, el hielo polar deja de fluir sobre la roca y acaba flotando en el agua del mar. Estas lenguas de hielo que se adentran en el mar reciben el nombre de *ice shelves*. El estudio del flujo del hielo en un entorno de la *grounding line*, constituye uno de los problemas que más controversia ha suscitado en lo que refiere a cuales son los mecanismos dominantes en

la dinámica del flujo. Fuera de esta zona de transición, el flujo del hielo es razonablemente bien entendido. En la ice sheet, el flujo está dominado fundamentalmente por la cizalla en planos horizontales cercanos a la base, sin embargo, en la ice shelf tienen mayor relevancia los esfuerzos laterales y las tensiones longitudinales. El análisis del problema que nos ocupa ha experimentado un creciente interés debido, entre otros motivos, al llamado *efecto invernadero*, pues la dinámica de la grounding line desempeña un papel crucial en la estabilidad de marine ice sheets, como por ejemplo, Antártida Occidental.

En esta comunicación analizaremos un modelo matemático que describe el flujo del hielo en un entorno de la grounding line. En la sección 2 presentaremos el modelo y en una primera aproximación al problema, consideraremos una versión linealizada del problema original. En la sección 3, se prueba la existencia y unicidad de soluciones débiles para el problema linealizado, hacemos un estudio de la regularidad de las solución y se determina la geometría de la frontera libre. Finalmente, en la sección 4, estudiamos el problema original, considerado como una perturbación del caso lineal.

## 2. El modelo matemático

Consideraremos el flujo de un manto de hielo bidimensional estacionario modelado como un flujo de Stokes en un dominio acotado  $D := \{(x, z) \in [-M, M] \times [-1, 0]\}$ , que representa un entorno de la grounding line. Nótese que la coordenada horizontal  $x$  es la correspondiente a la dirección principal de flujo y la  $z$  a la dirección vertical.

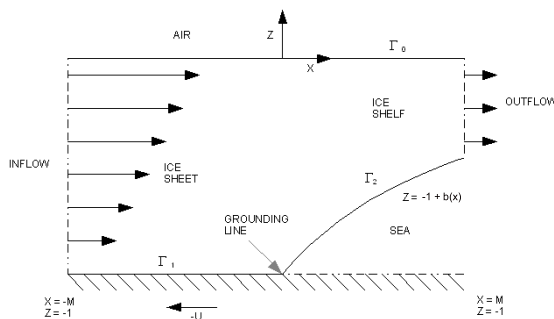


Figura 1: Escenario del problema físico.

En la figura 1, aparecen representadas las dos zonas con régimen de flujo perfectamente diferenciado, que son el manto de hielo que fluye sobre un lecho rocoso (*ice sheet*) y la parte que se adentra en el mar (*ice shelf*). La zona de transición entre ellas se localiza en un entorno de la grounding line, que en nuestro sistema de referencia coincide con el punto  $(0, -1)$ , donde confluirán condiciones de contorno mixtas pudiendo darse singularidades en la solución. Sin embargo, como veremos, se obtienen soluciones con ángulo de contacto nulo, para las cuales existe una energía de disipación acotada en un entorno de esta línea de contacto. Asumiremos que la grounding line se mueve con velocidad horizontal constante  $U$  y el hielo será modelado como un fluido Newtoniano de viscosidad constante que supondremos, sin pérdida de generalidad,  $\mu \equiv 1$ .

La frontera superior, en contacto con el aire, viene dada por  $\Gamma_0 := \{(x, z)/x \in$

$[-M, M], z = 0$ . La parte del dominio en contacto con el substrato sólido se define como  $\Gamma_1 := \{(x, z)/x \in [-M, 0), z = -1\}$ . La única frontera no localizada, y por tanto libre, es  $\Gamma_2 := \{(x, z)/x \in (0, M], z = -1 + b(x)\}$ , que representa la base del manto de hielo que flota sobre el mar. Tomaremos un sistema de referencia ligado a la *grounding line*. El problema consistirá en determinar el campo de velocidades  $(-U, 0) + \vec{v}$ , la presión  $\Pi$  y la localización y geometría de la frontera libre. A lo largo de la exposición denotaremos las componentes de  $\vec{v}$  por  $(u, v)$  y  $(v_x, v_z)$ , indistintamente. Las ecuaciones a considerar son:

$$\nabla \cdot T = -\nabla p + \Delta \vec{v} = 0 \quad \text{y} \quad \nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad \text{en } D,$$

que son la de conservación del momento y de la masa, respectivamente, donde  $p = \Pi - \rho_i g(z + 1)$  es una presión generalizada, con  $\rho_i$ , la densidad del hielo y  $T$ , dado por  $T_{ij} = -p\delta_{ij} + (v_{i,j} + v_{j,i})$ , el tensor de esfuerzos. Referente a las condiciones de contorno, en  $\Gamma_0$  imponemos velocidad vertical y esfuerzos de cizalla nulos:  $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$  y  $\vec{t} T \vec{n} = 0$ , donde  $\vec{n}$  y  $\vec{t}$  son los vectores normal y tangente a  $\Gamma_0$  respectivamente. En  $\Gamma_1$  imponemos la condición de no deslizamiento  $\vec{v} = \vec{0}$ , mientras que en la parte del hielo que está en contacto con el mar,  $\Gamma_2$ , imponemos un equilibrio entre la fuerza hidrostática del agua y los esfuerzos viscosos en el hielo, es decir,  $T \vec{n} = \rho g b(x) \vec{n}$ , donde  $\rho = \rho_w - \rho_i$  y  $\rho_w$  la densidad del agua. También debemos imponer un flujo de entrada  $\vec{v}^{in}$  en  $x \rightarrow -M$  de tipo Poiseuille y otro de salida  $\vec{v}^{out}$  en  $x \rightarrow M$  de tipo uniforme, concretamente,

$$\vec{v}^{in} = \left(\frac{\sigma}{2}(1 - z^2), 0\right) \quad \text{y} \quad \vec{v}^{out} = (U_\infty, 0), \quad (1)$$

donde  $\sigma$  y  $U_\infty$  son dos constantes positivas arbitrarias pero relacionadas del modo siguiente por conservarse la masa,  $U = \frac{1}{b(M)} \left( \int_{-1}^0 v_x^{in}(z) dz - \int_{b(M)}^0 v_x^{out}(z) dz \right)$ . Por otro lado,  $\Gamma_2$  debe evolucionar siguiendo el campo de velocidades, de donde deducimos que en el caso estacionario,  $0 = Ub_x + v_z - b_x v_x$ . Puesto que  $\nabla \cdot \vec{v} = 0$ , podemos introducir una función de corriente  $\psi$  tal que  $\psi_x = w = v_z$ ,  $\psi_z = -u = -v_x$ . Aplicando el operador rotacional a  $-\nabla p + \Delta \vec{v} = 0$ , se obtiene que  $\psi$  es una función biarmónica. Por tanto, el problema que queremos resolver en términos de la función de corriente es:

$$\Delta^2 \psi = 0 \quad \text{en } D, \quad (2)$$

$$(-\psi_z, \psi_x) = \vec{0} \quad \text{en } \Gamma_1, \quad (3)$$

$$\vec{n} T \vec{n} = \rho g b(x), \quad \vec{t} T \vec{n} = 0 \quad \text{y} \quad Ub_x + \psi_x + b_x \psi_z = 0 \quad \text{en } \Gamma_2, \quad (4)$$

$$\psi_x = \vec{t} T \vec{n} = 0 \quad \text{en } \Gamma_0, \quad (5)$$

$$(-\psi_z, \psi_x) = \vec{v}^{in} \quad \text{en } (-M, z) \quad \text{y} \quad (-\psi_z, \psi_x) = \vec{v}^{out} \quad \text{en } (M, z). \quad (6)$$

Gracias a (4)<sub>1</sub>, podemos sustituir (4)<sub>3</sub> por  $b(x) = -\frac{1}{U} (\psi(x, -1 + b(x)) - \psi(x, -1))$ . Definiendo el parámetro adimensional  $\gamma = \frac{\rho g L^2}{\mu U}$ , con  $\mu = 1$  y  $L = 1$ , donde  $L$  es la escala longitud en la dirección principal de flujo, y por tanto  $\gamma = \frac{\rho g}{U}$ , y eligiendo  $\psi(x, -1) = 0$  para  $x \leq 0$ , podemos sustituir (3) por

$$\psi_z = \psi = 0 \quad \text{en } \Gamma_1, \quad (7)$$

y (4)<sub>1</sub> por

$$\vec{n} T \vec{n} = -\gamma \psi \quad \text{en } \Gamma_2. \quad (8)$$

El resultado principal de este trabajo es el siguiente:

*Si las normas  $\|\vec{v}^{in}\|_{C^2[-1,0]}$  y  $\|\vec{v}^{out}\|_{C^2[-1+b(M),0]}$  y  $b(M)$  son suficientemente pequeños, entonces existe una única solución débil  $\psi \in H^{2+\delta}(D)$ ,  $b(x) \in C^{1+\delta}[0, M]$  ( $0 < \delta \ll 1$ ) del problema no lineal (2)-(8). Además, el comportamiento asintótico de  $b(x)$  cerca de la grounding line es:  $b(x) = Cx^{\frac{3}{2}} + o(x^{\frac{3}{2}})$ .*

### 3. El problema linealizado

Para deducir la versión linealizada del problema (2)-(8), supondremos que la frontera libre  $\Gamma_2$  dada por  $z = -1 + b(x)$ , verifica que  $b(x) = \varepsilon h(x)$  para  $\varepsilon \ll 1$  y que  $h(0) = 0$ . La principal dificultad del análisis se encuentra en el flujo en las proximidades de la grounding line localizada en  $(0, -1)$ . Supondremos que en este punto  $h_x(0) = 0$  de modo que  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$  convergen con regularidad  $C^1$ . Esta hipótesis acerca de la frontera libre será verificada a posteriori y nos permitirá aplicar un difeomorfismo del dominio original  $D$  en el rectángulo  $S = [-M, M] \times [-1, 0]$ . Una vez realizado el difeomorfismo, con el consiguiente cambio de coordenadas, que denotaremos del mismo modo, y tras desestimar términos de orden  $O(\varepsilon)$ , se tiene que el problema original puede ser formulado en  $S = [-M, M] \times [-1, 0]$  de este modo:

$$\Delta^2 \psi = 0 \text{ en } S, \quad (9)$$

$$\psi = \psi_{zz} - \psi_{xx} = 0 \text{ en } z = 0, x \in [-M, M], \quad (10)$$

$$\psi = \psi_z = 0 \text{ en } z = -1, x \in [-M, 0], \quad (11)$$

$$\psi_{zz} - \psi_{xx} = 0 \text{ en } 3\psi_{xxz} + \psi_{zzz} + \gamma\psi_x = 0 \text{ en } z = -1, x \in [0, M], \quad (12)$$

$$\psi_z = -v_x^{in}, \psi_x = v_z^{in} \text{ en } x = -M \text{ y } \psi_z = -v_x^{out}, \psi_x = v_z^{out} \text{ en } x = M. \quad (13)$$

Una vez conocida  $\psi$ , se tiene que  $\varepsilon h(x) = -\frac{1}{U}\psi(x, -1)$ .

#### 3.1. Existencia, unicidad y regularidad parcial

En esta sección probaremos la existencia y unicidad de solución débil del problema linealizado (9)-(13), que escribimos en términos del tensor de esfuerzos  $T$ , como sigue:

$$\nabla \cdot T = 0, \quad \nabla \cdot \vec{v} = 0 \text{ en } [-M, M] \times [-1, 0], \quad (14)$$

donde  $T_{xx} = -p + 2\psi_{xz}$ ,  $T_{xz} = T_{zx} = \psi_{xx} - \psi_{zz}$  y  $T_{zz} = -p - 2\psi_{xz}$ , con condiciones de contorno

$$T_{xz} = 0, v_z = 0 \text{ en } z = 0, \quad \vec{v} = \vec{0} \text{ en } z = -1, x < 0 \quad (15)$$

$$T_{xz} = 0, T_{zz} = -\gamma\psi = -\gamma \int_0^x v_z(s, -1) \text{ en } z = -1, x > 0, \quad (16)$$

y las de flujo de entrada y salida en  $x \rightarrow \pm M$  dadas por (13). Probaremos el siguiente resultado:

*Existe una única solución débil  $\psi \in H^2(D)$  de (14)-(16) verificando (13).*

*Demostración:* en un primer paso escribimos la velocidad como  $\vec{v} = \vec{u}^0 + \vec{u}^1$ , donde  $\vec{u}^0$  tiene divergencia nula y es  $[C^\infty((-M, M) \times (-1, 0))]^2$  verificando las condiciones (13) y (15). Se puede encontrar fácilmente (véase [1])  $\psi^0 \in C^\infty((-M, M) \times (-1, 0))$  tal que

$\vec{u}^0 = (-\psi_z^0, \psi_x^0)$  y que verifique:  $\psi_x^0 \rightarrow v_z^{in}$ ,  $\psi_z^0 \rightarrow -v_x^{in}$ ,  $\psi_x^0 \rightarrow v_z^{out}$ ,  $\psi_z^0 \rightarrow -v_x^{out}$ ,  $\psi^0, \psi_{zz}^0 = 0$  en  $z = 0$ ,  $\psi_z^0 = 0$  en  $z = -1$  y  $x < 0$ . En particular,  $c_1(x) \equiv \psi_{zz}^0 - \psi_{xx}^0$  y  $c_2(x) \equiv \psi_x^0 + \gamma(\psi_{zzz}^0 + 3\psi_{zxx}^0)$  serán regulares, así como sus derivadas de cualquier orden en  $z = -1$ ,  $x > 0$ . El campo de velocidades  $\vec{u}^1$  y su tensor de esfuerzos asociado  $T^1$  tendrán que verificar:

$$\nabla \cdot T^1 = \vec{s}_1, \quad \nabla \cdot \vec{u}^1 = 0 \text{ en } [-M, M] \times [-1, 0], \quad (17)$$

las condiciones de contorno:  $T_{xz}^1 = 0$ ,  $v_z^1 = 0$  en  $z = 0$ ,  $\vec{u}^1 = \vec{0}$  en  $z = -1$ ,  $x < 0$  y

$$T_{xz}^1 = -c_1(x), \quad T_{zz}^1(x, -1) + \gamma \int_0^x v_z^1(s, -1) = - \int_0^x c_2(s) ds, \text{ en } z = -1, x > 0,$$

y además la condición de que  $\psi^1$ , dada por  $\vec{u}^1 = (-\psi_z^1, \psi_x^1)$ , se anule junto con sus primeras derivadas en  $x = \pm M$ . Introducimos el espacio de las funciones test  $X$ , cierre con respecto de la norma  $\|\vec{\varphi}\|_X \equiv \left( \int_S |\nabla \vec{\varphi}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$  del conjunto  $X^*$ :

$$\left\{ \vec{\varphi} \in [C_0^\infty(\bar{S})]^2, \nabla \cdot \vec{\varphi} = 0, \varphi_2(x, 0) = 0, x \in [-M, M] \text{ y } \varphi_1 = \varphi_2 = 0 \text{ en } [-M, 0] \times \{-1\} \right\}.$$

En términos de la función de corriente consideraremos aquellas  $\omega$  tales que  $\vec{\varphi} = (-\omega_z, \omega_x) \in X$ . La desigualdad de Korn puede aplicarse para dominios acotados y para funciones  $\vec{\varphi}$  que se anulan en una parte de la frontera, por otro lado, las inmersiones de Sobolev implican que el espacio de funciones test  $Y$  a considerar es el cierre con respecto a la norma  $H^2(S)$  del conjunto de las funciones de corriente  $\omega$  cuyas velocidades  $\vec{\varphi} = (-\omega_z, \omega_x)$  pertenecen a  $X^*$ . Multiplicando la ecuación (17) por  $\vec{\varphi} \in X$ , integrando por partes, teniendo en cuenta las condiciones para  $T^1$  y las propiedades de  $X$ , se tiene, en términos de las funciones corriente  $\omega$ , de  $\vec{\varphi}$  y  $\psi$ , de  $\vec{u}^1$ , con  $\omega \in Y$ , que:

$$\begin{aligned} & (\omega, \psi) - \gamma \int_{R^+, z=-1} \psi(x, -1) \omega_x(x, -1) \\ &= \int_{R^+, z=-1} c_1(x) \omega_z(x, -1) + \int_{R^+, z=-1} c_2(x) \omega_x(x, -1) - \int_S (-\omega_z, \omega_x) \cdot \vec{s}_1, \end{aligned} \quad (18)$$

donde  $(\omega, \psi) = \int_S (\varphi_{i,j} + \varphi_{j,i})(v_{i,j}^1 + v_{j,i}^1)$ . La ecuación (18) puede escribirse como  $A(\omega, \psi) = L\omega$ , donde  $A(\omega, \psi) \equiv a(\omega, \psi) - b(\omega, \psi)$ ,  $a(\omega, \psi) \equiv \int_S (\varphi_{i,j} + \varphi_{j,i})(v_{i,j}^1 + v_{j,i}^1)$  y  $b(\omega, \psi) \equiv \gamma \int_{R^+, z=-1} \psi(x, -1) \omega_x(x, -1)$ . Tanto  $a$  como  $b$  son formas bilineales continuas en  $Y$  y

$$L\omega \equiv \int_{R^+, z=-1} c_1(x) \omega_z(x, -1) + \int_{R^+, z=-1} c_2(x) \omega(x, -1) - \int_S (-\omega_z, \omega_x) \cdot \vec{s}_1$$

es una forma lineal continua en  $Y$ , dada la regularidad de  $c_1, c_2$  y  $\vec{s}_1$  en infinito y el hecho de que la traza de  $H^2$  pertenece a  $H^1$  en un dominio acotado de dos dimensiones. Finalmente,  $A(\omega, \psi)$  es coerciva, pues por la desigualdad de Korn se tiene que:

$$A(\omega, \omega) \equiv a(\omega, \omega) - \gamma \int_{R^+, z=-1} \omega(x, -1) \omega_x(x, -1) = a(\omega, \omega) \geq C \|\omega\|_{H^2}.$$

Del teorema de Lax-Milgram se deduce la existencia de una única solución  $\psi \in H^2$ .

### 3.2. Regularidad en un entorno de la grounding line

Nos centraremos en estudiar la regularidad de la solución en un entorno del punto conflictivo  $(0, -1)$ , donde se tienen condiciones de contorno mixtas y por tanto puede darse algún tipo de singularidad. Así pues consideremos un entorno de la grounding line que denotaremos por  $\Omega_g \equiv B_R(-1, 0)$ , con  $R > 0$  suficientemente pequeño. Dada la naturaleza elíptica del problema puede deducirse que no sólo  $\psi \in H^2$  sino que además  $\psi \in C^4$  en el interior de  $S/\Omega_g$ . Para analizar la regularidad en la región  $\Omega_g$ , tomamos particiones del dominio, y consideramos la restricción de  $\psi$  a  $\Omega_g$ , que denotaremos por  $\psi_g$ . Tras varias manipulaciones algebraicas, se obtiene que  $\psi_g$  satisface el siguiente problema:

$$\Delta^2 \psi_g = J(x, z) \text{ en } \mathbb{R} \times [-1, +\infty], \quad (19)$$

$$\psi_g = \psi_{g,z} = 0 \text{ en } x < 0, z = -1, \quad (20)$$

$$\psi_{g,zz} - \psi_{g,xx} = G(x) \text{ en } x > 0, z = -1, \quad (21)$$

$$3\psi_{g,xxz} + \psi_{g,zzz} = F(x) \text{ en } x > 0, z = -1, \quad (22)$$

donde  $G(x)$  y  $F(x)$  pertenecen a  $L^2(\mathbb{R}^+)$ ,  $J(x, y) \in L^2(\mathbb{R}^+ \times [-1, +\infty])$  y son funciones de soporte compacto no conteniendo a  $(0, -1)$ . Podemos expresar la solución de (19)-(22) como  $\psi_g = \psi_g^{(1)} + \psi_g^{(2)}$  donde  $\psi_g^{(1)}$  resuelve (19)-(22) con condiciones de contorno homogéneas y  $\psi_g^{(2)}$  es armónica con condiciones de contorno dadas por (20)-(22). Puesto que la fuente  $J(x, z)$  tiene soporte compacto no conteniendo  $(0, -1)$ , puede decirse que  $\psi_g^{(1)}$  se comporta en un entorno de  $(0, -1)$  como solución de la versión homogénea de (19)-(22) que pertenece localmente a  $H^2$ . Formulando el problema para  $\psi_g^{(1)}$  en coordenadas polares  $(r, \theta)$  entorno a  $(0, -1)$ , con  $\theta = 0$  para  $x > 0, z = -1$ , y  $\theta = \pi$  para  $x < 0, z = -1$ , tenemos que las soluciones puede ser buscadas de la forma:  $\psi_g^{(1)}(r, \theta) = r^{\alpha+1} f_\alpha(\theta)$ , donde

$$f_\alpha(\theta) = A \sin((\alpha + 1)\theta) + B \cos((\alpha + 1)\theta) + C \sin((\alpha - 1)\theta) + D \cos((\alpha - 1)\theta).$$

Los coeficientes  $A, B, C$  y  $D$  deben ser determinados por la condiciones de contorno y  $\alpha$  elegido de modo que sean satisfechas. Teniendo en cuenta que  $\psi_g^{(1)} \in H_{loc}^2(B_R(-1, 0))$ , resulta que el primer valor de  $\alpha$  compatible es  $\alpha = \frac{1}{2}$  y por tanto:

$$\psi_g^{(1)} \sim Cr^{\frac{3}{2}} f_{\frac{1}{2}}(\theta) + O(r) \quad \text{cuando } r \rightarrow 0 \quad (23)$$

Respecto a  $\psi_g^{(2)}$ , ha de verificar  $\Delta^2 \psi_g^{(2)} = \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right)^2 \psi_g^{(2)} = 0$ , junto con las condiciones de contorno:  $-\frac{1}{r^3} \partial_{\theta\theta\theta} \psi_g^{(2)} - \frac{3}{r} \partial_{rr\theta} \psi_g^{(2)} + \frac{3}{r^2} \partial_{r\theta} \psi_g^{(2)} - \frac{4}{r^3} \partial_\theta \psi_g^{(2)} = F$  y  $\partial_{rr} \psi_g^{(2)} - \frac{1}{r^2} \partial_{\theta\theta} \psi_g^{(2)} - \frac{1}{r} \partial_r \psi_g^{(2)} = 0$  en  $\theta = 0$ , y  $\psi_g^{(2)} = \partial_\theta \psi_g^{(2)} = 0$  en  $\theta = \pi$ . La homogeneidad en  $r$  sugiere la introducción de la transformada de Mellin en  $r$  de  $\psi$ , definida por la expresión  $\tilde{\psi}(\lambda, \theta) = \int_0^\infty \psi(r, \theta) r^{i\lambda-2} dr$ . Multiplicando las ecuaciones anteriores por potencias de  $r$  adecuadas e integrando en  $r$  de 0 a infinito, se obtiene que el problema que tiene que cumplir la transformada  $\tilde{\psi}(\lambda, \theta)$  de  $\psi_g^{(2)}(r, \theta)$  presenta soluciones del tipo:

$$\tilde{\psi}(\lambda, \theta) = A \cos((i\lambda - 1)\theta) + B \sin((i\lambda - 1)\theta) + C \cos((i\lambda + 1)\theta) + D \sin((i\lambda + 1)\theta).$$

Los coeficientes  $A, B, C$  y  $D$  son funciones de  $\lambda$  que quedan determinados por las condiciones de contorno. Definiendo  $b = i\lambda - 1$ ,  $s = \sin((i\lambda - 1)\pi)$ ,  $c = \cos((i\lambda - 1)\pi)$  y  $\gamma =$

$2b(b+1)(b+2)$ , resulta que para  $\theta = 0$ ,  $\tilde{\psi}(\lambda, 0) = \frac{\tan((i\lambda-1)\pi)}{2\gamma} \tilde{F}(\lambda)$ , de lo que se deduce que  $\tilde{\psi}_{rrr}^{\frac{3}{2}} = -\frac{\tilde{F}(\lambda)}{2} \tan((i\lambda-1)\pi)$ . Utilizando la fórmula inversión, tenemos que  $\partial_{rrr}\psi_g^{(2)}(r, 0) = -\frac{1}{2\pi} \frac{1}{r^{\frac{3}{2}}} P.V. \int_0^\infty \frac{\xi^{\frac{3}{2}}}{r-\xi} F(\xi) d\xi$ , escribiéndola, para analizarla, de la forma  $\partial_{rrr}\psi_g^{(2)} = \psi_{rrr,1} + \psi_{rrr,2}$ , donde  $\psi_{rrr,1} = -\frac{1}{2\pi} \frac{1}{r^{\frac{1}{2}}} P.V. \int_0^\infty \frac{\xi^{\frac{1}{2}}}{r-\xi} f(\xi) d\xi$  y  $\psi_{rrr,2} = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{r^{\frac{3}{2}}} \int_0^\infty \xi^{\frac{1}{2}} f(\xi) d\xi$ . Por un lado tenemos que  $\int_{-\infty}^\infty \left| \widetilde{\psi_{rrr,1}}^s \right|^2 d\lambda \leq C \int_{-\infty}^\infty \left| \tilde{f}^s \right|^2 d\lambda$ ,  $0 < s < 1$ , ( $s \neq \frac{1}{2}$ ). Utilizando la identidad de Plancherel para transformadas de Mellin, resulta  $\|r^s \psi_{rrr,1}(r)\|_{L^2}^2 = \int_0^\infty \xi^{2s} |\psi_{rrr,1}(\xi)|^2 d\xi \leq C \int_0^\infty \xi^{2s} |f(\xi)|^2 d\xi \leq C \|f\|_{L^2}^2$  y por una desigualdad de tipo Hardy, se tiene que  $r^{\frac{1}{2}-s} |\psi_{rr,1}(r, 0) - \psi_{rr,1}(0, 0)| \leq \|r^s \psi_{rrr,1}\|_{L^2} \leq C \|f\|_{L^2}$ . Por otro lado, puesto que el soporte de  $f(\xi)$  es acotado, se obtiene que  $\int_0^\infty \xi^{\frac{1}{2}} f(\xi) d\xi \leq C \|f\|_{L^2}$ . De la estimaciones obtenidas para  $\psi_g^{(1)}$  y  $\psi_g^{(2)}$  se deduce que  $\partial_r \psi_g(r, 0) = 2Cr^{\frac{1}{2}} + O(r)$  cuando  $r \rightarrow 0$  y por tanto *la representación a primer orden de la frontera libre es  $b(x) = \varepsilon h(x) \sim Cx^{3/2}$ .*

#### 4. Problema no lineal

Los resultados obtenidos en el apartado anterior pueden ser generalizados al problema original no lineal. A continuación describiremos brevemente los pasos seguidos para probar la existencia de una única solución débil para el problema original no lineal, vía los teoremas del punto fijo de Banach y el de Lax-Milgram.

En primer lugar probamos la existencia y unicidad en el caso de que la geometría del dominio  $D$  fuese conocida. Asumiremos que la interfase  $\Gamma_2$  es suficientemente regular, digamos  $C^{1+\delta}$ . Argumentaremos de modo similar al que lo hicimos para el problema linealizado. Consideramos  $\vec{v} = \vec{v}^0 + \vec{v}^1$  donde  $\vec{v}^0$  es un campo de velocidades regular y con divergencia nula que satisface las condiciones de flujo de entrada y salida, así como las condiciones de contorno en  $z = 0$  y en  $(x, -1)$ ,  $x < 0$ . El problema para  $\vec{v}^1$  puede formularse del modo siguiente: *Encontrar  $\vec{v}^1$  tal que para toda  $\vec{\varphi} \in X$  (véase sección 3.2), con  $\psi^1$  y  $\omega$  funciones de corriente asociadas a  $\vec{v}^1$  y  $\vec{\varphi}$  respectivamente, se verifica,*

$$\int_D (v_{i,j}^1 + v_{j,i}^1)(\varphi_{i,j} + \varphi_{j,i}) dx dy + \gamma \int_0^M \psi^1(x, b(x)) \frac{d}{dx} \omega(x, b(x)) dx = \int_{\Gamma_2} \left( \vec{t} T(\vec{v}^0) \vec{n} \right) \vec{\varphi} \cdot \vec{t} + \int_{\Gamma_2} \left( \vec{n} T(\vec{v}^0) \vec{n} \right) \vec{\varphi} \cdot \vec{n} ds - \gamma \int_{\Gamma_2} \psi^0(x, b(x)) \vec{\varphi} \cdot \vec{n} ds - \int_D \vec{\varphi} \cdot \vec{J} dx dy \equiv \langle f, \vec{\varphi} \rangle. \quad (24)$$

Esta formulación permite aplicar el teorema de Lax-Milgram, la desigualdad de Korn, la de trazas y las inclusiones de Sobolev, de donde se concluye la existencia de  $\vec{v}^1 \in (H^1(D))$  verificando (24) y la siguiente estimación:

$$\left\| \vec{v}^1 \right\|_{H^1(D)} \leq C \left( \|T(\vec{v}^0) \vec{n}\|_{L^2(\Gamma_2)} + \gamma \|\psi^0\|_{L^2(\Gamma_2)} + \left\| \vec{J} \right\|_{L^2(D)} \right) \leq C \|\psi^0\|_{H^3(D)}.$$

A continuación reformulamos el problema de frontera libre como sigue: *Encontrar el campo de velocidades  $\vec{v}^1$  y una curva  $z = b(x)$  que describa  $\Gamma_2$  verificando*

$$b_x = \frac{1}{U} (v_z^0 + v_z^1) - \frac{1}{U} b_x (v_x^0 + v_x^1) \equiv \frac{1}{U} (v_z^0 + v_z^1) + F \left[ \vec{v}^0 + \vec{v}^1, b_x \right]. \quad (25)$$

y tal que (24) y (25) son satisfechas simultáneamente. Para resolver este problema buscaremos un punto fijo próximo a la solución del problema linealizado. Esto implicará relacionar el problema en  $D$  con el problema definido en  $S = [-M, M] \times [-1, 0]$ , mediante un difeomorfismo adecuado. Tras un cambio de variables adecuado se tiene la siguiente reformulación de (24):

$$a(\vec{v}^1, \vec{\varphi}) \equiv \int_S (v_{i,j'}^1 + v_{j,i'}^1) (\varphi_{i,j'} + \varphi_{j,i'}) dx' dy' + \gamma \int_0^M \psi^1 \omega_{x'}(x', -1) dx' = \langle f', \vec{\varphi} \rangle + \left\langle G(\vec{v}^1, b), \vec{\varphi} \right\rangle,$$

$$\text{con } \langle f', \vec{\varphi} \rangle = \int_0^M \left( (\vec{t} T(\vec{v}^0) \vec{n}) \varphi_{x'} + (\vec{n} T(\vec{v}^0) \vec{n}) \varphi_{z'} \right) dx - \gamma \int_0^M \psi^0(x, b(x)) \varphi_{z'} dx$$

donde  $\left\langle G(\vec{v}^1, b), \vec{\varphi} \right\rangle \leq C \|b\|_{W^{1,\infty}} \left( \|\psi^0\|_{H^3(S)} + \|\vec{v}^1\|_{H^1(S)} \right) \|\vec{\varphi}\|_{H^1(S)}$  con  $\|b\|_{W^{1,\infty}}$  suficientemente pequeño y  $\langle f', \vec{\varphi} \rangle \leq C \|\psi^0\|_{H^3(S)} \|\vec{\varphi}\|_{H^1(S)}$ . Para resolver el problema no lineal por el método del punto fijo consideremos el problema definido por:

$$a(\vec{v}^1, \vec{\varphi}) = \langle f', \vec{\varphi} \rangle + \langle G(\vec{w}, \bar{b}), \vec{\varphi} \rangle \text{ y } b_x = \frac{1}{U} (v_z^0 + v_z^1) + F \left[ \vec{v}^0 + \vec{w}, \bar{b}_x \right], \quad (26)$$

que representa una aplicación no lineal  $T$  de  $(\bar{b}, \vec{w})$  en  $(b, \vec{v}^1)$ . La solución que buscamos es un punto fijo de  $T$ . Si  $\vec{w} \in H^1(S)$  y  $b \in W^{1,\infty}$ , puede deducirse que

$$\|b\|_{C^{1+\delta}} + \|\vec{v}^1\|_{H^{1+\delta}(S)} \leq C \|\psi^0\|_{H^2(S)} \left( 1 + \|\bar{b}\|_{C^{1+\delta}} + \|\vec{w}\|_{H^{1+\delta}(S)} \right) + C \|\bar{b}\|_{C^{1+\delta}} \|\vec{w}\|_{H^{1+\delta}(S)},$$

y por tanto, la aplicación  $T$  transforma la bola de radio  $\varepsilon$  en  $C^{1+\delta}(0, M) \times H^2(S)$  en una bola de radio  $R = C \|\psi^0\|_{H^3(S)} (1 + \varepsilon) + C\varepsilon^2$  que es más pequeña que  $\varepsilon$  si ambos,  $\varepsilon$  y  $\|\psi^0\|_{H^3(S)}$ , son suficientemente pequeños. De este modo,  $T$  sería una contracción y por el teorema del punto fijo de Banach existiría una única solución del problema de frontera libre no lineal. Además

$$b(x) = Cx^{1+\delta} \sup \left( \frac{1}{x^\delta} \left| \frac{1}{U} (v_z^0 + v_z^1) + F \left[ \vec{v}^0 + \vec{v}^1, b_x \right] \right| \right) \leq Cx^{1+\delta}. \quad (27)$$

Esto permite aplicar el difeomorfismo considerado en secciones anteriores y extender al caso no lineal el análisis realizado para el problema linealizado, obteniéndose que el comportamiento asintótico de  $b(x)$  cerca de  $(0, -1)$  es:  $b(x) = Cx^{\frac{3}{2}} + o(x^{\frac{3}{2}})$ .

## Referencias

- [1] M.A. Fontelos, A.I. Muñoz. *A free boundary problem in glaciology: The motion of grounding lines. Interfaces and free boundaries*, 9 (2007), 67–93.