

Topologie comparée d'une courbe polaire et de sa courbe discriminante.

Hélène MAUGENDRE

Résumé

Étant donné f un germe de fonction analytique à l'origine de \mathbb{C}^2 , nous comparons la complexité topologique de la courbe discriminante de f à celle de sa courbe polaire.

Abstract

Let f be an analytic function germ at 0 in \mathbb{C}^2 . We compare the topological complexity of the discriminant curve of f to the one of its polar curve.

1 Introduction

Soit f un germe de fonction analytique à l'origine de \mathbb{C}^2 , et soit ℓ une forme linéaire sur \mathbb{C}^2 , transverse à f et définie par $\ell(x, y) = ax + by$.

Définition. *Le germe polaire de f pour la direction ℓ , est le produit des composantes de l'expression $a(\partial f/\partial y) - b(\partial f/\partial x)$, qui ne divisent pas f . Nous le notons $\hat{\Gamma}$.*

La courbe polaire de f pour la direction ℓ , notée Γ , est le lieu des zéros réduit de $\hat{\Gamma}$.

Remarque. La courbe $\{\ell = 0\}$ n'est pas une branche de Γ .

Si f est à singularité isolée à l'origine, alors $\{a(\partial f/\partial y) - b(\partial f/\partial x) = 0\}$ et $\{f = 0\}$ n'ont pas de branche commune.

Si f est de la forme $f = g^r$ avec g germe lisse, alors Γ est vide.

Définition. On appelle *courbe discriminante de f pour la direction ℓ* , l'image par l'application $\Phi = (\ell, f)$ de la courbe polaire Γ . On la note Δ .

Le but de cet article est de comparer la complexité topologique de la courbe discriminante de f à celle de la courbe polaire de f pour une direction ℓ transverse à f .

2 Présentation des résultats

2.1 Premiers résultats

Définition. La multiplicité à l'origine de la courbe $f^{-1}(0)$ est la valuation de f . On la note $m_0(f^{-1}(0))$.

Désignons par (u, v) les coordonnées complexes de $\Phi((\mathbf{C}^2, 0))$. Comme $\{f = 0\}$ et Γ n'ont pas de branche commune, $\{v = 0\}$ n'est donc pas une branche de Δ . De plus, une branche δ de Δ est tangente à l'axe $v = 0$ (voir [L]). Par conséquent, il existe un développement de Puiseux de δ de la forme (voir [BK]) :

$$v = \sum_{k \in \mathbf{N}^*} b_k u^{\frac{k+m}{m}}$$

où $m \in \mathbf{N}^*$, $b_k \in \mathbf{C}$ et au moins un des b_k est non nul.

Remarque. La multiplicité à l'origine de δ est inférieure ou égale à m et divise m . Si m est minimum pour l'existence d'un tel développement de Puiseux, alors $m_0(\delta) = m$.

Étant donné une branche δ de Δ , nous notons γ une branche de Γ telle que $\Phi(\gamma) = \delta$.

Le premier résultat que nous obtenons est le suivant (voir aussi [T1] et [T2] pour une direction ℓ générale).

Proposition. La multiplicité à l'origine de δ divise celle de γ .

Corollaire 1. Si γ est une branche lisse de Γ , alors δ est également lisse.

2.2 Résolution minimale

Le théorème principal que nous démontrons s'obtient en considérant la résolution minimale de $f \cdot \ell \cdot \hat{\Gamma}$.

Soit π la résolution minimale d'un germe de fonction analytique g à l'origine de \mathbf{C}^2 . L'arbre de la résolution minimale de g , noté $A(g^{-1}(0))$, se construit comme suit. Chaque composante irréductible E_S du diviseur exceptionnel $\pi^{-1}(0)$ correspond à un sommet S de $A(g^{-1}(0))$. Lorsque deux composantes du diviseur exceptionnel s'intersectent on relie par une arête les sommets de $A(g^{-1}(0))$ qui les représentent. À chaque sommet S , on ajoute autant de flèches qu'il existe de composantes irréductibles de la transformée stricte, $\pi^{-1}(g^{-1}(0) \setminus \{0\})$, de $g^{-1}(0)$, qui intersectent E_S . Chaque flèche représente la transformée stricte d'une branche de $g^{-1}(0)$. Notons que le premier sommet de $A(g^{-1}(0))$ est le sommet représentant la composante du diviseur exceptionnel obtenue en éclatant l'origine dans \mathbf{C}^2 .

Définition. La *géodésique d'une composante de $g^{-1}(0)$* est le chemin orienté qui joint le premier sommet de $A(g^{-1}(0))$ à la flèche qui représente cette composante.

L'arbre $A(g^{-1}(0))$ est orienté avec pour origine le premier sommet.

Définition. Un sommet S est un **sommet de rupture** si le nombre de flèches et d'arêtes qui le rencontrent est au moins égal à trois.

Un **sommet de rupture caractéristique** est un sommet de rupture qui provient d'une paire caractéristique de Puiseux d'au moins une branche de $g^{-1}(0)$.

Tout autre sommet de rupture est appelé **sommet de rupture de coïncidence pure**. (Voir [Ma2] et aussi [MW]).

Considérons désormais l'arbre $A((f \cdot \ell \cdot \hat{\Gamma})^{-1}(0))$, noté \hat{A} .

Remarque. Il existe un plongement naturel de $A((f \cdot \ell)^{-1}(0)) := A$ dans \hat{A} (voir [LMW2]).

On colore de rouge, respectivement jaune, chaque arête de \hat{A} qui se trouve sur une géodésique de $(f \cdot \ell)^{-1}(0)$, respectivement $(\hat{\Gamma})^{-1}(0)$. Les autres parties de \hat{A} (celles qui ne sont pas situées sur une géodésique) sont tracées en blanc.

Comme ℓ est transverse à f , la flèche qui représente la transformée stricte de $\ell^{-1}(0)$ s'accroche au premier sommet de \hat{A} .

Définition. Soit S un sommet de rupture (rouge) de A . La zone de rupture de S est la réunion de S avec les composantes connexes de $A \setminus \{S\}$ qui ne possèdent aucun sommet de rupture.

Soit S un sommet de rupture bicolore rouge-jaune de \hat{A} . La zone de rupture de S relative à $f \cdot \ell$ est la réunion de S avec les composantes connexes de $\hat{A} \setminus \{S\}$ qui partent de S par une arête unicolore (jaune, rouge ou blanche).

Définition. On dit que la géodésique d'une branche γ de Γ sort par S si S est le dernier sommet bicolore de la géodésique de γ , i.e. la géodésique de γ devient unicolore jaune. (Ce sommet est forcément de rupture pour \hat{A}).

Définition. Soit S un sommet de rupture de \hat{A} . On appelle partie polaire associée à S et on note Γ_S la réunion des branches de Γ dont la géodésique sort par S . On note $\Delta_S = \Phi(\Gamma_S)$.

D'après les résultats de [LMW2], le sommet S d'où la géodésique d'une branche γ de Γ sort est un sommet de rupture de A , et de plus, pour tout sommet de rupture S de A il existe une branche γ de Γ d'où la géodésique sort. Autrement dit, tout sommet de rupture S de \hat{A} qui appartient au moins à une géodésique d'une composante de $(f \cdot \ell)^{-1}(0)$ est tel que Γ_S n'est pas vide.

Nous pouvons interpréter ce résultat en disant que les sommets de rupture de \hat{A} qui ne sont pas des sommets de rupture de A sont unicolores jaune ; ou encore, tout sommet de rupture bicolore rouge-jaune dans \hat{A} est un sommet de rupture de A . Autrement dit, pour tracer \hat{A} à partir de A , on ne rajoute aucun sommet de rupture sur les géodésiques des branches de $(f \cdot \ell)^{-1}(0)$.

Théorème. Soit S un sommet de rupture bicolore rouge-jaune de \hat{A} et soit $N - 1$ le nombre de sommets de rupture caractéristiques qui précèdent S dans \hat{A} (S non compris). Alors le nombre de sommets de rupture de $A(\Delta_S)$ est supérieur ou égal au nombre de sommets de rupture de $A(\Gamma_S)$ moins N .

Remarque. Il est clair que les $N - 1$ sommets de rupture caractéristiques qui précèdent S sont aussi bicolores rouge-jaune. Le nombre de sommets de rupture caractéristiques de $A(\Gamma_S)$ est supérieur ou égal à $N - 1$.

Corollaire 2. *Si Γ_S est irréductible alors le nombre de paires caractéristiques de Δ_S est supérieur ou égal au nombre de paires caractéristiques de Γ_S moins N .*

3 Démonstrations

3.1 Démonstration de la proposition et du corollaire 1

3.1.1 Quotients polaires

Avec les notations du paragraphe 2.1, soit δ une branche de Δ de développement de Puiseux $v = \sum_{k \in \mathbb{N}} b_k u^{\frac{k+m}{m}}$, où $m \in \mathbb{N}^*$, $b_k \in \mathbb{C}$ et au moins un des b_k est non nul.

Soit k_0 le plus petit élément de \mathbb{N}^* tel que b_{k_0} soit non nul. On note $(k_0 + m)/m = p_\delta/q_\delta$ avec $\text{pgcd}(p_\delta, q_\delta) = 1$.

Définition. *L'ensemble des quotients polaires de f pour la direction ℓ est l'ensemble constitué des nombres rationnels p_δ/q_δ , pour δ branche de Δ .*

Notons $(g^{-1}(0), h^{-1}(0))_0$ la multiplicité d'intersection à l'origine entre les germes de courbes $g^{-1}(0)$ et $h^{-1}(0)$ (voir [C]). Soit δ une branche de Δ et soit γ une branche de Γ avec $\Phi(\gamma) = \delta$. D'après [LMW1] on a :

Proposition a. *Le quotient polaire p_δ/q_δ est égal à*

$$(f^{-1}(0), \gamma)_0 / (\ell^{-1}(0), \gamma)_0.$$

Soit S un sommet de rupture de A et $C_S^{-1}(0)$ un germe de courbe réduit à l'origine de \mathbb{C}^2 dont la transformée stricte est une curvette de E_S , c'est-à-dire un germe de courbe lisse qui intersecte E_S transversalement en un point lisse. D'après [LMW2] nous avons :

Proposition b. *L'ensemble des quotients polaires de f est égal à l'ensemble constitué des nombres rationnels*

$$(f^{-1}(0), C_S^{-1}(0))_0 / (\ell^{-1}(0), C_S^{-1}(0))_0.$$

3.1.2 Démonstrations

Commençons par montrer que si ℓ est transverse à f alors ℓ est transverse à $\hat{\Gamma}$.

Comme ℓ est transverse à f , à l'aide de la proposition *b* qui précède, on vérifie facilement que tout quotient polaire de f est supérieur ou égal à $m_0(f^{-1}(0))$. S'il existait une composante $\hat{\gamma}$ de $\hat{\Gamma}$ tangente à ℓ , $\hat{\gamma}$ serait transverse à f et par conséquent, d'après la proposition *a* qui précède, on aurait un quotient polaire strictement plus petit que $m_0(f^{-1}(0))$, ce qui est impossible.

Par conséquent, comme ℓ est transverse à $\hat{\Gamma}$, pour toute composante $\hat{\gamma}$ de $\hat{\Gamma}$ on a $m_0(\gamma) = (\ell^{-1}(0), \gamma)_0$.

De plus la restriction de Φ à γ est un revêtement, d'ordre k_γ , sur δ (voir [LMW1]). On obtient ainsi $(\ell^{-1}(0), \gamma)_0 = k_\gamma(\{u = 0\}, \delta)_0$. Comme δ est tangente à $\{v = 0\}$ donc transverse à $\{u = 0\}$ on a :

$$m_0(\gamma) = (\ell^{-1}(0), \gamma)_0 = k_\gamma(\{u = 0\}, \delta)_0 = k_\gamma m_0(\delta),$$

ce qui achève la démonstration de la proposition. ■

Le corollaire 1 est une conséquence directe de la proposition qui précède. En effet, si γ est lisse, on a $1 \leq m_0(\delta) \leq m_0(\gamma) = 1$. ■

3.2 Démonstration du théorème et du corollaire 2

La démonstration du théorème utilise la théorie de Waldhausen. Dans le paragraphe qui suit avant de procéder à la démonstration du théorème, nous commençons par donner quelques rappels sur les variétés de Waldhausen.

3.2.1 Rappels sur les variétés de Waldhausen

Définition. Une variété de Seifert est une variété différentiable, de dimension trois, compacte, connexe et orientée, munie d'un feuilletage

en cercles différentiable et orienté, pour lequel toute feuille possède un voisinage tubulaire compact qui est une réunion de feuilles. (Voir [JS]).

Soit g un germe de fonction analytique à l'origine de \mathbf{C}^2 .

Notons S_ε^3 la sphère centrée à l'origine de \mathbf{C}^2 , de rayon ε suffisamment petit pour que le type topologique de l'entrelacs $K_g = g^{-1}(0) \cap S_\varepsilon^3$ ne dépende pas de ε . (Voir [Mi]).

La résolution des singularités des courbes planes implique l'existence d'une décomposition de S_ε^3 en une réunion finie de variétés de Seifert telle que les composantes de K_g soient des feuilles de certaines de ces variétés. Une telle décomposition de S_ε^3 s'appelle une décomposition de Waldhausen de S_ε^3 pour K_g . Elle est dite minimale si le nombre de variétés de Seifert est minimal. Elle est alors unique à isotopie près. Par conséquent, la décomposition minimale de Waldhausen de S_ε^3 pour K_g est un invariant du type topologique de g . (Voir [J], [JS], [Jo], [W]).

Remarque. Nous rappelons que dans un cadre plus général il existe des cas exceptionnels avec non unicité de décomposition minimale (voir [N] et [W]). Cependant, ces cas ne se présentent jamais dans le contexte particulier de décomposition minimale de Waldhausen de S_ε^3 pour un entrelacs associé à un germe de courbe plane (en effet les opérations R0 à R8 de [N, p. 304-306] n'apparaissent jamais).

3.2.2 Variétés de Waldhausen et résolution minimale

Il existe une correspondance bijective entre l'ensemble des sommets de rupture de $A(g^{-1}(0))$ et l'ensemble des variétés de Seifert de la décomposition minimale de Waldhausen de S_ε^3 pour K_g . Ainsi, toute zone de rupture associée à un sommet de rupture S de $A(g^{-1}(0))$ correspond à une variété de Seifert V de la décomposition minimale de Waldhausen de S_ε^3 pour K_g .

Or, au paragraphe 2.2 nous avons vu que tout sommet de rupture bicolore rouge-jaune de \hat{A} est un sommet de rupture de A . Par conséquent, toute zone de rupture relative à $f \cdot \ell$ associée à un sommet de rupture bicolore rouge-jaune de \hat{A} correspond à une zone de rupture de A . Cette zone de rupture de A fournit une variété de Seifert V de la décomposition minimale de Waldhausen de S_ε^3 pour $K_{f \cdot \ell}$.

Connaître le nombre de sommets de rupture de $A(\Gamma_S)$ succédant à S revient à établir la décomposition minimale de Waldhausen de V pour

$$K_{\Gamma_S} = \Gamma_S \cap S_\varepsilon^3.$$

Comparer le nombre de sommets de rupture de $A(\Gamma_S)$ et $A(\Delta_S) = A(\Phi(\Gamma_S))$ revient ainsi à déterminer le nombre de variétés de Seifert des décompositions minimales de Waldhausen de S_ε^3 pour K_{Γ_S} et de la sphère S^3 (de $\Phi(C^2)$) pour $K_{\Delta_S} = \Delta_S \cap S^3$.

Le moyen d'obtenir ces décompositions utilise les résultats de [LMW1] et [Ma1]. Rappelons-en ici succinctement le contenu.

Soient $\eta, \theta, \varepsilon, \omega$ des réels strictement positifs tels que $1 \gg \varepsilon \gg \theta \gg \eta \gg \omega > 0$. Notons D_ε^4 la boule de bord S_ε^3 .

Désignons par B la boule $B = \{(x, y) \in D_\varepsilon^4 \mid \ell(x, y) \leq \theta\}$. Il existe un difféomorphisme à coins de $\Sigma = (f^{-1}(S_\eta^1) \cap B) \cup (f^{-1}(D_\eta^2) \cap \partial B)$ (où ∂B désigne le bord de B) sur la sphère S_ε^3 . (Voir [LMW1]). Comme nous l'avons déjà constaté dans [Ma1], il est plus facile de travailler avec Σ plutôt qu'avec S_ε^3 . C'est pourquoi, au lieu de V , nous considérons \hat{V} une variété de Seifert de la décomposition minimale de Waldhausen de Σ pour $\tilde{K}_{f,\ell} = \Sigma \cap (f \cdot \ell)^{-1}(0)$, \hat{V} isotope à V . Le complémentaire dans Σ d'un petit voisinage tubulaire ouvert de $\tilde{K}_{f,\ell}$ est noté $\tilde{M}_{f,\ell}$.

Pour un bon choix de η, θ et ε (voir [Ma1]), la restriction de Φ à Σ est un revêtement ramifié qui admet $\Gamma \cap \Sigma$ et les branches de $f^{-1}(0)$ non réduites pour lieu de ramification et $\Delta \cap [(D_\theta^2 \times S_\eta^1) \cup (S_\theta^1 \times D_\eta^2)] = \Delta \cap (D_\theta^2 \times S_\eta^1)$, union $S_\theta^1 \times \{0\}$ (s'il existe des branches de $f^{-1}(0)$ non réduites), pour valeurs de ramification.

Pour une description plus approfondie de tels revêtements voir [S].

En fait, nous allons établir la décomposition minimale de Waldhausen de $\tilde{M}_{f,\ell}$. En effet, la décomposition minimale de Waldhausen de Σ pour $\tilde{K}_{f,\ell}$ s'obtient facilement à partir de celle de $\hat{M}_{f,\ell}$ en prolongeant le feuilletage induit sur le bord de chaque tore, composante connexe du voisinage tubulaire ouvert de $\tilde{K}_{f,\ell}$, au tore tout entier. Pour établir la décomposition minimale de Waldhausen de $\tilde{M}_{f,\ell}$, nous choisissons un réel ω suffisamment petit pour que $(D_\omega^2 \times S_\eta^1) \cap \Delta = \emptyset$ (un tel ω existe car $\{0\} \times S_\eta^1$ n'appartient pas à $\Delta \cap (D_\theta^2 \times S_\eta^1)$). Un voisinage tubulaire ouvert de $\tilde{K}_{f,\ell}$ est alors :

$$U(\tilde{K}_{f,\ell}) = \Phi^{-1}(S_\theta^1 \times \overset{\circ}{D}_\eta^2) \cup \Phi^{-1}(\overset{\circ}{D}_\omega^2 \times S_\eta^1).$$

Dès lors la restriction de Φ à $\Sigma \setminus U(\tilde{K}_{f,\ell})$ est un revêtement ramifié sur

$(D_\theta^2 \times S_\eta^1) \setminus (\overset{\circ}{D}_\omega^2 \times S_\eta^1)$ qui admet

$$\Gamma \cap \Sigma = \Gamma \cap (\Sigma \setminus U(\tilde{K}_{f,\ell}))$$

pour lieu de ramification et

$$\Delta \cap (D_\theta^2 \times S_\eta^1) = \Delta \cap ((D_\theta^2 \times S_\eta^1) \setminus (\overset{\circ}{D}_\omega^2 \times S_\eta^1))$$

pour valeurs de ramification.

Par conséquent, si nous notons \tilde{W} la variété de la décomposition minimale de Waldhausen de $\tilde{M}_{f,\ell}$, qui donne \tilde{V} après avoir rebouché les tores de $U(\tilde{K}_{f,\ell})$, la restriction de Φ à \tilde{W} est un revêtement ramifié de \tilde{W} sur une zone polaire Z_i – laquelle est un tore épaissi d'âme $\{0\} \times S_\eta^1$ (voir [LMW1] ou [Ma1]) – qui admet $\tilde{K}_{\Gamma_S} = \tilde{W} \cap \Gamma_S$ pour lieu de ramification et $\tilde{K}_{\Delta_S} = \Delta_S \cap Z_i$ pour valeurs de ramification.

Dans [Ma1] nous avons décrit la construction de la décomposition de Waldhausen de $\tilde{M}_{f,\ell}$ qui admet les composantes de $\Gamma \cap \Sigma$ pour feuilles, à partir de la décomposition minimale de Waldhausen de $(D_\theta^2 \times S_\eta^1) \setminus (\overset{\circ}{D}_\omega^2 \times S_\eta^1)$ relative à $\Delta \cap (D_\theta^2 \times S_\eta^1)$.

Par la même méthode nous pouvons, en particulier, décrire la décomposition de Waldhausen de \tilde{W} pour \tilde{K}_{Γ_S} , à partir de la décomposition minimale de Waldhausen de Z_i pour \tilde{K}_{Δ_S} .

Remarque. (i) Les $N - 1$ premiers sommets de rupture de $A(\Gamma_S)$, lesquels sont caractéristiques (paragraphe 2.2) correspondent à des variétés de Seifert \tilde{W}_k de la décomposition minimale de Waldhausen de $\Sigma \setminus U(\tilde{K}_{f,\ell})$ pour \tilde{K}_{Γ_S} qui sont telles que $\Phi(\tilde{W}_k) = Z_k$ où $k < i$. (Voir [LMW1] et [LMW2]). Par conséquent ces $N - 1$ sommets n'interviennent pas dans la décomposition minimale de Waldhausen de Z_i pour \tilde{K}_{Δ_S} .

(ii) En outre le sommet S , n'est pas forcément associé à un sommet de rupture de $A(\Delta_S)$. Par construction, une condition nécessaire pour que S ne soit pas associé à un sommet de rupture de $A(\Delta_S)$ est que le quotient polaire associé à S soit un entier. En effet, sinon, comme le quotient polaire associé à S correspond au premier exposant des développements de Puiseux de chaque branche δ de Δ_S , cet exposant est alors un exposant caractéristique de Puiseux et fournit donc un sommet de rupture caractéristique de $A(\Delta_S)$. La condition devient nécessaire

et suffisante si, de plus, ce quotient polaire n'est pas un exposant de coïncidence entre deux branches δ de Δ_S , car alors il ne correspond pas non plus à un sommet de rupture de coïncidence pure.

Démonstration du théorème

La décomposition minimale de Waldhausen de Z_i pour \tilde{K}_{Δ_S} s'établit uniquement avec la topologie de Δ_S . En particulier, lorsque l'on a considéré tous les sommets de rupture de $A(\Delta_S)$, i.e. que l'on a construit toutes les variétés de Seifert qui leur sont associées, alors pour chaque branche δ de Δ_S , on peut trouver dans Z_i un voisinage tubulaire T de $\delta \cap Z_i$, lequel est constitué d'une réunion de feuilles de la décomposition minimale de Waldhausen de Z_i pour \tilde{K}_{Δ_S} . Ce voisinage tubulaire est le fibré normal de $\delta \cap Z_i$. Lorsqu'on le relève par l'application Φ , chacune des composantes connexes obtenues est (par définition de Φ) une réunion de feuilles de la décomposition de Waldhausen de \tilde{W} pour \tilde{K}_{Γ_S} . Ceci est vrai en particulier pour la composante connexe qui contient $\gamma \cap \tilde{W}$ (où $\Phi(\gamma) = \delta$) laquelle est le fibré normal de $\gamma \cap \tilde{W}$. À ce stade on a donc obtenu une décomposition de Waldhausen de Σ pour \tilde{K}_{Γ_S} , non nécessairement minimale, mais à partir de laquelle on peut établir la minimale. Par conséquent tous les sommets de rupture de $A(\Gamma_S)$ ont été considérés et leur nombre est bien inférieur ou égal au nombre de sommets de rupture de $A(\Delta_S)$ plus N .

■

Démonstration du corollaire 2

Si Γ_S est irréductible, alors Δ_S l'est aussi. Par conséquent $A(\Gamma_S)$ et $A(\Delta_S)$ ne possèdent aucun sommet de rupture de coïncidence pure (voir [Ma2]). Ainsi, chaque sommet de rupture de $A(\Gamma_S)$ et de $A(\Delta_S)$ correspond à une paire caractéristique de Puiseux ; d'où le corollaire 2.

■

Remerciements.

Je remercie Françoise Michel et Claude Weber pour leurs précieux conseils.

Bibliographie

- [BK] E. BRIESKORN et H. KNÖRRER, *Plane Algebraic Curves*, Birkhauser Verlag, 1986.
- [C] A. CHENCINER, *Courbes algébriques planes*, Publications mathématiques de l'Université Paris 7, 1978.
- [J] W. JACO, *Lectures on Three-Manifold Topology*, A.M.S., 43 (1980).
- [JS] W. JACO et P. SHALEN, *Seifert Fibered Spaces in Three-Manifolds*, A.M.S., Memoirs, n° 220, 1979.
- [Jo] K. JOHANNSON, *Homotopy equivalence of three-manifolds with boundaries*, Lect. Notes Math., 761 (1979) New York Berlin Heidelberg, Springer.
- [L] D.T. LÊ, *Calcul du nombre de cycles évanouissants d'une hypersurface complexe*, Ann. Inst. Fourier 23, fasc. 4, 1973, p. 261-270.
- [LMW1] D.T. LÊ, F. MICHEL, C. WEBER, *Courbes polaires et topologie des courbes planes*, Ann.Scién.E.N.S., 4ième série, T 24, 1991, p.141-169.
- [LMW2] D.T. LÊ, F. MICHEL, C. WEBER, *Sur le comportement des courbes polaires associées aux germes de courbes planes*, Compositio Mathematica 72, 1989, p. 87-113.
- [Ma1] H. MAUGENDRE, *Discriminant of a germ $\Phi : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ and Seifert fibered manifolds*, Journal of the London Mathematical Society, Vol. 59, part 1, 1999, p. 207-226.
- [Ma2] H. MAUGENDRE, *Discriminant d'un germe $\Phi : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ et résolution minimale de $f \cdot g$* , Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, vol. VII, n° 3, 1998, p. 497-525.
- [MW] F. MICHEL, C. WEBER, *Topologie des germes de courbes planes à plusieurs branches*, Prépublication de l'Université de Genève, 1985.

- [Mi] J. MILNOR, *Singular Points of Complex Hypersurfaces*, Princeton University Press, 1968.
- [N] W. NEUMANN, *A calculus for plumbing applied to the topology of complex surface singularities and degenerating complex curves*, Transactions of the A.M.S. , vol. 268, n^o 2, 1981, 299-344.
- [S] C. SAFONT, *Coverings of S^3_2 branched over iterated torus links*, Revista Matemática de la Universidad Complutense de Madrid, vol. 3, n^o 2 y 3, 1990.
- [T1] B. TEISSIER, *Singularities, Arcata 1974*, Proc. A.M.S. Symp., n^o 29.
- [T2] B. TEISSIER, *Invariants polaires des singularités d'hypersurfaces*, Inv. Math., vol. 40, 1977, p. 267-292.
- [W] F. WALDHAUSEN, *Eine klasse von 3-dimensionalen Mannigfaltigkeiten*, Invent. Math., 3 (1967) 308-333 and Inv. Math., 4 (1967) 87-117.

Hélène Maugendre
Centre de Mathématiques et d'Informatique
39 rue F. Joliot-Curie
13 453 MARSEILLE Cedex 13
e-mail: maugendr@gyptis.univ-mrs.fr

Recibido: 8 de Febrero de 1999

Revisado: 27 de Abril de 1999