REVISTA MATEMÁTICA COMPLUTENSE (2000) vol. XIII, num. 2, 351-366 ISSN 1139-1138

# DISTRIBUTIONS GAUSSIENNES ET TEMPS LOCAUX D'INTERSECTION

H.OUERDIANE et A. REZGUI

**Abstract**

Let $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ be a probability space and $\{X_t,\ t \geq 0\}$ a stochastic gaussian process. Using white noise tools we give a mathematical meaning to this formel expression,
$\int_0^1 \int_0^1 \delta(X_t - X_s)\, dsdt$, as a Hida distribution, this to exprime the intersection local time of any gaussian process.
As an example we study Brownian motion and Ornstein-Uhlenbeck process.

## 1 Introduction

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $\{X_t;\ t \geq 0\}$ un processus stochastique continu à valeur dans $\mathbf{R}^d$, $d \geq 1$. On définit pour $B$ borélien borné de $\mathbf{R}_+^2$ et pour presque tout $\omega \in \Omega$, la mesure $\mu_B$ de $\mathbf{R}^d$, dite mesure du temps local, par :

$$\mu_B(\Gamma) = \lambda_2\{(t,s) \in B;\ X_t - X_s \in \Gamma\}$$

où $\Gamma$ est un borélien de $\mathbf{R}^d$ et où $\lambda_2$ est la mesure de Lebesgue de $\mathbf{R}_+^2$. Si de plus pour presque tout $\omega \in \Omega$, $\mu_B$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue $\lambda_d$ de $\mathbf{R}^d$, on définit alors le temps local du processus $\{X_t\}$ par:

$$\alpha(x, B) := \frac{d\mu_B}{d\lambda_d}(x).$$

Il se trouve alors que l'existence d'un tel temps local dépend non seulement du processus $\{X_t\}$ mais aussi de la dimension $d$.
Par exemple si $\{X_t\}$ est un mouvement Brownien, le temps local n'existe que pour $d = 1, 2\, et\, 3$ voir [12],[2].

1991 Mathematics Subject Classification: 60G15-60G57-41-46.
Servicio de Publicaciones. Universidad Complutense. Madrid, 2000

D'autre part le temps local $\alpha(x,B)$ exprime intuitivement le temps que le processus $\{X_t - X_s\}_{t,s\geq 0}$ passe au point $x$, pendant la durée $B$, ce qui nous permet de donner un sens à l'expression informelle "$\int_B \delta_x(X_t - X_s)\,dsdt$" par $\alpha(x,B)$, où $\delta_x$ désigne la mesure de Dirac sur $\mathbf{R}^d$, au point $x$.
Lorsque $x = 0$, $\int_B \delta_0(X_t - X_s)\,dsdt$ exprime donc le temps que la trajectoire $\{X_t(\omega)\}_{t\geq 0}$ passe en se rencontrant elle même et ceci pendant la durée $B$. Cette quantité, dite temps local d'intersection du processus $\{X_t\}$, a fait l'objet d'étude de plusieurs auteurs surtout dans le cas où le processus $\{X_t\}$ est le mouvement Brownien multidimensionel $\{B_t\}$.
A partir de maintenant on note $\delta_0$ par $\delta$.
S.Varadhan dans [13], traite le cas $d = 2$ et montre que:

$$\int_{\Delta_2} \delta(B_t - B_s)\,dsdt = \alpha(0,\Delta_2) = +\infty \quad P-\text{presque partout} \tag{1}$$

où $\Delta_2 = \{(t,s) \in [0,1]^2\,;\, s < t\}$.
Néanmoins, il trouve une suite $(C_k)_{k\geq 0}$ de $\mathbf{R}_+$ tel que

$$\int_{\Delta_2} g_k(B_t - B_s)\,dsdt - C_k \tag{2}$$

converge dans $L^2(\Omega, I\!P)$ vers une limite non nulle et où les fonctions $g_k$ sont définies par:

$$g_k(x) = \frac{k}{2\pi} e^{-k\frac{|x|^2}{2}}$$

La suite de mesure $m_k = g_k dx$ converge étroitement vers la mesure de Dirac $\delta$.
J.F.Le Gall, retrouve dans [7] la renormalisation (2) de S.Varadhan. Plus précisément il détermine explicitement la suite $(C_k)$ ci-dessus et montre que:

$$\int_{\Delta_2} \delta_x(B_t - B_s)dsdt - \frac{1}{2\pi} log \frac{1}{|x|} \tag{3}$$

converge dans $L^2(\Omega, \mathbb{P})$ et $\mathbb{P}-$presque partout quand $x \to 0$ (toujours dans le cas $d = 2$).
M.Yor dans [15], démontre dans le cas $d = 3$ que

$$\frac{1}{\sqrt{log\frac{1}{|y|}}}\{2\pi \int_0^t \int_s^t \delta_y(B_u - B_s)\,dsdu - \frac{t}{|y|}\} \tag{4}$$

converge en loi vers le mouvement Brownien unidimensionel $(\beta_t)_{t\geq 0}$ indépendant de $(B_t)_{t\geq 0}$.
H. Watanabe dans [14], utilise une approche complétement différente. En effet il considère l'espace du bruit blanc $(S'(\mathbb{R}),\gamma)$ où le mouvement Brownien unidimensionnel s'écrit $B_t(\omega)=\langle\omega,\mathbf{1}_{[0,t]}\rangle$, puis démontre que $L=\int_{\Delta_2}\delta(B_t-B_s)dsdt$ est un élément de $(S)^*$ l'espace de distributions de Hida [4][8].
Dans [1], M.Faria, T. Hida, L. Streit, H. Watanabe généralisent cette même approche pour étudier le cas du mouvement Brownien multidimensionnel et ils démontrent un théorème qui donne le lien entre la dimension $d\geq 1$ et le nombre N de chaos qu'il faut retrancher de $L=\int_{\Delta_2}\delta(B_t-B_s)dsdt$ pour que l'expression obtenue notée $L^{(N)}$ ait un sens comme étant un élément de $(S)^*$.

Dans ce travail on commence par généraliser les résultats obtenus dans [1] en remplaçant le processus du mouvement Brownien $\{B_t\}$, qui s'écrit comme fonctionnelle du bruit blanc

$$B_t(\omega)=(\langle\omega_1,\mathbf{1}_{[0,t]}\rangle,\cdots,\langle\omega_d,\mathbf{1}_{[0,t]}\rangle)\quad;\omega_i\in S'(\mathbf{R})$$

par un processus quelconque

$$X_t(\omega)=(\langle\omega_1,\varphi_t^1\rangle,\cdots,\langle\omega_d,\varphi_t^d\rangle)$$

avec $\varphi_t(u)=(\varphi_t^1,\cdots,\varphi_t^d)\in L^2(\mathbf{R},du)^d\ \forall t\geq 0$ et de plus pour tout $u$ de $\mathbf{R}$ l'application $t\longrightarrow\varphi_t(u)$ est mesurable. On pose:

$$|\varphi_t|_1=\sum_{j=1}^{d}|\varphi_t^j|_1=\sum_{j=1}^{d}\int_{\mathbf{R}}|\varphi_t^j(u)|du$$

$$|\varphi_t|_0^2=\sum_{j=1}^{d}|\varphi_t^j|_0^2=\sum_{j=1}^{d}\int_{\mathbf{R}}|\varphi_t^j(u)|^2du.$$

On montre un résultat, voir (théorème 2) qui met en relation la dimension d de l'espace, et le nombre entier N. Plus précisément on montre que si $\frac{|\varphi_t-\varphi_s|_1^{2N}}{|\varphi_t-\varphi_s|_0^{d+2N}}\in L^1(\Delta_2)$, l'intégral de Bochner $L^{(2N)}=\int_{\Delta_2}\delta^{(2N)}(X_t-X_s)\,dtds$ est une distribution de Hida i.e $L^{(2N)}$ est un élément de $(S)^*$.

Par ailleurs on démontre un résultat (théorème 3) analogue à celui de J.F.Le Gall [7] (corollaire 2.3 page 323) dans le cas du mouvement Brownien plan. Plus précisément on montre que $L_x = \int_{\Delta_2} \delta_x(B_t - B_s)dtds$ est une distribution de Hida pour $x \neq 0$ et que

$$L_x - \frac{1}{\pi} log(\frac{1}{|x|})$$

converge dans $(S)^*$ vers $\frac{1}{2\pi}(log 2 - 1 - c) + L^{(2)}$ où c la constante d'Euler.

# 2 Temps local d'intersection en analyse gaussienne

## 2.1 Elément d'analyse gaussienne

On considère le triplet de Gelfand réel suivant:

$$S(\mathbf{R})^d \hookrightarrow L^2(\mathbf{R})^d \hookrightarrow S'(\mathbf{R})^d,\ d \geq 1 \tag{5}$$

$L^2(\mathbf{R})^d$ est muni du produit scalaire suivant:

$$\langle f, g \rangle = \sum_{j=1}^{d} \int_{\mathbf{R}} f_j(u) g_j(u) du \tag{6}$$

La dualité, entre $S(\mathbf{R})^d$ et $S'(\mathbf{R})^d$ est définie d'une façon naturelle par:

$$\langle \omega, f \rangle = \sum_{j=1}^{d} \langle \omega_j, f_j \rangle \tag{7}$$

où $\omega \in S'(\mathbf{R})^d$ et $f \in S(\mathbf{R})^d$. On définit la mesure gaussienne $\gamma$ sur $S'(\mathbf{R})^d$ par sa fonction caractéristique:

$$C(f) = \int_{S'(\mathbf{R})^d} e^{i\langle \omega, f \rangle} \, d\gamma(\omega) = e^{\frac{-\langle f, f \rangle}{2}} \tag{8}$$

L'espace gaussien $(S'(\mathbf{R})^d, \gamma)$ est dit espace de bruit blanc multidimensionnel. On obtient ainsi l'espace de Hilbert complexe suivant:

$(L^2) = L^2(S'(\mathbf{R})^d, d\gamma)$ qui est isomorphe par l'isométrie de Wiener-Itô-Segal [4][8], à l'espace de Fock symétrique:

$$(L^2) \simeq \Big(\mathrm{Fock}(L^2(\mathbf{R}, dt))\Big)^{\otimes d} \simeq \Big(\bigoplus_{n=0}^{+\infty} symL^2(\mathbf{R}^k, k!\, d^k t)\Big)^{\otimes d} \tag{9}$$

Grâce à cette isométrie on montre que tout élément $\varphi \in (L^2)$ admet un développement en chaos de Wiener:

$$\varphi(\omega) = \sum_{\vec{n}=0}^{+\infty} \langle : \omega^{\otimes \vec{n}} :, F_{\vec{n}} \rangle \tag{10}$$

avec $F = \{F_{\vec{n}};\, \vec{n} = (n_1, \cdots, n_d) \in \mathbb{N}^d\} \in \Big(\mathrm{Fock}(L^2(\mathbf{R}, dt))\Big)^{\otimes d}$, appelé noyau de $\varphi$ et pour tout $f = (f_j)_{1 \leq j \leq d} \in S(\mathbb{R})^d$

$$\begin{aligned} \langle : \omega^{\otimes \vec{n}} :, f^{\otimes \vec{n}} \rangle &= \prod_{j=1}^{d} \langle : \omega_j^{\otimes n_j} :, f_j^{\otimes n_j} \rangle \\ &= \prod_{j=1}^{d} \frac{| f_j |^{n_j}}{2^{\frac{n_j}{2}}} H_{n_j} \langle \omega_j, \frac{f_j}{\sqrt{2} \mid f_j \mid} \rangle \end{aligned}$$

où $(H_{n_j})$ désignent les polynômes d'Hermite usuels.
On considère la suite $(A^k)_{k \geq 0}$, d'opérateurs de $L^2(\mathbf{R})^d$, où $A$ est défini par:

$$Af = (Af_j)_{1 \leq j \leq d} \text{ avec } Af_j = (-\frac{d^2}{dt^2} + t^2 + 1) f_j \tag{11}$$

Puis en considèrant leur seconde quantification, on obtient une suite d'opérateurs sur l'espace $(Fock(L^2(\mathbf{R}, dt)))^{\otimes d}$ et enfin en utilisant l'isométrie (9) on obtient une suite $(\Gamma(A^k))_{k \geq 0}$ d'opérateurs sur l'espace $(L^2)$.
On définit alors l'espace de fonctions test suivant:

$$(S) = \operatorname{limproj}_{k \to +\infty} (S)_k \text{ où } (S)_k = D(\Gamma(A^k))$$

Autrement dit, un élément $\varphi$ de $(S)$ vérifie:

$$\varphi(\omega) = \sum_{\vec{n}=0}^{+\infty} \langle : \omega^{\otimes \vec{n}} :, F_{\vec{n}} \rangle$$

et pour tout $p \geq 0$,

$$\sum_{\vec{n}=0}^{+\infty} \vec{n}! |F_{\vec{n}}|_p^2 < \infty$$

On montre que l'espace $(S)$ ainsi construit est un espace nucléaire réflexif et par suite:

$$(S)^* fort = \operatorname{limind}_{k \to +\infty} (S)_{-k}$$

Les éléments de $(S)^*$ sont appelés distributions gaussiennes ou distributions de Hida. Ces espaces ont été introduits par Hida dans [4] et ont été étudiés, caractérisés et généralisés par de nombreux auteurs, [11][9][8][6]$\cdots$
Tout élément $\phi \in (S)^*$ s'écrit comme une série formelle de chaos de Wiener:

$$\phi(\omega) = \sum_{\vec{n}=0}^{+\infty} \langle : \omega^{\otimes \vec{n}} :, \phi_{\vec{n}} \rangle \tag{12}$$

où les $(\phi_{\vec{n}})$ sont des noyaux distributions tempérées, et la dualité entre $(S)^*$ et $(S)$ notée $\langle\langle ., . \rangle\rangle$ prolonge le produit scalaire de $(L^2)$:

$$\langle\langle \phi, \varphi \rangle\rangle = \sum_{\vec{n}=0}^{+\infty} \vec{n}! \langle \phi_{\vec{n}}, \varphi_{\vec{n}} \rangle \tag{13}$$

où $\varphi$ est donnée par (10) et $\phi$ par (12). On caractérise les fonctionnelles du bruit blanc par leurs actions sur les exponentielles de Wick notées $: e^{\langle \omega, f \rangle} :$ et qui sont données par:

$$\begin{aligned} : e^{\langle \omega, f \rangle} : &\equiv \sum_{\vec{n}=0}^{+\infty} \frac{1}{\vec{n}!} \langle : \omega^{\otimes \vec{n}} :, f^{\otimes \vec{n}} \rangle \\ &= e^{\frac{-1}{2}\langle f, f \rangle} e^{\langle \omega, f \rangle} \end{aligned}$$

**Définition 1.** *Soit* $\phi = \sum_{\vec{n}=0}^{+\infty} \langle : \omega^{\otimes \vec{n}} :, \phi_{\vec{n}} \rangle$ *un élément de* $(S)^*$

*i) On définit la fonction de* $S(\mathbf{R})^d$ *par:*

$$S(\phi)(f) = \langle\langle \phi, : e^{\langle ., f \rangle} : \rangle\rangle = \sum_{\vec{n}} \langle \phi_{\vec{n}}, f^{\otimes \vec{n}} \rangle$$

*et la transformation qui à* $\phi$ *associe* $S\phi$ *est dite la "S-transform" ou transformation chaotique de* $\phi$*.*

*ii) Soit $k$ un entier $\geq 1$, on définit $\phi^{(k)} \in (S)^*$ par:*

$$\phi^{(k)}(\omega) = \sum_{\vec{n};\, n \geq k} \langle : \omega^{\otimes \vec{n}} :, \phi_{\vec{n}} \rangle \tag{14}$$

*où $n = |\vec{n}|$ est la longueur de $\vec{n}$.*

**Définition 2.** *Une fonction $G : S(\mathbf{R})^d \longrightarrow \mathbf{C}$ est dite $U$-fonctionnelle si:*

*i) $G(\lambda f_1 + f_2)$ est entière en $\lambda$ pour toute $f_1, f_2 \in S(\mathbf{R})^d$.*

*ii) Il existe $c_1, c_2 > 0$ et $p \geq 0$ tel que $\mid G(f) \mid \leq c_1 e^{c_2 |A^p f|_0^2}$, $\forall f \in S(\mathbf{R})^d$.*

**Théorème 1 (de caractérisation).** *Les deux assertions suivantes sont équivalentes:*

*i) $G$ est une $U$-fonctionnelle.*

*ii) $G$ est la $S$-transformée d'une distribution gaussienne $\phi$ élément de $(S)^*$.*

**Remarque.** Le théorème précédant a été démontré dans le cas $d = 1$ dans [11] et dans un cadre beaucoup plus général dans [9]. Le corollaire suivant (voir [1] corollary 1, [14]), constitue l'outil fondamental de ce travail.

**Corollaire 1.** *Soit $(\Omega, \mathcal{B}, m)$ un espace mesuré et*

$$\begin{array}{rccc} \phi: & \Omega & \longrightarrow & (S)^* \\ & \lambda & \longrightarrow & \phi_\lambda \end{array}$$

*On suppose que la transformée chaotique de $\phi_\lambda, S\phi_\lambda$ vérifie:*

*i) $S\phi_\lambda(f)$ est mesurable en $\lambda$, pour toute $f \in S(\mathbf{R})^d$.*

*ii) Il existe $p > 0$ indépendant de $\lambda$, deux fonctions $c_1$ et $c_2$ de $\lambda$ avec $c_1 \in L^1(\Omega), c_2 \in L^\infty(\Omega)$ tel que:*

$$\mid S\phi_\lambda(f) \leq c_1(\lambda) e^{c_2(\lambda)|A^p f|_0^2} \;\; \forall f \in S(\mathbf{R})^d$$

*alors $\phi$ est intégrable au sens de Bochner, dans un certain $(S)_{-q}$ i.e*

$$\int_{\Omega} \phi_{\lambda}\, d\lambda \in (S)^*$$

*et*

$$S\{\int_{\Omega} \phi_{\lambda} d\lambda\}(f) = \int_{\Omega} S\phi_{\lambda}(f) d\lambda$$

## 2.2 Application au temps local d'intersection

Soit $t > 0$, la fonction $\mathbf{1}_{[o,t]}$ est un élément de $L^2(\mathbf{R}, du)$ donc on peut l'approcher par une suite de fonctions de $S(\mathbf{R})$, ceci permet de définir le mouvement Brownien comme fonctionnelle du bruit blanc, $\left(S'(\mathbf{R}), \gamma\right)$ ($\gamma$ étant la mesure gaussienne standard), $B_t = \langle \omega, \mathbf{1}_{[o,t]} \rangle$, $\forall\, \omega \in S'(\mathbf{R})$ ([4][8]).

En utilisant le fait que la transformée de Fourier de $\delta$, $\mathcal{F}(\delta)(\xi) = 1$, on obtient formellement l'égalité suivante:

$$\delta(B_t - B_s) = \delta(\langle \omega, \mathbf{1}_{[s,t]} \rangle) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} e^{i\langle \omega, \mathbf{1}_{[s,t]} \rangle \xi} d\xi \tag{15}$$

Ainsi en regardant l'intégrale formelle figurant dans (15) comme étant une intégrale de Bochner, il est possible de donner un sens à $\delta(B_t - B_s)$ comme une distribution gaussienne.

On va donc dans la suite étendre les résultats obtenus dans [1] à des processus plus généraux que celui du mouvement Brownien.

On définit pour cela la famille de fonctionnelles du bruit blanc à valeur vectorielle:

$$X_t(\omega) = (\langle \omega_1, \varphi_t^1 \rangle, ..., \langle \omega_d, \varphi_t^d \rangle) = (\omega, \varphi) \tag{16}$$

où $\varphi_t = (\varphi_t^1, \cdots, \varphi_t^d) \in L^2(\mathbf{R}, du)^d$, $\forall\, t \geq 0$ et tel que pour tout $u \in \mathbf{R}$ l'application: $t \longrightarrow \varphi_t(u)$ est mesurable.

**Exemples.**

1. Si $\varphi_t^i = \mathbf{1}_{[0,t]}, \forall i = 1, ..., d$ alors $\{X_t\}$ est un mouvement Brownien multidimensionnel.

2. Si $\varphi_t^i = e^{-\lambda t}\mathbf{1}_{]-\infty,t]}(u)e^{\lambda u}, \forall i = 1,...,d$ et $\lambda > 0$ alors $\{X_t\}$ est le processus d'Ornstein-Uhlenbeck de parametre $\lambda$.

**Proposition 1.** *L'intégral de Bochner:*

$$\delta(X_t - X_s) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbf{R}^d} e^{i\xi(X_t - X_s)}\, d\xi$$

*est un élément de* $(S)^*$ *lorsque* $|\varphi_t - \varphi_s|_0 \neq 0$, *de plus*

$$S(\delta(X_t - X_s))(f) = \frac{1}{2\pi^{\frac{d}{2}}}\frac{1}{\mid \varphi_t - \varphi_s \mid_0^d} exp(\frac{-1}{2}\frac{(f,\varphi_t - \varphi_s)_0^2}{\mid \varphi_t - \varphi_s \mid_0^2}) \tag{17}$$

*avec*

$$(f,\varphi_t - \varphi_s)_0^2 = \sum_{j=1}^d \{\int_{\mathbf{R}} f_j(u)(\varphi_t^j - \varphi_s^j)(u)du\}^2$$

**Démonstration.** On commence par calculer la transformée chaotique de la fonctionnelle du bruit blanc $e^{i\xi(X_t - X_s)}$

$$\begin{aligned} S(e^{i\xi(X_t - X_s)})(f) &= S(\prod_{j=1}^d e^{i\xi_j\langle\omega_j,\varphi_t^j - \varphi_s^j\rangle})(f) \\ &= e^{\frac{-1}{2}\xi^2|\varphi_s - \varphi_t|_0^2} e^{i\xi(f,\varphi_t - \varphi_s)_0} \end{aligned}$$

or $\mid \xi(f,\varphi_t - \varphi_s) \mid \leq \frac{1}{4}\xi^2 \mid \varphi_t - \varphi_s \mid_0^2 + \frac{(f,\varphi_t - \varphi_s)_0^2}{|\varphi_t - \varphi_s|_0^2}$, on obtient donc

$$\mid S(e^{i\xi(X_t - X_s)})(f) \mid \leq e^{-\frac{1}{4}\xi^2|\varphi_t - \varphi_s|_0^2} e^{\frac{(f,\varphi_t - \varphi_s)_0^2}{|\varphi_t - \varphi_s|_0^2}}$$

l'application

$$\xi \longrightarrow e^{-\frac{1}{4}\xi^2|\varphi_t - \varphi_s|_0^2} \in L^1(\mathbf{R}^d, d\xi)$$

pour $\varphi_t \neq \varphi_s$

$$\begin{aligned} (f,\varphi_t - \varphi_s)_0^2 &= \sum_{j=1}^d \{\int_{\mathbf{R}} f_j(u)(\varphi_t^j - \varphi_s^j)(u)du\}^2 \\ &\leq \mid \varphi_t - \varphi_s \mid_0^2 \sum_{j=1}^d \mid f_j \mid_0^2 \\ &= \mid \varphi_t - \varphi_s \mid_0^2 \mid f \mid_0^2 \end{aligned}$$

finalement on obtient

$$| S(e^{i\xi(X_t - X_s)})(f) | \leq e^{-\frac{1}{4}\xi^2 |\varphi_t - \varphi_s|_0^2} e^{|f|_0^2}$$

ce qui entraine, d'après le corollaire 1 que $\delta(X_t - X_s) \in (S)^*$

$$\begin{aligned}
S(\delta(X_t - X_s))(f) &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbf{R}^d} S(e^{i\xi(X_t - X_s)})(f) d\xi \\
&= \prod_{j=1}^{d} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} e^{-\frac{1}{2}\xi_j^2 |\varphi_t - \varphi_s|_0^2 + i\langle f_j, \varphi_t^j - \varphi_s^j\rangle_0} d\xi_j \\
&= \prod_{j=1}^{d} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} | \varphi_t - \varphi_s |_0^{-1} \, exp(\frac{-1}{2} \frac{\langle f_j, \varphi_t^j - \varphi_s^j\rangle_0^2}{|\varphi_t - \varphi_s |_0^2}) \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \frac{1}{| \varphi_t - \varphi_s |_0^d} exp(\frac{-1}{2} \frac{(f, \varphi_t - \varphi_s)_0^2}{| \varphi_t - \varphi_s |_0^2})
\end{aligned}$$

Une fois $\delta(X_t - X_s)$ bien définie, on veut définir:

$$L = \int_{\Delta_2} \delta(X_t - X_s) \, dsdt$$

comme une fonctionnelle du bruit blanc, or

$$I\!E(L) = \int_{\Delta_2} S(\delta(X_t - X_s))(0) \, dsdt = \int_{\Delta_2} \frac{dsdt}{(2\pi)^{d/2} |\varphi_t - \varphi_s|_0^d} = +\infty$$

pour les deux cas cités dans l'exemple ci dessus et pour $d \geq 2$. Donc $L \notin (S)^*$, par suite on étudie la renormalisation $L^{(2N)}$, $N \geq 1$ (définiton 1.ii)) de $L$. Ce théorème exprime la relation entre $N$ et la dimention $d$.

**Théorème 2.** *Soit $X_t(\omega) = (\langle\omega_1, \varphi_t^1\rangle, ..., \langle\omega_d, \varphi_t^d\rangle)$ tel que $\varphi_t = (\varphi_t^1, \cdots, \varphi_t^d) \in L^2(\mathbf{R}, du)^d \; \forall t \geq 0$ et $\forall u \in \mathbf{R}$ l'application: $t \longrightarrow \varphi_t(u)$ est mesurable.*
*Si de plus*

$$\frac{| \varphi_t - \varphi_s |_1^{2N}}{| \varphi_t - \varphi_s |_0^{d+2N}} \in L^1(\Delta_2)$$

*alors*

$$L^{(2N)} = \int_{\Delta_2} \delta^{(2N)}(X_t - X_s) dsdt$$

*est un élément de* $(S)^*$.

Où $\delta^{(2N)}(X_t - X_s)$ est la distribution de Hida définie en appliquant la définition 1.ii) à $\delta(X_t - X_s)$.

**Démonstration.** D'après la proposition 1 on a:

$$S(\delta(X_t - X_s))(f) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \frac{1}{|\varphi_t - \varphi_s|_0^d} e^{-\frac{1}{2}\frac{(f,\varphi_t-\varphi_s)_0^2}{|\varphi_t-\varphi_s|_0^2}}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \frac{1}{|\varphi_t - \varphi_s|_0^d} \sum_{\vec{n}=0}^{+\infty} \frac{1}{\vec{n}!}\left(\frac{-1}{2|\varphi_t - \varphi_s|_0^2}\right)^n (f, \varphi_t - \varphi_s)_0^{2\vec{n}}$$

$$S(\delta^{(2N)}(X_t - X_s))(f) =$$

$$\frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \frac{1}{|\varphi_t - \varphi_s|_0^d} \sum_{\vec{n};n\geq N} \frac{1}{\vec{n}!}\left(\frac{-1}{2|\varphi_t - \varphi_s|_0^2}\right)^n (f, \varphi_t - \varphi_s)_0^{2\vec{n}}$$

$$(f, \varphi_s - \varphi_s)_0^{2\vec{n}} = \prod_{j=1}^{n} \int_{\mathbf{R}} f_j(u)(\varphi_t^j - \varphi_s^j)(u)du$$

$$|(f, \varphi_t - \varphi_s)_0^{2\vec{n}}| \leq \prod_{j=1}^{d} sup_u |f_j(u)|^{2n_j} |\varphi_t^j - \varphi_s^j|_1^{2n_j}$$

$$\leq |\varphi_t - \varphi_s|_1^{2n} \prod_{j=1}^{d} (sup_{n\in\mathbf{R}} |f_j(n)|)^{2n_j}$$

on obtient donc

$$|S(\delta^{2N}(X_t - X_s))(f)| \leq$$

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \frac{1}{|\varphi_t - \varphi_s|_0^d} \sum_{\vec{n},n\geq N} \frac{1}{\vec{n}!}\left(\frac{|\varphi_t - \varphi_s|_1^2}{2|\varphi_t - \varphi_s|_0^2}\right)^n \prod_{j=1}^{d} (sup_u |f_j|)^{2n_j}$$

$$\leq \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \frac{|\varphi_t - \varphi_s|_1^{2N}}{|\varphi_t - \varphi_s|_0^{d+2N}} e^{\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{d}|f_j|_\infty^2}$$

Alors comme

$$\frac{|\varphi_t - \varphi_s|_1^{2N}}{|\varphi_t - \varphi_s|_0^{d+2N}} \in L^1(\Delta_2)$$

on aura

$$L^{(2N)} = \int_{\Delta_2} \delta^{(2N)}(X_t - X_s)\, dsdt \in (S)^*$$

**Corollaire 2.**

1. *Si $\{X_t\}$ est le processus du mouvement Brownien $\{B_t\}$ alors:*

$$L^{(2N)} = \int_{\Delta_2} \delta^{(2N)}(B_t - B_s)\, dsdt$$

*est un élément de $(S)^*$ pour $2N > d - 2$.*

2. *Si $\{X_t\}$ est le processus d'Ornstein-Uhlenbeck:*

$$L^{(2N)} = \int_{\Delta_2} \delta^{(2N)}(X_t - X_s)\, dsdt$$

*est un élément de $(S)^*$ pour $2N > d - 2$.*

**Démonstration.**

1. Si $X_t = B_t$ alors $\varphi_t = (\mathbf{1}_{[0,t]}, \cdots, \mathbf{1}_{[0,t]})$ donc $\mid \varphi_t - \varphi_s \mid_0 = \sqrt{d \mid t - s \mid}$ et $\mid \varphi_t - \varphi_s \mid_1 = d \mid t - s \mid$ par suite

$$\frac{|\varphi_t - \varphi_s|_1^{2N}}{|\varphi_t - \varphi_s|_0^{d+2N}} = (d|t-s|)^{N-\frac{d}{2}} \in L^1(\Delta_2)$$

pour $2N > d - 2$, (on retrouve ainsi le théorème 2 de [1]).

2. Si $\{X_t\}$ est le processus d'Ornstein-Uhlenbeck alors
$\varphi_t(u) = e^{-\lambda(t-u)}(\mathbf{1}_{]-\infty,t]}, \cdots, \mathbf{1}_{]-\infty,t]})$, $\lambda > 0$ donc
$|\varphi_t^j - \varphi_s^j|_1 = \frac{2}{\lambda}(1 - e^{-\lambda(t-s)}) \simeq 2|t-s| \forall j = 1, \cdots, d$
$|\varphi_t - \varphi_s|_1 \simeq 2d|t-s|$
$|\varphi_t^j - \varphi_s^j|_0 = [\frac{e^{\lambda(t-s)} + 1 - e^{-2\lambda(t-s)}}{2\lambda}]^{\frac{1}{2}} \simeq \frac{|t-s|^{\frac{1}{2}}}{2} \forall j = 1, ..., d$
$|\varphi_t - \varphi_s|_0 \simeq \frac{(d|t-s|)^{\frac{1}{2}}}{2}$ et par suite

$$\frac{|\varphi_t - \varphi_s|_1^{2N}}{|\varphi_t - \varphi_s|_0^{2N+d}} \simeq 2^{4N+d} d^{N-\frac{d}{2}} |t-s|^{N-\frac{d}{2}} \in L^1(\Delta_2) \ \text{ pour } 2N > d-2$$

**Remarques.**

1) Il y a une ressemblance entre les résultats déjà obtenus sur le temps local d'intersection et nos résultats, en effet lorsque $d = 1$, $2N > -1$ et donc $N = 0$ par suite $L = \int_0^1 \int_0^1 \delta(X_t - X_s)dsdt \in (S)^*$, ceci rejoint les résultats de [3][5].

2) Si $d = 2$, donc N=1 et par suite il suffit de retrancher l'espérance, ce qui rejoint parfaitement la renormalisation de Varadhan [13][7].

On va maintenant, démontrer un résultat analogue à celui de [7] corollaire 2.4 dans le cas où le processus $\{X_t\}$ est le processus du mouvement Brownien plan $\{B_t\}$. Pour cela, on commence par donner deux propositions qui restent vraies pour $d$ quelconque.

**Proposition 2.** *Soit $x \in \mathbf{R}^d$, on désigne par $\delta_x$ la mesure de Dirac de $\mathbf{R}^d$ en $x$, alors*

$$\delta_x(B_t - B_s) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbf{R}^d} e^{i\xi(B_t - B_s)} e^{-ix\xi} \, d\xi \in (S)^*$$

*de plus*

$$S(\delta_x(B_t - B_s))(f) = \frac{1}{(2\pi|t-s|)^{\frac{d}{2}}} exp\{\frac{-x^2}{|t-s|} + x\frac{\int_s^t f du}{|t-s|} - \frac{(\int_s^t f du)^2}{2|t-s|}\}. \tag{18}$$

**Proposition 3.** *Soit $x \in \mathbf{R}^d - \{0\}$, alors*

$$L_x = \int_{\Delta_2} \delta_x(B_t - B_s) \, dsdt \in (S)^*$$

*et*

$$I\!E(L_x) = \int_{\Delta_2} \frac{e^{-\frac{x^2}{2|t-s|}}}{(2\pi|t-s|)^{\frac{d}{2}}} \, dsdt \tag{19}$$

On suppose maintenant que $d = 2$.

**Théorème 3.**

$$L_x - \frac{1}{\pi} log(\frac{1}{|x|})$$

*converge dans $(S)^*$ vers*

$$\frac{1}{2\pi}(log2 - 1 - c) + L^{(2)} \tag{20}$$

*où $c$ est la constante d'Euler.*

**Démonstration.** On montre d'abord que

$$\delta_x(B_t - B_s) - \frac{e^{\frac{-x^2}{2|t-s|}}}{2\pi|t-s|}$$

converge dans $(S)^*$ vers $\delta^{(2)}(B_t - B_s)$, en effet :

$$S(\delta_x(B_t - B_s))(f) - \frac{e^{\frac{-x^2}{2|t-s|}}}{2\pi|t-s|}$$

converge quand $x \longrightarrow 0$ vers

$$\frac{1}{2\pi|t-s|}\{e^{-\frac{(\int_s^t f du)^2}{2|t-s|}} - 1\}$$

qui n'est autre que la transformée S de $\delta^{(2)}(B_t - B_s)$. Ce qui implique en utilisant le corollaire 1 et le théorème de convergence dominée pour les intégrales de Bochner que:

$$L_x - \int_{\Delta_2} \frac{e^{\frac{-x^2}{2|t-s|}}}{2\pi|t-s|} dsdt$$

converge dans $(S)^*$ vers $L^{(2)}$. Pour finir la démonstration du théorème 3, on utilise le lemme technique suivant:

**Lemme 1.** *[15]*

$$\int_{\Delta_2} \frac{e^{\frac{-x^2}{2|t-s|}}}{2\pi|t-s|} dsdt - \frac{1}{\pi} log\frac{1}{|x|} \longrightarrow \frac{1}{2\pi}(log2 - 1 - c)$$

*quand $x$ tend vers zéro, où $c$ est la constante d'Euler.*

**Remerciement.** Les auteurs remercient le Professeur Ludwig Streit de l'université de Bielefeld, pour les très fructueuses discussions qu'ils ont eues avec lui lors de son passage à Tunis en Septembre 1996 et en septembre 1997. C'est en réponse à l'une de ses questions que ce papier a été élaboré.

# References


[1] M. Faria, T. Hida, L. Streit, H. Watanabe, *Intersection local time as Generalized White Noise Functionals.(Preprint) 1996.*

[2] D. Geman, J. Horowitz, J. Rosen, *A local time Analysis of intersections of Brownian paths in the plane. The Ann. Prob. 12, N 1, 86-107 (1984).*

[3] D. Geman, J. Horowitz, *Occupation densities. The Aannals of Proba 1980, vol 8, N 1, 1-67.*

[4] T. Hida, *"Brownian Motion", Springer, Berlin/Heidelberg/ New york, 1980.*

[5] K. Itô and H.P. Mckean, *Diffusion Processes and Their Sample Paths. Academic Press, New York, (1965).*

[6] Yu. Kontratiev, P. Leukert, J. Potthoff, L. Streit, W. Westerkamp, *Generalized functionals in Gaussian spaces, the characterization theorem revisted. J.F.A Vol 141 n°*2 *Page 301-318 (1996).*

[7] J.F. Le Gall, *Sur le temps local d'intersection du mouvement Brownien plan et la méthode de renormalisation de Varadhan. Sem de Prob. XIX, 1983/84. LNM 1123 (1985) 314-331. Springer, Berlin.*

[8] N. Obata, *White noise calculus and Fock space. LNM 1577 (1994).*

[9] H. Ouerdiane, *Fonctionnelles analytiques avec conditions de croissance et application à l'analyse gaussienne. Japanese Journal of Math. Vol 20, N°1. pp. 187-198.(1994).*

[10] H. Ouerdiane, *Noyaux et symboles d'opérateurs sur des fonctionnelles analytiques gaussiennes. Japanese Journal of Math. Vol 21. N°1. pp 223-234 Juin 1995.*

[11] J. Potthoff, L. Streit, *A characterization of Hida distributions. J.Func.Anal. 101 p 212-229 (1991).*

[12] J. Rosen, *Alocal time Approach to the self-intersections of Brownian Paths in space. Commun.Math.Phys. 88, 327-338 (1983).*

[13] S.R.S. Varadhan, *Appendix to "Euclidean quantum field theory" by K.Symanzik. In "local quantum theory" (R.J.st.ed). Academic new york (1969).*

[14] H. Watanabe, *The local time self-intersections of Brownian Motions as generalized Brownian functionals, Lett. Math. Phys.* **23**, *1-9. (1991).*

[15] M. Yor, *Renormalisation et convergence en loi pour les temps locaux d'intersection du movement Brownien Sem de Prob XIX 1983/84. LNM 1123 (1985) 350-365. Springer, Berlin.*

H.Ouerdiane et A.Rezgui
Faculté des Sciences de Tunis
Département de Mathématique
Campus universitaire 1060 Tunis
Tunisie.
E-mail: rezgui@physik.uni-bielefeld.de
E-mail: habib.ouerdiane@fst.rnu.tn

Recibido: 27 de Marzo de 1998
Revisado: 1 de Agosto de 2000