REVISTA MATEMATICA de la
Universidad Complutense de Madrid
Volumen 8, número 1: 1995

Sur les Propriétés Topologiques des Projections Lagrangiennes en Géométrie Symplectique des Caustiques.

V.I. ARNOLD

RÉSUMÉ. La caustique d'un point sur une variété riemannienne est l'ensemble des points d'intersection des géodésiques infiniment voisins partant de ce point.

Jacobi a remarqué, en utilisant un raisonnement topologique, que la caustique d'un point sur une surface convexe fermée doit avoir des points de rebroussement. Il a aussi annoncé (sans démonstration) que le nombre de ces points est quatre pour les caustiques sur les surfaces d'ellipsoïdes [1].

Dans cette note j'essaie d'inclure les théorèmes sur les points de rebroussement des caustiques dans le cadre plus général de la topologie symplectique. On obtient ainsi immédiatement de nombreuses généralisations (y compris,

---

L'article reproduit le texte lu au Colloque du CEREMADE le 11 mai 1993. L'auteur est reconnaissant à l'Institut Newton (Cambridge, U.K.) et à l'Université Paris-Dauphine pour l'hospitalité et le support, ainsi qu'à Mlle Isabelle Paisant pour l'édition d'un manuscrit difficile.

1991 Mathematics Subject Classification: 53A04, 57M25, 58F05
Servicio publicaciones Univ. Complutense. Madrid, 1995.

par exemple, le théorème des quatre sommets d'une courbe convexe fermée dans le plan euclidien) aussi bien que des conjectures sur la topologie des caustiques et des fronts d'ondes.

Certains de ces théorèmes et conjectures peuvent être considérés comme des généralisations (un peu étranges) de la théorie de Sturm. Cette approche de la théorie de Sturm suggère ses généralisations reliées, par exemple, à la symplectisation du théorème des quatre points ombilicaux sur une surface convexe.

1. LE COLLAPSE LAGRANGIEN

Définition. *Le cylindre lagrangien standard* $L^n \hookrightarrow T^*\mathbb{R}^n$ *est le graphe de gradient de la fonction* $\pm|q|$*:*

$$L^n = \{p, q : \exists t : p^2 = 1,\ q = pt\}.$$

Cette formule définit un plongement lagrangien exact du cylindre $S^{n-1} \times \mathbb{R}$ ($p \in \mathrm{S}^{n-1}$, $t \in \mathbb{R}$) dans le fibré cotangent $\mathbb{R}^{2n}$ de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$.

Le cylindre standard est une variété lagrangienne exacte, parce que $pdq = dt$ sur L.

Définition. *Le collapse lagrangien standard*

$$L^n \hookrightarrow T^*\mathbb{R}^n \twoheadrightarrow \mathbb{R}^n$$

est la projection du cylindre lagrangien standard L^n *sur la base du fibré cotangent de l'espace euclidien* $\mathbb{R}^n$.

La projection sur la base du fibré cotangent $(p, q) \mapsto q$ envoie L^n dans $\mathbb{R}^n$ par un difféomorphisme local à deux feuilles partout sauf au-dessus de l'origine, dans laquelle est envoyée toute la sphère $S^{n-1} \times 0$.

L'ensemble des valeurs critiques (la caustique) de l'application

$L^n \to \mathbb{R}^n$ consiste en un seul point 0 (infiniment dégénéré). Le but de ce travail est l'étude des caustiques des variétés lagrangiennes voisines de L^n.

2. EXEMPLES DES COLLAPSES LAGRANGIENS

A). Considérons la famille des normales d'un cercle dans un plan. Les vecteurs unitaires des normales forment un cylindre lagrangien (j'identifie les vecteurs tangents et cotangents du plan euclidien).

Ce cylindre $S^1 \times \mathbb{R}$ est le cylindre lagrangien standard dans $\mathbb{R}^4$ et sa projection sur $\mathbb{R}^2$ est le collapse lagrangien standard.

Quand on déforme le cercle, le cylindre des vecteurs unitaires des normales se déforme, mais il reste toujours un cylindre lagrangien exact.

Les valeurs critiques de la projection du cylindre déformé sont les centres de la courbure du cercle déformé. Le théorème des quatre sommets affirme que la caustique (=l'ensemble focal, =l'ensemble des centres de courbure) d'une courbe convexe générique a au moins quatre points de rebroussement.

B). Considérons les géodésiques partant du pôle Nord de la sphère S^2. Ces géodésiques se rencontrent au pôle Sud. La variété lagrangienne correspondante dans le fibré cotangent de la sphère est l'ensemble des vecteurs unitaires tangents aux géodésiques (comme toujours, j'identifie les vecteurs tangents et cotangents d'une variété de Riemann).

Cette variété lagrangienne est lisse. Sa projection sur la sphère a des singularités au-dessus des voisinages des pôles. Ces singularités sont symplectomorphes au collapse standard lagrangien d'un cylindre dans $\mathbb{R}^4$.

Quand on déforme la métrique de la sphère (en laissant la courbure positive), la variété L formée par les vecteurs unitaires des géodésiques partant du pôle Nord reste une variété lagrangienne (un cylindre immergé dans T^*S^2). Les points critiques de sa projection lagrangienne sur S^2 forment une suite de courbes fermées, dont les projections sont les caustiques (la première est proche du pôle Sud, la seconde du pôle Nord, etc..., pourvu que la déformation de la métrique soit petite).

Il résulte des théorèmes ci-dessous que chacune de ces caustiques minuscules a au moins quatre points de rebroussement. Je pense que cette minoration reste encore vraie pour les caustiques longues de toutes les surfaces convexes. Pour la première caustique c'est un résultat classique de la théorie variationnelle. Mais pour les caustiques suivantes, la minoration n'est pas, semble-t-il, connue même dans le cas d'un ellipsoïde.

Le problème des points de rebroussement des caustiques des ellipsoïdes résiste, semble-t-il, aux geometers algebriques (voir, par exemple, l'article [2], dont la référence m'a été communiquée par H. Knorrer).

3. SINGULARITÉS DU COLLAPSE DÉFORMÉ

Les résultats ci-dessous impliquent le

Théorème. *Le nombre des points de rebroussement d'une caustique de la projection lagrangienne sur le plan est au moins quatre pour chaque plongement générique exact lagrangien d'un cylindre, pourvu qu'il soit suffisamment proche du cylindre standard.*

Les bornes des perturbations permises sont décrites dans le §**6.** Je pense que le nombre des points de rebroussement des caustiques est aussi minoré par quatre pour des plongements legendriens des cylindres éloignés du cylindre standard (par exemple, pour ceux qu'on peut obtenir du cylindre standard par une isotopie hamiltonienne à un support compact). Pour les immersions il n'y a pas de minorations (ceci résulte de [3]).

Il est aussi possible que certaines des restrictions, utilisées dans la démonstration de §**6.**, soient essentielles. Par exemple, les cylindres permis dans notre théorème principal sont "pseudo-optiques" ($p \neq 0$) et vérifient la condition de "pseudo-convexité de contact" (la fonction $S = \int pdq$ sur L n'a pas de points singuliers).

Les cylindres dont on a besoin dans le théorème des quatre sommets d'une courbe convexe (ou de la n-ième branche de la caustique d'un point d'une surface presque sphérique) vérifient les conditions de proximité suffisantes pour l'application de nos raisonnements (la proximité nécéssaire de la surface à la sphère dépendant toutefois de n).

4. THÉORÈME DU TYPE DE STURM ET DE TABACHNIKOV

Les démonstrations se ramènent, à l'aide des fonctions génératrices, au théorème suivent "à la Sturm":

Théorème. *Soit $f(S,\varphi)$ une fonction 2π-périodique en φ, bornée avec sa dérivée seconde en φ dans tout le plan. Alors la restriction de la fonction S à la courbe lisse sur la surface du cylindre $\{S,\ \varphi \bmod 2\pi\}$, définie par l'équation*

$$S + f(S,\varphi) + \partial^2 f/\partial\varphi^2 = 0,$$

a au moins quatre points critiques.

Démonstration. La courbe est formée par des composantes fermées, qui habitent toutes dans un anneau $|S| \leq c_1$. Si le nombre des composantes est plus grand que 1, les quatre points critiques nécessaires sont fournis par les maxima et les minima de S sur les composantes.

Si la composante est unique, la fontion

$$H(S,\varphi) = S + f + \partial^2 f/\partial\varphi^2$$

est positive d'un côté et négative de l'autre côté de cette composante, qui sépare aussi les domaines $S \geq c_1$ et $S \leq -c_1$.

Supposons que le nombre des points critiques est plus petit que quatre. Dans ce cas le maximum (et aussi le minimum) de S est atteint en un point seulement, et chaque valeur de S entre le minimum et le maximum est atteinte exactement en deux points. La différence des valeurs de φ en ces deux points est une fonction continue de S, dont les valeurs au minimum et au maximum diffèrent par 2π. Donc il existe une valeur S atteinte aux deux points opposés: $\varphi_2 - \varphi_1 = \pi \bmod 2\pi$. Les signes de $D(S_0,\cdot)$ sur les deux arcs, séparés par ces deux points, sont différents.

Donc il existe une fonction

$$a \cos\varphi + b \sin\varphi$$

ayant les mêmes zéros que $H(S_0,\cdot)$ et les mêmes signes aux autres points. Pour cette fonction on a

$$\oint_0^{2\pi}(a\cos\varphi+b\sin\varphi)\,H(S_0,\varphi)d\varphi>0.$$

Or la fonction

$$f+\partial^2 f/\partial\varphi^2$$

pour chaque valeur fixée de S est orthogonale à $\cos\varphi$ et à $\sin\varphi$ (car l'opérateur $\partial^2/\partial\varphi^2+1$ tue ces harmoniques dans la série de Fourier). Donc l'intégrale positive est égale à zéro -cette contradiction démontre qu'il existe au moins quatre points critiques.

Remarque. La variant infinitésimal du problème de la naissance des points de rebroussement de la caustique lors des déformations du collapse lagrangien standard donne ces points comme les racines de l'équation $f'''+f'=0$, où f est une fonction 2π-périodique d'une variable, décrivant la perturbation infinitésimale.

Une telle équation a toujours au moins quatre racines sur le cercle, parce que la fonction $f'''+f'$ est orthogonale à 1, $\sin\varphi$, $\cos\varphi$.

S. Tabachnikov [4] a remarqué que, plus généralement, la fonction

$$\sum a_k\cos k\varphi+b_k\sin k\varphi\ , \quad k\geq n$$

a au moins $2n$ racines sur le cercle (et qu'un résultat similaire a lieu pour les fonctions propres d'autres opérateurs de Sturm-Liouville).

J'ai trouvé d'applications de ce théorème au minoration des nombres des singularités lagrangiennes A_k d'ordres supérieurs.

Les généralisations de la théorie de Sturm aux fonctions sphériques, dont on a besoin pour aborder les minorations des nombres des singularités des collapses standard perturbés dans $T^*\mathbb{R}^n$, $n>2$, ne sont pas encore construites, même sous la forme infinitésimale. (Ces généralisations doivent fournir, par exemple, la version symplectisée du théorème des quatre points ombilicaux des surfaces convexes, si $n=3$).

Je dois avouer que je ne comprends ni les origines profondes du théorème démontré, ni les raisons d'apparition des théorèmes de type de Sturm dans les problèmes de déformation du collapse lagrangien.

5. LES COORDONNÉES ADAPTÉES

Pour formuler les restrictions de proximité du cylindre perturbé au cylindre standard, il est commode de décrire le premier en utilisant des coordonnées spéciales au voisinage du second. Nous utiliserons le fait qu'un voisinage d'une variété lagrangienne est symplectomorphe au voisinage d'une section lagrangienne de son fibré cotangent. Nous décrirons un tel symplectomorphisme explicitement.

Considérons l'application $S^1 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, décrite par les formules

$$\begin{cases} p_x = A\cos\varphi, & p_y = A\sin\varphi\ , \\ x\ = r\cos\varphi + B\sin\varphi, & y\ = r\sin\varphi - B\cos\varphi\ , \end{cases} \tag{1}$$

Ici $\varphi \bmod 2\pi$ est la coordonnée sur S^1, (r, A, B) -dans $\mathbb{R}^3$ et $(x, y; p_x, p_y)$ -dans $T^*\mathbb{R}^2 \approx \mathbb{R}^4$.

On vérifie directement le

Lemme. *L'identité suivante a lieu:*

$$p_x dx + p_y dy = P_r dr + P_\varphi d\varphi, \tag{2}$$

où

$$P_r = A\ ,\ P_\varphi = AB. \tag{3}$$

Corollaire. *Les formules (1) décrivent un symplectomorphisme du domaine $P_r = A > 0$ de $T^*(\mathbb{R} \times S^1)$ sur le domaine $T^*\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{R}^2(p \neq 0)$).*

Démonstration. Le point $p = (p_x, p_y)$ définit $A > 0$ et $\varphi \bmod 2\pi$ sans ambigüité. Quand φ est connue, le vecteur (r, B) s'obtient du vecteur (x, y) par une rotation à l'angle φ.

6. LE THEOREME PRINCIPAL

Soit $S(r,\varphi)$ une fonction 2π-périodique en φ, qui coïncide avec r pour $|r| \geq c_2$ et qui est strictement monotone en $r(\partial S/\partial r > 0)$.

Définissons un cylindre lagrangien exact $L \hookrightarrow T^*\mathbf{R}^2$ par la fonction génératrice S, notamment par les formules

$$P_r = \partial S/\partial r \ , \ P_\varphi = \partial S/\partial \varphi \tag{4}$$

dans les coordonnées du §**5**.

Théorème. *La caustique de la projection du cylindre générique L dans le plan (x,y) le long des fibres du fibré cotangent a au moins quatre points de rebroussement.*

Démonstration. L'ensemble des points critiques de la projection lagrangienne est défini par l'équation

$$\det(\partial(x,y)/\partial(r,\varphi)) = 0.$$

Cette équation, conformément à (1)-(4), a la forme

$$\det \begin{vmatrix} c + B_r s & s - B_r c \\ B_c + (-r + B_\varphi)s & Bs - (-r + B_\varphi)c \end{vmatrix} = 0,$$

où $c = \cos\varphi, \ s = \sin\varphi$.

Donc l'ensemble des points critiques est la courbe de l'équation

$$-r + B_\varphi - BB_r = 0.$$

Le long du noyau de la dérivée de la projection en un point singulier dx et dy s'annulent. Donc, d'après (1) et (4), ce noyau est défini par l'équation $dS = 0$.

Dans la situation décrite dans le théorème, on peut choisir (S,φ) au lieu de (r,φ) comme des variables indépendantes. Je vais noter les dérivées partielles par des indices (u_r, u_φ) si les variables φ ou r sont fixées, et par les fractions $(\partial u/\partial S\ ,\ \partial u/\partial\varphi)$ si l'on fixe φ ou S.

Je vais aussi utiliser les notations des anciens, où une fonction, disons u, sur une variété est notée par la même lettre indépendamment du système de coordonnées utilisé.

L'expression de r en fonction des coordonnées S et φ peut s'écrire sous la forme

$$r = S + f(S,\varphi)\ ,\ \partial f/\partial S > -1,$$

où $f = 0$ pour $|S| \geq c_3$.

En passant aux différentielles, on obtient

$$dr = (1 + \partial f/\partial S)dS + \partial f/\partial\varphi d\varphi.$$

Donc, d'après (4), L est décrit par les fonctions

$$P_r = (1 + \partial f/\partial S)^{-1}\ ,\ P_\varphi = -(\partial f/\partial\varphi)(1 + \partial f/\partial S)^{-1}.$$

Ainsi les relations (4), (3) impliquent une expression simple pour P_φ/P_r,

$$B = -\partial f/\partial\varphi|_{S=\mathbf{const}},$$

et par conséquent nous trouvons aussi

$$B_\varphi - BB_r = \partial B/\partial\varphi|_{S=\mathbf{const}}.$$

Finalement, l'équation de la courbe des points singuliers prend la forme

$$S + f(S,\varphi) + \partial^2 f/\partial\varphi^2 = 0$$

où f est la fonction connue, définissant le cylindre perturbé, 2π-périodique en φ et s'annulant pour les grandes valeurs de $|S|$.

Les points de rebroussement de caustiques sont les projections des points de tangence du noyau ($dS = 0$) à la courbe des points singuliers. Donc ce sont les points critiques de la restriction de la fonction S à cette courbe (qui est une courbe lisse si L et f sont génériques).

Par le théorème de Sturm-Tabachnikov (§**4.**) le nombre de ces points est au moins quatre, ce qui démontre le théorème principal.

Remarque. La démonstration montre que la restriction "$S = r$ pour $|r| \geq c_2$" n'a pas de grande importance. Il suffit, par exemple, que la fonction $S - r$ soit bornée avec les dérivées secondes, pourvu que $\partial S/\partial r > c_4 > 0$.

On peut même admettre une croissance (modérée) de f pour $|S| \to \infty$. Il suffit que la fonction $H(S, \varphi) = S + f + \partial^2 f/\partial\varphi^2$ tende vers $\pm\infty$ quand $|S| \to \infty$.

Cette remarque permet d'adapter nos raisonnements, par exemple, à la démonstration du théorème des quatre sommets d'une courbe convexe plane. Ce théorème est donc un cas particulier de notre généralisation symplectique.

Autres généralisations sont discutés dans [5]-[8].

Bibliographie

[1] Jacobi, K.: *Vorlesungen über Dynamics*, 1864.

[2] Braunmühl, A.V.: *Geodätische Linien und ihre Enveloppen auf Dreiaxigen Flächen Zweiten Grades.* Math. Annalen, **20** (1882), 557-586.

[3] Arnold, V.I.: *The spaces of functions with mild singularities.* Funct. Analysis and its Appl., **23** N.3 (1989), 1-10.

[4] Tabachnikov, S.: *Around four vertices.* Russian Math. Surveys, **45** N.1 (1990), 229-230.

[5] Arnold, V.I.: *Plane curves, their invariants, perestroikas and classifications*, In: Singularities and Bifurcations, Adv. in Sov. Math. vol. **21**, AMS, 1994.

[6] Arnold, V.I.: *Invariant and Perestroikas of Plane Curves.* Trudy Math. Inst. Steklova, vol. 209, Moscow, 1995.

[7] Arnold, V.I.: *On topological properties of Legendre projection in contact geometry of wave fronts.* Algebra i Analysis (S. Petersburg Math. J.) vol. **6**, N3 (1994), 1-16.

[8] Arnold, V.I.: *Topological invariants of plane curves and caustics.* University lectures series, vol. 5, AMS, 1994.

Institut Steklov
Moscou
RUSIA
CEREMADE
Université Paris-Dauphine
FRANCE

Recibido:4 de julio de 1994