REVISTA MATEMATICA de la
Universidad Complutense de Madrid
Volumen 8, número 1: 1995

Sur une Classe de Problèmes d'Evolution Quasi Linéaires Dégénérés.

Anne PLOUVIER

ABSTRACT. We are concerned with the existence, uniqueness and qualitative behaviour of weak solutions to nonlinear conservation laws, of the form

$$\frac{\partial u}{\partial t} - div\ \left(\mathcal{A}(.,u)\ \vec{\nabla}\ \phi(u)\right) = 0, \quad \phi(0) = \phi'(0) = 0,\ \phi' \geq 0,$$

associated with mixed conditions on the parabolic boundary. We establish a global result of existence for initial data in the space L^∞, when coefficients of $\mathcal{A}$ are Caratheodory functions.

Under these assumptions, we prove the global uniqueness with additional informations on the structure of the matrix of absolute permeability $\mathcal{A}(.,.)$. The asymptotic behaviour of the solution and the local hyperbolic character of the degenerate equation are specified.

RÉSUMÉ. On présente une étude analytique de problèmes aux limites de Cauchy qui trouvent leur origine dans l'écriture de la loi de conservation de

1991 Mathematics Subject Classification: 35K55, 35J60, 58G11.
Servicio publicaciones Univ. Complutense. Madrid, 1995.

masse (équation de continuité) d'un fluide en milieu poreux, lorsque le tenseur de diffusivité dépend de l'évolution du système physique. On considère une classe d'équations de type divergentiel:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - div\ \left(\mathcal{A}(.,u)\ \vec{\nabla}\ \phi(u)\right) = 0, \quad \phi(0) = \phi'(0) = 0,\ \phi' \geq 0,$$

associées à des conditions aux limites mêlées sur la frontière parabolique. On établit un résultat d'éxistence pour une donnée initiale peu régulière, lorsque les coefficients de $\mathcal{A}$ sont des fonctions de Carathéodory. Dans ces conditions, l'unicité globale est prouvée dès lors qu'on possède une information supplémentaire d'höldérianité sur la dépendance $\omega \mapsto ||\mathcal{A}(.,\phi^{-1}(\omega))||$. Le comportement asymptotique de la solution et l'effet de propagation de la diffusion à vitesse finie, révélateur d'un comportement localement hyperbolique de l'équation dégénérée, sont décrits.

1. INTRODUCTION

On propose une contribution à l'étude analytique de problèmes d'évolution du type de la diffusion non linéaire lorsque l'expression du tenseur de diffusivité est affectée par l'état instantané du système qu'ils décrivent; plus précisément, on introduit une classe de problèmes de Cauchy de type divergentiel quasi linéaire:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - div\ \left(\mathcal{A}(.,u)\ \vec{\nabla}\ \phi(u)\right) = 0, \\ u(0) = u_0 \text{ p.p. dans } \Omega, \\ \text{associés à des conditions de bord de type Dirichlet ou de type} \\ \text{mêlé sur le bord d'un ouvert borné } \Omega. \end{cases}$$

Les situations physiques modélisées par un problème aux limites présentant ces particularités son nombreuses: description de l'humidité des sols, industrie pétrolière ou modèles de diffusion d'un effluent pour des écosystèmes hydriques; à titre d'illustration, considérons la diffusion d'un gaz dans un milieux poreux, de porosité constante (pour simplifier ...) et prise égale à 1 après une classique homothétie de l'échelle des temps; l'équation de conservation de masse (ou de continuité) s'écrit alors

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div\ (\rho\, \vec{U}) = 0$$

où l'on désigne par

ρ la masse volumique du gaz, $\vec{U}$ sa vitesse de filtration.

Adoptant pour lois de comportement

i) une loi de type BOYLE-MARIOTTE:

$$\rho = \rho(P),\ \ \rho \text{ fonction strictement croissante, } 0 \leq \rho \leq \rho\max < +\infty,$$

liant la masse volumique et la pression (ex: $\rho = \rho_0 \left(\frac{P}{P_0}\right)^{\gamma_0},\ \gamma_0 > 0$).

ii) une loi de DARCY, liant le champ de vitesse et le gradient de pression:

$$\vec{U} = -\mathcal{K}(x, P) \cdot \vec{\nabla}\, P$$

où $\mathcal{K}$, le tenseur de diffusivité, dépend du point considéré et de la valeur de la pression régnant en ce point,

on obtient une équation du type:

$$\frac{\partial S}{\partial t} - div\ \left(\mathcal{A}(x, S)\, \vec{\nabla}\, \phi(S)\right) = 0,\ \ \phi(0) = \phi'(0) = 0,\ \ \phi' \geq 0.$$

en prenant pour inconnue $S = \rho(P)$, et

$$\phi(S) = \int_0^{\rho^{-1}(S)} \rho(r)dr, \quad \mathcal{A}(x, S) = \mathcal{K}(x, \rho^{-1}(S)),$$

S étant associée à des conditions (selon un partitionnement du bord)

$$S = S_0 \quad \text{ou} \quad \left(\mathcal{A}(x, S)\, \vec{\nabla}\, \phi(S)\right)\ .\ \vec{n} = 0$$

correspondant respectivement à une zone à pression imposée ou à une paroi imperméable.

2. ENONCE DE LA FORMULATION VARIATIONNELLE

a) Notations générales.

Soit Ω un domaine borné connexe de $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}^*$, de frontière Γ régulière; soit Γ_1 un ouvert non vide de Γ et $\Gamma_2 = \Gamma \setminus \Gamma_1$; T désignant un réel strictement positif, on note $Q = \Omega \times]0, T[$.

On se donne, pour $(i,j) \in (1, \ldots, n)^2$, n^2 fonctions de CARATHEODORY:

$$a_{ij} : \Omega \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, \lambda) \longrightarrow a_{ij}(x, \lambda),$$

vérifiant:

$$\begin{cases} (i) & a_{ij} \in L^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^+) \text{ pour tout } i \text{ et tout } j, \\ (ii) & \exists \alpha_0 > 0,\ \forall \lambda \in \mathbb{R}^+,\ \forall \xi \in \mathbb{R}^n,\ a_{ij}(.,\lambda)\xi_i\xi_j \geq \alpha_0 \xi_i \xi_i \\ & \text{p.p. sur } \Omega \text{ (avec la convention de sommation} \\ & \text{de l'indice répété),} \\ (iii) & y \mapsto a_{ij}(x,y) \text{ admet uniformément par rapport à } x, \\ & \text{presque partout dans } \Omega, \text{ et uniformément par} \\ & \text{rapport à l'indice } (i,j), \text{ un module de continuité } \theta \text{ et} \\ & \int_{0^+} \frac{d\tau}{[\theta(\tau)]^2} = +\infty. \end{cases} \tag{1.1}$$

On note $\mathcal{A}(x, \lambda)$ la matrice de diffusivité $\{a_{ij}(x, \lambda)\}_{n \times n}$.

b) Cadre fonctionnel de la modélisation.

On introduit l'espace de Hilbert V,

$$V = \{v \in H^1(\Omega);\ v = 0 \text{ sur } \Gamma_1\}$$

muni, grâce à l'inégalité de POINCARE et à la connexité de Ω, du produit scalaire:

$$\forall u \in V,\ \forall v \in V, \quad ((u,v)) = \int_\Omega \vec{\nabla}\, u . \vec{\nabla}\, v dx.$$

Identifiant $H = L^2(\Omega)$ à son dual, on peut identifier V', le dual de V, à un sur-espace de H, avec $V \subset H \subset H'$, l'injection de V dans H étant continue, à image dense.

On note $||.||$ (resp. $|.|$) la norme dans V (resp. dans H), $(.,.)$ le produit scalaire dans H et $\langle .,. \rangle_{V',V}$ la dualité V', V.

On considère, la dérivation étant prise au sens de $\mathcal{D}'(]0,T[;V)$,

$$W(0,T) = \left\{ v \in L^2(0,T;V),\ \frac{\partial v}{\partial t} \in L^2(0,T,V') \right\}$$

espace de Hilbert, muni de la norme usuelle (cf. [13], ch.1).

Hypothèses sur u_0 et ϕ.

On s'intéresse essentiellement, compte tenu de l'interprétation physique du problème, à la recherche de solutions bornées et positives, associées à une donnée initiale bornée, positive, sans autre hypothèse de régularité. Dès lors, on suppose que les données initiales admissibles sont des fonctions mesurables, définies presque partout sur Ω, à valeurs dans un intervalle $[0, M]$, pour un certain $M > 0$, et on considèrera désormais que:

$(H1)$ $\quad u_0 \in L^\infty(\Omega),\ 0 \leq u_0 \leq M$ presque partout dans Ω,

$$
(H2)\left\{\begin{array}{l}
\phi \in \mathcal{C}^1((0,M]),\ \phi(0)=0,\ \phi'(0)=0,\ \phi'\geq 0.\\[2ex]
\phi \text{ est strictement croissante, } \phi^{-1}\in \mathcal{C}^{0,\alpha}([0,\phi(M)]),\\[2ex]
\text{i.e. } \phi^{-1} \text{ est höldérienne d'ordre } \alpha,\\[2ex]
\text{pour un certain } \alpha \in]0,1[, \text{ sur l'intervalle } [0,\phi(M)].\\[2ex]
\text{On note } \theta \text{ la primitive de } \phi \text{ s'annulant à l'origine.}
\end{array}\right.
$$

On introduit alors le problème de Cauchy, formellement énoncé par la formulation variationnelle suivante, qui tient compte d'une condition de bord de Dirichlet homogène sur Γ_1 et de Neumann homogène sur $\Gamma \setminus \Gamma_1$,
(avec, éventuellement $d\Gamma$-mes $(\Gamma \setminus \Gamma_1) = 0$):

$$
(\mathcal{P})\left\{\begin{array}{l}
\text{Trouver } u \text{ vérifiant, presque partout sur }]0,T[,\\[2ex]
\forall v \in V,\ \langle \frac{\partial u}{\partial t}, v\rangle_{V',V} + \int_\Omega \mathcal{A}(.,u)\ \vec{\nabla}\ \phi(u).\ \vec{\nabla}\ v dx = 0,\\[2ex]
u(0) = u_0 \text{ p.p. dans } \Omega.
\end{array}\right.
$$

Le plan de la présentation est le suivant:

i) on prouve l'existence d'une solution faible pour une donnée initiale très peu régulière.

ii) sans hypothèse supplémentaire de régularité sur l'état initial, l'unicité est établie dès lors que les coefficients de la matrice de diffusivité dépendent de façon höldérienne (d'ordre à préciser) de l'inconnue u, uniformément en la variable géométrique x, presque partout sur Ω.

iii) des informations sont apportées sur le comportement asymptotique de la solution, lorsque t devient arbitrairement grand.

iv) le caractère localement hyperbolique du problème est mis en évidence par la description d'un effet de diffusion à vitesse finie, en adaptant les résultats classiques de ANTONTSEV S.N., DIAZ J.I. [2] par la méthode de localisation de l'énergie.

3. EXISTENCE D'UNE SOLUTION FAIBLE AU PROBLEME $(\mathcal{P})$.

En se fondant sur un lemme technique dû à BAMBERGER A. [4] sur une idée de MIGNOT F. (cf. aussi ANTONTSEV S.N., DIAZ J.I. [2]) et sur une étude préalable de ARTOLA M. [1] dans le cadre particulier où $\phi = Id$, on dispose du résultat d'existence suivant:

Proposition 1:

Sous les hypothèses (1.1), (H1) et (H2), il existe au moins une solution u du problème $(\mathcal{P})$ telle que:

$$\left\{\begin{array}{l} u \in L^\infty(Q),\ 0 \leq u \leq M \ p.p.\ dans\ Q, \\[2ex] \phi(u) \in L^2(0,T;V),\ \frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0,T;V'), \\[2ex] p.p.\ sur\ ]0,T[, solution\ de\ l'équation\ variationnelle : \\[2ex] \forall v \in V,\ \left\langle \frac{\partial u}{\partial t}, v \right\rangle_{V',V} + \int_\Omega \mathcal{A}(.,u)\, \vec{\nabla}\, \phi(u).\, \vec{\nabla}\, v dx = 0, \\[2ex] u(0) = u_0 \ p.p.\ dans\ \Omega,\ L^1(\Omega) - \lim\limits_{t \to 0^+} u(t,.) = v_0. \end{array}\right.$$

Preuve:

Première étape: le problème régularisé.

Considérons le problème non dégénéré, régularisé par l'adjonction d'un terme de viscosité artificielle. On remplace la fonction ϕ par $\phi_\varepsilon = \phi + \varepsilon Id$, $\varepsilon > 0$, ϕ_ε étant alors bi-lipschitzienne. Ainsi, le problème non dégénéré associé s'énonce par la recherche de u_ε tel que:

$$(\mathcal{P}_\varepsilon) \left\{\begin{array}{l} u_\varepsilon \in W(0,T),\ 0 \leq u_\varepsilon \leq M \text{ p.p. dans } Q, \\[2ex] \text{solution p.p. sur }]0,T[\text{ de l'équation variationnelle,} \\[2ex] \forall v \in V,\ \left\langle \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}, v \right\rangle_{V',V} + \int_\Omega \mathcal{A}(.,u_\varepsilon)\, \vec{\nabla}\, \phi_\varepsilon(u_\varepsilon).\, \vec{\nabla}\, v dx = 0, \\[2ex] u_\varepsilon(0) = u_0 \text{ p.p. dans } \Omega. \end{array}\right.$$

D'après la monographie de ARTOLA M. [1], on sait que pour tout $\varepsilon > 0$ et pour toute donnée de g dans $W(0,T)$, $0 \leq g \leq M$ p.p. dans Q, $\exists!\ U_\varepsilon = U_\varepsilon(g)$ tel que:

$$(\mathcal{P}_\varepsilon(g)) \begin{cases} U_\varepsilon \in W(0,T),\ 0 \leq U_\varepsilon \leq M \text{ p.p. dans } Q, \\ \text{vérifiant p.p. sur }]0,T[, \\ \forall v \in V,\ \langle \frac{\partial U_\varepsilon}{\partial t}, v \rangle_{V',V} \\ \qquad + \int_\Omega \mathcal{A}(.,U_\varepsilon)(\phi'(g)+\varepsilon)\,\vec{\nabla}\,(U_\varepsilon).\,\vec{\nabla}\,v dx = 0, \\ U_\varepsilon(0) = u_0 \text{ p.p. dans } \Omega. \end{cases}$$

L'existence d'une solution u_ε au problème $(\mathcal{P}_\varepsilon)$ résulte alors facilement du théorème de point fixe de SCHAUDER-TYCHONOFF dans le cadre hilbertien séparable (cf. ZEIDLER [15]), en reprenant la méthode suivie par GAGNEUX G., GUERFI F. [10]. Il suffit de vérifier que l'application de $W(0,T)$ dans lui-même qui à g fait correspondre $U_\varepsilon(g)$, ε fixé strictement positif,

i) laisse invariant un convexe non vide faiblement compact de $W(0,T)$ du type:

$$\mathcal{K} = \{v \in W(0,T),\ 0 \leq v \leq M \text{ p.p. dans } Q,\ v(0) = u_0 \text{ p.p. dans } \Omega,$$

$$||v||_{L^2(0,T;V)} \leq c_1,\ ||\frac{\partial v}{\partial t}||_{L^2(0,T;V')} \leq c_2\}$$

pour des constantes c_1 et c_2 convenables.

ii) est faiblement séquentiellement continue de $\mathcal{K}$ dans $\mathcal{K}$, pour la topologie $\sigma(W(0,T), W'(0,T))$.

Deuxième étape: estimations a priori.

D'après le lemme de STAMPACCHIA G., il est loisible de prendre pour fonction test $v = \phi_\varepsilon(u_\varepsilon)$ élément de V.

En utilisant le lemme de BAMBERGER A. [4] fondé sur une double inégalité de convexité, on a, p.p. sur $]0,T[$, au sens de $\mathcal{D}'(0,T)$ et dans $L^1(0,T)$,

$$\left\langle \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}, \phi_\varepsilon(u_\varepsilon) \right\rangle_{V',V} = \frac{\partial}{\partial t} \int_\Omega \left(\int_0^{u_\varepsilon(t,x)} \phi_\varepsilon(r)dr \right) dx.$$

Par intégration loisible sur $]0,T[$, de fonctions numériques absolument continues et d'après (1.1)ii), il vient:

$$\int_\Omega \left(\int_0^{u_\varepsilon(T,x)} \phi_\varepsilon(r)dr \right) dx + \alpha_0 ||\phi_\varepsilon(u_\varepsilon)||^2_{L^2(0,T;V)}$$

$$\leq \int_\Omega \left(\int_0^{u_0(x)} \phi_\varepsilon(r)dr \right) dx.$$

Observant que:

$$\int_0^{u_\varepsilon(T,x)} \phi_\varepsilon(r)dr \geq 0,$$

et que la quantité

$$||\phi_\varepsilon||_{L^\infty(0,|u_0|_{L^\infty(\Omega)})}$$

est bornée indépendamment de ε, on met en évidence les estimations a priori suivantes:

$\exists c$, constante indépendante de ε, telle que:

$$\begin{cases} ||\phi_\varepsilon(u_\varepsilon)||^2_{L^2(0,T;V)} \leq c & \text{(P1)} \\ ||\phi(u_\varepsilon)||^2_{L^2(0,T;V)} + \varepsilon^2 ||u_\varepsilon||^2_{L^2(0,T;V)} \leq c & \text{(P2)} \\ ||\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}||_{L^2(0,T;V')} \leq c & \text{(P3)} \end{cases}$$

D'après (P2), la famille $\phi(u_\varepsilon)$ est bornée dans $L^2(0,T;V)$, donc dans $L^2(0,T;W^{s,2}(\Omega))$, pour tout $s \in]0,1[$. De plus, ϕ^{-1} est höldérienne d'ordre α, $\alpha \in]0,1[$, nulle en 0 et donc

$$u_\varepsilon \in W^{\alpha s, 2/\alpha}(\Omega) \text{ p.p. sur }]0,T[$$

et indépendamment de ε, selon un résultat classique de TARTAR L. fondé sur la caractérisation de GAGLIARDO E. des espaces $W^{s,p}(\Omega)$, $0 < s < 1$ (cf. LIONS J.L., MAGENES E. [13] t.1 p.108 ou BREZIS H. [5] p.196)

$$u_\varepsilon \text{ demeure dans un borné fixe de } L^{2/\alpha}(0,T;W^{\alpha s,2/\alpha}(\Omega)). \tag{P4}$$

Troisième étape: passages à la limite.

D'après le théorème de compacité de DUBINSKII J.A. (cf. LIONS J.L. [14] p.57),

$$\text{l'injection } J \text{ de } \{v \in L^{2/\alpha}(0,T;W^{\alpha s,2/\alpha}(\Omega)),\ \frac{\partial v}{\partial t} \in L^2(0,T;V')\}$$

dans $L^{2/\alpha}(0,T;L^{2/\alpha}(\Omega))$ est compacte.

On peut donc en définitive extraire une sous-suite de $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ notée $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$, telle que, quand $\varepsilon \to 0^+$

$$\begin{cases} u_\varepsilon \xrightarrow{L^2(Q)} u \text{ avec } 0 \le u \le M \text{ p.p. dans } Q, \\ u_\varepsilon \xrightarrow{\text{p.p. dans } Q} u, \\ \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} \xrightarrow{L^2(0,T;V')} \frac{\partial u}{\partial t}, \\ \phi(u_\varepsilon) \xrightarrow{L^2(0,T;V)} \phi(u), \\ \phi_\varepsilon(u_\varepsilon) \xrightarrow{L^2(0,T;V)} \phi(u), \\ \vec{\nabla}\, \phi_\varepsilon(u_\varepsilon) \xrightarrow{(L^2(Q))^n} \vec{\nabla}\, \phi(u). \end{cases}$$

D'après le théorème de DUBINSKII J.A., on peut choisir en outre la sous-suite extraite telle que, quand $\varepsilon \to 0^+$

$$u_\varepsilon \xrightarrow{C^0(0,T;V')} u.$$

D'où, $u(0,.) = u_0$ p.p. dans Ω ; u vérifie donc la condition initiale du problème dégénéré.

Ainsi, d'après le théorème de convergence dominée de LEBESGUE, en passant à la limite (quand $\varepsilon \to 0^+$) dans le problème non dégénéré $(\mathcal{P}_\varepsilon)$, ce point d'accumulation (pour des topologies appropriées) u apparaît solution du problème dégénéré $(\mathcal{P})$.

Le théorème d'existence est donc démontré.

Remarques:

i) Sachant que $u \in \mathcal{C}^0([0,T];V')$ et que $u \in L^\infty(Q)$, on a (cf. LIONS J.L., MAGENES E. [11] vol.1 p.297):

$$u \in \mathcal{C}^s([0,T], L^p(\Omega)), \text{ pour tout } p \in [2,+\infty[.$$

ii) Une variante facile peut être obtenue en remplaçant l'hypothèse (H2), toute chose étant égale par ailleurs, par:

$$(H2)bis \begin{cases} \phi \in \mathcal{C}^1([0,M]),\ \phi(0) = \phi'(0) = 0,\ \phi \text{ est strictement} \\ \text{croissante (et } F \text{ désignant la primitive de la fonction} \\ \sqrt{\phi'} \text{ nulle à l'origine)} \\ F^{-1} \in \mathcal{C}^{0,\beta}([0,F(M)]),\ \text{pour un certain } \beta \in]0,1[. \end{cases}$$

4. UN RÉSULTAT D'UNICITÉ

On suppose que pour tout couple $(i,j) \in (1\cdots n)^2$, l'application:

$$y \mapsto a_{ij}(x, \phi^{-1}(y))$$

est höldérienne d'ordre γ avec $\frac{1}{2} \leq \gamma < 1$, uniformément par rapport à x, i.e., plus précisément:

$$(H3)\begin{cases} \exists\gamma \in [1/2, 1[,\ \exists c > 0, \\ \forall(y_1, y_2) \in [0, \phi(M)]^2,\ \forall(i,j) \in (1, \dots, n)^2, \\ |a_{i,j}(., \phi^{-1}(y_1)) - a_{i,j}(., \phi^{-1}(y_2))| \leq c|y_1 - y_2|^\gamma, \\ \text{presque partout sur } \Omega. \end{cases}$$

On dispose alors de la

Proposition 2. *Sous l'hypothèse supplémentaire (H3), la solution u du problème ($\mathcal{P}$) décrite par la proposition 1 est unique.*

Preuve. La démonstration de cette propriété est une conséquence du résultat suivant:

Théorème. *Soient u et v deux solutions du problème ($\mathcal{P}$), associées aux conditions initiales respectives u_0 et v_0 dans le cadre de l'hypothèse (H3). Alors, on a:*

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega (u(.,x) - v(.,x))^+ dx \leq 0, \text{ au sens de } \mathcal{D}'(]0,T[).$$

Première étape: preuve du théorème.

Introduisant deux instants arbitraires t et τ de $]0,T[\times]0,T[$, on considère u et v comme des fonctions définies sur $\Omega\times]0,T[\times]0,T[$ en prenant:

$$u(x,t,\tau) = u(x,t), \quad v(x,t,\tau) = v(x,\tau).$$

Soient $\xi \in \mathcal{D}(0,T)$ tel que $\xi \geq 0$ sur $]0,T[$ et pour tout $\delta > 0$, ρ_δ une suite régularisante, telle que:

$$\rho_\delta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \text{ avec } \rho_\delta \geq 0, \int_{\mathbb{R}} \rho_\delta(x)dx = 1.$$

Posons $\xi_\delta(t,\tau) = \xi\left(\frac{t+\tau}{2}\right)\rho_\delta\left(\frac{t-\tau}{2}\right)$, avec δ assez petit afin que $\xi_\delta \in \mathcal{D}((0,T)\times(0,T))$.

Soit, pour tout $\varepsilon > 0$, H_ε l'approximation de la fonction de Heaviside (i.e. de la fonction sgn_0^+), utilisée par GAGNEUX G., MADAUNE-TORT M. [11] définie par:

$$\forall r \in \mathbb{R}, \ \mathrm{H}_\varepsilon(r) = \frac{r^{+^2}}{r^2+\varepsilon}.$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, H_ε est une fonction globalement lipschitzienne sur $\mathbb{R}$, strictement croissante, de classe C^1, nulle en 0, construite de sorte que, pour tout réel r,

$$(P5)\begin{cases} rH'_\varepsilon(r) \xrightarrow{\varepsilon\to 0^+} 0, \\ 0 \leq rH'_\varepsilon(r) \leq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Puisque u et v sont solutions du problème, on a, par différence des deux équations:

$$\begin{cases} \forall z \in V \text{ et p.p. sur }]0,T[\times]0,T[, \\ \left\langle \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial v}{\partial \tau}, z\right\rangle_{V',V} + \int_\Omega \mathcal{A}(.,u) \vec{\nabla}\, \phi(u). \vec{\nabla}\, zdx \\ = \int_\Omega \mathcal{A}(.,v) \vec{\nabla}\, \phi(v). \vec{\nabla}\, zdx. \end{cases}$$

D'où, il vient:

$$\left\{\begin{array}{l}\forall z \in V \text{ et p.p. sur }]0,T[\times]0,T[,\\ \langle \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial v}{\partial \tau}, z\rangle_{V',V} + \int_\Omega \mathcal{A}(.,u)\vec{\nabla}(\phi(u)-\phi(v)).\vec{\nabla} z dx\\ = \int_\Omega (\mathcal{A}(.,v)-\mathcal{A}(.,u))\vec{\nabla}\phi(v).\vec{\nabla} z dx.\end{array}\right.$$

D'après le lemme de STAMPACCHIA G., la fonction définie, $\forall \varepsilon > 0$, par: $\omega_\varepsilon = H_\varepsilon(\phi(u)-\phi(v))$ est une fonction test loisible, appartenant à V.

De plus, presque partout sur $]0,T[$ et presque partout dans Ω,

$$\vec{\nabla}\omega_\varepsilon = \vec{\nabla}(\phi(u)-\phi(v))H'_\varepsilon(\phi(u)-\phi(v)).$$

Ainsi, en appliquant l'inégalité de YOUNG et 1.1)ii), il vient, p.p. sur $]0,T[\times]0,T[$, H'_ε étant non négative:

$$\left\langle \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial v}{\partial \tau}, \omega_\varepsilon \right\rangle_{V',V} + \frac{\alpha_0}{2}\int_\Omega H'_\varepsilon(\phi(u)-\phi(v))|\vec{\nabla}(\phi(u)-\phi(v))|^2 dx$$

$$\leq \frac{1}{2\alpha_0}\int_\Omega |(\mathcal{A}(.,v)-\mathcal{A}(.,u))\vec{\nabla}\phi(v)|^2 H'_\varepsilon(\phi(u)-\phi(v))dx.$$

Etant donné que: pour tout $\delta > 0$, $\xi_\delta \geq 0$, on peut miltiplier chaque membre de l'inégalité par ξ_δ et intégrer sur $]0,T[\times]0,T[$.

Il s'ensuit que:

$$\int_0^T\int_0^T \left\langle \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial v}{\partial \tau}, \omega_\varepsilon \right\rangle_{V',V} \xi_\delta dt d\tau$$

$$+ \frac{\alpha_0}{2}\int_0^T\int_0^T\int_\Omega H'_\varepsilon(\phi(u)-\phi(v))|\vec{\nabla}(\phi(u)-\phi(v))|^2 \xi_\delta dx dt d\tau$$

$$\leq \frac{1}{2\alpha_0}\int_0^T\int_0^T\int_\Omega |(\mathcal{A}(.,v)-\mathcal{A}(.,u))\,\vec{\nabla}\,\phi(v)|^2 H'_\varepsilon(\phi(u)-\phi(v)))\,\xi_\delta dx dt d\tau.$$

Posons, $\forall\varepsilon > 0$,

$$\begin{cases} \phi_{\varepsilon,1}(u,v) = \int_v^u H_\varepsilon(\phi(s)-\phi(v))ds, \\ \phi_{\varepsilon,2}(u,v) = \int_v^u H_\varepsilon(\phi(u)-\phi(s))ds, \end{cases}$$

Alors, quand $\varepsilon \to 0^+$,

$$\forall i = 1,2, \quad \phi_{\varepsilon,i}(u,v) \xrightarrow{\text{p.p. dans } \Omega\times]0,T[^2} (u-v)^+.$$

De plus, en tenant compte du fait que u ne dépend pas de τ et que v ne dépend pas de t, on a, en utilisant le lemme de BAMBERGER A. [4], les égalités suivantes:

$$i)\ \int_0^T \left\langle \frac{\partial u}{\partial t}, \omega_\varepsilon \right\rangle_{V',V} \xi_\delta dt = -\int_0^T\int_\Omega \frac{\partial \xi_\delta}{\delta t}\phi_{\varepsilon,1}(u,v) dx dt,$$

$$ii)\ \int_0^T \left\langle \frac{\partial v}{\partial \tau}, \omega_\varepsilon \right\rangle_{V',V} \xi_\delta d\tau = \int_0^T\int_\Omega \frac{\partial \xi_\delta}{\delta \tau}\phi_{\varepsilon,2}(u,v) dx d\tau.$$

Remplaçant dans l'inégalité antérieure, en observant d'après (H3) que

$$|(\mathcal{A}(.,v) - \mathcal{A}(.,u))\, \vec{\nabla}\, \omega|^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \Big\{ \Big(\sum_{j=1}^{n} [a_{ij}(.,v) - a_{ij}(.,u)] \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \Big)^2 \Big\}$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} \Big\{ \sum_{j=1}^{n} (a_{ij}(.,v) - a_{ij}(.,u))^2 \sum_{j=1}^{n} \Big(\frac{\partial \omega}{\partial x_j} \Big)^2 \Big\},$$

par CAUCHY – SCHWARZ dans $\mathbb{R}^n$

$$\leq |\nabla \omega|^2 n^2 c^2 |\phi(u) - \phi(v)|^{2\gamma}$$

on obtient, puisque γ appartient à [1/2,1[,

$$\int_0^T \int_0^T \int_\Omega -\Big(\frac{\partial \xi_\delta}{\delta \tau} \phi_{\varepsilon,2}(u,v) + \frac{\partial \xi_\delta}{\delta t} \phi_{\varepsilon,1}(u,v) \Big) dx dt d\tau \leq$$

$$n^2 \frac{c^2}{2\alpha_0} (\phi(M))^{2\gamma-1} \int_0^T \int_0^T \int_\Omega H'_\varepsilon(\phi(u) - \phi(v)) |\phi(u) - \phi(v)| \, | \vec{\nabla}\, \phi(v)|^2 \xi_\delta dx dt d\tau.$$

Ainsi, quand $\varepsilon \to 0^+$, la propriété (P5) rend possible l'usage du théorème de convergence dominée de LEBESGUE dans $\Omega \times]0,T[\times]0,T[$ et il en résulte que, $\forall \delta > 0$,

$$- \int_0^T \int_0^T \int_\Omega (u(t,.) - v(\tau,.))^+ \xi' \Big(\frac{t+\tau}{2} \Big) \rho_\delta \Big(\frac{t-\tau}{2} \Big) dx dt d\tau \leq 0.$$

Faisant tendre δ vers 0^+, il s'ensuit que, pour tout $\xi \in \mathcal{D}(]0,T[)$,

$\xi \geq 0$,

$$\int_0^T \int_\Omega ((u(t,x) - v(t,x))^+ \xi'(t) dx dt \geq 0.$$

Or, d'après la remarque, point i), pour tout $t \in [0,T]$, $u(t,.)$ a un sens et définit en particulier un élément de $L^1(\Omega)$ car Ω est borné.

En conséquence, la fonction numérique de $L^\infty(0,T)$:

$$t \rightarrow \int_\Omega ((u(t,.) - v(t,.))^+ dx$$

définit une distribution de $\mathcal{D}'(]0,T[)$ et l'on a, au sens de $\mathcal{D}'(]0,T[)$,

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_\Omega ((u(t,x) - v(t,x))^+ dx \leq 0.$$

Le théorème est démontré.

Deuxième étape: preuve de l'unicité de la solution.

D'après le théorème démontré dans la première étape et d'après les propositions 5 et 14 de DAUTRAY R., LIONS J.L. [8], p. 1319 et p. 1332, la distribution négative

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_\Omega ((u(t,x) - v(t,x))^+ dx$$

est une mesure négative et l'application de $[0,T]$ dans $\mathbf{R}^+$ définie par:

$$t \rightarrow \int_\Omega ((u(t,x) - v(t,x))^+ dx, \text{ continue en } 0^+,$$

est une fonction numérique décroissante au sens large sur $[0,T[$.

Ainsi, on dispose plus généralement de la propriété de conservation d'ordre:

$$\forall t \in [0,T], \int_\Omega ((u(t,x) - v(t,x))^+ dx \leq \int_\Omega ((u_0(x) - v_0(x))^+ dx,$$

d'où résulte en particulier la propriété d'unicité.

5. ETUDE DU COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DE LA SOLUTION QUAND $t \to +\infty$

On suppose (H1), (H2) et (H3) et on observe que l'hypothèse (H2) implique l'existence de deux constantes strictement positives β_1 et β_2, telles que

$$(P6) \begin{cases} \forall v \in L^\infty(\Omega),\ 0 \leq v \leq M \text{ p.p. dans } \Omega, \\ \beta_1 |v|^{1+1/\alpha}_{L^{1+1/\alpha}(\Omega)} \leq \int_\Omega \theta(v)dx \leq \beta_2 |v|^2_{L^2(\Omega)}. \end{cases}$$

Lemme sur le comportement asymptotique de la solution:

Notant, sous les hypothèses précédentes, u la solution du problème correspondant à la donnée initiale u_0 (non triviale), on montre que la fonction $z_\theta(t) = \int_\Omega \theta(u(t,x))dx$ vérifie:

$\forall t > 0$, $0 \leq z_\theta(t) \leq z(t)$, où $z(t)$ *est la solution de l'équation différentielle:*

$$\begin{cases} \frac{\partial z(t)}{\partial t} + \beta_3 z^{1/\alpha}(t) = 0,\ t > 0,\ \beta_3 \textit{ constante dépendant de } \alpha \textit{ et} \beta_2, \\ \textit{précisée par la démonstration}, \\ z(0) = \int_\Omega \theta(u_0)dx. \end{cases}$$

De plus,

$$u(t,.) \xrightarrow{L^p(\Omega)} 0, \text{ quand } t \to +\infty, \text{ pour tout } p \in [1,+\infty[.$$

Preuve de lemme:

Soit u la solution du problème dégénéré, associée à u_0.

Il est loisible de prendre comme fonction test: $v = \phi(u)$, d'où, presque partout sur $]0,T[$, et indépendamment de T,

$$\left\langle \frac{\partial u}{\partial t}, \phi(u) \right\rangle_{V',V} + \alpha_0 ||\phi(u)||_V^2 \leq 0.$$

D'après le lemme de BAMBERGER A. [4], fondé sur une double inégalité de convexité, il vient pour presque tout t de $]0,T[$

$$\frac{\partial}{\partial t} z_\theta(t) + ||\phi(u(t))||_V^2 \leq 0.$$

Sachant que:

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi^{-1} \text{ est höldérienne d'ordre } \alpha, \ 0 < \alpha < 1, \text{ sur } [0, \phi(M)], \\ \text{l'injection de } V \text{ dans } L^2(\Omega) \text{ est continue}, \\ \text{l'injection de } L^{2/\alpha}(\Omega) \text{ dans } L^2(\Omega) \text{ est continue}, \end{array} \right.$$

il vient,

$$\frac{\partial}{\partial t} z_\theta(t) + \frac{\alpha_0}{k^{2/\alpha}} |u(t)|_{L^2(\Omega)}^{2/\alpha} \leq 0.$$

On utilise (P6) et on a,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} z_\theta(t) + \beta_3 z_\theta^{1/\alpha}(t) \leq 0, \text{ pour presque tout } t \text{ de }]0,T[\\ \text{avec } \beta_3 = \frac{\alpha_0}{k^{2/\alpha}\beta_2^{1/\alpha}}, \\ \forall t \geq 0, \ z_\theta(t) \geq 0, \ z_\theta(0) = \int_\Omega \theta(u_0) dx = z_0. \end{array} \right.$$

Un théorème de comparaison sur les équations différentielles montre que:

$$\forall t \in]0,T[, \quad z_\theta(t) \leq z(t),$$

où $z(t)$ est solution de l'équation différentielle:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} z(t) + \beta_3 z^{1/\alpha}(t) = 0, \text{ pour tout } t \in]0, T[\\ z(0) = z_0. \end{cases}$$

i.e., $\forall t \in [0,T]$, $z(t) = (z_0^\nu - \beta_3 \nu t)^{1/\nu}$, où $\nu = 1 - 1/\alpha < 0$.

D'après (P6), on a, pour tout $t > 0$,

$$0 \leq \beta_1 |u(t)|_{L^{1+1/\alpha}(\Omega)}^{1+1/\alpha} \leq z_\theta(t) \leq z(t).$$

De plus

$$z(t) \xrightarrow{t \to +\infty} 0$$

et donc, puisque $u \in L^\infty(Q)$,

$$u(t,.) \xrightarrow{L^p(\Omega)} 0, \text{ quand } t \to +\infty, \text{ pour tout } p \in [1, +\infty[.$$

Le lemme est donc démontré.

6. MISE EN ÉVIDENCE DU CARACTÈRE LOCALEMENT HYPERBOLIQUE PAR LA DESCRIPTION DE LA VITESSE FINIE DE LA PROPAGATION

On suppose (hypothèse conforme à la pratique) que le comportement local de ϕ' en 0 est tel que:

$$(HO) \quad \exists (c_1, c_2, \mathrm{v}) \in (\mathbb{R}_+^*)^3, \ c_2 \mathrm{t}^{\mathrm{v}} \leq \phi'(\mathrm{t}) \leq c_1 \mathrm{t}^{\mathrm{v}}, \ \mathrm{t} \in \nu(0^+).$$

Soit $x_0 \in \Omega$ et soit ρ_1 un réel strictement positif tel que: $\rho_1 < d(x_0, \Gamma)$.

Par la méthode dite de localisation de l'énergie, due à ANTONTSEV S.N., DIAZ J.I. [2], on montre le théorème suivant, qui met en évidence le caractère local de propagation à vitesse finie.

Théorème. *Soit u_0 tel que: $u_0(.) = 0$ p.p. sur $B_{\rho_1}(x_0)$ et u la solution correspondante dans le cadre des hypothèses (H1), (H2) et (H3).*

Alors, sous l'hypothèse (H0), il existe $t_1 \in]0,T[$ tel que, à tout $t \in]0,t_1[$, on puisse associer $\rho(t)$, $0 < \rho(t) \leq \rho_1$, défini de façon que:

$u(t,.) = 0$ presque partout sur $B_{\rho(t)}(x_0)$.

Autrement dit, l'effet de la diffusion ne se fait pas sentir instantanément au voisinage de x_0 et, se fixant un laps de temps suffisamment petit, on peut délimiter une région voisine de x_0 totalement hors de l'influence de la propagation du phénomène physique pendant ce laps de temps.

Preuve.

Première étape.

Nous allons d'abord prouver le lemme suivant:

Lemme. *Soit $t_0 \in]0,T[$.*

D'après les propriétés de u, $\mathcal{A}(.,u) \vec{\nabla} \phi(u). \vec{\nabla} \phi(u)$ et $|\mathcal{A}(.,u) \vec{\nabla} \phi(u)|\phi(u)$ appartiennent à $L^1(]0,T[\times B_{\rho_1}(x_0))$ et on a alors:

1) pour presque tout $t \in]0,t_0[$, pour presque tout $\rho \in]0,\rho_1[$,

$$\int_{S_{\rho(x_0)}} (\mathcal{A}(.,u) \vec{\nabla} \phi(u)). \vec{n}\, \phi(u) ds \text{ a un sens;}$$

2) supposant en outre que $u_0(.) = 0$ p.p. sur $B_{\rho_1}(x_0)$, alors, pour presque tout $\rho \in]0,\rho_1[$ et pour tout $t \in]0,t_0[$, on dispose de l'inégalité suivante:

$$\int_{B_{\rho(x_0)}} \theta(u(t,x))dx + \int_0^t \int_{B_{\rho(x_0)}} \mathcal{A}(.,u) \vec{\nabla} \phi(u). \vec{\nabla} \phi(u) dx d\tau$$

$$\leq \int_0^t \int_{S_{\rho(x_0)}} (\mathcal{A}(.,u) \vec{\nabla} \phi(u)). \vec{n}\, \phi(u) ds d\tau.$$

Preuve du lemme: Soient $t \in]0, t_0]$ et $\rho \in]0, \rho_1[$; pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, considérons ψ_n définie sur $\mathbb{R}^+$ par:

$$K_n(r) = \begin{cases} 1 & \text{si } r \in [0, \rho - 1/n], \\ 0 & \text{si } r \geq \rho, \\ n(\rho - r) & \text{si } r \in [\rho - 1/n, \rho]. \end{cases}$$

Dès lors, $x \in \mapsto K_n(|x - x_0|)$ définit une suite croissante d'approximations lipschitziennes de la fonction caractéristique de $B_\rho(x_0)$.

Posons:

$$\forall (r, x) \in Q \quad \psi_n(r, x) = K_n(|x - x_0|)\phi(u(r, x));$$

ψ_n est une fonction test admissible du problème dégénéré.

Il vient l'inégalité suivante:

$$(E) \quad \int_0^t \left\langle \frac{\partial u}{\partial t}, K_n \phi(u) \right\rangle_{V', V} d\tau + \int_0^t \int_\Omega \mathcal{A}(., u) \vec{\nabla} \phi(u). \vec{\nabla} (K_n \phi(u)) dx d\tau = 0.$$

- Etude de $\int_0^t \left\langle \frac{\partial u}{\partial t}, K_n \phi(u)) \right\rangle_{V', V} d\tau$:

Soit $h_0 > 0$ fixé et introduisons, pour tout $h \in]0, h_0]$,

$$X_h = \int_0^{t-h} \int_\Omega \frac{u(\tau, .) - u(\tau - h, .)}{h} K_n \phi(u(\tau, .)) dx d\tau.$$

Alors, d'après l'appendice de l'ouvrage de BREZIS H. [5], on a, dans $\mathbb{R}$:

$$\lim_{h \to 0} X_h = \int_0^t \left\langle \frac{\partial u}{\partial t}, K_n \phi(u) \right\rangle_{V', V} d\tau.$$

De plus, et c'est le point essentiel, la fonction numérique θ est convexe sur $[0,+\infty[$. On a donc l'inégalité de convexité suivante:

$$\forall(\lambda_1,\lambda_2)\in \mathbb{R}^2 \quad \theta(\lambda_2)-\theta(\lambda_1)\leq \phi(\lambda_2)(\lambda_2-\lambda_1)$$

qui permet d'affirmer l'inégalité suivante:

$$X_h \geq \int_0^{t-h}\int_\Omega \frac{\theta(u(\tau,.))-\theta(u(\tau-h,.))}{h} K_n dx d\tau.$$

Ainsi:

$$\lim_{h\to\infty} X_h \geq \int_0^t\int_\Omega \frac{\partial\theta(u(\tau,.))}{\partial t} K_n dx d\tau.$$

La fonction $s\mapsto \int_\Omega \theta(u(s,x))\,dx$ est absolument continue sur $[0,T]$, alors:

$$\int_0^T \left\langle \frac{\partial u}{\partial t}, K_n\phi(u)\right\rangle_{V',V} d\tau \geq \int_\Omega K_n\theta(u(t,.))\,dx.$$

On utilise le théorème de convergence dominée de LEBESGUE sur Ω et on a:

$$\lim_{n\to+\infty}\int_\Omega K_n\theta(u(t,.))\,dx = \int_{B_{\rho(x_0)}} \theta(u(t,.))\,dx.$$

• Etude de $\int_0^t\int_\Omega \mathcal{A}(.,u)\,\vec{\nabla}\,\phi(u).\,\vec{\nabla}\,(K_n\phi(u))dx d\tau$:

Etant donné que $H^1(Q)\cap L^\infty(Q)$ est une algèbre de Banach où opère la formule de STAMPACCHIA G. sur la règle de dérivation, on a:

$$\begin{aligned}&\int_0^t\int_\Omega \mathcal{A}(.,u)\,\vec{\nabla}\,\phi(u).\,\vec{\nabla}\,(K_n\phi(u))dx d\tau\\ &=\int_0^t\int_\Omega \mathcal{A}(.,u)\,\vec{\nabla}\,\phi(u).\,\vec{\nabla}\,(K_n)\phi(u)dx d\tau\\ &\quad+\int_0^t\int_\Omega \mathcal{A}(.,u)\,\vec{\nabla}\,\phi(u).\,\vec{\nabla}\,(\phi(u))K_n dx d\tau.\end{aligned}$$

D'après le lemme de STAMPACCHIA G., presque partout dans Ω,

$$\vec{\nabla}\, K_n(|x-x_0|) = -n\chi_{[\rho-1/n,\rho]}(|x-x_0|)\,\frac{x-x_0}{|x-x_0|}.$$

D'où:

$$\int_0^t \int_\Omega \mathcal{A}(.,u)\,\vec{\nabla}\,\phi(u).\,\vec{\nabla}\,(K_n)\phi(u)dxd\tau$$

$$= -n\int_0^t \int_{\rho-1/n\le|x-x_0|\le\rho} \phi(u)\mathcal{A}(.,u)\,\vec{\nabla}\,\phi(u)\,\frac{x-x_0}{|x-x_0|}\,dxd\tau.$$

On utilise les coordonnées sphériques (r,ω) avec pour centre x_0 et on a alors:

$$\int_0^t \int_\Omega \mathcal{A}(.,u)\,\vec{\nabla}\,\phi(u).\,\vec{\nabla}\,(K_n)\phi(u)dxd\tau$$

$$= -n\int_0^t \int_{\rho-1/n}^{\rho} \int_{S_{N-1}} \phi(u)\mathcal{A}(.,u)\,\vec{\nabla}\,\phi(u).\,\vec{n}\,r^{N-1}d\omega drd\tau.$$

Sachant que l'application $\mathcal{T}$ définie par:

$$r \mapsto \int_{S_{N-1}} \phi(u)\mathcal{A}(.,u)\,\vec{\nabla}\,\phi(u).\,\vec{n}\,r^{N-1}d\omega$$

est un élément de $L^1(0,\rho_1)$, on a pour presque tout $\rho\in]0,\rho_1[$:

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^t \int_\Omega \mathcal{A}(.,u)\,\vec{\nabla}\,\phi(u).\,\vec{\nabla}\,(K_n)\phi(u)dxd\tau$$

$$= -\int_0^t \int_{S_{\rho(x_0)}} \phi(u)(\mathcal{A}(.,u)\,\vec{\nabla}\,\phi(u)).\,\vec{n}\,dsd\tau.$$

D'après le théorème de convergence dominée de LEBESGUE sur $\Omega\times]0,t[$:

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^t \int_\Omega \mathcal{A}(.,u)\,\vec{\nabla}\,\phi(u).\,\vec{\nabla}\,(\phi(u))K_n dxd\tau$$

$$= \int_0^t \int_{B_{\rho(x_0)}} (\mathcal{A}(.,u) \vec{\nabla} \phi(u)). \vec{\nabla} \phi(u) dx d\tau.$$

Par passage à la limite (quand $n \to +\infty$) dans (E), on obtient l'inégalité de la deuxième partie du lemme.

La première partie du lemme découle du principe de la démonstration de l'étude de $\int_0^t \int_\Omega \mathcal{A}(.,u) \vec{\nabla} \phi(u). \vec{\nabla} (K_n\phi(u)) dx d\tau$.

Deuxième étape: preuve du théorème.

D'après le lemme et l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ, il vient, grâce à (1.1)i) pour tout $t \in]0, t_0]$ et pour presque tout $\rho \in]0, \rho_1[$ en notant $l = n \max_{i,j} ||a_{ij}||_{L^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^+)}$,

$$\int_{B_{\rho(x_0)}} \theta(u(t,x)) dx + \alpha_0 \int_0^t \int_{B_{\rho(x_0)}} | \vec{\nabla} \phi(u)|^2 dx d\tau$$

$$\leq l \Big(\int_0^t \int_{S_{\rho(x_0)}} |\phi(u)|^2 ds d\tau \Big)^{1/2} \Big(\int_0^t \int_{S_{\rho(x_0)}} | \vec{\nabla} \phi(u)|^2 ds d\tau \Big)^{1/2}.$$

On introduit à la suite de ANTONTSEV S.N., DIAZ J.I. [2] les fonctions d'énergie suivantes:

$$i) \quad E(t,\rho) = \int_0^t \int_{B_{\rho(x_0)}} | \vec{\nabla} \phi(u)|^2 dx d\tau,$$

$$ii) \quad b(t,\rho) = \sup_{0 \leq \tau \leq t} \mathrm{ess} \Big(\int_{B_{\rho(x_0)}} |\phi(u)|^{m+1} dx \Big), \text{ avec } 0 < m < 1.$$

L'inégalité précédente devient, compte tenu de la géométrie particulière des boules euclidiennes dans $\mathbb{R}^n$,

$$\int_{B_{\rho(x_0)}} \theta(u(t,x)) dx + \alpha_0 E(t,\rho)$$

$$\leq l\Big(\int_0^t \int_{S_{\rho(x_0)}} |\phi(u)|^2 ds d\tau\Big)^{1/2} \Big(\frac{\partial E(t,\rho)}{\partial \rho}\Big)^{1/2}.$$

On applique la formule d'interpolation de DIAZ J.I., VERON L. [9] à la quantité $||\phi(u)||^2_{L^2(]0,t[\times S_\rho(x_0))}$; il vient:

$$\int_0^t \int_{S_{\rho(x_0)}} |\phi(u)|^2 ds d\tau$$
$$\leq c_3 \int_0^t \big(|| \vec{\nabla}\, \phi(u)||_{L^2(B_\rho(x_0))} + ||\phi(u)||_{L^{m+1}(B_\rho(x_0))}\big)^{2\theta}$$
$$\big(||\phi(u)||_{L^{m+1}(B_\rho(x_0))}\big)^{2(1-\theta)} d\tau,$$

où $\theta = \frac{N(1-m)+m+1}{N(1-m)+2m+2}$, $0 < \theta < 1$.

On utilise l'inégalité de HOLDER:

$$\int_0^t \int_{S_{\rho(x_0)}} |\phi(u)|^2 ds d\tau$$

$$\leq c_3 \Big(\int_0^t (|| \vec{\nabla}\, \phi(u)||_{L^2(B_\rho(x_0))} + ||\phi(u)||_{L^{m+1}(B_\rho(x_0))})^2 d\tau\Big)^{\theta}$$

$$\Big(\int_0^t ||\phi(u)||^2_{L^{m+1}(B_\rho(x_0))} d\tau\Big)^{1-\theta}$$

$$\leq c_3 2^{\theta} \Big(\int_0^t (|| \vec{\nabla}\, \phi(u)||^2_{L^2(B_\rho(x_0))} + ||\phi(u)||^2_{L^{m+1}(B_\rho(x_0))}) d\tau\Big)^{\theta}$$

$$\Big(\int_0^t ||\phi(u)||^2_{L^{m+1}(B_\rho(x_0))} d\tau\Big)^{1-\theta},$$

D'où on a:

$$\Big(\int_0^t \int_{S_{\rho(x_0)}} |\phi(u)|^2 ds d\tau\Big)^{1/2}$$

$$\leq (c_3 2^\theta)^{1/2} t^{(1-\theta)/2}\big(E(t,\rho) + tb(t,\rho)^{2/m+1}\big)^{\theta/2} b(t,\tau)^{(1-\theta)/m+1}.$$

En utilisant le fait que $\theta < 1$ et que $E(t,\rho) \geq 0$, il vient a fortiori:

$$\Big(\int_0^t \int_{S_{\rho(x_0)}} |\phi(u)|^2 ds d\tau\Big)^{1/2} \leq (c_3 2^\theta)^{1/2} t^{(1-\theta)/2}$$

$$\big(E(t,\rho) + tb(t,\rho)^{(1-m)/(m+1)} b(t,\rho)\big)^{\theta/2} (E(t,\rho) + b(t,\rho))^{(1-\theta)/(m+1)}.$$

Etant donné que b est une fonction séparément croissante de ρ et de t, on a:

$$b(t,\rho)^{(1-m)/(m+1)} \leq b(T,\rho_1)^{(1-m)/(m+1)}.$$

On obtient par conséquent:

$$\Big(\int_0^t \int_{S_{\rho(x_0)}} |\phi(u)|^2 ds d\tau\Big)^{1/2} \leq (c_3 2^\theta)^{1/2} t^{(1-\theta)/2} Q(T)(E(t,\rho) + b(t,\rho))^H,$$

où:

$$\begin{cases} Q(T) = \max(1, T^{\theta/2} b(\rho_1, T)^{\theta(1-m)/2(m+1)}) \ , \\ H = \frac{\theta}{2} + \frac{1-\theta}{m+1}, \quad 1/2 < H < 1. \end{cases}$$

On a donc:

$$\Big|\int_0^t \int_{S_{\rho(x_0)}} \phi(u)(\mathcal{A}(.,u) \vec{\nabla} \phi(u)).\, \vec{n}\, ds d\tau\Big|$$

$$\leq l(c_3 2^\theta)^{1/2} t^{(1-\theta)/2} Q(T)\Big(\frac{\partial E(t,\rho)}{\partial \rho}\Big)^{1/2} (E(t,\rho) + b(t,\rho))^H.$$

On applique l'inégalité de YOUNG sous la forme:

$$ab \leq \varepsilon a^p + c_\varepsilon b^{p'},$$

avec:

$$c_\varepsilon = \varepsilon^{-1/(p-1)},\ p > 1,\ \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1,\ a \geq 0,\ b \geq 0.$$

Il vient:

$$\Big| \int_0^t \int_{S_{\rho(x_0)}} \phi(u)(\mathcal{A}(.,u)\ \vec{\nabla}\ \phi(u)).\ \vec{n}\ ds d\tau \Big|$$

$$\leq c_\varepsilon \Big(l(c_3 2^\theta)^{1/2} t^{(1-\theta)/2} Q(T) \Big(\frac{\partial E(t,\rho)}{\partial \rho} \Big)^{1/2} \Big)^{1/(1-H)} + \varepsilon (E(t,\rho) + b(t,\rho))$$

$$\leq c_\varepsilon \big(l(c_3 2^\theta)^{1/2} t^{(1-\theta)/2} Q(T) \big)^{1/(1-H)} \Big(\frac{\partial E(t,\rho)}{\partial \rho} \Big)^{1/\beta} + \varepsilon (E(t,\rho) + b(t,\rho)),$$

où: $\beta = 2(1 - H),\ 0 < \beta < 1.$

D'où, l'inégalité du lemme devient:

$$\int_{B_{\rho(x_0)}} \theta(u(t,x)) dx + \alpha_0 E(t,\rho)$$

$$\leq c_\varepsilon \big(l(c_3 2^\theta)^{1/2} t^{(1-\theta)/2} Q(T) \big)^{1/(1-H)} \Big(\frac{\partial E(t,\rho)}{\partial \rho} \Big)^{1/\beta}$$

$$+ \varepsilon (E(t,\rho) + b(t,\rho)).$$

D'après (HO), on montre que:

$$\int_{B_{\rho(x_0)}} \theta(u(t,x)) dx \geq g \int_{B_{\rho(x_0)}} |\phi(u)|^{m+1} dx,$$

avec:

$$\begin{cases} g = \frac{c_2}{\nu+1}\,\frac{1}{\nu+2}\left(\frac{\nu+1}{c_1}\right)^{\frac{\nu+2}{\nu+1}}, \\ m = \frac{1}{\nu+1} < 1. \end{cases}$$

Ainsi, on a:

$$\min(g,\alpha_0)(E(t,\rho)+b(t,\rho))$$
$$\leq c_\varepsilon\big(l(c_3 2^\theta)^{1/2} t^{(1-\theta)/2} Q(T)\big)^{1/1-H}\Big(\frac{\partial E(t,\rho)}{\partial \rho}\Big)^{1/\beta} + \varepsilon(E(t,\rho)+b(t,\rho)).$$

On note: $a = \min(g,\alpha_0)$, $d = \frac{a}{2}$ et on choisit: $\varepsilon = \frac{a}{4}$.

Il vient alors, pour tout t de $]0,t_0[$,

$$\frac{d}{2}(E(t,\rho)+b(t,\rho)) \leq q t^{(1-\theta)/2(1-H)}\Big(\frac{\partial E(t,\rho)}{\partial \rho}\Big)^{1/\beta},$$

où: $q = c_\varepsilon(l(c_3 2^\theta)^{1/2} Q(T))^{1/1-H}$.

D'où:

$$(E(t,\rho)+b(t,\rho))^\beta \leq \Big(\frac{2q}{d}\Big)^\beta t^{1-\theta}\Big(\frac{\partial E(t,\rho)}{\partial \rho}\Big).$$

Comme $\left(\frac{\partial b(t,\rho)}{\partial \rho}\right) \geq 0$, il s'ensuit a fortiori que, pour tout $t \in]0,t_0[$, pour presque tout $\rho \in]0,\rho_1[$,

$$(E(t,\rho)+b(t,\rho))^\beta \leq \Big(\frac{2q}{d}\Big)^\beta t^{1-\theta}\Big(\frac{\partial(E(t,\rho)+b(t,\rho))}{\partial \rho}\Big).$$

Introduisant, pour tout $r \geq 0$, $\psi(r) = r^\beta$, on observe que ψ est une fonction croissante, $\psi(0) = 0$, $\frac{1}{\psi(\cdot)}$ est intégrable sur $[0,R]$, $R > 0$, car $\beta \in]0,1[$ et donc, on se situe, dans le cadre d'application du lemme d'ANTONTSEV S.N., DIAZ J.I. [2].

Il en résulte immédiatement l'existence de $t_1 \in]0, t_0[$ tel que pour tout $t \in [0, t_1]$, il existe $\rho(t) \in]0, \rho_1[$, tel que

$$E(t, \rho) + b(t, \rho) = 0 \quad \text{presque partout sur } [0, \rho(t)],$$

ce qui implique en particulier que

$$\text{pour tout } t \in [0, t_1], \quad u(t, .) = 0 \quad \text{presque partout sur } B_{\rho(t)}(x_0).$$

Le théorème est donc démontré.

Références

[1] Artola, M.: *Sur une classe de problèmes paraboliques quasi linéaires.* Bolletino UMI (6), 5-B, p. 51-70, 1986.

[2] Antontsev, S.N. and Diaz, J.I.: *Space and time localization in the flow of two immiscible fluids through a porous medium: energy methods applied to systems.* Non linear Analysis, Theory, Methods and Applications, vol. 16, n°4, p. 299-313, 1991.

[3] Bamberger, A.: *Etude d'une équation doublement non linéaire.* Journal of Functional Analysis 24, p. 148-155, 1977.

[4] Bamberger, A.: *Etude d'une équation doublement non linéaire.* Rapport Interne n°4 du Centre de Mathématiques Appliquées de l'Ecole Polytechnique. 1977.

[5] Brezis, H.: *Analyse Fonctionelle. Théorie et applications.* Masson, 1983.

[6] Brezis, H.: *Opérateurs maximaux Monotones et Semi-groupes de Contraction dans les espaces de Hilbert.* North Holland, 1973.

[7] Choquet, G.: *Cours d'Analyse, Tome II, Topologie.* Masson, 1973.

[8] Dautray, R. et Lions, J.L.: *Analyse Mathématique et Calcul Numérique pour les Sciences et les Techniques.* Tome I, vol. 4. Masson, 1988.

[9] Díaz, J.I. and Veron, L.: *Local vanishing properties of solutions of elliptic and parabolic quasilinear equations.* Transactions of the American Mathematical Society. Vol. 290, n°2, p. 787-814, 1985.

[10] Gagneux, G. et Guerfi, F.: *Approximations de la fonction de Heaviside et résultats d'unicité pour une classe de problèmes quasi linéaires elliptiques-parabolliques.* Revista Matemática de la Universidad Complutense de Madrid, vol. 3, n°1, p. 59-87, 1990.

[11] Gagneux, G. et Madaune-Tort, M.: *Sur la question de l'unicité pour des inéquations des milieux poreux.* C.R. Acad., Sci. Paris, t. 314, Série I, p. 605-608, 1992.

[12] Gagneux, G. et Madaune-Tort, M.: *Résultat d'unicité pour un problème unilatéral dégénéré de la mécanique des milieux poreux,* Actes des IIèmes journées de JACA de Mathématiques Appliquées, p. 137-141, Octobre 1992.

[13] Lions, J.L. et Magenes, E.: *Problèmes aux limites non homogènes et Applications.* Dunod, vol. 1, 1968.

[14] Lions, J.L.: *Quelques méthodes de Résolution des Problèmes aux Limites non linéaires.* Dunod, Gauthier-Villars, Paris, 1969.

[15] Zeidler, E.: *Nonlinear Functional Analysis and its Applications.* Springer-Verlag, tome I, Fixed-points Theorie, New York inc., 1986.

Université de Pau & C.N.R.S.
Laboratoire de Mathématiques Appliquées
U.A. 1204 - C.N.R.S.
Avenue de l'université
64000 PAU (FRANCE)

Recibido: 28 de Mayo de 1993