

## Analyse mathématique d'un système de transport-diffusion-réaction modélisant la restauration biologique d'un milieu poreux.

P. FABRIE - P. RASSETARINERA

### Abstract

In this paper, a mathematical analysis of in-situ bioremediation is presented. Mathematical formulation of such process leads to a system of non-linear partial differential equations coupled with ordinary differential equations.

First, we introduce a notion of weak solution then we prove the existence of at least one such a solution by a linearization technique used in [8]. Positiveness and uniform bound for the substrates concentration is derived from the maximum principle while some regularity properties, for the pressure and velocity, are obtained from a local Meyers lemma [1], [12]. Next, assuming some regularity on the solution, an uniqueness result is presented. Asymptotical behavior for the contaminant is also studied.

### Résumé

Dans ce travail, nous présentons une analyse mathématique de la restauration biologique en milieu poreux. La modélisation d'un tel phénomène conduit à un système d'équations aux dérivées partielles non-linéaires couplé à des équations différentielles ordinaires.

Après avoir introduit une notion de solution faible, on montre l'existence d'au moins une solution de ce type par une technique de linéarisation utilisée dans [8]. La positivité et une borne uniforme pour la concentration sont déduites du principe du maximum tandis qu'une propriété de régularité pour la vitesse et la pression est

---

1991 Mathematics Subject Classification: 35K50, 35K55, 35K57, 76D99, 76S05

Servicio publicaciones Univ. Complutense. Madrid, 1996.

obtenue grâce à un lemme de Meyers local [1], [12]. Ensuite, l'unicité des solutions régulières ainsi que le comportement asymptotique du substrat contaminant sont étudiés.

## Introduction

Depuis quelques années, la production de déchets toxiques dans les sociétés de consommation a considérablement augmenté entraînant la pollution des sous-sols. Les produits contaminants sont d'origines diverses et peuvent être de nature organique tels que toluène, détergents et DDT; de nature chimique inorganique tels que nitrates, fluorines, radium; ou encore radioactifs. Cette pollution atteint parfois les nappes phréatiques, sources d'eau potable pour des populations entières.

Ces dernières années, la restauration biologique apparaît comme une technique prometteuse pour le traitement des sites pollués, elle consiste à stimuler l'activité naturelle des micro-organismes présents dans le milieu par l'apport de substrats nutritifs. En effet, de nombreuses études [2], [5] ont montré la capacité de certaines bactéries à dégrader différents types de polluants en présence de substrats comme l'oxygène, on parle alors de dégradation en aérobie; lorsque l'oxygène n'est pas présent, d'autres substrats comme le nitrogène peuvent être utilisés, dans ce cas la dégradation s'effectue en anaérobie. Cette technique présente de nombreux avantages car elle est écologique, sûre, rapide et économique [3]. La restauration biologique est un phénomène complexe incluant le transport et l'adsorption des substrats en solution et l'interaction entre les bactéries et les polluants. Les caractéristiques du site, des bactéries et des polluants doivent être aussi prises en compte.

Dans ce travail, nous nous intéressons au modèle proposé par Borden et Bedient [2] ou Wheeler [5], [6] qui décrit la restauration en aérobie d'un site pollué par un substrat hydrocarboné  $S$  en présence de bactéries  $B$ . Des expériences et des mesures effectuées sur le site UCC (United Creosoting Company) au Texas ont permis de valider et de déterminer le domaine d'application du modèle [2].

Nous sommes alors conduit à étudier un système d'équations non linéaires et couplées qui comprend deux équations paraboliques de transport-diffusion-réaction modélisant le transport et l'utilisation de l'oxygène et du polluant, une équation différentielle qui régit le développement des bactéries et une équation elliptique issue de la loi de Darcy.

Après avoir introduit une notion de solution faible du problème, on

démontre l'existence d'au moins une solution de ce type en linéarisant et en découplant les équations du problème; ceci est réalisé, comme dans [8], par l'introduction d'un retard en temps dans les non-linéarités. Une borne uniforme sur les concentrations  $Ox$  et  $S$  est déduite du principe du maximum, de laquelle nous obtenons des estimations de l'énergie et des propriétés de compacité. Ensuite, nous établissons à l'aide d'un lemme de Meyer local des propriétés de régularité pour la vitesse  $V$  et la pression  $p$ . Enfin, l'unicité des solutions régulières ainsi que l'étude du comportement asymptotique du substrat polluant sont proposées.

### Modèle physique

Dans ce travail le milieu est constitué d'un ouvert borné régulier  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^3$ , de frontière  $\Gamma$ . On désigne par  $n$  le vecteur normal extérieur à  $\Gamma$ , et  $[0, T]$  l'intervalle du temps d'étude.

La frontière  $\Gamma$  est partitionnée comme suit:

$$\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3, \Gamma_i \cap \Gamma_j = \emptyset, i \neq j$$

avec

$\Gamma_1$  frontière d'injection de l'oxygène

$\Gamma_2$  frontière de récupération

$\Gamma_3$  frontière imperméable.

On note

$\Phi$  la porosité

$K$  la perméabilité du milieu

$R$  coefficient de retardation du substrat  $S$

$\alpha$  proportion d'oxygène utilisée par unité de polluant dégradée

$\delta$  coefficient de production des bactéries

$m$  coefficient de mortalité des bactéries

$\sigma$  terme assurant la non-disparition des bactéries

$\lambda$  le tenseur de diffusion moléculaire

$D$  le tenseur de dispersion

$\mathbf{V}$  la vitesse de Darcy

$p$  la pression

avec  $m, \sigma \geq 0$  et  $R, \alpha, \Phi, \delta > 0$ .

Les équations qui modélisent le transport et l'interaction des bactéries et des différentes substances en solutions sont:

*Transport diffusion et réaction des substrats primaires*

Les quantités non-adsorbées seules rentrent en compte dans les termes de transport et de réaction, c'est le cas du substrat  $S$ .

$$(1) \quad \Phi R \frac{\partial S}{\partial t} - \nabla((\lambda(S) + \mathbf{D}(\mathbf{V})) \cdot \nabla S) + \mathbf{V} \cdot \nabla S + \Phi F(Ox, S, B) = 0$$

dans (1),  $RS$  représente la concentration totale du polluant dans le milieu poreux.

On suppose que l'oxygène n'est pas adsorbé par les parois du milieu poreux.

$$(2) \quad \Phi \frac{\partial Ox}{\partial t} - \nabla((\lambda(Ox) + \mathbf{D}(\mathbf{V})) \cdot \nabla Ox) + \mathbf{V} \cdot \nabla Ox + \alpha \Phi F(Ox, S, B) = 0$$

*Développement des bactéries*

Les bactéries sont adsorbées sur les parois du milieu, donc ne sont pas transportées par l'écoulement.

$$(3) \quad \frac{dB}{dt} - \delta F(Ox, S, B) + mB - \sigma = 0$$

Le terme de réaction  $F$  est issu de la cinétique de Monod, il est défini par

$$F(Ox, S, B) = \frac{Ox}{k_1 + Ox} \frac{S}{k_2 + S} B$$

où  $k_1$  et  $k_2$  sont deux constantes strictement positives.

*Equation de Darcy pour un écoulement monophasique*

La vitesse de filtration du fluide est donnée par l'équation de Darcy

$$(4) \quad \mu(S)\mathbf{V} = -K \cdot (\nabla p - \beta(S) \cdot \mathbf{e}_z)$$

où  $\mu$  et  $\beta$  représentent respectivement la viscosité dynamique et la densité du fluide, elles dépendent de la quantité de substrat  $S$  dissout.

*Equation de continuité*

On suppose de plus que l'écoulement est isovolume.

$$(5) \quad \nabla \cdot \mathbf{V} = 0$$

*Conditions aux limites*

Les conditions aux limites sur la frontière  $\Gamma$  sont:

$$(6.a) \quad \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} = g_i \text{ sur } \Gamma_i, i = 1 \text{ ou } 2$$

$$(6.b) \quad \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma_3,$$

$$(7.a) \quad (\lambda(S) + \mathbf{D}(\mathbf{V})) \cdot \nabla S \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma_2 \cup \Gamma_3,$$

$$(7.b) \quad (\lambda(Ox) + \mathbf{D}(\mathbf{V})) \cdot \nabla Ox \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma_2 \cup \Gamma_3,$$

$$(7.c) \quad (\lambda(S) + \mathbf{D}(\mathbf{V})) \cdot \nabla S \cdot \mathbf{n} + g_1 S = 0 \text{ sur } \Gamma_1,$$

$$(7.d) \quad (\lambda(Ox) + \mathbf{D}(\mathbf{V})) \cdot \nabla Ox \cdot \mathbf{n} + g_1(Ox - Ox_1) = 0 \text{ sur } \Gamma_1$$

Les conditions aux limites (7.c) et (7.d) traduisent le fait d'injecter sur la frontière  $\Gamma_1$ , avec une vitesse normale  $g_1$ , du fluide non pollué contenant de l'oxygène à une concentration  $Ox_1$ . Les conditions (7.a) et (7.b) modélisent la frontière de récupération  $\Gamma_2$  où le fluide composé de substrat polluant et d'oxygène sort du milieu, la frontière  $\Gamma_3$  reste imperméable.

**Hypothèses**

Dans ce travail, on suppose que les données vérifient les conditions suivantes:

$$(H1) \quad Ox_1 \in L^\infty(\mathbf{R}^+ \times \Gamma_1), g_i \in L^\infty(\mathbf{R}^+ \times \Gamma_i), i = 1 \text{ ou } 2.$$

$$(H2) \quad \begin{cases} \exists M_1 > 0, -M_1 \leq g_1 \leq 0 \text{ p.p.} \\ g_2 \geq 0 \text{ p.p.}, Ox_1 \geq 0 \text{ p.p.} \\ \int_{\Gamma_1} g_1 d\sigma_1 + \int_{\Gamma_2} g_2 d\sigma_2 = 0 \end{cases}$$

On suppose que les tenseurs  $\lambda$  et  $\mathbf{D}$  sont continus sur leur domaine de définition respectif et que  $\mu$  et  $\beta$  sont continues sur  $\mathbf{R}$ .

De plus on fait les hypothèses suivantes:

$$(H3) \quad \forall (a, b) \in \mathbf{R}^2; \exists \alpha_1 > 0; \forall c \in (a, b); \alpha_1 \leq \mu(c)$$

$$(H4) \quad \forall (a, b) \in \mathbf{R}^2; \exists \alpha_2 > 0; \forall c \in (a, b); \lambda(c) \geq \alpha_2$$

$$(H5) \quad \exists \alpha_3 > 0; \forall \xi \in \mathbf{R}^3; \mathbf{K} \cdot \xi \cdot \xi \geq \alpha_3 |\xi|^2$$

$$(H6) \quad \forall \mathbf{V} \in \mathbf{R}^3, \forall \xi \in \mathbf{R}^3; \mathbf{D}(\mathbf{V}) \cdot \xi \cdot \xi \geq 0$$

$$(H7) \quad \exists (\alpha_4, \alpha_5) \in (\mathbf{R}^+)^2; \forall \mathbf{V} \in \mathbf{R}^3; |\mathbf{D}(\mathbf{V})| \leq \alpha_4 + \alpha_5 |\mathbf{V}|$$

### Formulation faible

Avant d'écrire la formulation variationnelle du problème on introduit les espaces suivants:  $H_p = \{\mathbf{V} \in L^p(\Omega); \nabla \cdot \mathbf{V} = 0; \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} = g_i \text{ sur } \Gamma_i, i = 1 \text{ ou } 2, \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma \setminus (\Gamma_1 \cup \Gamma_2)\}$

$$L^+(\Omega) = \{u \in L^\infty(\Omega); u \geq 0 \text{ p.p. } x \in \Omega\}$$

**Définition 1** *Sous les hypothèses (H1)... (H5) et pour toute donnée initiale  $(Ox_0, S_0, B_0)$  appartenant à  $(L^+(\Omega))^3$ , le quintuplet  $(Ox, S, B, V, p)$  est une solution faible du problème (P) défini par les équations (1) ... (7), si pour tout  $T$  positif*

$$(Ox, S) \in (L^2(]0, T[; H^1(\Omega)) \cap L^\infty(]0, T[; L^+(\Omega)))^2$$

$$B \in C^0(]0, T[; L^+(\Omega))$$

$$V \in L^\infty(\mathbf{R}^+; H_2)$$

$$p \in L^\infty(\mathbf{R}^+; H^1(\Omega)/\mathbf{R})$$

pour toute fonction test  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  appartenant à  $L^2(]0, T[; W^{1,\infty}(\Omega))$

$$(8) \quad \Phi R \int_0^T \left\langle \frac{\partial S}{\partial t}, \varphi_1 \right\rangle d\tau + \int_0^T \int_{\Omega} (\lambda(S) + \mathbf{D}(\mathbf{V})) \cdot \nabla S \cdot \nabla \varphi_1 d\omega d\tau \\ + \int_0^T \int_{\Omega} \mathbf{V} \cdot \nabla S \varphi_1 d\omega d\tau + \Phi \int_0^T \int_{\Omega} F(Ox, S, B) \varphi_1 d\omega d\tau = 0 \\ - \int_0^T \int_{\Gamma_1} g_1 S \varphi_1 d\sigma_1 d\tau = 0$$

$$(9) \quad \Phi \int_0^T \left\langle \frac{\partial Ox}{\partial t}, \varphi_2 \right\rangle d\tau + \int_0^T \int_{\Omega} (\lambda(Ox) + \mathbf{D}(\mathbf{V})) \cdot \nabla Ox \cdot \nabla \varphi_2 d\omega d\tau \\ + \int_0^T \int_{\Omega} \mathbf{V} \cdot \nabla Ox \varphi_2 d\omega d\tau + \alpha \Phi \int_0^T \int_{\Omega} F(Ox, S, B) \varphi_2 d\omega d\tau \\ - \int_0^T \int_{\Gamma_1} g_1 (Ox - Ox_1) \varphi_2 d\sigma_1 d\tau = 0$$

$$(10) \quad \frac{dB}{dt} - \delta F(Ox, S, B) + mB - \sigma = 0 \text{ dans } \Omega \times ]0, T[$$

pour toute fonction test  $\psi$  appartenant à  $H^1(\Omega)/\mathbf{R}$

$$(11) \quad \int_{\Omega} \mu^{-1}(S) K \cdot (\nabla p - \beta(S) \cdot \mathbf{e}_z) \cdot \nabla \psi d\omega + \int_{\Gamma_1} g_1 \psi d\sigma_1 + \int_{\Gamma_2} g_2 \psi d\sigma_2 = 0. \\ \text{dans } \mathcal{D}'(]0, T[).$$

La vitesse  $\mathbf{V}$  est alors donnée par

$$(12) \quad \mathbf{V} = -\mu^{-1}(S) K \cdot (\nabla p - \beta(S) \cdot \mathbf{e}_z)$$

**Remarque.** Cette définition de solution faible est due au fait que le tenseur de dispersion  $\mathbf{D}$  n'est pas borné.

### Principaux résultats

Existence d'une solution faible pour le problème  $(\mathcal{P})$ .

**Théorème 1.** *Sous les hypothèses (H1)...(H7), et si les données initiales sont dans  $L^+(\Omega)$ , alors il existe au moins une solution faible du problème (P) telle que:  $Ox(0) = Ox_0, S(0) = S_0, B(0) = B_0$ .*

Ce résultat est une conséquence du théorème suivant:

**Théorème 2.** *Sous les hypothèses (H1)...(H7), et si de plus:*

$$(H8) \quad \exists \alpha_6 > 0; \forall \mathbf{V} \in \mathbf{R}^3; |\mathbf{D}(\mathbf{V})| \leq \alpha_6$$

*alors il existe au moins une solution faible du problème P telle que;*

$$(13) \quad \|Ox\|_{L^\infty(]0,T[,L^2(\Omega))} \leq (\text{Mes}(\Omega))^{\frac{1}{2}} \|Ox_0\|_{L^\infty(\Omega)} + c_1(T).$$

$$(14) \quad \int_0^T \|\nabla Ox\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 d\tau \leq \frac{\Phi}{2\alpha_2} \text{Mes}(\Omega) \|Ox_0\|_{L^\infty(\Omega)}^2 + c_2(T)$$

où  $c_1$  et  $c_2$  sont deux fonctions continues ne dépendant que de  $\Gamma, g_1$  et  $Ox_1$

$$(15) \quad \|S\|_{L^\infty(]0,T[,L^2(\Omega))} \leq (\text{Mes}(\Omega))^{\frac{1}{2}} \|S_0\|_{L^\infty(\Omega)}$$

$$(16) \quad \int_0^T \|\nabla S\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 d\tau \leq \frac{\Phi R}{2\alpha_2} \text{Mes}(\Omega) \|S_0\|_{L^\infty(\Omega)}^2$$

$$(17) \quad \|S\|_{L^\infty(\mathbf{R}^+ \times \Omega)} \leq \|S_0\|_{L^\infty(\Omega)}$$

$$(18) \quad \|Ox\|_{L^\infty(\mathbf{R}^+ \times \Omega)} \leq \text{Max}(\|Ox_0\|_{L^\infty(\Omega)}, \|Ox_1\|_{L^\infty(\mathbf{R}^+ \times \Gamma_1)})$$

$$(19) \quad \|B\|_{L^\infty(]0,T[,L^+(\Omega))} \leq g(T)$$

$$(20) \quad \left\| \frac{dB}{dt} \right\|_{L^\infty(]0,T[,L^\infty(\Omega))} \leq (\delta + m)g(T) + \sigma$$

où  $g$  est une fonction continue ne dépendant que de  $\delta, m, \sigma$  et  $\|B_0\|_{L^\infty(\Omega)}$

$$(21) \quad \|p\|_{L^\infty(\mathbf{R}^+; H^1(\Omega)/\mathbf{R})} \leq c_p$$



$$(22) \quad | \mathbf{V} |_{L^\infty(\mathbb{R}^+; \mathbf{H}_2)} \leq c_v$$

où  $c_p$  et  $c_v$  sont deux constantes strictement positives ne dépendant que de  $\alpha_3, \mu, \beta, K$  et  $\Omega$ .

$$(23) \quad \left| \frac{\partial S}{\partial t} \right|_{L^2(]0, T[; (H^1(\Omega))')} \leq h_1(T)$$

$$(24) \quad \left| \frac{\partial O x}{\partial t} \right|_{L^2(]0, T[; (H^1(\Omega))')} \leq h_2(T)$$

où  $h_1$  et  $h_2$  sont deux fonctions continues ne dépendant que de  $c_v, g, |O_0|_{L^\infty(\Omega)}, |S_0|_{L^\infty(\Omega)}, \alpha_2$  et  $\alpha_6$ .

**Régularité de la vitesse et de la pression.**

**Proposition 1.** *Il existe une constante  $q_0$  strictement supérieure à deux ne dépendant que des constantes de coercivité et de continuité de  $\mu^{-1}(S)K$  telle que  $\mathbf{V}$  appartienne à  $L^\infty(]0, T[; \mathbf{H}_{q_0}(\Omega))$  et  $p$  appartienne à  $L^\infty(]0, T[; L^{q_0}(\Omega))$*

**Unicité des solutions régulières pour le problème  $\mathcal{P}$ .**

**Théorème 3.** *Si  $\lambda, \mu, \beta$  et  $\mathbf{D}$  sont uniformément Lipschitziennes est s'il existe deux solutions faibles  $(Ox_i, S_i, B_i, \mathbf{V}_i, p_i)_{i=1,2}$  de  $\mathcal{P}$  vérifiant:*

$$(Ox_i, S_i) \in (L^2(]0, T[; W^{1,\infty}(\Omega)) \cap L^\infty(]0, T[; L^+(\Omega)))^2$$

$$B_i \in C^0(]0, T[; L^+(\Omega))$$

$$p_i \in L^\infty(\mathbb{R}^+; W^{1,\infty}(\Omega)/\mathbb{R})$$

$$Ox_1(0) = Ox_2(0); S_1(0) = S_2(0); B_1(0) = B_2(0)$$

alors  $Ox_1 = Ox_2; S_1 = S_2; B_1 = B_2; \mathbf{V}_1 = \mathbf{V}_2$  et  $p_1 = p_2$ .

**Comportement asymptotique du substrat  $S$ .**

**Théorème 4.** *Sous l'hypothèse (H8), quand on effectue une restauration biologique par ventilation en injectant de l'oxygène sur la frontière  $\Gamma_1$  et en récupérant une partie du fluide pollué sur  $\Gamma_2$  alors*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} | S(t) |_{L^2(\Omega)} = 0.$$

**Remarque.** Les résultats ci-dessus sont aussi valables pour les fonctions  $F$  telles que

$$F(Ox, S, B) = B(F_1(Ox, S)Ox + F_2(Ox, S)S),$$

où  $F_1$  et  $F_2$  sont deux fonctions continues, Lipschitziennes et positives de  $(\mathbf{R}^+)^2$  vérifiant

$$\forall (x, y) \in (\mathbf{R}^+)^2, F_1(x, 0) = F_2(0, y) = 0.$$

Généralement, les fonctions utilisées dans les cinétiques qui modélisent la restauration biologique sont de ce type [2], [5].

### Démonstration du théorème 2

Suivant, l'idée utilisée dans [4] et [13], notre méthode consiste à découpler et à linéariser les équations (8)...(11), en introduisant un retard en temps dans les termes non-linéaires; on réalise ainsi un algorithme qui calcule la pression et la vitesse par l'équation de Darcy en prenant la concentration  $S$  solution de l'équation d'advection diffusion réaction à l'intervalle de temps précédent. On utilise cette vitesse pour évaluer les concentrations solutions des équations linéarisées sur l'intervalle de temps suivant.

Enfin, les estimations a priori obtenues grâce aux estimations d'énergies et aux estimations  $L^\infty$  nous permettent de passer à la limite et de montrer la convergence du schéma.

### Recherche d'une solution approchée

Soit  $h$  un réel positif.

Pour toute fonction mesurable  $f : \mathbf{R} \times \Omega \rightarrow \mathbf{R}$  soit  $\tau_h f : \mathbf{R} \times \Omega \rightarrow \mathbf{R}$  tel que  $\tau_h f(t, x) = f(t - h, x)$ .

On pose  $Ox_h(t, x) = Ox_0(x); S_h(t, x) = S_0(x); B_h(t, x) = B_0(x); \forall t \in [-h, 0]; x \in \Omega$

### Algorithme (A)

On suppose que  $S_h$  est donnée sur l'intervalle  $]kh, (k+1)h], k \in \mathbf{N} \cup \{-1\}$ .  
On détermine alors  $p_h$  et  $\mathbf{V}_h$  vérifiant

$$p_h \in L^\infty(]kh, (k+1)h]; H^1(\Omega)/\mathbf{R})$$

$$\mathbf{V}_h \in L^\infty([kh, (k+1)h]; \mathbf{H}_2)$$

tel que:  $\forall \psi \in H^1(\Omega)/\mathbf{R}$

$$(25) \quad \int_{\Omega} \mu^{-1}(S_h) K \cdot (\nabla p_h - \beta(S_h) \cdot \mathbf{e}_z) \cdot \nabla \psi d\omega + \int_{\Gamma_1} g_1 \psi d\sigma_1 + \int_{\Gamma_2} g_2 \psi d\sigma_2 = 0$$

$\mathbf{V}_h$  est alors défini par

$$(26) \quad \mathbf{V}_h = -\mu^{-1}(S_h) K \cdot (\nabla p_h - \beta(S_h) \cdot \mathbf{e}_z)$$

On définit ensuite  $O_h, S_h$  et  $B_h$  sur l'intervalle  $[(k+1)h, (k+2)h]$  vérifiant

$$(O_{x_h}, S_h) \in (L^\infty([(k+1)h, (k+2)h]; L^+(\Omega)) \cap L^2([(k+1)h, (k+2)h]; H^1(\Omega)))^2$$

$$B_h \in L^\infty([(k+1)h, (k+2)h]; L^+(\Omega))$$

tel que:  $\forall (\varphi_1, \varphi_2) \in (L^2_{loc}(\mathbf{R}^+; H^1(\Omega)) \cap L^\infty(\mathbf{R}^+ \times \Omega))^2$

$$\Phi \mathbf{R} \int_{(k+1)h}^{(k+2)h} \left\langle \frac{\partial S_h}{\partial t}, \varphi_1 \right\rangle d\tau + \int_{(k+1)h}^{(k+2)h} \int_{\Omega} (\lambda(\tau_h S_h) + \mathbf{D}(\tau_h \mathbf{V}_h)) \cdot \nabla S_h \cdot \nabla \varphi_1 d\omega d\tau +$$

$$(27) \quad \int_{(k+1)h}^{(k+2)h} \int_{\Omega} \tau_h \mathbf{V}_h \cdot \nabla S_h \varphi_1 d\omega d\tau + \Phi \int_{(k+1)h}^{(k+2)h} \int_{\Omega} \tau_h B_h \frac{\tau_h O_{x_h}}{k_1 + \tau_h O_{x_h}} \frac{S_h}{k_2 + \tau_h S_h} \varphi_1 d\omega d\tau -$$

$$\int_{(k+1)h}^{(k+2)h} \int_{\Gamma_1} g_1 S_h \varphi_1 d\sigma_1 d\tau = 0,$$

$$\Phi \int_{(k+1)h}^{(k+2)h} \left\langle \frac{\partial O_{x_h}}{\partial t}, \varphi_2 \right\rangle d\tau + \int_{(k+1)h}^{(k+2)h} \int_{\Omega} (\lambda(\tau_h O_{x_h}) + \mathbf{D}(\tau_h \mathbf{V}_h)) \cdot \nabla O_{x_h} \cdot \nabla \varphi_2 d\omega d\tau +$$

$$(28) \quad \int_{(k+1)h}^{(k+2)h} \int_{\Omega} \tau_h \mathbf{V}_h \cdot \nabla O x_h \varphi_2 d\omega d\tau + \\ + \alpha \Phi \int_{(k+1)h}^{(k+2)h} \int_{\Omega} \tau_h B_h \frac{O x_h}{k_1 + \tau_h O x_h} \frac{\tau_h S_h}{k_2 + \tau_h S_h} \varphi_2 d\omega d\tau \\ - \int_{(k+1)h}^{(k+2)h} \int_{\Gamma_1} g_1 (O x_h - O x_1) \varphi_2 d\sigma_1 d\tau = 0,$$

$$(29) \quad \frac{dB_h}{dt} - \left( \delta \frac{\tau_h O x_h}{k_1 + \tau_h O x_h} \frac{\tau_h S_h}{k_2 + \tau_h S_h} - m \right) B_h - \sigma = 0; \\ t \in ](k+1)h, (k+2)h],$$

où  $O x_h((k+1)h, x)$ ,  $S_h((k+1)h, x)$  et  $B_h((k+1)h, x)$  sont définis par l'étape précédente.

**Proposition 2.** *L'algorithme (A) défini ci-dessus est consistant et donne une solution globale  $(O x_h, S_h, B_h, \mathbf{V}_h, p_h)$  satisfaisant*

$$(O x_h, S_h) \in (L^\infty(\mathbf{R}^+; L^+(\Omega)) \cap L_{loc}^2(\mathbf{R}^+; H^1(\Omega)))^2 \\ B_h \in C^0([0, T[; L^+(\Omega)) \\ \mathbf{V}_h \in L^\infty(\mathbf{R}^+; \mathbf{H}_2) \\ p_h \in L^\infty(\mathbf{R}^+; H^1(\Omega)/\mathbf{R});$$

qui de plus vérifie les estimations(13)...(24).

**Preuve de la Proposition 2.** Dans ce qui suit, pour alléger les notations nous omettons l'indice  $h$  lorsque cela ne pose pas d'ambiguïté.

*Résolution de l'équation de Darcy*

Pour  $S$  dans  $L^\infty([0, T[; L^\infty(\Omega))$  donné, l'équation (25) est de la forme  $\forall \psi \in H^1(\Omega)/\mathbf{R}$

$$(30) \quad \int_{\Omega} \mu^{-1}(S) K \cdot \nabla p \cdot \nabla \psi d\omega = \int_{\Omega} \mu^{-1}(S) \beta(S) K \cdot \mathbf{e}_z \cdot \nabla \psi d\omega \\ - \int_{\Gamma_1} g_1 \psi d\sigma_1 - \int_{\Gamma_2} g_2 \psi d\sigma_2.$$

D'après les hypothèses (H3) et (H5), le membre de gauche est une forme bilinéaire continue et coercive sur  $H^1(\Omega)/\mathbf{R} \times H^1(\Omega)/\mathbf{R}$ , le membre de droite est une forme linéaire continue sur  $H^1(\Omega)/\mathbf{R}$ . Donc, d'après le théorème de Lax-Milgram et grâce à (H2) il existe un unique  $p$  dans  $H^1(\Omega)/\mathbf{R}$  solution de (30).

En prenant  $\psi = p$  dans (30) on a

$$\int_{\Omega} \mu^{-1}(S)K \cdot \nabla p \cdot \nabla p d\omega = \int_{\Omega} \mu^{-1}(S)\beta(S)K \cdot \mathbf{e}_z \cdot \nabla p d\omega - \int_{\Gamma_1} g_1 p d\sigma_1 - \int_{\Gamma_2} g_2 p d\sigma_2$$

d'où, en utilisant (H3)

$$\alpha_3 \|\nabla p\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq K \|\text{Mes}(\Omega)\|^{\frac{1}{2}} \|\mu(S)\|_{L^\infty(\Omega)} \|\mu^{-1}(S)\beta(S)\|_{L^\infty(\Omega)} \|\nabla p\|_{L^2(\Omega)} + \|g_1\|_{L^2(\Gamma_1)} \|p\|_{L^2(\Gamma_1)} + \|g_2\|_{L^2(\Gamma_2)} \|p\|_{L^2(\Gamma_2)}.$$

Par continuité de l'application trace définie de  $H^1(\Omega)/\mathbf{R}$  dans  $L^2(\Gamma)$ , il existe une constante  $c_p$ , strictement positive, ne dépendant que de  $\alpha_3, \mu, \beta, K, g_1, g_2$  et  $\Omega$  telle que

$$(E1) \quad \|\nabla p\|_{L^2(\Omega)} \leq c_p.$$

Donc d'après l'équation (12) il existe une constante  $c_v$  ne dépendant que de  $c_p, \mu, \beta$  et  $K$  telle que

$$(E2) \quad \|\mathbf{V}\|_{L^2(\Omega)} \leq c_v$$

*Estimations sur B*

Etant donné le couple  $(Ox, S)$  dans  $(L^\infty(]0, T[; L^+(\Omega)))^2$ ; la solution de l'équation (29) est donnée par

$$(31) \quad B(t, x) = B(0, x) \exp\left(\int_0^t \delta f_3(s, x) - m ds\right) + \sigma \int_0^t \exp\left(\int_s^t \delta f_3(\theta, x) - m d\theta\right) ds$$

$\forall t \in ]0, T[, p.p. x \in \Omega, B(0, x) \in L^+(\Omega)$

$$\text{avec } f_3(t, x) = \frac{\tau_h O_x(t, x)}{k_1 + \tau_h O_x(t, x)} \frac{\tau_h S(t, x)}{k_2 + \tau_h S(t, x)}$$

comme  $O_x$  et  $S$  sont positives ou nulles,  $|f_3|_{L^\infty(]0, T[; L^+(\Omega))} \leq 1$  et donc

$$\text{si } \delta \neq m \text{ alors } B(t, x) \leq B(0, x) \exp((\delta - m)t) + \frac{\sigma}{\delta - m} (\exp((\delta - m)t) - 1)$$

$$\text{sinon } B(t, x) \leq B(0, x) + \sigma t; \forall t \in ]0, T[, p.p. x \in \Omega$$

Il existe donc une fonction  $g$  ne dépendant que des données  $\delta, m, \sigma$  et  $|B(0, \cdot)|_{L^\infty(\Omega)}$  telle que:

$$(E3) \quad |B|_{L^\infty(]0, T[; L^+(\Omega))} \leq g(T).$$

De plus, d'après (29)

$$\left| \frac{dB}{dt} \right| \leq |\delta f_3 - m| |B| + \sigma; \forall t \in ]0, T[; p.p. \text{ dans } \Omega$$

par conséquent

$$(E4) \quad \left| \frac{dB}{dt} \right|_{L^\infty(]0, T[; L^\infty(\Omega))} \leq (\delta + m)g(T) + \sigma$$

d'où, d'après Lions [10] (lemme page 7), après modification éventuelle sur un ensemble de mesure nulle de  $]0, T[, B$  appartient à  $C^0(]0, T[; L^+(\Omega))$ .

*Résolution des équations de transport diffusion réaction.*

L'existence d'une solution pour les équations linéaires (27) et (28) peut se démontrer en approchant  $\mathbf{V}$  par une suite de fonctions plus régulières  $(\mathbf{V}_n)_{n \geq 0}$  convergeant vers  $\mathbf{V}$  dans  $\mathbf{H}_2$ . Ensuite, pour chaque  $n$  on résoud les équations par la méthode de Galerkin. Enfin, grâce aux estimations a priori du même type que (13)... (24), on peut passer à la limite et conclure (voir aussi [13]).

*Estimations dans  $H^1(\Omega)$*

Etant données  $B$  dans  $C^0(]0, T[; L^+(\Omega))$  et  $(\tau_h O_x, \tau_h S)$  dans  $(L^\infty(]0, T[; L^+(\Omega)))^2$ . Soit  $(\mathbf{V}_n)_{n \geq 0}$  une suite bornée de  $L^\infty(]0, T[; \mathbf{H}_3)$  convergeant fortement vers  $\mathbf{V}$  dans  $L^\infty(]0, T[; \mathbf{H}_2)$  et soit  $(O_{x_n}, S_n)$  le couple solution, pour chaque  $n$ , du problème suivant

$$(O_{x_n}, S_n) \in \left( L^2(]0, T[; H^1(\Omega)) \right)^2, \forall (\varphi_1, \varphi_2) \in \left( L^2(]0, T[; H^1(\Omega)) \right)^2$$

$$\begin{aligned}
 (32) \quad \Phi R < \frac{\partial S_n}{\partial t}, \varphi_1 > + \int_{\Omega} (\lambda(\tau_h S) + \mathbf{D}(\mathbf{V})) \cdot \nabla S_n \cdot \nabla \varphi_1 dw \\
 &+ \int_{\Omega} \mathbf{V}_n \cdot \nabla S_n \varphi_1 dw - \int_{\Gamma_1} g_1 S_n \varphi_1 d\sigma_1 \\
 &= -\Phi \int_{\Omega} S_n f_s(\tau_h O x, \tau_h S, \tau_h B) \varphi_1 dw;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (33) \quad \Phi < \frac{\partial O x_n}{\partial t}, \varphi_2 > + \int_{\Omega} (\lambda(\tau_h O x) + \mathbf{D}(\mathbf{V})) \cdot \nabla O x_n \cdot \nabla \varphi_2 dw \\
 &+ \int_{\Omega} \mathbf{V}_n \cdot \nabla O x_n \varphi_2 dw - \int_{\Gamma_1} g_1 (O x_n - O x_1) \varphi_2 d\sigma_1 \\
 &= -\alpha \Phi \int_{\Omega} O x_n f_o(\tau_h O x, \tau_h S, \tau_h B) \varphi_2 dw; \\
 &\quad \text{p.p. dans } ]0, T[,
 \end{aligned}$$

avec

$$O x_n(0) = \tau_h O x(0), S_n(0) = \tau_h S(0)$$

et où

$$f_s(\tau_h O x, \tau_h S, \tau_h B) = \tau_h B \frac{\tau_h O x}{k_1 + \tau_h O x} \frac{1}{k_2 + \tau_h S}$$

et

$$f_o(\tau_h O x, \tau_h S, \tau_h B) = \tau_h B \frac{1}{k_1 + \tau_h O x} \frac{\tau_h S}{k_2 + \tau_h S}.$$

Comme le tenseur  $\mathbf{D}$  est borné et sachant, d'après le théorème de Lebesgue, qu'il existe une sous suite  $\mathbf{D}(\mathbf{V}_{n_k})$  qui converge fortement vers  $\mathbf{D}(\mathbf{V})$  dans  $L^p(]0, T[ \times \Omega)$  pour tout  $p$  fini, il est licite d'avoir remplacé  $\mathbf{D}(\mathbf{V}_n)$  par  $\mathbf{D}(\mathbf{V})$  dans les équations (32) et (33).

L'existence d'une solution dans  $L^2(]0, T[; H^1(\Omega))$ , pour les équations linéaires (32) et (33) peut se démontrer sans difficulté par le méthode de Galerkin.

En remplaçant  $\varphi_2$  par  $O x_n$  dans (33), il vient:

$$\begin{aligned}
 &\frac{\Phi}{2} \frac{d}{dt} |O x_n|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_{\Omega} (\lambda(\tau_h O x) + \mathbf{D}(\mathbf{V})) \cdot \nabla O x_n \cdot \nabla O x_n dw \\
 &+ \frac{1}{2} \int_{\Gamma_1} g_1 O x_n^2 d\sigma_1 + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_2} g_2 O x_n^2 d\sigma_2 - \int_{\Gamma_1} g_1 (O x_n - O x_1) O x_n d\sigma_1
 \end{aligned}$$

$$= -\alpha\Phi \int_{\Omega} f_o(\tau_h O x, \tau_h S, \tau_h B) O x_n^2 d\omega; p.p. \text{ dans } ]0, T[$$

d'où compte tenu des hypothèses (H2), (H4) et (H6) et sachant que le membre de droite de l'égalité ci-dessus est négatif ou nul pour tout  $t$  positif, on a

$$\frac{\Phi}{2} \frac{d}{dt} |O x_n|_{L^2(\Omega)}^2 + \alpha_2 |\nabla O x_n|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_1} g_1 O x_n^2 d\sigma_1 \leq \int_{\Gamma_1} |g_1 O x_1 O x_n| d\sigma_1.$$

En utilisant les inégalités de Young pour majorer le membre de droite de l'inégalité ci-dessus, on obtient

$$(34) \quad \frac{\Phi}{2} \frac{d}{dt} |O x_n|_{L^2(\Omega)}^2 + \alpha_2 |\nabla O x_n|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{1}{2} \int_{\Gamma_1} g_1 O x_1^2 d\sigma_1; \forall t \in ]0, T[$$

en intégrant (34) entre 0 et  $t$ , il vient

$$\frac{\Phi}{2} |O x_n(t)|_{L^2(\Omega)}^2 + \alpha_2 \int_0^t |\nabla O x_n|_{L^2(\Omega)}^2 d\tau \leq \frac{\Phi}{2} \text{Mes}(\Omega) |O x_n(0)|_{L^\infty(\Omega)}^2 + c_1 t$$

où  $c_1$  est une constante ne dépendant que de  $\Gamma_1$ ,  $g_1$  et  $O x_1$ .

On conclut que  $O x_n$  demeure borné dans

$$L^\infty(]0, T[; L^2(\Omega)) \cap L^2(]0, T[; H^1(\Omega))$$

et on a alors les estimations suivantes

$$(E5) \quad \sup_{t \in ]0, T[} |O x_n(t)|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \text{Mes}(\Omega) |O x_n|_{L^\infty(\Omega)}^2 + \frac{2c_1 T}{\Phi}$$

$$(E6) \quad \int_0^t |\nabla O x_n|_{L^2(\Omega)}^2 d\tau \leq \frac{\Phi}{2\alpha_2} \text{Mes}(\Omega) |O x_n(0)|_{L^\infty(\Omega)}^2 + \frac{c_1}{\alpha_2} T;$$

$$\forall t \in ]0, T[$$

de la même manière, on a les estimations suivantes sur  $S_n$

$$(E7) \quad \sup_{t \in ]0, T[} |S_n(t)|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \text{Mes}(\Omega) |S_n(0)|_{L^\infty(\Omega)}^2$$

$$(E8) \quad \int_0^t |\nabla S_n|_{L^2(\Omega)}^2 d\tau \leq \frac{\Phi R}{2\alpha_2} \text{Mes}(\Omega) |S_n(0)|_{L^\infty(\Omega)}^2;$$



$$\forall t \in ]0, T[$$

Estimations dans  $L^+(\Omega)$ .

On écrit maintenant  $Ox_n = Ox_n^+ - Ox_n^-$  et on remplace  $\varphi_2$  par  $(-Ox_n^-)$  dans (33) (ceci est licite car  $\mathbf{D}(\mathbf{V})$  est borné et que si  $Ox_n$  est dans  $H^1(\Omega)$ , il en est de même pour  $Ox_n^+$  et  $Ox_n^-$ ), d'où

$$\begin{aligned} & \frac{\Phi}{2} \frac{d}{dt} |Ox_n^-|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_{\Omega} (\lambda(\tau_h Ox) + \mathbf{D}(\mathbf{V})) \cdot \nabla Ox_n^- \cdot \nabla Ox_n^- dw \\ & - \frac{1}{2} \int_{\Gamma_1} g_1 (Ox_n^-)^2 d\sigma_1 + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_2} g_2 (Ox_n^-)^2 d\sigma_2 - \int_{\Gamma_1} g_1 Ox_1 Ox_n^- d\sigma_1 \\ & = -\Phi \int_{\Omega} (Ox_n^-)^2 f_o(\tau_h Ox, \tau_h S, \tau_h B) dw; p.p. dans ]0, T[ \end{aligned}$$

or

$$\int_{\Omega} f_o(\tau_h Ox, \tau_h S, \tau_h B) |Ox_n^-|^2 dw \geq 0; \forall t \in ]0, T[$$

et sous les hypothèses (H2), (H4) et (H6)

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (\lambda(\tau_h Ox) + \mathbf{D}(\mathbf{V})) \cdot \nabla Ox_n^- \cdot \nabla Ox_n^- dw \geq 0; \forall t \in ]0, T[ \\ & - \frac{1}{2} \int_{\Gamma_1} g_1 (Ox_n^-)^2 d\sigma_1 + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_2} g_2 (Ox_n^-)^2 d\sigma_2 \\ & - \int_{\Gamma_1} g_1 Ox_1 Ox_n^- d\sigma_1 \geq 0; \forall t \in ]0, T[ \end{aligned}$$

d'où

$$(35) \quad \frac{d}{dt} |Ox_n^-|_{L^2(\Omega)}^2 \leq 0; \forall t \in ]0, T[,$$

après intégration il vient

$$(36) \quad |Ox_n^-(t)|_{L^2(\Omega)}^2 \leq |Ox_n^-(0)|_{L^2(\Omega)}^2; \forall t \in ]0, T[$$

de même, en remplaçant  $\varphi_1$  par  $(-S_n^-)$  dans (32) et en suivant la même démarche on a

$$(37) \quad |S_n^-(t)|_{L^2(\Omega)}^2 \leq |S_n^-(0)|_{L^2(\Omega)}^2; \forall t \in ]0, T[$$

comme  $S_n^-(0)$  et  $Ox_n^-(0)$  sont nulles presque partout dans  $\Omega$ , on déduit, pour chaque  $n$ , la positivité du couple  $(Ox_n, S_n)$ ; les données initiales étant positives ou nulles.

On pose maintenant  $\gamma = \text{Max} (|Ox_n(0)|_{L^\infty(\Omega)}, |Ox_1|_{L^\infty(]0, T[; \Gamma_1)})$  et  $\chi = Ox_n - \gamma$ ,  $n$  étant fixé. Alors  $\chi$  est solution de

$$\forall \varphi \in L^2(]0, T[; H^1(\Omega))$$

$$(38) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Phi \langle \frac{\partial \chi}{\partial t}, \varphi \rangle + \int_{\Omega} (\lambda(\tau_h Ox) + \mathbf{D}(\mathbf{V})) \cdot \nabla \chi \cdot \nabla \varphi \, dw \\ + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbf{V}_n \cdot \nabla \chi \varphi - \mathbf{V}_n \cdot \nabla \varphi (\chi + \gamma) \, dw \\ + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_1} g_1(\chi + \gamma) \varphi \, d\sigma_1 + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_2} g_2(\chi + \gamma) \varphi \, d\sigma_2 - \int_{\Gamma_1} g_1(\chi + \gamma - Ox_1) \varphi \, d\sigma_1 \\ = -\alpha \Phi \int_{\Omega} (\chi + \gamma) f_o(\tau_h Ox, \tau_h S, \tau_h B) \varphi \, dw, \text{ p.p. dans } ]0, T[ \end{array} \right.$$

comme

$$\int_{\Omega} \mathbf{V}_n \cdot \nabla \varphi \, dw = \int_{\Gamma_1} g_1 \varphi \, d\sigma_1 + \int_{\Gamma_2} g_2 \varphi \, d\sigma_2$$

en écrivant  $\chi = \chi^+ - \chi^-$  puis en prenant  $\varphi = \chi^+$  dans (38) on obtient

$$\frac{\Phi}{2} \frac{d}{dt} |\chi^+|_{L^2(\Omega)}^2 + \alpha_2 |\nabla \chi^+|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{1}{2} \int_{\Gamma_1} g_1(\chi^+)^2 \, d\sigma_1 - \frac{1}{2} \int_{\Gamma_2} g_2(\chi^+)^2 \, d\sigma_2 \\ + \int_{\Gamma_1} (\gamma - Ox_1) \chi^+ \, d\sigma_1 - \alpha \Phi \int_{\Omega} (\chi^+ + \gamma) \chi^+ f_o(\tau_h Ox, \tau_h S, \tau_h B) \, dw$$

le membre de droite de l'inégalité ci-dessus étant toujours négatif, en intégrant entre 0 et  $t$ , pour tout  $t$  dans  $]0, T[$ , il vient

$$\frac{\Phi}{2} |\chi^+(t)|_{L^2(\Omega)}^2 + \alpha_2 \int_0^t |\nabla \chi^+|_{L^2(\Omega)}^2 \, ds \leq \frac{\Phi}{2} |\chi^+(0)|_{L^2(\Omega)}^2$$

or  $\chi^+(0) = 0$  presque partout dans  $\Omega$ , d'où

$$|\chi^+(t)|_{L^2(\Omega)} = 0, \forall t \in ]0, T[.$$

Par conséquent

$$(E9) \quad 0 \leq Ox_n(t, x) \leq \text{Max} (|Ox_n(0)|_{L^\infty(\Omega)}, |Ox_1|_{L^\infty(]0, T[; \Gamma_1)}) ;$$

p.p. dans  $\Omega$ ,  $\forall t \in ]0, T[$ ,

de même, en posant  $\gamma = |S_n(0)|_{L^\infty(\Omega)}$ ,  $\chi = S_n - \gamma$  et en écrivant une équation du même type que (38) sur  $\chi$ , on a

$$(E10) \quad \forall t \in ]0, T[; 0 \leq S_n(t, x) \leq |S_n(0)|_{L^\infty(\Omega)}; \text{p.p. dans } \Omega$$

Estimation de  $\partial_t S_n$  et  $\partial_t O x_n$

Pour  $O x_n$  solution de (33) et pour toute fonction test  $\varphi$  dans  $L^2(]0, T[; H^1(\Omega))$  on a

$$\begin{aligned} & \Phi \int_0^T \left\langle \frac{\partial O x_n}{\partial t}, \varphi \right\rangle d\tau + \int_0^T \int_\Omega (\lambda(\tau_h O x) + \mathbf{D}(\mathbf{V})) \cdot \nabla O x_n \cdot \nabla \varphi d\omega d\tau \\ & - \int_0^T \int_\Omega \mathbf{V}_n \nabla \varphi O x_n d\omega d\tau + \int_{\Gamma_1} g_1 O x_n \varphi d\sigma_1 + \int_{\Gamma_2} g_2 O x_n \varphi d\sigma_2 \\ & - \int_{\Gamma_1} g_1 (O x_n - O x_1) \varphi d\sigma_1 + \alpha \Phi \int_0^T \int_\Omega O x_n f_o(\tau_h O x, \tau_h S, \tau_h B) \varphi d\omega d\tau = 0 \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \Phi \left| \left\langle \frac{\partial O x_n}{\partial t}, \varphi \right\rangle \right| & \leq \{ |\mathbf{V}_n|_{L^\infty(]0, T[; L^2(\Omega))} |O x_n|_{L^\infty(]0, T[; L^\infty(\Omega))} + \\ & (|\lambda(\tau_h O x)|_{L^\infty(]0, T[; L^\infty(\Omega))} + |\mathbf{D}(\mathbf{V})|_{L^\infty(]0, T[; L^\infty(\Omega))}) |\nabla O x_n|_{L^2(]0, T[; L^2(\Omega))} + \\ & \alpha \Phi |f_o|_{L^\infty(]0, T[; L^\infty(\Omega))} |O x_n|_{L^2(]0, T[; L^2(\Omega))} \} |\varphi|_{L^2(]0, T[; H^1(\Omega))} + \\ & |g_2|_{L^\infty(]0, T[; L^\infty(\Gamma_2))} |O x_n|_{L^2(]0, T[; L^2(\Gamma_2))} |\varphi|_{L^2(]0, T[; L^2(\Gamma_2))} + \\ & |g_1|_{L^\infty(]0, T[; L^\infty(\Gamma_1))} |O x_1|_{L^2(]0, T[; L^2(\Gamma_1))} |\varphi|_{L^2(]0, T[; L^2(\Gamma_1))} \end{aligned}$$

de plus, d'après l'estimation (E3) et par définition de  $f_o$

$$|f_o|_{L^\infty(]0, T[; L^\infty(\Omega))} \leq \frac{g(T)}{k_1}.$$

Par conséquent, d'après l'hypothèse (H8), compte tenu des estimations (E5), (E6) et (E9) et parce que  $\lambda$  est continue, il existe une fonction continue  $f_1$  ne dépendant que de  $g, g_1, g_2, O x_1, |O x_n(0)|_{L^\infty(\Omega)}, |\mathbf{V}_n|_{L^\infty(]0, T[; L^2(\Omega))}, \alpha_6, \alpha_2, k_1, \Phi, \alpha$  et  $\Omega$  telle que

$$(E11) \quad \left| \frac{\partial O x_n}{\partial t} \right|_{L^2(]0, T[; (H^1(\Omega))')} \leq f_1(T)$$

de même, il existe une fonction continue  $f_2$  ne dépendant que de  $g, g_1, g_2, |S_n(0)|_{L^\infty(\Omega)}, |\mathbf{V}_n|_{L^\infty(]0, T[; L^2(\Omega))}, \alpha_6, \alpha_2, k_2, \Phi, R$  et  $\Omega$  telle que

$$(E12) \quad \left| \frac{\partial S_n}{\partial t} \right|_{L^2(]0, T[; (H^1(\Omega))')} \leq f_2(T).$$

Donc, d'après les estimations (E5)...(E12), quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que:

$$(Ox_n, S_n) \longrightarrow (Ox, S) \text{ faible } * \text{ dans } L^\infty(]0, T[ \times \Omega),$$

$$(Ox_n, S_n) \longrightarrow (Ox, S) \text{ faiblement dans } L^2(]0, T[; H^1(\Omega)),$$

sous l'hypothèse (H6) et parce que la suite  $(\mathbf{V}_n)_{n \geq 0}$  converge fortement dans  $L^\infty(]0, T[; \mathbf{H}_2)$ :

$$\left( \frac{\partial S_n}{\partial t}, \frac{\partial Ox_n}{\partial t} \right) \longrightarrow \left( \frac{\partial S}{\partial t}, \frac{\partial Ox}{\partial t} \right) \text{ faiblement dans } L^2(]0, T[; H^1(\Omega))'.$$

Les équations (32) et (33) étant linéaires et par continuité de l'application trace, les résultats de convergence obtenus suffisent pour passer à la limite. Le couple  $(Ox, S)$  vérifie alors

$$(Ox, S) \in (L^2(]0, T[; H^1(\Omega)) \cap L^\infty(]0, T[; L^+(\Omega)))^2$$

$$\forall (\varphi_1, \varphi_2) \in (L^2(]0, T[; H^1(\Omega)) \cap L^\infty(]0, T[; L^+(\Omega)))^2$$

$$\Phi R \left\langle \frac{\partial S}{\partial t}, \varphi_1 \right\rangle + \int_{\Omega} (\lambda(\tau_h S) + \mathbf{D}(\mathbf{V})) \cdot \nabla S \cdot \nabla \varphi_1 dw + \int_{\Omega} \mathbf{V} \cdot \nabla S \varphi_1 dw$$

$$- \int_{\Gamma_1} g_1 S \varphi_1 d\sigma_1 = -\Phi \int_{\Omega} S f_s(\tau_h Ox, \tau_h S, \tau_h B) \varphi_1 dw; \text{ p.p. dans } ]0, T[,$$

$$\Phi \left\langle \frac{\partial Ox}{\partial t}, \varphi_2 \right\rangle + \int_{\Omega} (\lambda(\tau_h Ox) + \mathbf{D}(\mathbf{V})) \cdot \nabla Ox \cdot \nabla \varphi_2 dw + \int_{\Omega} \mathbf{V} \cdot \nabla Ox \varphi_2 dw$$

$$- \int_{\Gamma_1} g_1 (Ox - Ox_1) \varphi_2 d\sigma_1 = -\alpha \Phi \int_{\Omega} Ox f_o(\tau_h Ox, \tau_h S, \tau_h B) \varphi_2 dw;$$

p.p. dans  $]0, T[$

avec

$$Ox(0) = \tau_h Ox(0) \text{ et } S(0) = \tau_h S(0)$$

Comme les estimations (E5)...(E12) obtenues sur le couple  $(Ox_n, S_n)_{n \geq 0}$  sont uniformes et les normes considérées étant faiblement semi-continues inférieurement, ces estimations sont aussi valables pour le couple  $(Ox, S)$ . Cela termine la preuve de la **Proposition 2**.

*Résultat de continuité forte sur la vitesse et la pression*

Soit  $(S_n)_{n \geq 0}$  une suite bornée de  $Q = ]0, T[ \times \Omega$  et soit  $V_n$  la solution de l'équation de Darcy avec la donnée  $S_n$

$$V_n = -\mu^{-1}(S_n)K \cdot (\nabla p_n - \beta(S_n) \cdot e_z)$$

où  $p_n$  est l'unique solution dans  $L^\infty(]0, T[; H^1(\Omega)/\mathbf{R})$  de l'équation  $\forall \psi \in H^1(\Omega)/\mathbf{R}$

$$\int_{\Omega} \mu^{-1}(S_n)K \cdot (\nabla p_n - \beta(S_n) \cdot e_z) \cdot \nabla \psi \, dw + \int_{\Gamma_1} g_1 \psi \, d\sigma_1 + \int_{\Gamma_2} g_2 \psi \, d\sigma_2 = 0$$

$$p.p. \, t \in ]0, T[.$$

**Lemme 1.** *Soit  $(f_n)_{n \geq 0}$  une suite de fonctions mesurables qui converge faiblement vers  $f$  dans  $L^2(Q)$ , et  $(g_n)_{n \geq 0}$  une suite de fonctions mesurables qui converge vers  $g$  presque partout, on suppose de plus qu'il existe une constante  $a$  telle que  $|g_n| \leq a$  pour tout  $n$ . Alors la suite  $(f_n g_n)_{n \geq 0}$  converge faiblement vers  $fg$  dans  $L^2(Q)$ .*

**Preuve:** Il faut montrer que pour toute fonction  $\varphi$  de  $L^2(Q)$ ,

$$\int_0^T \int_{\Omega} f_n g_n \varphi \, dw \, d\tau \longrightarrow \int_0^T \int_{\Omega} f g \varphi \, dw \, d\tau.$$

Soit  $h_n = g_n \varphi$  une suite fonction de  $L^2(Q)$ ;  $(h_n)_{n \geq 0}$  converge vers  $g\varphi$  presque partout et de plus  $|h_n| \leq a |\varphi|$ . Donc d'après le théorème de Lebesgue  $(h_n)_{n \geq 0}$  converge vers  $g\varphi$  fortement dans  $L^2(Q)$ . D'où le résultat.

**Proposition 2.** *Si  $(S_n)_{n \geq 0}$  est une suite bornée dans  $L^\infty(Q)$  qui converge fortement vers  $S$  dans  $L^2(Q)$  alors la suite  $(V_n)_{n \geq 0}$  converge fortement vers  $V$  dans  $L^2(]0, T[; H_2)$ , où  $V$  est l'unique solution de l'équation de Darcy avec la donnée  $S$ .*

**Preuve:** Soit  $p$  la solution de l'équation de Darcy avec la donnée  $S$ .  
 $\forall \psi \in L^2([0, T[; H^1(\Omega)/\mathbf{R})$

$$\int_0^T \int_{\Omega} \mu^{-1}(S) K \cdot \nabla p \cdot \nabla \psi \, d\omega \, d\tau = \int_0^T \int_{\Omega} \mu^{-1}(S) \beta(S) K \cdot e_z \cdot \nabla \psi \, d\omega \, d\tau \\ - \int_0^T \int_{\Gamma_1} g_1 \psi \, d\sigma_1 \, d\tau - \int_0^T \int_{\Gamma_2} g_2 \psi \, d\sigma_2 \, d\tau.$$

La différence  $p_n - p$  vérifie l'équation:

$$\int_0^T \int_{\Omega} \mu^{-1}(S_n) K \cdot \nabla(p_n - p) \cdot \nabla \psi \, d\omega \, d\tau \\ + \int_0^T \int_{\Omega} (\mu^{-1}(S_n) - \mu^{-1}(S)) K \cdot \nabla p \cdot \nabla \psi \, d\omega \, d\tau \\ - \int_0^T \int_{\Omega} (\mu^{-1}(S_n) \beta(S_n) - \mu^{-1}(S) \beta(S)) K \cdot e_z \cdot \nabla \psi \, d\omega \, d\tau = 0.$$

Comme  $\beta$  et  $\mu$  sont continues et d'après les hypothèses sur la suite  $(S_n)_{n \geq 0}$ ; quitte à extraire une sous-suite

$$S_n \longrightarrow S \text{ p.p. dans } Q$$

et  $(\mu(S_n), \beta(S_n)) \longrightarrow (\mu(S), \beta(S))$  faible \* dans  $L^\infty(Q)$ ,  
 de plus, d'après le théorème de Lebesgue

(39)  $(\mu(S_n), \beta(S_n)) \rightarrow (\mu(S), \beta(S))$  fortement dans  $L^q(Q)$ ,  $q < +\infty$ .

Il est clair que  $\nabla p_n$  converge faiblement dans  $L^2(Q)$  vers  $\nabla p$ . Montrons d'abord que cette convergence est forte.

Prenant  $\psi = p_n - p$ , on obtient

$$a_7 \|\nabla(p_n - p)\|_{L^2(Q)}^2 \leq - \int_0^T \int_{\Omega} (\mu^{-1}(S_n) - \mu^{-1}(S)) K \cdot \nabla p \cdot \nabla(p_n - p) \, d\omega \, d\tau \\ + \int_0^T \int_{\Omega} (\mu^{-1}(S_n) \beta(S_n) - \mu^{-1}(S) \beta(S)) K \cdot e_z \cdot \nabla(p_n - p) \, d\omega \, d\tau$$

où  $a_7$  est une constante positive qui dépend de  $\|\mu(S_n)\|_{L^\infty(Q)}$  et  $\alpha_3$ .

Le Lemme 1 appliqué au produit de fonctions

$$(\mu^{-1}(S_n) - \mu^{-1}(S)) \nabla(p_n - p)$$

montre que ce terme tend faiblement vers zéro dans  $L^2(Q)$ , et d'après (39) et l'hypothèse (H3), la deuxième intégrale tend vers zéro.

Soit  $\mathbf{V}$  dans  $L^\infty(]0, T[; \mathbf{H}_2)$  définie par

$$\mathbf{V} = -\mu^{-1}(S)K \cdot (\nabla p - \beta(S) \cdot \mathbf{e}_z),$$

la différence  $\mathbf{V}_n - \mathbf{V}$  s'écrit

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_n - \mathbf{V} &= \mu^{-1}(S_n)K \cdot \nabla(p_n - p) + \left(\mu^{-1}(S_n) - \mu^{-1}(S)\right) K \cdot \nabla p \\ &\quad - \left(\mu^{-1}(S_n)\beta(S_n) - \mu^{-1}(S)\beta(S)\right) K \cdot \mathbf{e}_z. \end{aligned}$$

D'après ce qui précède le premier terme tend vers zéro, le théorème de Lebesgue et l'hypothèse (H3) assurent que le second et le troisième terme convergent vers zéro dans  $L^2(]0, T[; \mathbf{H}_2)$ .

*Résultat de régularité sur la vitesse et la pression*

Etant donné  $S$  dans  $L^\infty(\Omega)$ , soit  $p$  dans  $H^1(\Omega)/\mathbf{R}$  la solution de

$$(40) \quad \nabla \cdot (\mu^{-1}(S)K \cdot \nabla p) = \nabla \cdot (\mu^{-1}(S)\beta(S)K \cdot \mathbf{e}_z) \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega)$$

$$(41) \quad (\mu^{-1}(S)K \cdot \nabla p) \cdot \mathbf{n} = (\mu^{-1}(S)\beta(S)K \cdot \mathbf{e}_z + \chi_{1g_1} + \chi_{2g_2}) \cdot \mathbf{n} \text{ sur } \Gamma$$

où  $\chi_i$  est la fonction indicatrice de  $\Gamma_i$ .

D'après Lions-Magenes [11], il existe une fonction  $G$  dans  $W^{1,q}(\Omega)$  pour tout  $q$ , telle que

$$(\mu^{-1}(S)K \cdot \nabla G) \cdot \mathbf{n} = (\mu^{-1}(S)\beta(S)K \cdot \mathbf{e}_z + \chi_{1g_1} + \chi_{2g_2}) \cdot \mathbf{n} \text{ sur } \Gamma.$$

Considérons ensuite  $u$  dans  $H^1(\Omega)$  telle que  $p = G + u$  avec

$$\nabla \cdot (\mu^{-1}(S)K \cdot \nabla u) = \nabla \cdot (\mu^{-1}(S)K \cdot (\beta(S)\mathbf{e}_z - \nabla G)) \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega)$$

$$(\mu^{-1}(S)K \cdot \nabla u) \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma.$$

D'après le lemme de régularité locale de Meyers [1], [12] il existe une constante  $s, s > 2$ , telle que  $u$  appartienne à  $W_{loc}^{1,s}(\Omega)$ .

Notons  $B(0, R)$  la boule de centre 0 et de rayon  $R$ . La régularité au bord s'étudie par carte locale sur  $B(0, R) \cap \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3, z > 0\}$  en prolongeant par réflexion et symétrie la solution à  $B(0, R)$  puis en

appliquant à cette solution le résultat de régularité locale de Meyers [1], [12].

On montre ainsi qu'il existe une constante  $q_0 > 2$  telle que  $u$  soit dans  $W^{1,q_0}(\Omega)$ . Donc comme  $G$  est régulière,  $p$  a la même régularité que  $u$ . Par conséquent, d'après l'équation de Darcy  $\mathbf{V}$  appartient à  $\mathbf{L}^{q_0}(\Omega)$ . Ceci termine la preuve de la Proposition 1.

Preuve du Théorème 2. Sous les hypothèses (H1)...(H6), on a construit une famille de fonctions  $(Ox_h, S_h, B_h, \mathbf{V}_h, p_h)$  vérifiant les estimations (E1)...(E12) et les équations suivantes:

$$\forall (\varphi_1, \varphi_2) \in (H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega))^2$$

$$(42) \quad \Phi_R < \frac{\partial S_h}{\partial t}, \varphi_1 > + \int_{\Omega} (\lambda(\tau_h S_h) + \mathbf{D}(\tau_h \mathbf{V}_h)) \cdot \nabla S_h \cdot \nabla \varphi_1 dw$$

$$+ \int_{\Omega} \tau_h \mathbf{V}_h \cdot \nabla S_h \varphi_1 dw - \int_{\Gamma_1} g_1 S_h \varphi_1 d\sigma_1$$

$$\Phi \int_{\Omega} \tau_h B_h \frac{\tau_h O x_h}{k_1 + \tau_h O x_h k_2 + \tau_h S_h} \frac{S_h}{k_2 + \tau_h S_h} \varphi_1 d\omega d\tau = 0; p.p. \text{ dans } ]0, T[$$

$$(43) \quad \Phi < \frac{\partial O x_h}{\partial t}, \varphi_2 > + \int_{\Omega} (\lambda(\tau_h O x_h) + \mathbf{D}(\tau_h \mathbf{V}_h)) \cdot \nabla O x_h \cdot \nabla \varphi_2 dw$$

$$+ \int_{\Omega} \tau_h \mathbf{V}_h \cdot \nabla O x_h \varphi_2 dw - \int_{\Gamma_1} g_1 (O x_h - O x_1) \varphi_2 d\sigma_1$$

$$+ \alpha \Phi \int_{\Omega} \tau_h B_h \frac{O x_h}{k_1 + \tau_h O x_h k_2 + \tau_h S_h} \frac{\tau_h S_h}{k_2 + \tau_h S_h} \varphi_2 d\omega d\tau = 0; p.p. \text{ dans } ]0, T[$$

$$(44) \quad \frac{dB_h}{dt} - \left( \delta \frac{\tau_h O x_h}{k_1 + \tau_h O x_h k_2 + \tau_h S_h} \frac{\tau_h S_h}{k_2 + \tau_h S_h} - m \right) B_h - \sigma = 0;$$

$$p.p. \text{ dans } \Omega, \forall t \in ]0, T[$$

et  $\forall \psi \in H^1(\Omega)/\mathbf{R}$

$$(45) \quad \int_{\Omega} \mu^{-1}(S_h) K \cdot (\nabla p_h - \beta(S_h) \cdot \mathbf{e}_z) \cdot \nabla \psi dw + \int_{\Gamma_1} g_1 \psi d\sigma_1 +$$

$$\int_{\Gamma_2} g_2 \psi d\sigma_2 = 0.$$



Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que:

$$(S_h, O x_h, B_h) \rightarrow (S, O x, B) \text{ faible } * \text{ dans } L^\infty(]0, T[ \times \Omega),$$

$$(S_h, O x_h) \rightarrow (S, O x) \text{ faiblement dans } L^2(]0, T[; H^1(\Omega)),$$

et sous l'hypothèse (H6):

$$(46) \quad \left( \frac{\partial S_h}{\partial t}, \frac{\partial O x_h}{\partial t} \right) \rightarrow \left( \frac{\partial S}{\partial t}, \frac{\partial O x}{\partial t} \right) \text{ faiblement dans } L^2(]0, T[; H^1(\Omega))'.$$

D'après les résultats de continuité forte sur la vitesse et la pression

$$(47) \quad p_h \rightarrow p \text{ fortement dans } L^2(]0, T[; H^1(\Omega)/\mathbf{R}),$$

$$(48) \quad \mathbf{V}_h \rightarrow \mathbf{V} \text{ fortement dans } L^2(]0, T[; \mathbf{H}_2).$$

En utilisant le lemme d'Aubin, on montre alors que

$$(S_h, O x_h) \rightarrow (S, O x) \text{ fortement dans } L^2(]0, T[ \times \Omega),$$

De plus, comme  $S_h$  et  $O x_h$  sont bornés dans  $L^\infty(]0, T[ \times \Omega)$ , on déduit d'après le théorème de Lebesgue que

$$(49) \quad (S_h, O x_h) \rightarrow (S, O x) \text{ fortement dans } L^p(]0, T[ \times \Omega); \text{ pour tout } p \text{ fini.}$$

**Lemme 2.** *Etant donné  $u_h$  dans  $L^p(]0, T[ \times \Omega)$  convergeant fortement vers  $u$  dans  $L^p(]0, T[ \times \Omega)$ , pour tout  $p$  fini, alors:*

$$i) \quad \tau_h u_h \rightarrow u \text{ fortement dans } L^p(]0, T[ \times \Omega), \text{ pour tout } p \text{ fini,}$$

$$ii) \quad \text{si de plus, } u_h \text{ est positif presque partout dans } ]0, T[ \times \Omega, \text{ et si } f \text{ est une fonction continue et bornée de } \mathbf{R}^+ \text{ dans } \mathbf{R}^+ \text{ alors:}$$

$$f(\tau_h u_h) \rightarrow f(u) \text{ fortement dans } L^p(]0, T[ \times \Omega); \text{ pour tout } p \text{ fini.}$$

**Preuve:** i) Par hypothèse,  $u_h$  converge fortement vers  $u$  dans

$$L^p(]0, T[ \times \Omega),$$

donc la suite  $(u_h)_h$  est de Cauchy dans  $L^p(]0, T[ \times \Omega)$ . Les translations étant fortement continues sur  $L^p(]0, T[)$  (pour tout  $p$  fini), la suite  $(\tau_h u_h)_h$  est aussi de Cauchy dans  $L^p(]0, T[ \times \Omega)$  par conséquent il existe  $v$  tel que

$$\tau_h u_h \rightarrow v \text{ fortement dans } L^p(]0, T[ \times \Omega).$$

d'où

$$\tau_h(u_h - u) \rightarrow (v - u) \text{ fortement dans } L^p(]0, T[ \times \Omega)$$

de plus

$$(u_h - u) \rightarrow 0 \text{ fortement dans } L^p(]0, T[ \times \Omega)$$

d'où par unicité de la limite  $v = u$ .

ii) Considérons d'abord le cas  $p = 1$ .

Soit  $\tilde{u}_h$  (resp  $\tilde{u}$ ) le prolongement par 0 de  $u_h$  (resp  $u$ ) sur  $L^1(\mathbf{R} \times \Omega)$ . Il est clair que si  $u_h$  converge fortement vers  $u$  dans  $L^1(]0, T[ \times \Omega)$  alors  $\tilde{u}_h$  converge fortement vers  $\tilde{u}$  dans  $L^1(\mathbf{R} \times \Omega)$ , de plus si  $f$  est une fonction continue et bornée sur  $\mathbf{R}^+$  alors quitte à extraire une sous-suite et d'après le théorème de Lebesgue on a

$$(50) \quad f(\tilde{u}_h) \rightarrow f(\tilde{u}) \text{ fortement dans } L^1_{loc}(\mathbf{R} \times \Omega).$$

Comme

$$\begin{aligned} & \int_0^T |f(\tau_h u_h) - f(u)|_{L^1(\Omega)} dt \\ & \leq \int_0^T |f(\tau_h \tilde{u}_h) - f(\tau_h \tilde{u})|_{L^1(\Omega)} dt + \int_0^T |f(\tau_h \tilde{u}) - f(\tilde{u})|_{L^1(\Omega)} dt \end{aligned}$$

d'où

$$(51) \quad |f(\tau_h u_h) - f(u)|_{L^1(]0, T[ \times \Omega)} \leq \int_0^T \tau_h |f(\tilde{u}_h) - f(\tilde{u})|_{L^1(\Omega)} dt + \int_0^T |f(\tau_h \tilde{u}) - f(\tilde{u})|_{L^1(\Omega)} dt;$$

or

$$\begin{aligned} & \int_0^T \tau_h |f(\tilde{u}_h) - f(\tilde{u})|_{L^1(\Omega)} dt \leq \int_{-h}^0 |f(\tilde{u}_h) - f(\tilde{u})|_{L^1(\Omega)} dt \\ & + \int_0^{T-h} |f(\tilde{u}_h) - f(\tilde{u})|_{L^1(\Omega)} dt + \int_{T-h}^T |f(\tilde{u}_h) - f(\tilde{u})|_{L^1(\Omega)} dt; \end{aligned}$$

par conséquent, d'après (50) et (51),  $f(\tau_h u_h)$  converge fortement vers  $f(u)$  dans  $L^1(]0, T[ \times \Omega)$ .

De plus, comme la fonction  $f$  est bornée, on a l'inégalité d'interpolation:

$$|f(\tau_h u_h) - f(u)|_{L^p(\Omega)} \leq |f(\tau_h u_h) - f(u)|_{L^1(\Omega)}^\theta |f(\tau_h u_h) - f(u)|_{L^\infty(\Omega)}^{1-\theta};$$

$$p.p. t \in ]0, T[ \text{ avec } \frac{1}{p} = \theta; 0 < \theta < 1,$$

on en déduit alors

$$f(\tau_h u_h) \rightarrow f(u) \text{ fortement dans } L^p(]0, T[ \times \Omega); \text{ pour tout } p \text{ fini.}$$

Montrons que  $B_h \rightarrow B$  fortement dans  $L^p(]0, T[ \times \Omega)$ , pour tout  $p$  fini.

$B_h$  est solution de l'équation différentielle ordinaire (44) où les données  $(\tau_h O_h, \tau_h S_h)$  sont dans  $(L^\infty(]0, T[; L^+(\Omega)))^2$  et convergent fortement vers  $(Ox, S)$  dans  $L^p(]0, T[ \times \Omega)$ , pour tout  $p$  fini.  $B_h$  est alors donnée par

$$B_h(t, x) = B_0(x) \exp \left( \int_0^t f_2(\tau_h O_h, \tau_h S_h) ds \right) + \sigma \int_0^t \exp \left( \int_s^t f_2(\tau_h O_h, \tau_h S_h) d\theta \right) ds$$

p.p. dans  $\Omega, \forall t \in ]0, T[;$

où

$$f_2(Ox, S) = \delta \frac{Ox}{k_1 + Ox} \frac{S}{k_2 + S} - m.$$

D'après le Lemme 2

$$(52) \quad \left( \frac{\tau_h O_h}{k_1 + \tau_h O_h}, \frac{\tau_h S_h}{k_2 + \tau_h S_h} \right) \rightarrow \left( \frac{Ox}{k_1 + Ox}, \frac{S}{k_2 + S} \right)$$

fortement dans  $L^p(]0, T[ \times \Omega);$  pour tout  $p$  fini

Soit  $B$  la solution de

$$(53) \quad \begin{cases} \frac{dB}{dt} - \left( \delta \frac{Ox}{k_1 + Ox} \frac{S}{k_2 + S} - m \right) B - \sigma = 0 \text{ p.p. dans } \Omega, \forall t \in ]0, T[ \\ B(0, x) = B_0(x) \end{cases}$$

On a alors:

$$\begin{aligned} & |B_h(t, x) - B(t, x)| \leq \\ & \sigma \int_0^t \left| \exp\left(\int_s^t f_2(\tau_h O x_h, \tau_h S_h) d\theta\right) - \exp\left(\int_s^t f_2(Ox, S) d\theta\right) \right| ds \\ & + B_0(x) \left| \exp\left(\int_0^t f_2(\tau_h O x_h, \tau_h S_h) ds\right) - \exp\left(\int_0^t f_2(Ox, S) ds\right) \right| \end{aligned}$$

or  $-m \leq f_2(x, y) \leq (\delta - m)$  pour tout  $x$  et  $y$  positif ou nuls, d'où d'après l'inégalité des accroissements finis

$$\begin{aligned} & \left| \exp\left(\int_s^t f_2(\tau_h O x_h, \tau_h S_h) d\theta\right) - \exp\left(\int_s^t f_2(Ox, S) d\theta\right) \right| \leq \\ & \exp((\delta - m)T) \left| \int_s^t f_2(\tau_h O x_h, \tau_h S_h) - f_2(Ox, S) d\theta \right|; (t, s) \in (]0, T[)^2 \end{aligned}$$

par conséquent

$$\begin{aligned} & |B_h - B|_{L^1(]0, T[ \times \Omega)} \leq \exp((\delta - m)T) T (\sigma T + |B(0)|_{L^\infty(\Omega)}) \\ & |f_2(\tau_h O x_h, \tau_h S_h) - f_2(Ox, S)|_{L^1(]0, T[ \times \Omega)}. \end{aligned}$$

On déduit d'après (52) que  $f_2(\tau_h O x_h, \tau_h S_h)$  converge fortement vers  $f_2(Ox, S)$  dans  $L^1(]0, T[ \times \Omega)$ ; et en passant à la limite il vient

$$B_h \longrightarrow B \text{ fortement dans } L^1(]0, T[ \times \Omega).$$

De plus  $B_h$  et  $B$  sont bornés dans  $L^\infty(]0, T[ \times \Omega)$ , d'où

$$(54) \quad B_h \longrightarrow B \text{ fortement dans } L^p(]0, T[ \times \Omega), \text{ pour tout } p \text{ fini.}$$

où  $B$  est une solution de (53).

*Passage à la limite sur les équations de transport-diffusion-réaction.*

Soit  $(Ox_h, S_h, B_h, V_h, p_h)$  la solution des équations (42)... (45); d'après le Lemme 2 et (54)

$$\tau_h B_h \frac{\tau_h O x_h}{k_1 + \tau_h O x_h} \frac{\tau_h S_h}{k_2 + \tau_h S_h} \rightarrow B \frac{Ox}{k_1 + Ox} \frac{S}{k_2 + S}$$

fortement dans  $L^2(]0, T[ \times \Omega)$

de plus, d'après (48) et (49), il existe une sous-suite

$$(\tau_{h_k} O x_{h_k}, \tau_{h_k} S_{h_k}, \tau_{h_k} \mathbf{V}_{h_k})$$

qui converge presque partout dans  $]0, T[ \times \Omega$  vers  $(Ox, S, \mathbf{V})$ . Les sous-suites  $(\tau_{h_k} O x_{h_k})_{h_k \geq 0}$  et  $(\tau_{h_k} S_{h_k})_{h_k \geq 0}$  sont uniformément bornées dans  $L^\infty(]0, T[ \times \Omega)$ , par conséquent d'après le théorème de convergence dominé de Lebesgue, sous l'hypothèse (H8) et par continuité des tenseurs  $\lambda$  et  $\mathbf{D}$

$$(\lambda(\tau_{h_k} O x_{h_k}), \lambda(\tau_{h_k} S_{h_k}), \mathbf{D}(\tau_{h_k} \mathbf{V}_{h_k})) \rightarrow (\lambda(Ox), \lambda(S), \mathbf{D}(\mathbf{V}))$$

fortement dans  $L^2(]0, T[ \times \Omega)$  et p.p.

d'où:  $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$

$$\int_{\Omega} (\lambda(\tau_{h_k} S_{h_k}) + \mathbf{D}(\tau_{h_k} \mathbf{V}_{h_k})) \nabla S_{h_k} \cdot \nabla \varphi \, d\omega \rightarrow \int_{\Omega} (\lambda(S) + \mathbf{D}(\mathbf{V})) \nabla S \cdot \nabla \varphi \, d\omega$$

$$\int_{\Omega} \tau_{h_k} B_{h_k} \frac{\tau_{h_k} O x_{h_k}}{k_1 + \tau_{h_k} O x_{h_k}} \frac{S_{h_k}}{k_2 + \tau_{h_k} S_{h_k}} \varphi \, d\omega \rightarrow \int_{\Omega} B \frac{Ox}{k_1 + Ox} \frac{S}{k_2 + S} \varphi \, d\omega;$$

p.p. dans  $]0, T[$

de plus d'après (47) et (48)

$$\int_{\Omega} \tau_{h_k} \mathbf{V}_{h_k} \cdot \nabla \varphi S_{h_k} \, d\omega \rightarrow \int_{\Omega} \mathbf{V} \cdot \nabla \varphi S \, d\omega; \text{ p.p. dans } ]0, T[$$

et d'après (46)

$$\left\langle \frac{\partial S_{h_k}}{\partial t}, \varphi \right\rangle \rightarrow \left\langle \frac{\partial S}{\partial t}, \varphi \right\rangle; \text{ p.p. dans } ]0, T[$$

Le passage à la limite sur l'équation en  $Ox_{h_k}$  s'effectue de la même manière. Comme  $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$  est dense dans  $H^1(\Omega)$ , par continuité et densité, les résultats ci-dessus sont aussi valables pour  $\varphi$  dans  $H^1(\Omega)$ .

*Passage à la limite sur l'équation de Darcy.*

Etant donné  $S_h$  une solution de (42), d'après (47) et le théorème de Lebesgue on a:

$\forall \psi \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$

$$\int_{\Omega} \mu^{-1}(S_h) K \cdot \nabla p_h \cdot \nabla \psi \, d\omega \rightarrow \int_{\Omega} \mu^{-1}(S) K \cdot \nabla p \cdot \nabla \psi \, d\omega$$

et

$$\int_{\Omega} \mu^{-1}(S_h) \beta(S_h) K \cdot e_z \cdot \nabla \psi dw \rightarrow \int_{\Omega} \mu^{-1}(S) \beta(S) K \cdot e_z \cdot \nabla \psi dw$$

Comme  $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$  est dense dans  $H^1(\Omega)$ , par continuité et densité, les résultats ci-dessus sont aussi valables pour  $\varphi$  dans  $H^1(\Omega)$ .

Ceci termine la démonstration du **Théorème 2**.

### Démonstration du théorème 1

On approche le tenseur  $\mathbf{D}$  qui satisfait les hypothèses (H6) et (H7) par une suite de tenseur bornée  $(\mathbf{D}^l)_{l \geq 1}$  défini par

$$\mathbf{D}^l(\mathbf{V}) = \mathbf{D}(\mathbf{V}^l)$$

où

$$\mathbf{V}_i^l = \frac{v_i}{1 + l^{-1} |v_i|} \quad ; l \in \mathbb{N}^*.$$

Pour tout entier  $l$  le tenseur  $\mathbf{D}^l$  ainsi défini vérifie les hypothèses (H6), (H7) et (H8) par conséquent, d'après le **Théorème 2** il existe un quintuplet  $(Ox_l, S_l, B_l, \mathbf{V}_l, p_l)$  vérifiant la condition initiale  $(Ox_l(0) = Ox_0, S_l(0) = S_0, B_l(0) = B_0)$ , solution faible du problème  $(\mathcal{P}_l)$  ci-dessous:

$$\forall (\varphi_1, \varphi_2) \in (H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega))^2$$

$$(55) \quad \Phi_R < \frac{\partial S_l}{\partial t}, \varphi_1 > + \int_{\Omega} (\lambda(S_l) + \mathbf{D}^l(\mathbf{V}_l)) \cdot \nabla S_l \cdot \nabla \varphi_1 dw +$$

$$\int_{\Omega} \mathbf{V}_l \cdot \nabla S_l \varphi_1 dw - \int_{\Gamma_1} g_1 S_l \varphi_1 d\sigma_1 +$$

$$\Phi \int_{\Omega} B_l \frac{Ox_l}{k_1 + Ox_l} \frac{S_l}{k_2 + S_l} \varphi_1 dw = 0; p.p. \text{ dans } ]0, T[,$$

$$(56) \quad \Phi < \frac{\partial Ox_l}{\partial t}, \varphi_2 > + \int_{\Omega} (\lambda(Ox_l) + \mathbf{D}^l(\mathbf{V}_l)) \cdot \nabla Ox_l \cdot \nabla \varphi_2 dw +$$

$$\int_{\Omega} \mathbf{V}_l \cdot \nabla Ox_l \varphi_2 dw - \int_{\Gamma_1} g_1 (Ox_l - Ox_1) \varphi_2 d\sigma_1 +$$

$$\alpha \Phi \int_{\Omega} B_l \frac{Ox_l}{k_1 + Ox_l} \frac{S_l}{k_2 + S_l} \varphi_2 dw d\tau = 0; p.p. \text{ dans } ]0, T[,$$

$$(57) \quad \frac{dB}{dt} - \left( \delta \frac{Ox_l}{k_1 + Ox_l} \frac{S_l}{k_2 + S_l} - m \right) B_l - \sigma = 0; p.p. \text{ dans } \Omega, \forall t \in ]0, T[$$

et  $\forall \psi \in H^1(\Omega)/\mathbb{R}$

$$(58) \quad \int_{\Omega} \mu^{-1}(S_l) K \cdot (\nabla p_l - \beta(S_l) \cdot e_z) \cdot \nabla \psi d\omega + \int_{\Gamma_1} g_1 \psi d\sigma_1 + \int_{\Gamma_2} g_2 \psi d\sigma_2 = 0.$$

Les estimations (E1)...(E9) obtenues précédemment sont encore valables car  $\mathbf{D}^l$  satisfait l'hypothèse (H6). Néanmoins, il est nécessaire d'avoir des estimations uniformes sur  $\frac{\partial S_l}{\partial t}$  et  $\frac{\partial Ox_l}{\partial t}$ , c'est à dire indépendantes de  $|\mathbf{D}^l(\mathbf{V}_l)|_{L^\infty(\Omega)}$ , pour passer à la limite dans les équations (55) et (56).

**Lemme 3.** Les suites  $(\mathbf{D}^l(\mathbf{V}_l) \cdot \nabla Ox_l)_{l \in \mathbb{N}}$  et  $(\mathbf{D}^l(\mathbf{V}_l) \cdot \nabla S_l)_{l \in \mathbb{N}}$  sont uniformément bornées dans  $L^2(]0, T[; \mathbf{L}^1(\Omega))$ .

**Preuve:** D'après l'hypothèse (H7) et d'après l'inégalité de Hölder

$$\int_{\Omega} |\mathbf{D}^l(\mathbf{V}_l) \cdot \nabla S_l| d\omega \leq \alpha_4 (\text{Mes}(\Omega))^{\frac{1}{2}} |\nabla S_l|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \alpha_5 |\mathbf{V}_l|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} |\nabla S_l|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}$$

par conséquent

$$\int_0^T \left( \int_{\Omega} |\mathbf{D}^l(\mathbf{V}_l) \cdot \nabla S_l| d\omega \right)^2 d\tau \leq 4\alpha_4^2 \text{Mes}(\Omega) \int_0^T |\nabla S_l|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 d\tau + 4\alpha_5^2 |\mathbf{V}|_{L^\infty(]0, T[; \mathbf{L}^2(\Omega))}^2 \int_0^T |\nabla S_l|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 d\tau$$

grâce aux estimations (E2) et (E8), il vient

$$(59) \quad |\mathbf{D}^l(\mathbf{V}_l) \cdot \nabla S_l|_{L^2(]0, T[; \mathbf{L}^1(\Omega))} \leq c_1$$

de même

$$(60) \quad |\mathbf{D}^l(\mathbf{V}_l) \cdot \nabla Ox_l|_{L^2(]0, T[; \mathbf{L}^1(\Omega))} \leq c_2.$$

où  $c_1$  et  $c_2$  sont deux constantes indépendantes de  $l$ .

*Estimations uniformes de  $\partial_t S_l$  et  $\partial_t Ox_l$ .*

Soit  $(Ox_l, S_l, B_l, \mathbf{V}_l, p_l)$ ,  $l$  fixé, une solution du problème  $(P_l)$ . Pour toute fonction test  $\varphi$  dans  $H^3(\Omega)$  on a

$$\begin{aligned} \Phi R \int_0^T \left\langle \frac{\partial S_l}{\partial t}, \varphi \right\rangle d\tau + \int_0^T \int_{\Omega} (\lambda(S_l) + \mathbf{D}^l(\mathbf{V}_l)) \cdot \nabla S_l \cdot \nabla \varphi d\omega d\tau \\ - \int_0^T \int_{\Omega} \mathbf{V}_l \cdot \nabla \varphi S_l d\omega d\tau + \int_0^T \int_{\Gamma_2} g_2 S_l \varphi d\sigma_2 \\ + \Phi \int_0^T \int_{\Omega} B_l \frac{Ox_l}{k_1 + Ox_l k_2 + S_l} \varphi d\omega d\tau = 0. \end{aligned}$$

Sachant, d'après le théorème d'injection de Kondrachov, que  $H^3(\Omega)$  s'injecte continument dans  $W^{1,\infty}(\Omega)$  (où  $\Omega$  est un ouvert borné régulier d'un espace de dimension inférieure ou égale à trois) il vient:

$$\begin{aligned} \left| \Phi R \left\langle \frac{\partial S_l}{\partial t}, \varphi \right\rangle \right| \leq \left\{ |\lambda|_{L^\infty(]0,T[;L^\infty(\Omega))} \|\nabla S_l\|_{L^2(]0,T[;L^2(\Omega))} \right. \\ \left. + \|\mathbf{D}^l(\mathbf{V}_l) \cdot \nabla S_l\|_{L^2(]0,T[;L^1(\Omega))} \right. \\ \left. + \|\mathbf{V}_l\|_{L^\infty(]0,T[;L^2(\Omega))} \|S_l\|_{L^\infty(]0,T[;L^\infty(\Omega))} + \Phi g(T) \right\} \|\varphi\|_{L^2(]0,T[;H^3(\Omega))} \\ + \|g_2\|_{L^\infty(]0,T[;L^\infty(\Gamma_2))} \|S_l\|_{L^2(]0,T[;L^2(\Gamma_2))} \|\varphi\|_{L^2(]0,T[;L^2(\Gamma_2))}. \end{aligned}$$

D'où, il existe une fonction continue  $h_3$  indépendante de  $l$  telle que

$$\left| \frac{\partial S_l}{\partial t} \right|_{L^2(]0,T[;(H^3(\Omega))')} \leq h_3(T),$$

de même, il existe une fonction  $h_4$  indépendante de  $l$  telle que

$$\left| \frac{\partial Ox_l}{\partial t} \right|_{L^2(]0,T[;(H^3(\Omega))')} \leq h_4(T).$$

*Passage à la limite.*

Grâce au lemme d'Aubin on obtient, comme pour le **Théorème 2**, la convergence des suites  $(Ox_l)_{l \in \mathbb{N}^*}$  et  $(S_l)_{l \in \mathbb{N}^*}$ ; on peut donc passer à la limite dans l'équation de Darcy et sur les termes des équations (55) et (56) où n'apparaissent pas le tenseur  $\mathbf{D}^l$ . Il reste alors à étudier la convergence de

$$\left( \int_{\Omega} \mathbf{D}^l(\mathbf{V}_l) \cdot \nabla S_l \cdot \nabla \varphi d\omega \right)_{l \in \mathbb{N}^*} \text{ et de } \left( \int_{\Omega} \mathbf{D}^l(\mathbf{V}_l) \cdot \nabla Ox_l \cdot \nabla \varphi d\omega \right)_{l \in \mathbb{N}^*}$$



où  $D^l$  satisfait l'hypothèse (H7) et  $(\nabla S_l, \nabla O x_l)_{l \in \mathbb{N}^*}$  convergent faiblement vers  $(\nabla S, \nabla O x)$  dans  $(L^2(]0, T[ \times \Omega))^2$ .

**Lemme 4.** Soit  $(h_n)_{n \geq 0}$  une suite de fonctions équi-intégrables sur  $\Omega$ , ouvert borné, qui converge presque partout vers  $h$ , alors  $(h_n)_{n \geq 0}$  converge vers  $h$  dans  $L^1(\Omega)$ .

**Preuve:** D'après le lemme de Fatou  $h$  est dans  $L^1(\Omega)$ , donc la famille de fonctions  $\{(h_n)_{n \geq 0}, h\}$  est équi-intégrable. Par conséquent pour  $\varepsilon_1$  réel positif donné et pour tout  $n$ :

$$\exists \sigma > 0 \text{ t.q. } \forall E \subset \Omega, \text{ Mes}(E) \leq \sigma \text{ alors } \int_E |h_n| dx \leq \frac{\varepsilon_1}{3} \text{ et } \int_E |h| dx \leq \frac{\varepsilon_1}{3}$$

de plus d'après le théorème d'Egorov

$$\forall \sigma > 0, \exists E \subset \Omega \text{ avec } \text{Mes}(E) \leq \sigma$$

$$\text{alors } \exists N; \forall n \geq N \int_{\Omega \setminus E} |h_n - h| dx \leq \frac{\varepsilon_1}{3}.$$

On décompose alors  $\int_{\Omega} |h_n - h| dx$  en

$$\int_{\Omega} |h_n - h| dx \leq \int_{\Omega \setminus E} |h_n - h| dx + \int_E |h_n| dx + \int_E |h| dx$$

d'où le lemme.

**Lemme 5.** Soit  $\Omega$  un ouvert borné et  $(f_n)_{n \geq 0}$  une suite de fonctions mesurables qui converge presque partout vers  $f$ . On suppose qu'il existe une suite de fonction mesurables  $(g_n)_{n \geq 0}$  vérifiant :

$$|f_n(x)| \leq g_n(x) \text{ p.p.}$$

et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |g_n - g| dw = 0.$$

Alors  $(f_n)_{n \geq 0}$  converge fortement vers  $f$  dans  $L^1(\Omega)$ .

**Preuve:** La suite  $(g_n)_{n \geq 0}$  converge vers  $g$  dans  $L^1(\Omega)$  donc:

$$\forall \varepsilon > 0; \exists N > 0 \text{ t.q. } \forall n > N, \forall E \subset \Omega, \text{ alors } \int_E |g_n - g| dx \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

$g$  est équi-intégrable donc:

$$\forall \varepsilon > 0; \exists \sigma > 0; \forall E \subset \Omega, \text{Mes}(\Omega) \leq \sigma \text{ alors } \int_E |g| dx \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

or par hypothèse on a:

$$\int_E |f_n| dx \leq \int_E |g_n| dx \leq \int_E |g_n - g| dx + \int_E |g| dx$$

d'où:

$$\forall \varepsilon > 0; \exists \sigma > 0, \exists N > 0; \forall E \subset \Omega, \text{Mes}(\Omega) \leq \sigma \text{ et } n \geq N$$

$$\text{alors } \int_E |f_n| dx \leq \varepsilon.$$

De plus la famille  $\{(f_n)_{n < N}\}$  est finie donc la suite  $(f_n)_{n \geq 0}$  est équi-intégrale. On peut alors conclure grâce au Lemme 4.

D'après (48) et par définition de  $D^l$ ;  $D^l(\mathbf{V}_l)$  converge vers  $D(\mathbf{V})$  presque partout dans  $]0, T[ \times \Omega$  donc  $|D^l(\mathbf{V}_l) - D(\mathbf{V})|^2$  converge presque partout vers 0 dans  $]0, T[ \times \Omega$ ; par conséquent sous l'hypothèse (H5) et d'après le Lemme 5,  $D^l(\mathbf{V}_l)$  converge fortement vers  $D(\mathbf{V})$  dans  $L^2(]0, T[ \times \Omega)$ . On peut alors conclure par:

$$\forall \varphi \in H^3(\Omega); \int_{\Omega} D(\mathbf{V}_l) \cdot \nabla S_l \cdot \nabla \varphi dw \rightarrow \int_{\Omega} D(\mathbf{V}) \cdot \nabla S \cdot \nabla \varphi dw$$

et

$$\int_{\Omega} D(\mathbf{V}_l) \cdot \nabla O_{x_l} \cdot \nabla \varphi dw \rightarrow \int_{\Omega} D(\mathbf{V}) \cdot \nabla O_x \cdot \nabla \varphi dw.$$

Sachant que  $H^3(\Omega)$  s'injecte continûment dans  $W^{1,\infty}(\Omega)$ , on peut remplacer  $\varphi$  par une suite de  $H^3(\Omega)$  qui converge dans  $W^{1,\infty}(\Omega)$  pour la topologie faible \*, par conséquent les résultats ci-dessus sont aussi valables pour  $\varphi$  dans  $W^{1,\infty}(\Omega)$ . Ceci termine la démonstration du Théorème 1.

**Remarque.** Si la viscosité dynamique  $\mu$  est constante alors le couple  $(\mathbf{V}, p)$  solution de l'équation de Darcy est dans  $(H_q \times W^{1,q}(\Omega)/\mathbb{R})$ , pour tout  $q$  fini. Ce résultat est une conséquence directe du théorème de décomposition d'Helmholtz; en effet le second membre de l'équation:

$$\mathbf{V} + \mu^{-1} K \cdot \nabla p = -\mu^{-1} \beta(S) K \cdot \mathbf{e}_z$$

est dans  $L^\infty(\Omega)$ . Dans ce cas, l'hypothèse (H5) peut être remplacé par

$$(H5^*) \quad |D(\mathbf{V})| \leq \alpha_4 |\mathbf{V}|^q + \alpha_5; q \text{ fini}.$$

**Démonstration du théorème 3**

Soient  $(Ox_l, S_l, B_l, \mathbf{V}_l, p_l)_{l=1,2}$  deux solutions faibles du problème (P) satisfaisant  $Ox_1(0) = Ox_2(0)$ ,  $S_1(0) = S_2(0)$  et  $B_1(0) = B_2(0)$ . Le quintuplet  $(Ox, S, B, \mathbf{V}, p)$  défini par:

$$Ox = Ox_1 - Ox_2; S = S_1 - S_2; B = B_1 - B_2; \mathbf{V} = \mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2; p = p_1 - p_2$$

verifie les equations

$$\forall(\varphi_1, \varphi_2) \in (L^2(]0, T[; W^{1,\infty}(\Omega)))^2$$

$$(61) \quad \Phi R < \frac{\partial S}{\partial t}, \varphi_1 > + \int_{\Omega} (\lambda(S_1) + \mathbf{D}(\mathbf{V}_1)) \cdot \nabla S \cdot \nabla \varphi_1 d\omega$$

$$+ \int_{\Omega} ((\lambda(S_1) - \lambda(S_2)) + (\mathbf{D}(\mathbf{V}_1) - \mathbf{D}(\mathbf{V}_2))) \cdot \nabla S_2 \cdot \nabla \varphi_1 d\omega + \int_{\Omega} \mathbf{V}_1 \cdot \nabla S \varphi_1 d\omega$$

$$+ \int_{\Omega} \mathbf{V} \cdot \nabla S_2 \varphi_1 d\omega + \Phi \int_{\Omega} (F(Ox_1, S_1, B_1) - F(Ox_2, S_2, B_2)) \varphi_1 d\omega$$

$$- \int_{\Gamma_1} g_1 S \varphi_1 d\sigma_1 = 0; p.p. \text{ dans } ]0, T[,$$

$$(62) \quad \Phi < \frac{\partial Ox}{\partial t}, \varphi_2 > + \int_{\Omega} (\lambda(Ox_1) + \mathbf{D}(\mathbf{V}_1)) \cdot \nabla Ox \cdot \nabla \varphi_2 d\Omega$$

$$+ \int_{\Omega} ((\lambda(Ox_1) - \lambda(Ox_2)) + (\mathbf{D}(\mathbf{V}_1) - \mathbf{D}(\mathbf{V}_2))) \cdot \nabla Ox_2 \cdot \nabla \varphi_2 d\omega +$$

$$\int_{\Omega} \mathbf{V}_1 \cdot \nabla Ox \varphi_2 d\omega + \int_{\Omega} \mathbf{V} \cdot \nabla Ox_2 \varphi_2 d\omega + \alpha \Phi$$

$$\int_{\Omega} (F(Ox_1, S_1, B_1) - F(Ox_2, S_2, B_2)) \varphi_2 d\omega - \int_{\Gamma_1} g_1 Ox \varphi_2 d\sigma_1 = 0;$$

$$p.p. \text{ dans } ]0, T[,$$

$$(63) \quad \frac{dB}{dt} - \delta(F(Ox_1, S_1, B_1) - F(Ox_2, S_2, B_2)) + mB - \sigma = 0$$

dans  $\Omega \times ]0, T[,$

$\forall \psi \in H^1(\Omega)/\mathbf{R}$

$$(64) \quad \int_{\Omega} \mu^{-1}(S_1) K \cdot \nabla p \cdot \nabla \psi d\omega + \int_{\Omega} (\mu^{-1}(S_1) - \mu^{-1}(S_2)) K \cdot \nabla p_2 \cdot \nabla \psi d\omega \\ - \int_{\Omega} (\mu^{-1}(S_1)\beta(S_1) - \mu^{-1}(S_2)\beta(S_2)) K \cdot \mathbf{e}_z \cdot \nabla \psi d\omega = 0; \text{ dans } \mathcal{D}'(]0, T[).$$

D'après la loi de Darcy, il vient

$$(65) \quad \mathbf{V} = -\mu^{-1}(S_1) K \cdot \nabla p - (\mu^{-1}(S_1) - \mu^{-1}(S_2)) K \cdot \nabla p_2 \\ + (\mu^{-1}(S_1)\beta(S_1) - \mu^{-1}(S_2)\beta(S_2)) K \cdot \mathbf{e}_z.$$

Une estimation sur  $p$  est obtenue en prenant  $\psi = p$  dans (64); d'où

$$|\nabla p|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 \leq c_1 |\nabla p_2|_{\mathbf{L}^\infty(\Omega)} |S|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} |\nabla p|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + c_2 |S|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} |\nabla p|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}$$

où  $c_1$  et  $c_2$  sont deux constantes ne dépendant que de  $K$  et des constantes de Lipschitz de  $\mu$  et  $\beta$ .

Par conséquent, il existe une fonction  $h_1$  de  $L^\infty(]0, T[)$  telle que

$$(66) \quad |\nabla p|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \leq h_1(t) |S|_{\mathbf{L}^2(\Omega)};$$

de plus, d'après (65)

$$(67) \quad |\mathbf{V}|_{\mathbf{H}_2} \leq h_2(t) |\nabla p|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + h_3(t) |S|_{\mathbf{L}^2(\Omega)},$$

où  $h_2$  et  $h_3$  sont deux fonctions de  $L^\infty(]0, T[)$ .

Il résulte alors des inégalités (66) et (67) l'estimation suivante

$$(68) \quad |\mathbf{V}|_{\mathbf{H}_2} \leq h_4(t) |S|_{\mathbf{L}^2(\Omega)},$$

avec  $h_4 = h_1 h_2 + h_3$ .

Afin d'obtenir des estimations sur  $S$  on prend  $\varphi_1 = S$  dans (61), d'où

$$\frac{\Phi R}{2} \frac{d}{dt} |S|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 + \alpha_2 |\nabla S|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 \\ \leq \int_{\Omega} (a |S_1 - S_2| + b |\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2|) |\nabla S_2| |\nabla S| d\omega + \\ \int_{\Omega} |\mathbf{V}| |\nabla S_2| |S| d\omega + \Phi \int_{\Omega} |F(Ox_1, S_1, B_1) - F(Ox_2, S_2, B_2)| |S| d\omega;$$

où  $a$  et  $b$  sont respectivement les constantes de Lipschitz de  $\lambda$  et  $D$ . En écrivant

$F(Ox_1, S_1, B_1) - F(Ox_2, S_2, B_2) = (F(Ox_1, S_1, B_1) - F(Ox_2, S_1, B_1)) + (F(Ox_2, S_1, B_1) - F(Ox_2, S_2, B_1)) + (F(Ox_2, S_2, B_1) - F(Ox_2, S_2, B_2))$ ,  
d'après (E3) et parce que la fonction  $F$  est lipschitzienne il vient

$$(69) \quad |F(Ox_1, S_1, B_1) - F(Ox_2, S_2, B_2)| \leq g(T)(|Ox| + |S|) + |B|$$

par conséquent, d'après les inégalités de Hölder on a l'estimation

$$\begin{aligned} \frac{\Phi R}{2} \frac{d}{dt} |S|_{L^2(\Omega)}^2 + \alpha_2 |\nabla S|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq a |\nabla S_2|_{L^\infty(\Omega)} |S|_{L^2(\Omega)} |\nabla S|_{L^2(\Omega)} + \\ &b |V|_{L^2(\Omega)} |\nabla S_2|_{L^\infty(\Omega)} |\nabla S|_{L^2(\Omega)} + |V|_{L^2(\Omega)} |S|_{L^2(\Omega)} + \\ &\Phi |S|_{L^2(\Omega)} (g(T) |S|_{L^2(\Omega)} + g(T) |Ox|_{L^2(\Omega)} + |B|_{L^2(\Omega)}). \end{aligned}$$

En utilisant les inégalités de Young il vient

$$\begin{aligned} \frac{\Phi R}{2} \frac{d}{dt} |S|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq \frac{1}{2\alpha_2} \left( a |S|_{L^2(\Omega)}^2 + b |V|_{L^2(\Omega)}^2 \right) |\nabla S_2|_{L^\infty(\Omega)}^2 + \\ &\frac{1}{2} \left( |S|_{L^2(\Omega)}^2 + |V|_{L^2(\Omega)}^2 \right) |\nabla S_2|_{L^\infty(\Omega)} + \\ &\Phi g(T) \left( |S|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \left( |Ox|_{L^2(\Omega)}^2 + |S|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \right) + \\ &\frac{\Phi}{2} \left( |B|_{L^2(\Omega)}^2 + |S|_{L^2(\Omega)}^2 \right); \end{aligned}$$

d'après l'estimation (68), il existe une fonction  $h_5$  appartenant à  $L^1(]0, T[)$  telle que

$$(70) \quad \frac{d}{dt} |S|_{L^2(\Omega)}^2 \leq h_5(t) \left( |Ox|_{L^2(\Omega)}^2 + |S|_{L^2(\Omega)}^2 + |B|_{L^2(\Omega)}^2 \right)$$

de même en prenant  $\varphi_2 = Ox$  dans (62) et en effectuant la même démarche, il existe une fonction  $h_6$  appartenant à  $L^1(]0, T[)$  telle que

$$(71) \quad \frac{d}{dt} |Ox|_{L^2(\Omega)}^2 \leq h_6(t) \left( |Ox|_{L^2(\Omega)}^2 + |S|_{L^2(\Omega)}^2 + |B|_{L^2(\Omega)}^2 \right)$$

L'estimation sur  $B$  est obtenue en multipliant (63) par  $B$  et ensuite par intégration sur  $\Omega$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|B\|_{L^2(\Omega)}^2 + m \|B\|_{L^2(\Omega)}^2 = \delta \int_{\Omega} (F(Ox_1, S_1, B_1) - F(Ox_2, S_2, B_2)) B d\omega$$

d'où compte tenu de (69) on a l'inégalité

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|B\|_{L^2(\Omega)}^2 + m \|B\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & \leq \delta g(T) \|B\|_{L^2(\Omega)} \left( \|Ox\|_{L^2(\Omega)} + \|S\|_{L^2(\Omega)} \right) + \delta \|B\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Young il vient

$$(72) \quad \frac{d}{dt} \|B\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq h_7(t) \left( \|Ox\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|S\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|B\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)$$

où  $h_7$  est une fonction continue ne dépendant que de  $\delta$  et  $g$ .

Finalement, en sommant les inégalités (70), (71) et (72) on obtient

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left( \|Ox\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|S\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|B\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \leq \\ & (h_5(t) + h_6(t) + h_7(t)) \left( \|Ox\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|S\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|B\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \end{aligned}$$

et on conclut en appliquant le lemme de Gronwall.

### Comportement asymptotique

Nous nous intéressons ici au comportement, lorsque  $t$  tend vers l'infini, du substrat polluant  $S$ .

Lorsque  $\mathbf{D}$  satisfait (H8) et pour  $B$  donné dans  $C^0(\mathbf{R}^+; L^+(\Omega))$ ,  $Ox$  et  $S$  vérifient

$$(Ox, S) \in \left( L^2(\mathbf{R}^+; H^1(\Omega)) \cap L^\infty(\mathbf{R}^+; L^+(\Omega)) \right)^2$$

pour toute fonction test  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  dans

$$\left( L^2(\mathbf{R}^+; H^1(\Omega)) \cap L^\infty(\mathbf{R}^+; L^+(\Omega)) \right)^2$$

$$(73) \quad \Phi \mathbf{R} \cdot \left\langle \frac{\partial S}{\partial t}, \varphi_1 \right\rangle + \int_{\Omega} (\lambda(S) + \mathbf{D}(\mathbf{V})) \cdot \nabla S \cdot \nabla \varphi_1 d\omega + \int_{\Omega} \mathbf{V} \cdot \nabla S \varphi_1 d\omega$$

$$\begin{aligned}
 & - \int_{\Gamma_1} g_1 S \varphi_1 d\sigma_1 = -\Phi \int_{\Omega} F(Ox, S, B) \varphi_1 dw ; p.p. t > 0, \\
 (74) \quad & \Phi < \frac{\partial Ox}{\partial t}, \varphi > + \int_{\Omega} (\lambda(Ox) + \mathbf{D}(\mathbf{V})) \cdot \nabla Ox \cdot \nabla \varphi_2 dw + \\
 & \int_{\Omega} \mathbf{V} \cdot \nabla Ox \varphi_2 dw - \int_{\Gamma_1} g_1 (Ox - Ox_1) \varphi_2 d\sigma_1 \\
 & = -\alpha \Phi \int_{\Omega} F(Ox, S, B) \varphi_2 dw ; p.p. t > 0,
 \end{aligned}$$

en prenant  $\varphi_1 = S$  dans (73) il vient

$$\begin{aligned}
 (75) \quad & \frac{\Phi R}{2} \frac{d}{dt} |S|_{L^2(\Omega)}^2 + \alpha_2 |\nabla S|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 - \frac{1}{2} \int_{\Gamma_1} g_1 S^2 d\sigma_1 \leq \\
 & -\Phi \int_{\Omega} F(Ox, S, B) S dw ; p.p. t > 0.
 \end{aligned}$$

En supposant que

$\forall t > 0, g_1 \geq c$  p.p. dans  $\Gamma_1$ , où  $c$  est une constante strictement positif

et comme la fonction  $F(Ox, S, B)$  est positive presque partout dans  $\Omega$ , (75) donne

$$\frac{\Phi R}{2} \frac{d}{dt} |S|_{L^2(\Omega)}^2 + \alpha_2 |\nabla S|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 + \frac{c}{2} \int_{\Gamma_1} S^2 d\sigma_1 \leq 0.$$

La mesure de Lebesgue bidimensionnelle de  $\Gamma_1$  étant positive, l'inégalité de Poincaré donne

$$\frac{\Phi R}{2} \frac{d}{dt} |S|_{L^2(\Omega)}^2 + \beta_1 |S|_{L^2(\Omega)}^2 \leq 0 \text{ pour une constante } \beta_1 > 0,$$

et donc

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |S(t)|_{L^2(\Omega)}^2 = 0.$$

d'où le Théorème 4.

## Bibliographies

- [1] A. Bensoussan, J. L. Lions, and G. Papanicolau, *Asymptotic analysis for periodic structures*, North-Holland, Amsterdam, 1978.
- [2] R. C. Borden, and P. B. Bedient, *Transport of dissolved hydrocarbons influenced by oxygen-limited biodegradation 1, Theoretical development*, water Resour. Res. 22, pp. 1973-1982, 1986.
- [3] R. C. Borden, P. B. Bedient, L. W. Canter, M. D. Lee, J. M. Thomas, and C. H. Ward, *Leaking underground storage tanks; remediation with on in situ bioremediation*, Environmental Protection agency, 600/2-87, 008, January, 1987.
- [4] L. Caffarelli, R. Kohn, and L. Nirenberg, *Partial regularity of suitable weak solutions of the Navier-Stokes equations*, Comm. Pure Appl. Math, 35, pp. 771-831, 1982.
- [5] M. A. Celia, J. S. Kinred, and I. Herrera, *Contaminant transport and biodegradation, 1. A numerical model for reactive transport in porous media*, Water Resour. Res. 25, pp. 1141-1148, 1989.
- [6] C. H. Chiang, C. N. Dawson, and M. F. Wheeler, *Modeling of in-situ bioremediation of organic compounds in Groundwater*, Transport in Porous Media, 6, pp. 667-702, 1991.
- [7] C. N. Dawson, and M. F. Wheeler, *Time-splitting methods for advection-diffusion-reaction equations arising in contaminant transport*, ICIAM, 1991.
- [8] P. Fabrie, and M. Langlais, *Mathematical analysis of miscible displacement in porous medium*, SIAM J. Math. Anal. vol. 23, No. 6, pp. 1375-1392, 1992.
- [9] O. A. Ladyzenskaja, U. A. Solonnikov, and N. N. Ural'ceva, *Linear and quasilinear equation of parabolic type*, Trans. Math. Monographs, 23, American Mathematical Society, Providence, RI, 1968.



- [10] J. L. Lions, *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Dunod Gauthier-Villars, 1969.
- [11] J. L. Lions and E. Magenes, *Problemi ai limiti non omogenei (V)*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, 16, pp. 1-44, 1962.
- [12] N. G. Meyers, *An  $L^p$ -estimate for the gradient of second order elliptic divergence equation*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3), 17, pp. 189-206, 1963.
- [13] O. A. Oleinik and S. N. Kruzhkov, *Quasilinear second order parabolic equations with many independent variables*, Russian Math. Surveys, 16, pp. 105-146, 1961.

Les auteurs tiennent à remercier le Professeur J. L. Lions pour l'intérêt qu'il a porté à ce travail.

Université Bordeaux 1 CNRS  
Mathématiques Appliquées de Bordeaux  
351 Cours de la Libération  
33405 Talence  
France

Recibido: 17 de Febrero de 1995