REVISTA MATEMÁTICA de la
Universidad Complutense de Madrid
Volumen 10, número Suplementario: 1997

Distance géodésique sur un sous-analytique.

Krzysztof KURDYKA[1] and Patrice ORRO[2]

Résumé

Pour un ensemble sous-analytique, connexe fermé, la distance géodésique est atteinte et est uniformément équivalente, avec des constantes arbitrairement proches de 1, à une distance sous-analytique.

Soit A un sous ensemble de $\mathbf{R}^n$, que l'on considère muni de la distance euclidienne. Pour λ, arc continu tracé sur A, on note $|\lambda|$ la longueur de λ définie par

$$|\lambda| = \sup\{\sum ||\lambda(t_i) - \lambda(t_{i-1})|| : 0 = t_0 < \cdots < t_n = 1,\ n \in \mathbf{N}\}.$$

La distance géodésique entre deux points x et y est alors définie par

$$\delta(x, y) = \inf\{|\lambda|\ :\ \lambda(0) = x,\ \lambda(1) = y\} \in \mathbf{R} \cup \{+\infty\}.$$

On a toujours $||x - y|| \leq \delta(x, y)$. Dans tout ce qui suit nous supposerons A sous-analytique. Si A est connexe, δ prend ses valeurs dans $\mathbf{R}$, puisque deux points quelconques de A peuvent toujours être joints par un arc λ continu de longueur finie.

Proposition 1 *Soit A un sous-analytique fermé et connexe de $\mathbf{R}^n$. La fonction $\delta : A \times A \to \mathbf{R}_+$ est une distance sur A. De plus, pour $x, y \in A$,*

---

[1]Partiellement supporté par contrat CHRX-CT94-0506 de la Communauté Européenne et KBN grant PB 1219/2/91.

[2]Partiellement supporté par contrat CHRX-CT94-0506 de la Communauté Européenne et Réseau Européen Singularités.

Mathematics Subject Classification: 32B20-32B05-14P15
Servicio Publicaciones Univ. Complutense. Madrid, 1997.

il existe un arc lipschitzien λ, joignant x à y dans A, pour lequel $\delta(x,y) = |\lambda|$.

Démonstration : Nous pouvons supposer A compact. Pour $s \leq t \in [0,1]$ notons $|\lambda|(s,t)$ la longueur de l'arc λ entre $\lambda(s)$ et $\lambda(t)$. Nous avons

$$||\lambda(s) - \lambda(t)|| \leq |\lambda|(s,t) = |\lambda|(0,t) - |\lambda|(0,s) \qquad (*)$$

La longueur d'arc, $|\lambda|(0,s)$, pouvant être stationnaire, remplaçons la par le paramétrage strictement croissant, $s \to |\lambda|(0,s) + s$, que l'on ramène à $[0,1]$ en posant $\phi(s) = \dfrac{|\lambda|(0,s)+s}{|\lambda|+1}$. L'inégalité $(*)$ donne, avec $\phi(s) = u, \phi(t) = v$

$$||\lambda \circ \phi^{-1}(u) - \lambda \circ \phi^{-1}(v)|| \leq |\lambda|(0, \phi^{-1}(v)) - |\lambda|(0, \phi^{-1}(u))$$

et

$$||\lambda \circ \phi^{-1}(u) - \lambda \circ \phi^{-1}(v)|| \leq$$
$$|\lambda|(0, \phi^{-1}(v)) - |\lambda|(0, \phi^{-1}(u)) + \phi^{-1}(v) - \phi^{-1}(u)$$

et donc

$$||\lambda \circ \phi^{-1}(u) - \lambda \circ \phi^{-1}(v)|| \leq (|\lambda| + 1)(v - u)$$

Ainsi l'arc $\mu = \lambda \circ \phi^{-1}$, qui joint x à y, est lipschitzien et de même longueur que λ. Considérons maintenant le sous ensemble fermé

$$K = \{\mu \in \mathrm{Lip}([0,1], A) \ : \ \mu(0) = x, \ \mu(1) = y, \ \mathrm{Lip}(\mu) \leq |\lambda| + 1\}$$

de $C^0([0,1], A)$. Le théorème d'Ascoli montre que K est compact. La fonction de longueur est semi continue infèrieurement en tant que supremum de fonctions continues, elle atteint donc sa borne inférieure sur K. Ce qui montre la proposition .

∎

Remarques :

- L'exemple de $\mathbf{R}^2 - \{0\}$ montre que ce résultat est faux si on ne suppose pas A fermé. (A, δ) est un espace de longueur - voir par exemple le livre de Gromov [Gr]. Une démonstration de cette proposition est aussi donnée dans le lemme 1.12 de [Gr].

Conjecture ([Ha]) : Si A est un ensemble sous-analytique, $\delta : A \times A \to \mathbf{R}_+$ est une fonction sous-analytique.

Le théorème suivant montre non pas la sous-analycité de la distance géodésique, mais l'équivalence de δ à une distance sous-analytique avec des constantes d'uniformisation aussi proches de 1 que l'on veut.

Théorème *Etant donnés $A \subset \mathbf{R}^n$ connexe, fermé, et $\epsilon > 0$, il existe une distance $\Delta : A \times A \to \mathbf{R}_+$, sous-analytique, telle que*

$$\forall x, y \in A \qquad \Delta(x,y) \leq \delta(x,y) \leq (1+\epsilon)\Delta(x,y)$$

Remarques :

- Si A est semi-algébrique, Δ l'est aussi. Le même résultat est vrai dans le cas d'une structure o-minimale.
- La topologie de longueur - donnée par la distance géodésique - a une base d'ouverts sous-analytiques.

La distance δ n'est pas uniformément équivalente à la distance induite par celle de $\mathbf{R}^n$. Mais une conséquence du théorème précédant est la propriété de Whitney d'un ensemble sous-analytique (voir [St])

Corollaire 2 (Propriété de Whitney) *Si A est sous-analytique, compact et connexe, il existe $C > 0$, $0 < \alpha \leq 1$ tels que*

$$\forall x, y \in A \qquad \delta(x,y) \leq C||x-y||^\alpha$$

Démonstration du corollaire : on applique l'inégalité de Łojasiewicz aux fonctions sous-analytiques $(x,y) \to ||x-y||$ et $(x,y) \to \Delta(x,y)$ sur $A \times A$, le théorème permet de conclure .

∎

La preuve du théorème est basée sur la proposition suivante

Proposition 3 *Soient $A \subset \mathbf{R}^n$, sous-analytique, et $\epsilon > 0$. Alors il existe une stratification, $A = \bigcup_{\nu \in V} \Gamma_\nu$, telle que :*

(i) *Γ_ν est une variété analytique connexe*

(ii) *Si $x, y \in \overline{\Gamma_\nu}, x \neq y$, il existe un arc C^1, $\lambda : [0,1] \to \overline{\Gamma_\nu}$, tel que $\lambda]0,1[\subset \Gamma_\nu$, $\lambda(0) = x$, $\lambda(1) = y$, et $|\lambda| \leq (1+\epsilon)||x-y||$*

Cette proposition est une version améliorée des résultats de K. Kurdyka et de A. Parusinski sur l'existence de décompositions L-régulières des ensembles sous-analytiques, voir [Ku1], [Pa]. La démonstration en sera donnée à la fin de la note.

Pour A, fermé connexe, décomposé en morceaux réguliers $A = \bigcup_{\nu \in V} \Gamma_\nu$ comme dans la proposition 3, posons pour tout r et k :

$$\tilde{\Delta}_r(x,y) =$$

$$\inf\{\sum_{i=0}^{r-1} ||x_{i+1} - x_i|| : x_0 = x, x_r = y,\ x_i, x_{i+1} \in \overline{\Gamma_{\nu_i}}\ ,\ 0 \leq i \leq r-1\},$$

$$\Delta_k(x,y) = \inf\{\tilde{\Delta}_r(x,y) :\ r = 1, \cdots, k\}.$$

Rappelons que $\inf\{\emptyset\} = +\infty$. Il est clair que chaque Δ_k est sous-analytique. Posons enfin

$$\Delta(x,y) = \inf\{\Delta_k(x,y) : k = 1, \cdots, +\infty\}.$$

Lemme 4 *La fonction $\Delta : A \times A \to \mathbf{R}$ est une fonction sous-analytique, et c'est une distance sur A.*

Démonstration : Nous pouvons supposer que le diamètre des Γ_τ est plus petit que 1. Montrons tout d'abord que Δ est sous-analytique : remarquons que pour k donné, $\Delta_k(x,y)$ est atteint sur une chaîne $\{x_l\}_{l \leq r}$ (avec $r \leq k$) telle que trois points de la chaîne n'appartiennent pas au même $\overline{\Gamma_\tau}$. En effet, si $x_{l_1}, x_{l_2}, x_{l_3} \in \overline{\Gamma_\tau}$ pour $l_1 < l_2 < l_3$ on peut remplacer, grâce à l'inégalité triangulaire, la chaîne $\{x_l\}_{l \leq r}$ par $\{x_0, \cdots, x_{l_1}, x_{l_3}, \cdots, x_r\}$.

Donnons nous $x_0 \in \Gamma_\nu$ et $y_0 \in \Gamma_\mu$, il existe une p-chaîne $\{x_l\}_{l \leq p}$ joignant x_0 à y_0 et réalisant $\Delta_p(x_0, y_0)$). Soient $R = \Delta_p(x_0, y_0) + 3$ et A_R la réunion des $\overline{\Gamma_\tau}$ qui rencontrent la boule $B(x_0, R)$. Désignons par

k_0 le nombre de strates de A_R, et prenons $k \geq k_0$. Si $x \in \Gamma_\nu$ et $y \in \Gamma_\mu$ sont des points quelconques on a

$$\Delta_k(x,y) \leq \Delta_{k_0}(x_0, y_0) + 2,$$

puisque les diamètres de Γ_ν et Γ_μ sont plus petits que 1 et que l'on peut joindre x à y par la chaîne $x, x_1, \ldots, x_{p-1}, y$ (bien sûr $p \leq k_0$). Ainsi toute chaîne réalisant $\Delta_k(x,y)$ doit rester dans la boule $B(x_0, R)$, mais on peut admettre que cette chaîne visite chaque $\overline{\Gamma_\tau}$ au plus une fois, donc elle a au plus $k_0 + 1$ points. Nous avons alors montré que

$$\Delta_k(x,y) = \Delta_{k_0}(x,y)$$

pour tout (x,y) dans $\Gamma_\nu \times \Gamma_\mu$. Ceci prouve que Δ est égale à Δ_{k_0} sur $\Gamma_\nu \times \Gamma_\mu$, et donc que Δ est sous-analytique.

Montrons maintenant que Δ est une distance : il suffit de vérifier l'inégalité triangulaire : prenons $x, y, z \in A$, et soient $\{x_p\}_{p \leq s}$ et $\{y_q\}_{q \leq t}$ des chaînes joignant x à y, et y à z. $\Delta(x,z)$ est inférieure ou égale à

$$\sum_{i=0}^{s-1} ||x_{i+1} - x_i|| + \sum_{i=0}^{t-1} ||y_{i+1} - y_i||,$$

et donc $\Delta(x,z) \leq \Delta(x,y) + \Delta(y,z)$.

∎

Démonstration du théorème : Admettons la proposition 3. Nous allons montrer que Δ est la distance cherchée. Si $\{x_i \ : \ 0 \leq i \leq k\}$ est une suite de points telle que $x_i \in \overline{\Gamma_\nu}$, $x_{i+1} \in \overline{\Gamma_\nu}$, on a, en notant λ_1 l'arc passant par les x_i donné par la proposition 3,

$$|\lambda_1|(t_i, t_{i+1}) \leq (1+\epsilon)||x_{i+1} - x_i||.$$

En sommant les inégalités du type précédent on obtient :

$$\delta(x,y) \leq |\lambda_1| = \sum_{i=0}^{k-1} |\lambda_1|(t_{i+1}, t_i) \leq (1+\epsilon) \sum_{i=0}^{k-1} ||x_{i+1} - x_i||.$$

Donc d'après la définition de Δ

$$\delta(x,y) \leq (1+\epsilon)\Delta(x,y).$$

On obtient l'autre inégalité de la manière suivante : soit λ un arc joignant x à y et réalisant la distance géodésique ; un tel arc est donné par la proposition 1. Il existe une suite $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = 1$ et une suite $v_0, \cdots, v_{k-1} \in V$, telles que

$$\lambda(t_i), \lambda(t_{i+1}) \in \overline{\Gamma_{v_i}}, \ i = 0, \cdots, k-1.$$

On peut aussi supposer que $v_i \neq v_j$ pour $i \neq j$. La suite d'inégalités :

$$\Delta(x,y) \leq \Delta_k(x,y) \leq \sum_{i=0}^{k-1} ||\lambda(t_{i+1}) - \lambda(t_i)|| \leq \sum_{i=0}^{k-1} |\lambda|(t_{i+1}, t_i) = \delta(x,y)$$

montre le résultat.

■

Rappelons (voir [Ku1]) qu'une sous-variété $\Gamma \subset \mathbf{R}^n$ est dite η-plate si pour tout a, b de Γ

$$\sin(\mathrm{n}(a), \mathrm{n}(b)) < \eta \qquad (*)$$

où $\mathrm{n}(a)$ et $\mathrm{n}(b)$ sont des vecteurs normaux à Γ en a et b. Pour simplifier les calculs nous modifierons cette définition en remplaçant $(*)$ par

$$\left|\frac{\mathrm{n}(a)}{|\mathrm{n}(a)|} - \frac{\mathrm{n}(b)}{|\mathrm{n}(b)|}\right| < \eta$$

Enfin nous dirons qu'une fonction f de classe C^1 est η-plate si son graphe l'est. Avant de démontrer la proposition 3 prouvons le résultat suivant

Lemme 5 *Soit $f : A' \to \mathbf{R}$ une fonction, C^1 sur un ouvert A' de $\mathbf{R}^{n-1}$, telle que*
(i) $\forall x' \in A'$ $||\nabla f(x')|| \leq M = M(n)$,
(ii) *f est η-plate,*
alors $\{\nabla f(x') : x' \in A'\}$ est contenu dans une boule de $L(\mathbf{R}^{n-1}, \mathbf{R})$ de rayon plus petit que ηC, où $C = \sqrt{1+M^2}(1+M)$.

Démonstration : l'hypothèse f est η-plate nous dit que $T_{(x', f(x'))}f$ est contenu dans une boule de $G(n-1, n)$ de rayon η. Le vecteur $v(x') = (\nabla f(x'), -1)$ est normal au graphe de f au point $(x', f(x'))$.

Fixons $a \in A'$, pour tout $b \in A'$ nous avons $|\frac{v(b)}{|v(b)|} - \frac{v(a)}{|v(a)|}| < \eta$. Ce qui nous donne en prenant chaque composante de cette différence : $|\nabla f(b) - \frac{|v(b)|}{|v(a)|}\nabla f(a)| < \eta|v(b)|$ et $|1 - \frac{|v(b)|}{|v(a)|}| < \eta|v(b)|$. La différence $|\nabla f(b) - \nabla f(a)|$ est donc inférieure à $\eta|v(b)| + \eta|v(b)||\nabla f(a)|$ ainsi

$$|\nabla f(b) - \nabla f(a)| < \eta\sqrt{1+M^2}(1+M)$$

d'où la majoration indiquée .

■

Nous dirons que $\Gamma \subset \mathbf{R}^n$ est une s-cellule L-régulière avec constante M, η-plate, si, après une transformation orthogonale, Γ peut sécrire sous l'une des deux formes suivantes

$$\{(x', t) \in \mathbf{R}^n \ : \ x' \in \Gamma',\ f(x') < t < g(x')\},$$

$$\{(x', t) \in \mathbf{R}^n \ : \ x' \in \Gamma',\ h(x') = t\}$$

où f, g, h sont des fonctions analytiques, η-plates à différentielles bornées par M, sous analytiques, et Γ' une s-cellule dans $\mathbf{R}^{n-1}$, L-régulière avec constante M, η-plate.

Démonstration de la proposition 3 : en utilisant les résultats de [Ku1], il existe, pour tout $\eta > 0$, une décomposition, en cellules comme si dessus, avec une constante M universelle. Il nous suffit donc de montrer le point (ii) de la proposition.

En remarquant que tout point de l'adhérence d'une s-cellule peut être joint par un arc C^1 de longueur arbitrairement petite, on se ramène au cas où les points x et y sont dans l'intérieur de la s-cellule.

Nous allons en fait montrer le résultat suivant, par récurrence sur la dimension de l'espace ambient : il existe un arc λ avec les propriétés de (ii) et à variation de tangente majorée par $\theta_n(\eta)$ avec $\lim_{\eta \to 0} \theta_n(\eta) = 0$.

Le cas $n = 1$ est clair, supposons donc avoir montré le résultat pour les s-cellules η-plates de dimension inférieure ou égale à $n-1$. Nous ne traiterons que le cas où Γ est une s-cellule dans $\mathbf{R}^n$ comprise entre le graphe de deux fonctions f et g, analytiques dans une s-cellule η-plate Γ', sous-analytiques ; c'est à dire $\Gamma = \{(x', t) \in \mathbf{R}^n \ : \ x' \in \Gamma', \ f(x') < t < g(x')\}$, avec de plus ∇f et ∇g bornés par M. Le cas où Γ est un graphe au dessus de Γ' est similaire.

Soient $x = (x', a)$ et $y = (y', b)$ deux points de Γ, il existe un arc C^1, γ tracé dans Γ', de longueur l inférieure à $(1+\eta)||x' - y'||$, joignant x' à y'. Paramétrons γ par sa longueur s, et définissons un arc λ par $\lambda(s) = (\gamma(s), \alpha(s))$ où α est la fonction donnée par $\alpha(s) = f(\gamma(s))$ si $a + s\dfrac{(b-a)}{l} < f(\gamma(s))$, $\alpha(s) = g(\gamma(s))$ si $a + s\dfrac{(b-a)}{l} > g(\gamma(s))$, $\alpha(s) = a + s\dfrac{(b-a)}{l}$ sinon.

Par hypothèse de récurrence l'arc γ est à variation de tangente majorée par $\theta_{n-1}(\eta)$, montrons que l'arc λ convient et est aussi à faible variation de la tangente :

(i) les portions de λ tracées à l'intérieur de Γ, définies sur un intervalle $[u, v]$, ont des longueurs égales à

$$\int_u^v \sqrt{1 + (\frac{b-a}{l})^2}ds = \frac{v-u}{l}\sqrt{l^2 + (b-a)^2},$$

(ii) celles tracées sur f (ou g) ont pour longueur, sur un intervalle $[u, v]$, $\int_u^v \sqrt{1 + |\alpha'(s)|^2}ds$, or d'une part $|\alpha'(s)| = |\nabla f(\gamma(s))\gamma'(s)|$, et d'autre part, comme $f(\gamma(s)) - a - s\dfrac{(b-a)}{l} \geq 0$ est nul en u et v, il existe, d'après le théorème de Rolle, un s_0 pour lequel $|\nabla f(\gamma(s_0))\gamma'(s_0)| = \dfrac{b-a}{l}$. Et donc, en vertu du lemme 5,

$$|\alpha'(s) - \alpha'(s_0)| \leq \eta C + M\theta_{n-1}(\eta) = \tau_n(\eta),$$

et, par suite

$$|\alpha'(s)| \leq |\nabla f(\gamma(s_0))\gamma'(s_0)| + \tau_n(\eta),$$

d'où

$$\int_u^v \sqrt{1 + |\alpha'(s)|^2}ds \leq \frac{v-u}{l}\sqrt{l^2 + (b - a + l\tau_n(\eta))^2}.$$

La longueur totale de l'arc λ est ainsi majorée par

$$\max(\sqrt{l^2 + (b-a)^2}, \sqrt{l^2 + (b - a + l\tau_n(\eta))^2}).$$

Or $\sqrt{l^2+(b-a)^2} \leq \sqrt{(1+\eta)^2||x'-y'||^2+(b-a)^2} \leq (1+\eta)||x-y||$, et, de même $\sqrt{l^2+(b-a+l\tau_n(\eta))^2}$ est plus petit que $(1+\eta)||x-y||(1+2M\tau_n(\eta)+\tau_n(\eta)^2)^{\frac{1}{2}}$, en utilisant $\frac{|b-a|}{l} \leq M$. Ainsi

$$|\lambda| \leq (1+\eta)(1+2M\tau_n(\eta)+\tau_n(\eta)^2)^{\frac{1}{2}}||x-y||,$$

et dès que η est tel que

$$(1+\eta)(1+2M\tau_n(\eta)+\tau_n(\eta)^2)^{\frac{1}{2}} \leq 1+\frac{\epsilon}{2}$$

on a $|\lambda| \leq (1+\frac{\epsilon}{2})||x-y||$, et la variation de la tangente de λ est majorée par $\sqrt{\theta_{n-1}(\eta)^2+\tau_n(\eta)^2}$. On obtient l'arc cherché en ramenant l'arc λ à l'intérieur de la cellule, puis en le lissant. Ce que l'on peut faire de manière à ne pas augmenter la longueur de plus de $\frac{\epsilon}{2}||x-y||$.

■

Remarques :

En utilisant la version à paramètre de la proposition 3 [Ku2], on obtient une version à paramètre du théorème : si A est un sous analytique fermé de $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^p$, à tranches $\{A_y\}_{y\in\mathbf{R}^p}$ connexes, il existe, pour chaque ϵ, une famille sous-analytique de distances sous-analytiques, $\Delta_y(\ ,\ )$, telle que la distance géodésique dans chaque tranche, δ_y, soit uniformément équivalente à Δ_y. C'est à dire

$$\Delta_y \leq \delta_y \leq (1+\epsilon)\Delta_y.$$

En particulier, si A est un ensemble semi algébrique, alors pour tout ϵ, le diagramme de la distance semi algébrique Δ_y ne dépend que du diagramme de A (par diagramme de A, on entend les nombres et degrés des polynômes qui apparaissent dans une description de A par égalités et inégalités).

Les auteurs tiennent à remercier les referees pour leurs remarques qui ont permis d'améliorer la rédaction de cette note.

References

[Gr] M. Gromov, *Structures métriques pour les variétés riemanniennes*, rédigé par J. Lafontaine et P. Pansu, Textes Mathématiques 1, CEDIC, Paris 1981.

[Ha] R. Hardt, *Some analytic bounds for subanalytic sets*, Differential geometric control theory, Progress in Math., vol 27, 1983, p. 259-267.

[Ku1] K. Kurdyka, *On a subanalytic stratification satisfying a Whitney property with exponent 1*, Real algebraic geometry, Proceedings, Rennes 1991, L.N.M 1524, 1992, p. 316-322.

[Ku2] K. Kurdyka, *Linear bounds for resolutions of 1-boundaries in subanalytic sets*, Real analytic and algebraic geometry, Proceedings, Trento 1992, Walter de Gruyter, 1995, p. 189-196.

[Pa] A. Parusinski, *Lipschitz stratification of subanalytic sets*, Ann. scient. Ec. Norm. Sup., 4ème série, t. 27, 1994, p. 661-696.

[St] J. Stasica, *The Whitney condition for subanalytic sets*, Zesz. Nauk. U. J., Prace Mat. 32(1982), p. 211-221.

Instytut Matematyki,
Uniwersytet Jagielloński,
Reymonta 4,
Kraków PL-30059, Pologne
Laboratoire de Mathématiques,
Université de Savoie,
73376 Le Bourget-du-Lac,
France
`kurdyka@univ-savoie.fr`

Laboratoire de Mathématiques,
Université de Savoie, 73376
Le Bourget-du-Lac, France
`orro@univ-savoie.fr`