

Algunos progresos y problemas en la Ciencia de la decisión.

Sixto RÍOS

Abstract

The study of decision making and problem solving has attracted much attention. Since the middle of this century the notion of rational decision making was associated with expected utility maximization, albeit in a very different way than D. Bernoulli (1738) envisioned. For decisions under risk, Von Neumann and Morgenstern (1947) formulated the axioms for expected utility. For decisions under uncertainty Savage (1954) developed the axioms leading simultaneously to subjective probability and expected utility maximization.

In recent decades, the decision theory literature has been dominated by many normative models and prescriptive methods or questions concerning how these models can be made more applicable. Most of research on decision making and problem solving carried on at the Department of Statistics and Operations Research of the Universidad Complutense after 1950 is exposed.

1 Ideas generales

El estudio de las decisiones individuales en problemas complejos en que se suponen conocidos con certidumbre los resultados finales de las alternativas posibles y tales resultados se consideran medibles con criterio único bien definido, generalmente monetario, ha conducido a la introducción, durante las décadas 1950 y 1960, de la Investigación Operativa (I.O.) (conjunto de poderosas metodologías de optimización matemática conocidas como programación lineal,

Mathematics Subject Classification: 62C05.

Servicio Publicaciones Univ. Complutense. Madrid, 1998.

programación paramétrica, dinámica, . . . , etc). Tales técnicas, con ayuda del ordenador, surgido en los mismos años, permiten resolver con gran precisión y amplia validez los problemas de las aplicaciones que tienen carácter *determinista y monocriterio*. Pero aunque algunos investigadores operativos creyeron que habían resuelto los principales problemas de la optimización, pronto se advirtió que cuando en las consecuencias interviene el azar o la incertidumbre, o múltiples criterios o varios decisores, etc., se hace necesario introducir, para su modelización adecuada, nuevas ideas y conceptos, y es entonces cuando comienza propiamente la *Ciencia o Teoría de la Decisión* que, justamente por estas características peculiares, se diferencia de la *Teoría clásica de la Programación y Optimización*.

En este marco ocupa un importante espacio la *Teoría de la decisión estadística*, que enfoca las metodologías relativas a la inferencia y decisiones estadísticas.

La aparición hacia 1943 de los trabajos de V. Neumann-Morgenstern representa el punto de partida del tratamiento científico de los problemas de decisión individual y también de las decisiones en concurrencia: juegos de estrategia, negociaciones, Las investigaciones de Arrow son paralelamente, a partir de 1951, el origen del estudio de los problemas de las decisiones colectivas, fundamentales en la vida política de las sociedades modernas. Una idea de la importancia del tema se tiene al considerar que al menos doce Premios Nobel: Arrow, Debreu, Koopmans, Allais, Simon, Markowitz, Frisch, Nash, Selten, Harsanyi, Kantorovich, Lucas, . . . han dedicado una buena parte de sus investigaciones a la matematización de los problemas de las decisiones humanas, cuya versatilidad inagotable ha hecho necesarios los esfuerzos de matemáticos, estadísticos, informáticos, psicólogos, economistas, ingenieros, militares, médicos, abogados, politólogos, . . . , para ir construyendo año tras año una sucesión de metodologías cada vez más abarcativas, pero siempre insuficientes y abiertas a nuevos progresos científicos.

El problema de tomar decisiones en ambiente de riesgo o de incertidumbre está asociado a los juegos de azar, que se estudiaron científicamente a partir de Pascal y Fermat (1654), pero es Huygens (1657) quien introduce la noción de esperanza matemática del valor monetario sobre la que se basa una regla de decisión practicada, más o menos conscientemente, por los jugadores de azar durante siglos, a saber: *maximizar el*

valor monetario esperado, es decir la suma de los productos de las probabilidades de los sucesos posibles por las ganancias correspondientes. Esta regla permanece como una evidencia indiscutible, asociada a la interpretación frecuencial de la probabilidad, hasta Daniel Bernoulli que, en 1738, publicó un notable trabajo, en el que aportó ideas importantes para el tratamiento de las decisiones en riesgo o juegos, que él llamaba brevemente *riesgos*. Refiriéndose a la regla del valor esperado dice Bernoulli (1731): "En esta regla no se toma en consideración ninguna característica de las personas, sólo las características del juego. Realmente se trataría de establecer reglas mediante las que cada uno pudiera estimar sus perspectivas al tomar riesgos teniendo en cuenta sus circunstancias financieras".

Es importante observar que Bernoulli planteó con extraordinaria claridad el problema; pero su solución es bastante criticable. En primer lugar, después de haber insistido en el aspecto subjetivo del problema de la utilidad, empieza por dar una función de utilidad en certidumbre, sin tener en cuenta que se trata de *preferencias en riesgo*. En segundo lugar, sigue aceptando la idea de la esperanza matemática, que había resultado de la aplicación a problemas de pruebas repetidas, olvidando que aquí se trata de un problema en que un individuo *participa en el juego una sola vez*.

Han de pasar doscientos años hasta que Von Neumann y Morgenstern (1943) dan una solución satisfactoria a este problema fundamental de la decisión en riesgo.

Las dos características ambientales que parecen necesarias para la aparición del nuevo paradigma de la *utilidad esperada*, a saber, la progresiva axiomatización de la matemática (Hilbert, Kolmogoroff, ...) y las fuertes necesidades de las aplicaciones económicas y militares, consecuencia de la Segunda Guerra Mundial se dan cuando VN-M se interesan por tal problema, secularmente importante, y consiguen su solución (1943). Solución que no habían logrado ni Laplace ni Gauss, a pesar de que a comienzos del siglo XIX estaban en posesión de esquemas y recursos fundamentales como la fórmula de Bayes, la tabla de decisión de Pascal, la función de pérdida,...

Características del nuevo enfoque sobre la decisión son: 1º el concepto de preferencia se extiende no sólo al dinero, sino a objetos (au-

tomóviles, aviones, enfermedades, días de curación, . . .), 2º la utilidad se asocia al concepto de probabilidad mediante la idea de comparar situaciones simples aleatorias y deterministas para pasar a situaciones complejas mediante axiomas de racionalidad sencillos que conducen a la *regla de la máxima utilidad esperada* (M.U.E.).

Inspirados en la medida de las magnitudes de la Física y en sus observaciones psicológicas de las partidas de poker de Princeton, la idea radicalmente nueva de VN-M es, modelizar la utilidad esperada como una escala de medida de un atributo de las loterías, que implica la consideración conjunta de la *preferencia* sobre los premios y de la operación natural de *mixtura* con dichas loterías. Para representar esta doble estructura empírica, introducen VN-M, como modelo teórico, una estructura de preorden completo definida sobre un conjunto de medidas de probabilidad que verifican la operación lineal de mixtura mas un axioma de continuidad y un axioma de sustitución. Con ello demuestra, su teorema fundamental de existencia de un funcional lineal que es isótono y fiel y único salvo una transformación lineal monótona.

En definitiva, en la aplicación práctica, esto se traduce en que si las preferencias de un decisor obedecen unos ciertos axiomas de gran fuerza intuitiva, este decisor debe comportarse como si trata de maximizar la utilidad esperada (*principio de máxima utilidad esperada*, M.U.E.). Las dos diferencias fundamentales que hacen de la utilidad de VN-M resuelva el problema de Bernoulli son: 1º que refleja las preferencias en riesgo del decisor en cualquier situación concreta por complicada que sea, como consecuencia de sus preferencias subjetivas en situaciones simples, y 2º al considerar una *situación única de decisión* no utiliza, para nada, la repetición de juegos en las mismas condiciones y ley de los grandes números.

Con el camino preparado por Wald, de un lado, considerando al estadístico como un decisor, y de otro, por los trabajos pioneros de Ramsey (1931), de Finetti (1937) y, sobre todo, por el genial trabajo fundamental de VN-M (1944), logra Savage (1954) una construcción axiomática conjunta de la probabilidad subjetiva y la utilidad que generaliza el principio de M.U.E. para pasar a un principio en que las probabilidades se determinan subjetivamente por el decisor, máxima utilidad subjetiva esperada (M.U.S.E.), punto de partida de la metodología bayesiana de la

decisión, hoy muy generalmente aceptada.

2 Validación de modelos de decisión

Un aspecto fundamental del proceso de modelización es la *validación* del modelo, que nos llevará a aceptarlo para su uso posterior o a rechazarlo para reiniciar el proceso de modelización.

Se dice que un modelo de un cierto sistema o fenómeno real es *válido* si su comportamiento representa adecuadamente el comportamiento del sistema real bajo todas las condiciones de interés.

Como hemos indicado, la demostración del principio de máxima utilidad subjetiva esperada, reduce la elección entre dos loterías complejas a la elección entre algunas otras realmente simples, y esta reducción se logra aplicando únicamente los axiomas básicos de racionalidad admitidos por el decisor. Pero al considerar la toma de decisiones por individuos desconocedores de este principio se ha observado que el proceso ingenuo "de toma de decisiones" presenta a veces desviaciones de los axiomas lo que, por otra parte, es natural en problemas sencillos.

Creemos que más bien lo que sería extraño es que los individuos corrientes o, incluso iniciados, fueran capaces, en algunos minutos, de suplir la sabiduría acumulada de Bernoulli a VN-M, en este tema. Esto está en la misma línea que los frecuentes errores entre algunos profesionales (médicos, economistas, etc.) al estimar o interpretar probabilidades o suplir intuitivamente el teorema de Bayes. Ello confirma la necesidad de enseñar las cuestiones fundamentales del Cálculo de Probabilidades y del Análisis de Decisiones a las personas implicadas en la toma de decisiones y, al mismo tiempo, explica la excesiva fuerza probatoria que atribuimos a los ejemplos de Allais que, en los años 50 sembraron cierta desconfianza en la validez de estos axiomas como representación del comportamiento humano natural, es decir, en que la hipótesis de la utilidad subjetiva esperada se pueda considerar la base de un *teoría prescriptiva* de la decisión. Pero la contribución de L.J. Savage propone una interpretación alternativa esclarecedora: no se trata de modelizar un objeto o sistema existente, algo como una realidad física, sino de establecer un conjunto de axiomas que representan una afinada percepción de los valores e incertidumbres en una estructura (*modelo normativo*) que satisface ciertas

condiciones de coherencia, que debemos adoptar en nuestras decisiones. Esto puede considerarse el núcleo de la definición de la *teoría normativa* de la decisión aceptado en años posteriores, como base fundamental de la metodología bayesiana.

Durante los 70 un gran número de trabajos y experimentos de falsación, siguiendo las líneas de los psicólogos Kahneman-Tversky, significaron la tendencia a construir una teoría de la *decisión descriptiva* de los pasos dados por distintos individuos al enfocar y tratar de resolver “problemas de decisión de laboratorio”.

Este tipo de trabajos críticos, que incluso se extendieron a la lógica aristotélica, estimularon en los 80 el nacimiento de un cierto número de metodologías que explicaban unos u otros defectos que algunos habían encontrado en la teoría de la utilidad subjetiva esperada.

Desde entonces dos son las direcciones dominantes:

- a) Construir una *teoría descriptiva pura*, a partir de los datos de experimentos y de las intuiciones resultantes del estudio de los mismos, como es el caso de la “teoría de prospectivas” de K-T, o bien,
- b) debilitar o modificar algunos de los axiomas de VN-M, para llegar a una más amplia aceptabilidad como ha hecho, por ejemplo, Fishburn, con su notable teoría de la utilidad bilineal simétrica, y otros muchos en diferentes direcciones. Pero como dice el propio Fishburn (1988), las nuevas teorías que tratan de ajustarse más a las observaciones de decisores reales no refuerzan la sencillez y elegancia del modelo M.U.S.E. Retienen las implicaciones de M.U.S.E. sobre toma de riesgo, dominancia, etc. mientras recogen tipos de preferencias que muchos consideran razonables, pero alteran la M.U.S.E.

Sin embargo, estos trabajos experimentales continúan, como se ve a través de las Actas de los Congresos FUR, Foundations of Utility and Risk, especialmente dedicados a la teoría de la utilidad, en un proceso dirigido al logro de un modelo sencillo, coherente, bello y, por supuesto, *racional*, que sea a la vez aceptablemente *descriptivo* del comportamiento natural de los decisores más o menos ingenuos.

Se trata, evidentemente, de un gran *programa de investigación* en la nomenclatura de Lakatos, al que hemos dedicado una gran parte de nuestro trabajo y de algunos de nuestros discípulos en diversas etapas de nuestra actividad científica. La primera etapa a partir de 1975 en que colaboraron Pilar, Girón, Villegas, Pedro Gil, Horra, M^a Jesús, Sixto, Leandro, Rodríguez Ponga y Hernán Gómez. Lakatos (1970) propone, en efecto, que una teoría científica como la de la *utilidad esperada*, se considere como un *programa de investigación científica* contituido por un *núcleo duro* formado por una hipótesis mantenida, no susceptible de refutación dentro del marco de trabajo, y un cinturón protector de hipótesis auxiliares contrastables que se van ajustando a la luz de la nueva evidencia empírica. Los programas de investigación contienen, en general una heurística negativa que excluye hipótesis, no consistentes con el núcleo y una heurística positiva que sugiere el tipo de trabajo que se debe hacer para engendrar y contrastar hipótesis refutables.

Precisamente en esta línea se encuentran los trabajos que más recientemente a partir de 1992 hemos realizado en la Real Academia de Ciencias de Madrid, en colaboración con el Grupo de Análisis de Decisiones del Departamento de Inteligencia Artificial de la Universidad Politécnica de Madrid, el Instituto de Medicina Experimental del Hospital Gregorio Marañón (Madrid), la Secretaría General Técnica del Ministerio de Defensa, el Departamento de Economía de la Universidad Carlos III y el Departamento de Estadística de la Universidad de Málaga.

Este trabajo, desarrollado con el patrocinio de la Fundación Banco de Bilbao-Vizcaya, durante dos años académicos (93-94), nos ha permitido contrastar la llamada teoría robusta de la decisión propuesta en su tesis pro David Ríos, que suprime la condición de completitud en el orden y debilita el axioma de continuidad, lográndose una metodología que, completada con el estudio de la sensibilidad, mejora satisfactoriamente tratamientos anteriores (FUR VII, Oslo, 1995). Quiero recordar que en el Coloquio Internacional de 1994 varios Profesores de este Departamento: Pilar Ibarrola, Vélez presentaron colaboraciones importantes.

En resumen, diremos que en este tema -nunca agotado- de la validación de la Teoría de la Utilidad, no debemos olvidar que, hoy por hoy, no se puede considerar ninguna teoría como un dogma intocable para la eternidad y que continuará siendo útil y necesario el aprendizaje a través

de los estudios empíricos y de los experimentos realizados con personas o sistemas decisionales: empresas, comités, tribunales, . . . , que toman decisiones y que han permitido, y continuarán permitiendo, perfeccionar las teorías de la decisión.

Si nos situamos a un nivel de la práctica corriente, podemos decir que una conducta usual es aceptar que la *validación* de un método formalmente correcto, empieza en que sea localmente correcto, es decir, aceptable para problemas menores (situaciones sencillas en que la solución técnica coincide con la intuitiva). Después se amplía el dominio de problemas tanto en complejidad como tamaño, considerándose que se ha conseguido un método de confianza superior al intuitivo directo, aunque formalmente no tenga sentido "demostrar" tal superioridad. Más bien se trata de ir convenciéndose de que si se incorporan estas metodologías racionales, compartidas cada vez por más analistas de decisiones e investigadores de distintos campos, se va logrando un incremento significativo de progreso científico superior al que si cada uno actura sin tenerlo en cuenta. Tal es la idea básica de la *teoría prescriptiva* de la decisión, como síntesis de teorías normativas y descriptivas, punto de partida del fecundo *Análisis de Decisiones* actual.

Tras esta exposición de las aportaciones experimentales que en conjunto y adecuadamente interpretadas creemos que refuerzan la hipótesis M.U.S.E., señalaremos que hay otros tipos de apoyos como son el estudio del comportamiento económico empírico en incertidumbre y algunas investigaciones teóricas en relación con experimentos y el teorema central del límite.

Según los trabajos de Hey y Orne (1994), la mayor parte de las investigaciones sobre comportamiento económico empírico en incertidumbre para comprobar la validez de las predicciones de M.U.S.E., se realizan mediante series de datos de la vida real sobre las que se han de resolver algunos problemas econométricos de tipo convencional y puede decirse que sus resultados dan una buena conformidad con la teoría de M.U.S.E.

Otro tipo de comprobación experimental de la hipótesis M.U.S.E. procede de los trabajos econométricos de J.R. Hauser, que han establecido relaciones entre la teoría de VN-M, la teoría de la elección estocástica del comportamiento de los consumidores. Estas teorías dejan de ser competitivas para convertirse en complementarias y permiten

una predicción y explicación al nivel de los consumidores individuales. Tal metodología a la vez que proporciona una nueva faceta de validación para la teoría de VN-M permite, con sus modelos predictivos, suministrar información a los empresarios, de modo que puedan modificar la demanda, alternando características de los productos, propaganda y otros aspectos del marketing, y asimismo evaluar estrategias alternativas de planes de producción, inventarios y mano de obra. En esta misma línea están los estudios del comportamiento empírico de los consumidores de seguros de muy distintos tipos y de los inversores que forman una cartera de valores para obtener una rentabilidad.

Un nuevo enfoque, que podríamos llamar teórico, de validación, puede derivarse de recientes trabajos de V.I. Rotar (1994), que introducen una noción de *criterio estadísticamente estable* por el cual una elección en un solo experimento aleatorio no difiere de otra elección basada en una sucesión suficientemente larga de réplicas del mismo experimento aleatorio. Esencialmente demuestran, mediante razonamiento matemático, que dos formas de razonamiento actuales, una basada sobre axiomas de la moderna teoría de la utilidad VN-M y otra sobre la teoría pura de probabilidades (Kolmoroff), no disienten.

3 Sensibilidad

La necesaria incorporación de criterios subjetivos en la obtención de probabilidades y funciones de utilidad es una fuente de críticas de la metodología bayesiana. Con los estudios de sensibilidad se trata de obviar estas críticas tratando de medir la influencia sobre los resultados de las variaciones de tales datos subjetivos incorporados para el funcionamiento del modelo. En ciertos casos este estudio permitirá detectar inconsistencias y ver si es necesario mejorar el modelo, y sustituirlo quizá por otro más robusto.

Estudios sistemáticos de la sensibilidad en los distintos procedimientos de decisión no se han hecho de una forma general sistemática y satisfactoria, a pesar de que constituye un aspecto importante que viene a complementar el estudio de validación de cada método y tiene interés además por su repercusión en el cálculo efectivo de las soluciones. Ver [4, bis] Berger J., Ríos D., 1997.

4 Mejores resultados o mejores decisiones

Esta pregunta viene estrechamente asociada a la idea de validación. Es bien sabido que buenas decisiones no conducen necesariamente a buenos resultados. Sería largo hablar del problema de buscar las decisiones que conduzcan a los mejores resultados, problema que para algunos ni siquiera tiene sentido. Solo agregaremos algunas breves consideraciones: si tenemos en cuenta que la probabilidad de un resultado mide la creencia que tiene el decisor en que se obtenga tal resultado, se podría introducir como *criterio de que $\xi \succsim \eta$ el que para un cierto K sea $Pr[\xi > k] \geq Pr[\eta > k]$* o bien, con la función de distribución, $F_\xi(k) < F_\eta(k)$. Si es $u(x)$ la función de utilidad del decisor, esto equivaldría a que $\int_0^\infty u(x)dF_\xi(x) \geq \int_0^\infty u(x)dF_\eta(x)$ y este resultado coincidiría con el criterio de VN-M: si es $u(x) = 0$ para $x \leq k$ y $u(x) = 1$ para $x > k$. Esto nos conduce a construir lo mejor posible la función de utilidad y a ver hasta que punto se aproxima a la indicada si realmente el decisor está interesado en obtener un resultado $\xi > k$. Este método está estrictamente relacionado con el llamado de riesgo fijado que yo introduje y estudiaron Yañez, Horra, Girón, Cristobal, y otros.

Saliendo de la ortodoxia de VN-M, cabría comparar la aportación que a tal problema hacen los métodos de la *dominancia estocástica*, $P[\xi > k] \geq P[\eta > k]$ para todo k , de *dominancia en probabilidad* $P[\xi > k] > \frac{1}{2}$, y otros posibles (Yu,...) que presentan diferentes inconvenientes.

5 Utilidad y equivalente en certidumbre

En el orden histórico es interesante hacer referencia a algunos trabajos matemáticos que se han relacionado muy directamente y han influido en el desarrollo de la teoría de la utilidad. Vienen de una corriente que "trata de generalizar el concepto de media, como procedimiento para simplificar la evaluación de una característica de un conjunto de datos mediante la sustitución de un subconjunto de valores por un único valor resumen, sin alterar el objetivo que se trata de evaluar". Este es también el problema de sustituir una lotería por su *valor equivalente en certidumbre* que ya preocupaba a Huygens (1657). Tal punto

de vista, que se ha llamado *enfoque funcional de la utilidad*, condujo al importante trabajo de Finetti (1931) que contiene el llamado teorema de Finetti-Kolmogoroff-Nagumo. Y podría considerarse, como una versión en términos de “equivalente en certidumbre” del teorema de VN-M (1943). Sin embargo, hay que poner énfasis en la ventaja de éste, que reside en introducir la esperanza de utilidad como un operador lineal a partir de unos axiomas básicos de ordenación, sencillos y de gran fuerza intuitiva, que permiten las aplicaciones al análisis de decisiones y a la decisión estadística con natural sencillez.

Y esto implica el relativo abandono actual de la teoría de los equivalentes en certidumbre que se expresan por un operador cuasilineal a saber $\epsilon(F) = u^{-1} \left(\int_R u(x) dF(x) \right)$ (o bien mediante la función $\varphi(\cdot) = u^{-1}(\cdot)$; $\epsilon(F) = \varphi \left(\int_R \varphi^{-1}(x) dF(x) \right)$) como correlativo de la esperanza de utilidad de VN-M

$$U[F] = \int_R u(x) dF(x)$$

que es un operador lineal y por tanto de más fácil manejo matemático.

Sin embargo, no todos son ventajas con la utilidad. Su carácter de número real, que representa el orden de preferencia de una consecuencia en incertidumbre, la hace difícilmente manejable en los problemas complejos en que se trata de engendrar intuitivamente nuevas utilidades a partir de otras ya obtenidas. En estos problemas aparece clara la ventaja del manejo de los *equivalentes en certidumbre* que tienen un carácter más directamente empírico e intuitivo. Esta observación se extiende a los problemas de multicriterios en certidumbre y en riesgo, con los conceptos de *equivalente en una componente (en certidumbre o en riesgo) en una componente temporal*, etc.

6 Los modelos de decisión unipersonal

La modelización realizada por VN-M para el problema de decisión en ambiente de incertidumbre ha sido la referencia para la generalización a muy diversos contextos y resolución de otros problemas no menos importantes de decisión individual, también llamados de *programación subje-*

tiva, que brevemente indicamos: Se parte de una situación real de decisión y se traducen las consecuencias de las decisiones y las operaciones empíricas y preferencias sobre las mismas, en elementos matemáticos de un conjunto X y operaciones y ordenaciones con los mismos. Es decir, definimos sobre el conjunto X de consecuencias \underline{x} una estructura de operaciones B , y una estructura de orden $>$. Se trata entonces de determinar los elementos máximos o maximales de un subconjunto $X_0 \subseteq X$. Utilizando ambas estructuras, un camino para la resolución de tal problema de optimización es introducir (mediante un teorema de representación) un *operador de utilidad* $U[x] : X \rightarrow \mathbb{R}$ que sea isótono y a ser posible fiel y definido salvo una cierta transformación estrictamente creciente de \mathbb{R} en \mathbb{R} . Obtenido el operador, se habrán de determinar sus máximos o bien maximales en X_0 y obtener los valores $x \in X_0$ de que proceden.

De un modo más general se pueden utilizar operadores de utilidad en valores en otro espacio Y (p.e. vectorial) como un cierto orden y análogamente tratar el correspondiente problema de optimización del operador $V[x] : X \rightarrow Y$ que sea isótono y a ser posible fiel.

Estos conceptos tienen como *precursor* a Cantor (1895); que dió el primer teorema conocido de representación de un orden débil por una utilidad que es una función real tal que: $x \succ y \Leftrightarrow u(x) > u(y)$ y que si se trata de un conjunto infinito, que no contiene un conjunto denso en X respecto al orden establecido se requiere una representación lexicográfica vectorial (Chipman 1964).

Este esquema de creación de espacios representativos de consecuencias de decisiones y operadores de utilidad o valor que relacionan las preferencias ha dado origen a gran variedad de tipos de orden que se adaptan a las mismas y vienen a resolver los problemas de decisión multicriterios, en certidumbre e incertidumbre, polietápicos, dinámicos, multipersonales, . . . mediante sus correspondientes teoremas de representación altamente sofisticados (Raiffa, Debreu, Keeney, Koopmans, Aumann, Fishburn, . . .).

Nuevas complicaciones y dificultades conceptuales, surgen al considerar *problemas complejos* de decisión. Se presentan cuando aparecen sucesivamente al menos dos situaciones simples de los tipos señalados. Y se han de combinar adecuadamente los teoremas de representación de uno y otro para lograr un nuevo teorema de representación conjunta, que resuelva el problema complejo.

Así por ejemplo si se consideran *proyectos de inversión aleatorios*, es decir, distribuciones de probabilidad $\xi = \begin{pmatrix} \Pi_1 & \Pi_2 \cdots & \pi_m \\ x^{(1)} & x^{(2) \dots} & x^{(m)} \end{pmatrix}$ cuyas componentes son sucesiones polietápicas de posibles consecuencias de una inversión $x^{(i)} = (x_0^{(i)}, x_1^{(i)}, \dots, x_n^{(i)})$, se demuestra un teorema que bajo hipótesis sencillas prueba la existencia de una utilidad compuesta de las de Von Neumann y Koopmans, que resuelve el problema. Pero es fácil dar ejemplos que actualmente no están bien resueltos. Y todos estos conceptos son básicos en el estudio de los procesos de decisión, complejos unipersonales, multipersonales, polietápicos, etc.

7 Análisis de decisiones

Hemos dado unas breves indicaciones de los fundamentos de la Teoría de la decisión, base del *Análisis de decisiones*, cuyo germen se encuentra ya en el libro de V.N. -M. con los dos tipos de presentación de juegos por *tablas y árboles de decisión*. Las primeras, cuyo antecedente más remoto es la famosa tabla de Pascal, permiten una representación inmediata de muchos problemas en que son datos explícitos: alternativas, estados y consecuencias, pero es más frecuente que se busque y obtenga una representación detallada explícita de todos los escenarios que pueden aparecer en un proceso de decisión, es decir un *árbol de decisión*.

Resumiendo, tenemos para la formulación de un modelo coherente de un proceso complejo de decisión, los siguientes pasos fundamentales.

- a) Modelización estructural del problema.
- b) Modelización de incertidumbre.
- c) Modelización de preferencias.
- d) Cálculo numérico de probabilidades, utilidades, o bien valores en certidumbre.

e) Optimización parcial y global.

f) Análisis de sensibilidad.

a) La idea directriz en el enfoque que llamamos *modelización estructural* es la consideración profunda de los elementos y aspectos, no necesariamente numéricos, de los problemas, porque incluso puede ser más fácilmente comprendida por los decisores o clientes (médicos, administradores,...) que los aspectos de asignación y cálculo numérico efectivo, que tradicionalmente constituyen el dominio de los especialistas por implicar en su operacionalismo, la metodología probabilística bayesiana u otras.

b,c,d) De los dos aspectos fundamentales que se manejan para llegar a la selección de alternativas de decisión, a saber, las preferencias y las creencias, puede decirse que las primeras son más fáciles de comprender por el decisor, gracias a los axiomas sencillos e intuitivos que les atribuimos para su manejo. En cambio, es bastante reciente, gracias a trabajos de Dawid, Smith, Pearl, Allard,..., el haber concretado el concepto de *relevancia*, gobernado por los axiomas de Dawid, como fundamental para la relación de inferencia entre variables inciertas.

En todos estos campos se acepta hoy como necesario el uso de los métodos del *análisis de riesgos y decisiones* en que el ingreso cognitivo debe hacerse a través de la medida de la incertidumbre y de la preferencia mediante probabilidades subjetivas y utilidades.

En definitiva, los métodos que se emplean consisten en utilizar las opiniones de expertos en el campo especial considerado como una primera aportación para la asignación de probabilidades subjetivas. Tal aportación ha de someterse a algunas operaciones de control como el calibrado y otras que permitan, aproximarse, paso a paso, a una medida más fiable.

La aplicación del método de la esperanza de utilidad a situaciones concretas requiere, además la determinación de las probabilidades de los sucesos que pueden presentarse, la de la curva o función de utilidad del decisor. En el caso de las decisiones con multicriterios, el llegar a la construcción efectiva de la función de utilidad del decisor es un problema difícil que se ha conseguido realizar, en la práctica, gracias a la introducción de nuevos conceptos como la independencia preferencial,

independencia de utilidad,..., en los que se basa la construcción efectiva de los llamados *sistemas de soporte a la decisión*, que permiten la resolución de problemas muy complejos del Análisis de Decisiones.

e) Tras la laboriosa asignación de utilidades y probabilidades condicionadas, se llega finalmente al modelo del problema ya en forma numérica. La propiedad fundamental de la utilidad esperada, asociada al método regresivo de la programación dinámica permite, partiendo de los nodos últimos en que se encuentran las utilidades finales, regresar obteniendo, en cada retroceso, el nodo de decisión al que corresponde máxima utilidad esperada, para llegar finalmente al nodo origen con la solución deseada, análisis secuencial, análisis de imágenes, etc., que actualmente se consideran como aplicaciones del Análisis de decisiones y la Ciencia estadística.

En este momento es natural recordar que a partir de la axiomática de Savage, el problema central de la decisión estadística en ambiente de incertidumbre se plantea así: un decisor debe elegir una *decisión* a de un conjunto A . La *consecuencia* $c(a, \theta) \in \mathcal{C}$ depende no sólo de a sino de $\theta \in \Theta$ (conjunto de estados de la naturaleza). El decisor puede observar el resultado $X = x$ de un experimento cuya distribución es $P_X(x/\theta)$. El objetivo del decisor es hacer máxima su utilidad $u(c(a, \theta))$, eligiendo $a(x)$ adecuadamente. A través de los desarrollos que permite la axiomática de Savage, se llega a la solución de Bayes $a(x)$, que es la que maximiza la utilidad esperada $\int_{\Theta} u(c(a, \theta)) dP(\theta(x))$

Esto pone de manifiesto el hábil rodeo matemático que ha llevado a considerar el problema de la "decisión estadística", base de la inferencia bayesiana, como un "problema peculiar" dentro del Análisis de decisiones en incertidumbre, cuyas soluciones han dado origen a una interminable nube de discusiones.

Los árboles de decisión introducidos por Raiffa en 1968, han sido el punto de partida de notables perfeccionamientos como los *diagramas de influencia* introducidos por Miller (1976), como un método de representación de conocimientos, que luego fueron perfeccionados por Howard y Matheson (1981), y han conducido a los *diagramas de decisión* (Covaliu y Oliver, 1992), *redes de evaluación* (Shenoy, 1992), *grafos secuenciales*, *lenguaje DPL* (Borison, 1990),... *diagramas de influencia imprecisos* (D.

Ríos Insua y S. Ríos Insua, 1992) para poder tener en cuenta la posible presencia de imprecisión en los juicios del decisor.

El análisis de riesgos se puede considerar como un caso particular del análisis de decisiones, que se aplica al conocimiento a través de la representación por un árbol de sucesos de los distintos escenarios que se pueden producir tras un primer *accidente* o suceso en un sistema tecnológico, ecológico, etc... Su estudio tiene extraordinaria importancia, dados los altos riesgos que se derivan de algunas tecnologías que se han hecho prácticamente imprescindibles en la vida actual. A veces, quizá por motivos de prestigio de ciertos colectivos, se han dejado de lado estimaciones de riesgo que deberían haber pospuesto decisiones como la de conducir al primer hombre a la luna que, según un estudio de la General Electric, tenía una probabilidad de éxito inferior al 5%.

8 Aplicaciones del Análisis de decisiones

Un progreso reciente surgido de los éxitos del Análisis de decisiones individuales monocriterio, es la aplicación efectiva de este Análisis a problemas mucho más *complejos* llamados de multicriterios, multiniveles, polietápicos, decisiones sociales, colectivas, juegos, negociaciones,... a los que hemos hecho algunas referencias anteriormente.

Muchos de estos procesos estudiados en sus comienzos, con *modelos magníficos*, creados por sus fundadores, encontraron un ritmo de desarrollo más lento en etapas posteriores, en que empezó a echarse de menos la posibilidad de tratar de una manera más práctica los grandes problemas que se presentaban en la realidad.

Como dice Raiffa en su importante libro sobre *Negociaciones*: "Existen bellas teorías económicas de la empresa que explican, en una primera aproximación, como las empresas se comportan y cómo deberían comportarse. Pero cuando uno se sitúa próximo a los problemas actuales de los directores de empresas, estas teorías generales resultan demasiado vagas para ser relevantes. Al nivel de la empresa, lo que es necesario, entre otras cosas, es un conjunto de herramientas analíticas mediante las que un equipo de especialistas pueda interactuar sobre una base consultiva con los decisores empresariales. Estoy hablando no sólo de los

investigadores operativos y analistas de decisiones, sino también de especialistas en finanzas, mercados y otras áreas funciones de la empresa”.

Pues bien, el Análisis de Decisiones, con sus modernas versiones y la profundización en la Teoría de la Utilidad, ha sido capaz de adaptarse apropiadamente y resolver tales problemas llegando a soluciones y recomendaciones concretas.

He aquí brevísimamente algunas referencias:

a) *Decisiones multicriterio*: Importantes problemas de decisión multicriterio en ambiente de incertidumbre con una jerarquía en los criterios, en varias o infinitas etapas, con varios grupos de personas afectadas de distinta forma y varias personas participando en la decisión, etc., se presentan constantemente en la realidad políticosocial y es inevitable estudiarlos y resolverlos con herramientas más precisas e incisivas que la intuición de los expertos.

He aquí, como ilustración inicial, algún ejemplo importante en nuestro país:

- a) Un problema polietápico dinámico multicriterio es el de la regulación de una presa. Su propósito es, en esquema, guardar agua durante los períodos de abundancia para utilizarla en temporadas de escasez. Los objetivos que se proponen al construir una presa pueden ser, entre otros: suministros de agua a poblaciones, industrias, tierras, generación de energía eléctrica, protección contra avenidas, aspectos ecológicos y recreativos, ... El problema de la regulación del servicio de un embalse, optimizando globalmente estos objetivos, presenta una gran dificultad al observar que son, en buena parte, conflictivos. A esta dificultad se añade la gran incertidumbre del proceso natural de acumulación de ingresos y de la demanda de agua para diferentes usos. Ello ha originado una serie de metodologías como diagramas de Klemes, programación lineal y no lineal, programación dinámica, modelos estocásticos, ... Recientes trabajos de D. Ríos y A. Salewicz han introducido la metodología del Análisis de Decisiones bayesiano para resolver el problema de la regulación del sistema del lago Kariba y otros de la cuenca del Zambeze, del que se benefician ocho países africanos. Tal trabajo, realizado (1992) bajo los auspicios del International Institute for Applied Systems Analysis, se considera que supera las

metodologías predecesoras y conduce a buenos resultados.

- b) *Decisiones sociales.* Howard y su escuela explican sobre una serie de casos prácticos cómo determinar en un sistema de gobierno democrático la función de utilidad social que ha de ser la base de la solución de los problemas de decisión, llegando a resultados numéricos concretos en problemas como contaminación ambiental por los automóviles (en que evidentemente son distintas las preferencias de los individuos que conducen, que no conducen, fabricantes de automóvil, etc.) o problemas de siembra artificial de nubes, o aceptación del emplazamiento de una central nuclear, etc.
- c) *Decisiones políticas y econométricas.* En la línea de los trabajos sobre decisiones colectivas están las aportaciones del Premio Nobel de Economía Prof. Ragnar Frisch, que ya en su discurso en la Academia Sueca (1971), llama a la cooperación entre políticos y econométricos para que formalicen la *función de preferencia*, que debe considerarse como la base del concepto de *política óptima*.

Considera la función de preferencias simplemente como una función de algunas de las variables, que permiten describir una economía (regional, nacional, mundial), de modo que la maximización de la función sea equivalente a la definición del objetivo que se quiere lograr con la política económica. No se trata, pues, de la función de bienestar, tratada de forma teórica en economía.

“Tengo la firme convicción -dice Frisch- de que en una aproximación a la política económica por la vía de la función de preferencia ésta la clave de una reforma de los métodos de decisión de las sociedades, absolutamente necesarios en el mundo actual”.

“Hay dos aspectos en la metodología: a) el establecimiento de los objetivos a través de la función de preferencia, y b) la construcción de un modelo con ecuaciones y condiciones, bajo el cual caminemos hacia los objetivos”.

“En consecuencia, en un país democrático, el Parlamento, suprema autoridad política, deberá emplear la mayor parte de su tiempo y energía en la discusión de esta forma de compromiso y en las consecuencias que tal forma implicaría; en vez de utilizar prácticamente todo su tiempo y esfuerzo en decidir sobre medidas individuales

que pueden haber sido propuestas. Este último podrá llamarse método prehistórico". Creo que valía la pena esta larga cita de una autoridad científica como Frisch, porque pone de manifiesto la posibilidad de llegar a resultados concretos aceptables en importantes problemas de gobierno de un país.

- d) *Incertidumbre endógena, cambios climáticos y Ecología.* Actualmente el estudio de los riesgos producidos por los discutidos cambios climáticos tiene dos novedades fundamentales para su estudio: a) su carácter global, es decir, que afectan a todas y cada una de las regiones del planeta, y b) su carácter endógeno, es decir, son causados por la misma actividad económica (por ejemplo, las emisiones industriales de CO_2 y CFC). Ambas características contribuyen a que la tradicional incertidumbre se complique cualitativa y cuantitativamente en los problemas de predicción climática.

El carácter endógeno de la incertidumbre en estos problemas permite tomar medidas de mitigación, mediante decisiones para reducir las causas de los cambios climáticos. Contrariamente, los seguros no pueden hacer nada para reducir la probabilidad de daños (riadas, avenidas, desertización, extinción de especies, enfermedades, ...) debidas a los cambios climáticos. Solo pueden establecer compensaciones para los afectados por tales desastres. De esto se derivan algunos problemas de si es posible y como adaptar los seguros a este nuevo tipo de riesgos difícilmente estimables, endógenos, colectivos e irreversibles y también cuáles son las limitaciones o modificaciones a imponer a la tecnología productiva. Trabajos recientes de Arrow-Debreu, Chichilnisky, Heal, etc., han iniciado algunas soluciones a estos problemas de decisión, en que están muy interesados organismos internacionales como las Naciones Unidas, Banco Mundial, OECD...

- e) *Decisiones polietápicas.* Un refrán bien conocido. "más vale pájaro en mano que ciento volando" refleja muy bien el sentido del cambio del valor de un objeto o cantidad monetaria en el paso del tiempo. Dentro de este orden de ideas resulta especialmente interesante considerar las *decisiones de inversión*. En definitiva, la comparación de inversiones se reduce a la comparación de complejos de n componentes o cantidades que se espera representen los

resultados de la inversión en el año cero y sucesivos.

Una axiomática, bien conocida, del Premio Nobel Prof. Koopmans, permite reducir cada complejo a un número real, que es su valor *actualizado*, a través de la conocida *tasa de descuento* y con esto se resuelven, de manera simplista, este tipo de problemas de inversiones, como si fueran de multicriterios en certidumbre. En época reciente se ha estudiado la analogía profunda entre la incertidumbre y el factor tiempo. Por ejemplo, muchas personas prefieren el resultado de una lotería como $\begin{pmatrix} 0.95 & 0.05 \\ 1000\text{pts} & 0 \end{pmatrix}$ en este momento a 1.000 pts. seguras dentro de un año. Mazur realizó en 1987 una serie de experimentos con la alimentación de palomas que prueban que las funciones de descuento por retraso son hiperbólicas, lo mismo que las que expresan los equivalentes en certidumbre probabilísticos, siempre que la probabilidad se haya representado como tantos en favor y en contra de ganancia. Estas relaciones son objetivos de investigaciones recientes para profundizar la similaridad entre selección intertemporal, y selección bajo incertidumbre y ver si se pueden extender a otros tipos de selección multiatributo, tanto en animales como en personas.

- f) *Amalgamación de ordenaciones.* La opinión generalizada entre los economistas de la carencia de sentido de la amalgamación de utilidades individuales llevó al Prof. Arrow a estudiar el problema de amalgamación de preferencias individuales para obtener una función de preferencia social en su libro famoso de 1951.

Arrow se plantea la cuestión de que criterios mínimos deben satisfacer las preferencias de un conjunto de individuos que forman tal sociedad.

“Si excluimos la posibilidad de comparaciones interpersonales de la utilidad -dice Arrow- los únicos métodos satisfactorios de pasar de las preferencias individuales a las sociales para conjuntos amplios de individuos son las impuestas o las dictatoriales”.

Este decepcionante resultado de las primeras investigaciones de Arrow, desanimó, al principio, a muchos investigadores de proseguir el estudio de las Decisiones colectivas. Pero pronto las cosas cambiaron y tales trabajos han logrado primero la rehabilitación

de la regla de la mayoría de un modo completamente general para dos opciones y, de un modo muy amplio, para n opciones. Es decir, las conocidas objeciones a la regla de la mayoría por no transitividad (paradoja de Condorcet), etc., desaparecen en tales condiciones similares a muchas situaciones reales: votaciones con dos partidos políticos o con un conjunto de partidos que admitan una cierta ordenabilidad de sus opiniones.

Hemos traído a recuerdo todos estos problemas de gran interés práctico y teórico, porque también en ellos tienen aplicación eficaz los conceptos del análisis de decisiones. Por ejemplo, trabajos muy recientes de d'Alessandro (1994), relativos al proceso de amalgamación de decisiones multicriterio de un conjunto de p decisores, entre m alternativas, cuyos resultados medidos con n criterios dan lugar a espacios cuyos elementos son matrices $m \times n$ y el nuevo concepto de conjunto eficiente da lugar a resultados que pueden conducir a defensa ciega de intereses personales, riesgo de parálisis de negociaciones, dilución de responsabilidad. . . Esto lleva a la necesidad de modificar la estructura del problema de modo que se reconduzca a una fuerte comunidad de espíritu, y una autoridad superior que represente intereses generales.

- g) En el ámbito internacional hay que señalar que la UNIDO (United Nations Industrial Development Organizations) ha publicado ya en 1972 unas normas para evaluación de proyectos para los países en desarrollo que deben tener en cuenta objetivos múltiples: empleo, redistribución de la renta, balanza de pagos, consumo agregado.
- h) Entusiasmo saber que países de segundo nivel van poniendo en órbita estas investigaciones y aplicaciones como ha dicho Salo-lainen, Ministro finlandés de Comercio exterior, en una alocución en el IIASA (1989): "El Gobierno finlandés ha aplicado en el pasado con regularidad modelos de decisión con objetivos múltiples para mejorar la eficiencia de las operaciones y obtener mejor comprensión de procesos de decisión complejos. Un ejemplo de tales aplicaciones es un estudio realizado en cooperación con el National Board of Economic Defense para preparar planes para el manejo de situaciones de emergencia, tales como accidentes en una planta nuclear, embargos comerciales o conflictos internacionales. Con

la ayuda de estos modelos, Finlandia está ahora mejor preparada para hacer frente a situaciones de emergencia. Opino que en Finlandia el sector público mantiene la creencia en la utilidad y aplicabilidad de los métodos analíticos de decisión para resolver problemas importantes como los señalados”.

9 Inteligencia artificial. Sistemas expertos

Vamos a referirnos brevemente a la realización del Análisis de decisiones con los *sistemas expertos*, que utilizan los métodos de la Inteligencia Artificial para la *toma de decisiones*. Es bien sabido que los sistemas expertos tradicionales suministrarán un soporte para las decisiones mimificando las recomendaciones de los expertos humanos y tratando la incertidumbre mediante métodos ad hoc, que no tenían para nada en cuenta las relaciones de relevancia de los sucesos.

El nuevo enfoque probabilístico ha permitido introducir en los métodos de I. A. los *grafos bayesianos*, *diagramas de influencia*, etc. Ellos permiten establecer un conjunto coherente de dependencias directas o indirectas que constituyen la esencia cualitativa de los modelos de bases de conocimientos y de los sistemas expertos asociados a los problemas de decisión.

Recientemente, en 1990, ha construido Heckerman un sistema experto llamado *normativo*, que mejora notablemente la precisión en el tratamiento de la incertidumbre, apoyándose en la regla de la esperanza de utilidad. Mediante los nuevos conceptos de similaridad y partición asociados a la representación de la incertidumbre en el llamado grafo de creencias, logra una gran simplificación en el cálculo de probabilidades subjetivas. En el experto que llama *Pathfinder*, dedicado al tratamiento de 60 enfermedades que se presentan en los ganglios linfáticos, logra reducir de 75.000 a 14.000 el número de probabilidades que se han de obtener para su construcción. Es, en definitiva, aparte de la importancia de su aplicación concreta, una prueba de que la identificación de formas específicas de independencia condicional y la utilización de las mismas en la representación de conocimientos, puede permitir la construcción de sistemas expertos normativos válidos para decisiones de gran complejidad.

Como dice Heckerman, los *sistemas expertos normativos*, es decir, sistemas expertos que sitúan el conocimiento de expertos en el marco del análisis de decisiones, tienen la posibilidad de incrementar la calidad de las decisiones tomadas por los médicos y de mejorar de una forma dramática el resultado del paciente.

Tales metodologías se aplican actualmente al problema de la ictericia del recién nacido por el grupo de Análisis de decisiones de la F. de Informática, en colaboración con el H. Gregorio Marañón, dentro del marco del GAD de la R. Acad. de Ciencias.

10 Conclusiones

El premio Nobel Prof. Simon, en un artículo reciente escrito conjuntamente con Dantzig, Raiffa, . . . , [48,b] ha dicho que “el desarrollo de la teoría de la utilidad subjetiva esperada es una de las grandes conquistas intelectuales del siglo XX, que nos da por primera vez un principio formalmente axiomatizado que permite a un individuo comportarse de una manera consciente y racional”.

“Admitiendo probabilidades asignadas subjetivamente, la teoría de la utilidad esperada subjetiva abre el camino para fusionar opiniones subjetivas con datos objetivos, un enfoque que puede ser utilizado también en sistemas decisionales con hombres y máquinas. En la versión probabilística de la teoría, la regla de Bayes prescribe como los individuos deberían tener en cuenta la nueva información y como deberían responder a la información incompleta”.

Se ve, pues, que Simon, uno de los más agudos críticos de la teoría de la utilidad esperada durante 40 años, acepta su enorme importancia para la obtención práctica de las decisiones en incertidumbre en universos bien definidos y de limitada complejidad. Pero también considera que hay situaciones reales de decisión a las que no todos los axiomas de la teoría de la utilidad subjetiva esperada se ajustan de una manera empíricamente aceptable. Propone entonces las teorías que llama de *racionalidad limitada*, que cambian algunas de las hipótesis de la teoría racional clásica.

Por ejemplo, en vez de suponer bien definido un conjunto fijado de alternativas, entre las que el decisor ha de elegir, admite un proceso para

la génesis de alternativas posibles. En vez de suponer distribuciones de probabilidad conocida de los resultados, introduce solamente métodos de estimación para las mismas, o bien, considera estrategias que permitan tratar la incertidumbre sin suponer conocidas las probabilidades. En vez de maximizar la esperanza de utilidad busca una estrategia satisfactoria, asociadas a unas metas fijadas por el decisor. Estos cambios son sugeridos, según Simon, por el conocimiento empírico del comportamiento humano en los procesos de decisión y de las limitaciones de nuestra capacidad cognitiva para descubrir alternativas, calcular sus consecuencias, y hacer comparaciones entre las mismas.

No se trata aquí de hacer una comparación de las ideas directrices de estas y otras teorías, llamadas de *racionalidad limitada*, que ruedan hace más de 40 años, y pretenden inspirarse más en el estudio sistemático y detallado del desarrollo del proceso humano de toma de decisiones, que en el planteamiento de la situación predictiva de elección en la forma que lo hace la teoría de la utilidad esperada.

Trabajos recientes (T.K. Lant, 1994), han iniciado la comparación experimental de estos dos grandes tipos de modelos, apareciendo una tendencia a considerarlos compatibles y, en cierto modo, complementarios.

Y otro tanto podríamos decir, gracias a los trabajos de Buede-Maxwell (1995) sobre algunas teorías basadas en los conjuntos difusos, jerarquías analíticas de Saaty, trayectorias de Wierzbicki, decisiones de Arrow, etc y de otras posibles que tengan las características de ser observables medibles y coherentemente modelizables.

Tras estas discusiones sobre la *hipótesis de la utilidad esperada*, puede decirse que quizá su mayor mérito sea funcionar hasta que de ella misma surja un nuevo y deslumbrante paradigma, repitiéndose la historia del período Bernoulli-Von Neumann, con otro Von-Neumann(?).

Todo esto nos inclina a considerar la ciencia y el análisis de decisiones, a los que hemos dedicado media vida científica, y esta ya larga conferencia, como suficientemente bien establecidos para contribuir, durante muchos años, con sus métodos al progreso de los humanos, tanto en el ambiente económico-social como en el científico.

Referencias

- [1] Arrow, K.J. (1958), "Bernouilli Utility Indicators for Distribution over Arbitrary Spaces", *Dept. of Economics, Tech. Rep.* 57.
- [2] Arrow, K. J. (1951), *Social Choice and Individual Values*, Yale Univ. Press.
- [3] Axelrod, R. (1984), *The Evolution of Cooperation*, Basic Books, New York.
- [4] Bayes, T. (1763), "An Essay Towards Solving a Problem in the Doctrine of Chance", with Richard Price's foreword and discussion, *Phil. Trans Roy. Soc.*, 370-418.
- [4,b] Berger J., Ríos D. Recent developments in Bayesian Inference with applications in Hydrology. *Advances in Stochastic Hydrology*. UNESCO, 1997.
- [5] Bernouilli, J. (1713), *Ars Conjectandi*, Impensi Thurnisiorum: Fratun, Basilea.
- [6] Bernouilli, D. (1738), "*Specimen theoriae Novae de Mensura Sortis*" *Commentarii Academiae Scientiae Imp. Ptropolitanae*, V, 175-192.
- [7] Borel, E. (1924), "A Propos d'un Traité de Probabilité", *Revue Philosophique* 98, 321-326.
- [8] Cantor, G. (1895), "Beiträge zur Mengenlehre" *Mathematische Annalen*.
- [9] Chipman, J.S. (1971), *Preference, utility and demand*. N. Y. Harcourt.
- [10] Cochrane, J.L. y M. Zeleny (eds) (1973), *Multiple Criteria Decision Making*, University of South Carolina Press, Columbia.
- [11] Condorcet, M.J.A.C. (1785), *Essai sur l'Application de l'Analyse a la Probabilité des Décisions Rendues a la Pluralité des Voix*, Paris.
- [12] Debreu, G. (1954), "Representation of a Preference Ordering by a Numerical Function" en *Decision Processes*, R.M. Thrall, C.H. Coombs y R.L. Davies (eds), Wiley, New York.

- [13] Debreu, G. (1959), *Theory of Value*, Wiley, New York.
- [14] De Finetti, B. (1931), *Probabilismo, Saggio Critico sulla Teoria delle Probabilità e sul Valore della Scienza*, F. Perella, Naples.
- [15] De Finetti, B. (1937), "La Prevision, ses Lois Logiques, ses Sources Subjectives", *Ann. Inst. H. Poincaré*, 7, 1-68.
- [16] De Finetti, B. (1952), "Sulla Preferibilità" *Gionale degli Economisti e Annali di Economia*, 11, 685-709.
- [17] Edgeworth, F.Y. (1881), *Mathematical Physics*, P. Keagan.
- [18] Fishburn, P.C. (1976), *Utility Theory for Decision Making*, Wiley, New York.
- [19] Fishburn, P.C. (1982), *The Foundations of Expected Utility*, Reidel Dordrecht, The Netherlands.
- [19,b] Fishburn, Wakker, "Invention of independence condition for preferences". *Management Science* Vol. 41, 1995, 1130-1144.
- [20] Frisch, R. (1971), "Cooperation Between Politicians and Econometricians on the Formalization of Political Preference", *Reunión de Premios Nobel en Lindau*.
- [21] Hacking, I. (1991), *The Emergence of Probability*, Cambridge University Press.
- [22] Haussdorf, F. (1906), *Untersuchungen über Ordnungstypen*, Leipzig.
- [22,b] Heckerman, D. (1991), *Toward normative expert Systems: The Pathfinder Project*. Cambridge U. P.
- [22,c] Hey J.D. and Orne, Ch., "Circles, Triangles and Straight Lines", *FUR VI* (1994).
- [23] Howard, R. (1964), *The principles and Applicatins of Decision Analysis*, Strategic Decision Group, Menlo Park, California.
- [24] Huygens, C.H. (1657), *Ratiociniis in Ludo Aleae*, Amsterdam.
- [25] Jevons (1991), *Theory of Political Economy*, MacMillan, London.

- [25,b] Jouini, Clemen, Copula models for aggregating expert opinions. *O.R.*, Vol. 44, 1996, 444-457.
- [26] Keeney, R. y H. Raiffa (1976), *Multiobjective Decision Making*, Wiley, New York.
- [27] Koopmans, T.C. (1951), "Analysis of Production as an Efficient Combination of Activities", *Activity Analysis of Production and Allocation*, Cowles Commission Monograph N^o 13, Wiley, New York.
- [28] Kuhn, H.W. y A.W. Tucker (1951), "Nonlinear Programming", en *Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, J. Neyman (ed.), Berkeley, California.
- [29] Laplace, P.S. (1812), *Théorie Analytique des Probabilités*, Courcier, Paris.
- [30] Lant (1992), Aspiration level Adaptation: an empirical exploration. *Manag. Sci.* Vol. 38,5.
- [31] Lindley, D.V. (1987), "The Probability Approach to the Treatment of Uncertainty in Artificial Intelligenced and Expert Systems", *Statistical Science*, 2, 17-24.
- [32] Maynard-Smith, J. (1982), *Evolution and the Theory of Games*, Cambridge University Press.
- [33] Miller, B.L. (1975), Optimal portfolio, *Management Science*, 22, p. 220.
- [34] Pareto, V. (1906), *Manuale di Economia Politica*, Societa Editrice Libreria, Milano.
- [35] Pascal, B. (1963), *Oeuvrées Completes*, Lafuma, Paris.
- [36] Prelec and Löwenstein, (1991), "Decision Making over Time and under uncertainty". *Manag. Science*, Vol. 37.
- [37] Quiggin and Horowitz "Time and Risk". *Journ. of Risk and Uncert.* Vol. 10, 37-55.
- [38] Raiffa, H. (1968), *Decision Analysis*, Addison Wesley, Reading Mass.

- [39] Raiffa, H. (1982), *The Art & Science of Negotiation*, Harvard U.P., Cambridge Mass.
- [40] Ramsey, F.P. (1931), "Truth and Probability", en *The Foundations of Mathematics and Other Essays*, F.P. Ramsey (ed.), Harcourt, Brace and Co, New York. Reprinted in *Studies in Subjective Probability*, 2nd Ed., 1980, H. Kyburg and Smockler (eds.).
- [41] Ríos S. (1967), *Procesos Dinámicos de Decisión*, Memorias de la Academia de Ciencias, Madrid.
- [42] Ríos S. (1977), *Métodos Estadísticos*, Eds. del Castillo, Madrid.
- [43] Ríos S. (1995), *Modelización*, Alianza Editorial, Madrid.
- [44] Ríos S. (1989), "La Teoría de la Decisión", en *Historia de la Ciencia Estadística*, Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Madrid, 163-184.
- [44,b] D. Ríos-Insua. (1992), *Sensitivity Analysis in Multiobjective Decision Analysis*. Springer Verlag.
- [45] Ríos S. (1995), "Hacia el Siglo XXI: Las Decisiones", *Discursos de Ingreso como Académico de Honor*, Real Academia Sevillana de Ciencias, Sevilla.
- [45,b] D. Ríos-Insua. (1995), The operation on Kariba Lake, (to appear in *Multicriteria Decision Analysis*).
- [45,c] S. Ríos, S. Ríos-Insua, D. Ríos Insua, P.G. Barreno, Allais Phenomena and Completeness of Preferences (to appear in Act. FUR VI).
- [46] Ríos, S., M.J. Ríos Insua y S. Ríos-Insua, (1989), *Procesos de Decisión Multicriterio*, EUEDEMA, Madrid.
- [46,b] Rotar, V.I., On a statistical approach to choice under uncertainty, *Jour of Risk and uncertainty*, Vol. 9, 93-107.
- [47] Savage, L.J. (1954), *The Foundations of Statistics*, Wiley, New York.

- [48] Savage, L.J. (1972), *The Foundations of Statistical Inference*, Methuen, London.
- [48,b] H.A. Simon, G.B. Dantzig, H. Raiffa, Decision making and problem solving, (en *Decision Making Ed. Mary Zey. SAGE Publications*, 1992).
- [49] Stigler, G.J. (1968), "The Development of Utility Theory", en *Utility Theory: A Book of Readings*, A.N. Page (ed.), Wiley, New York, 55-118.
- [50] Von Neumann, J. y O. Morgenstern (1944), *Theory of Games and Economic Behaviour*, Princeton University Press, Princeton.
- [51] Walras (1874-77), *Elements D'economie Politique Pure*, L. Corbaz and Companie, Lausanne.
- [52] Wald, A. (1939), "Contributions to the Theory of Statistical Estimation and Testing Hypotheses", *Ann. Math. Stat.* 10.
- [53] Wald, A. (1945), "Statistical Decision Functions which Minimize the Maximum Risk", *Ann. Math.* 46.
- [54] Wald, A. (1947), *Sequential Analysis*, Wiley, New York.
- [55] Wald, A. (1950), *Statistical Decision Functions*, Wiley, New York.

Isaac Peral 1
(Residencia de Profesores 5, 4º Izquierda)
28015 Madrid

Recibido: 14 de Abril de 1997
Revisado: 29 de Septiembre de 1997