REVISTA MATEMÁTICA COMPLUTENSE ISSN 1139-1138
Vol. 15 Núm. 2 (2002), 619-629

SUR LA CONTRÔLABILITÉ EXACTE DE L'ÉQUATION DES PLAQUES VIBRANTES

Mary Teuw NIANE and Abdoulaye SENE

Abstract

We define, for the trace of solution of vibrating plates equation, norms with initial conditions in no regular spaces. Then, we give the corresponding exact controllability results.

Résumé

On définit, pour la trace de la solution de certains modèles de plaques vibrantes, des normes avec des données initiales dans des espaces peu réguliers. Ensuite on déduit les théorèmes de contrôlabilité correspondants.

1 Introduction

Soit Ω un ouvert régulier de $\mathbb{R}^2$ de frontière $\Gamma = \partial\Omega$ et $T > 0$.

Pour $x^0 \in \mathbb{R}^2$ avec $x^0 = (x_1^0, x_2^0)$, on définit la fonction $m(x) = x - x^0$ et une partition de la frontière $\Sigma =]0, T[\times\partial\Omega$ de la mamière suivante:

$$\begin{aligned} \Gamma_0 &= \{x \in \Gamma / m(x).\nu(x) > 0\}, \\ \Gamma_0^* &= \{x \in \Gamma / m(x).\nu(x) < 0\}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \Sigma_0 &=]0, T[\times\Gamma_0, \\ \Sigma_0^* &=]0, T[\times\Gamma_0^*. \end{aligned}$$

On introduit aussi les constantes:

2000 Mathematics Subject Classification: 93C20, 93B05.
Servicio de Publicaciones. Universidad Complutense. Madrid, 2002

$R(x^0) = \max\limits_{x\in\overline{\Omega}} (\sum_{k=1}^{k=2}(x - x_k^0)^2)^{\frac{1}{2}}$ et $T_0 = \frac{R(x^0)}{\lambda_0}$ où λ_0^2 est la première valeur
propre du problème

$$\begin{cases} \Delta^2 w = \lambda^2 w \text{ dans } \Omega, \\ w \in H_0^2(\Omega). \end{cases}$$

On note par $\nu(x)$ la normale unitaire extérieure en tout point x appartenant à Γ.

Soit u la solution de l'équation

$$(E)\begin{cases} u'' + \Delta^2 u = 0 \quad \text{dans }]0,T[\times\Omega \\ \gamma u = \gamma\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \\ u(0) = u_0 \ , \ u'(0) = u_1 \end{cases}$$

On définit pour des données initiales u_0 et u_1 respectivement dans $H_0^2(\Omega)$ et $L^2(\Omega)$, l'énergie associée à (E) par

$$E_0 = \frac{1}{2}(\|\Delta u_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u_1\|^2_{L^2(\Omega)}).$$

Dans J.- Lions [1], il a été établi l'inégalité directe

$$\int_0^T \int_{\Gamma_0} (\Delta u)^2 \, d\sigma dt \leq c_0 E_0 \tag{1}$$

et pour tout $T > T_0$ l'inégalité inverse

$$\int_0^T \int_{\Gamma_0} (\Delta u)^2 d\sigma dt \geq c(T) E_0, \tag{2}$$

où

$$c(T) = \frac{4}{R(x^0)}(T - T_0).$$

De même, en définissant l'opérateur non borné A de $L^2(\Omega)$ par

$$D_A = \left\{u \in H_0^2(\Omega) \ / \ \Delta^2 u \in L^2(\Omega)\right\} \text{ et } Au = \Delta^2 u \quad \text{pour tout } u \in D_A,$$

Dans I.Lasiecka-R.Triggiani [5], pour la solution u de (E) correspondante aux données $u_0 \in D_{A^{\frac{3}{4}}}$ et $u_1 \in D_{A^{\frac{1}{4}}}$, il a été établi l'inégalité

$$C(T - T_0) E_{\frac{3}{4}} \leq \int_\Sigma |\gamma \frac{\partial \Delta u}{\partial \nu}|^2 d\sigma dt \tag{3}$$

où

$$E_{\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}\left\{\|A^{\frac{3}{4}}u_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \|A^{\frac{1}{4}}u_1\|^2_{L^2(\Omega)}\right\}.$$

et C est une constante strictement positive.

J.-L.Lions a établi avec (1) et (2) la contrôlabilité exacte de l'équation des plaques vibrantes avec un contrôle sur la dérivée normale de l'état du système. Quant à I.Lasiecka et R.Triggiani, ils ont établi la contrôlabilité exacte de l'équation des plaques vibrantes par un contrôle de position en utilisant (3). Enfin E.Zuazua [4] a montré, toujours pour les mêmes types de données initiales, la contrôlabilité exacte en un temps arbitrairement petit.

On généralise l'estimation de $\gamma\Delta u$ dans $L^2(0,T;L^2(\Gamma_0))$ établi dans (2) à des estimations dans $L^2(0,T;H^{-\frac{3}{2}\theta}(\Gamma_0))$ où $\theta\in[0,1]$. Dans le même ordre d'idées, on fait de même pour $\gamma\frac{\partial\Delta u}{\partial\nu}$ dans (3) en des estimations dans $L^2(0,T;H^{-\frac{\theta}{2}}(\Gamma_0))$ où $\theta\in[0,1]$. Ces inégalités sont obtenues par interpolation.

En utilisant ces nouvelles estimations, on établit des résultats de contrôlabilité éxacte de l'équation des plaques vibrantes pour des données peu régulières.

2 Contrôle portant sur la dérivée normale

Soit $\theta\in[0,1]$, pour tout $(\varphi_0,\varphi_1)\in\mathcal{D}(\Omega)\times\mathcal{D}(\Omega)$ on pose

$$\|(\varphi_0,\varphi_1)\|^2_{F_\theta} = \int_0^T \|\gamma\Delta\varphi\|^2_{H^{-\frac{3\theta}{2}}(\Gamma_0)}\,dt$$

où φ est la solution de l'équation homogène (E) correspondant aux donnèes initiales (φ_0,φ_1).On note par F_θ le complété de $\mathcal{D}(\Omega)\times\mathcal{D}(\Omega)$ pour la norme $\|,\|^2_{F_\theta}$

Proposition 1. *Pour tout $\theta\in[0,1]$, la solution φ de l'équation homogène (E), correspondant aux données initiales $(\varphi_0,\varphi_1)\in F_\theta$ vérifie l'inégalité*

$$\int_0^T \|\gamma\Delta\varphi\|^2_{H^{-\frac{3}{2}\theta}(\Gamma_0)} \geq K\left\{\|\varphi_0\|^2_{H_0^{2-2\theta}(\Omega)} + \|\varphi_1\|^2_{H^{-2\theta}(\Omega)}\right\} \tag{4}$$

où K est une constante strictement positive.

Preuve. Soit $(\varphi_0, \varphi_1) \in L^2(\Omega) \times H^{-2}(\Omega)$. On considère le problème

$$\varphi^{"} + A\varphi = 0,\ \varphi(0) = \varphi_0,\ \varphi^{'}(0) = \varphi_1.$$

Ce problème admet une solution unique donnée par $(\varphi(t), \varphi^{'}(t)) = S_1(t)(\varphi_0, \varphi_1)$ où $\{S_1(t) : t \in \mathbb{R}\}$ est le $\mathcal{C}_0$ goupe unitaire sur $L^2(\Omega) \times H^{-2}(\Omega)$ généré par A.
Posons $\psi = A^{-1}\varphi^{'}$, $\psi_0 := A^{-1}\varphi_1 \in H_0^2(\Omega)$, $\psi_1 := -\varphi_0 \in L^2(\Omega)$. alors ψ vérifie

$$\psi^{"} + A\psi = 0\ \ ,\ \psi^{'}(0) = \psi_1$$

Aussi ce problème a une unique solution donnée par $(\psi(t), \psi^{'}(t)) = S_2(t)(\psi_0, \psi_1)$
où $\{S_2(t) : t \in \mathbb{R}\}$ est un $\mathcal{C}_0$ groupe unitaire sur $H_0^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ généré par A.
Pour $T > T_0$, on applique l'inégalité (2) à ψ, ce qui donne l'estimation

$$(\|\varphi_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\varphi_1\|^2_{H^{-2}(\Omega)} \leq C_T \int_{\Sigma_0} |\gamma\Delta A^{-1}\varphi^{'}|^2 d\Sigma. \tag{5}$$

Pour $\varepsilon \geq 0$ suffisamment petit (tel que $T - 2\varepsilon - T_0 > 0$) , on définit la fonction $\varphi_\varepsilon \in D(R)$ vérifiant :
i) $0 \leq \varphi_\varepsilon \leq 1$,
ii) $\text{supp}(\varphi_\varepsilon) \subset]0, T[$
iii) $\varphi_{\varepsilon|[\varepsilon, T-\varepsilon]} = 1$.
En multipliant par φ_ε et en intégrant par partie on obtient :

$$\begin{aligned}(\|\varphi_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\varphi_1\|^2_{H^{-2}(\Omega)}) & \\ \leq & -C_T \int_{\Sigma_0} [\varphi_\varepsilon^{'}(\gamma\Delta A^{-1}\varphi^{'}(\gamma\Delta A^{-1}\varphi) + \varphi_\varepsilon(\gamma\Delta A^{-1}\varphi^{"})(\gamma\Delta A^{-1}\varphi)] d\Sigma \\ \leq & C_T \int_{\Sigma_0} [(\frac{1}{2})\varphi^{"}|\gamma\Delta A^{-1}\varphi|^2 + \varphi_\varepsilon(\gamma\Delta\varphi)(\gamma\Delta A^{-1}\varphi)] d\Sigma.\end{aligned}$$

En utilisant l'estimation (1) on obtient

$$\begin{aligned}\int_{\Sigma_0} \varphi_\varepsilon^{"}|\gamma\Delta A^{-1}\varphi|^2 d\Sigma & \leq C_T(\|A^{-1}\varphi^2\|^2_{H_0^2(\Omega)} + \|A^{-1}\varphi_1\|^2_{L^2(\Omega)}) \\ & \leq C_T(\|\varphi_0\|^2_{H^{-2}(\Omega)} + \|\varphi_1\|^2_{D'_A})\end{aligned}$$

où D'_A est le dual de D_A dans $L^2(\Omega)$.
En appliquant l'inégalité de Young, on a, pour δ positif quelconque

$$\int_{\Sigma_0} \varphi_\varepsilon(\gamma\Delta\varphi)(\gamma\Delta A^{-1}\varphi)d\Sigma$$
$$\leq C(\frac{1}{\delta}\|\gamma\Delta\varphi\|^2_{L^2(0,T;H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma_0))} + \delta\|\gamma\Delta A^{-1}\varphi\|^2_{L^2(0,T;H^{\frac{3}{2}}(\Gamma_0))})$$

Or $\gamma A^{-1}\varphi = \gamma\frac{\partial}{\partial\nu}A^{-1}\varphi = 0$. Donc par le théorème de régularité appliqué au bilaplacien

$$\begin{aligned}\|\gamma\Delta(A^{-1}\varphi)\|^2_{L^2(0,T;H^{\frac{3}{2}}(\Gamma_0))} &\leq C_T\|\Delta^2(A^{-1}\varphi)\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}\\ &\leq C_T\|\varphi\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}\\ &\leq C_T(\|\varphi_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\varphi_1\|^2_{H^{-2}(\Omega)}).\end{aligned}$$

En choisissant $\delta = \delta_T$ suffisamment petit, on obtient

$$\begin{aligned}&(\|\varphi_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\varphi_1\|^2_{H^{-2}(\Omega)})\\ &\leq C_T[(\|\varphi_0\|^2_{H^{-2}(\Omega)} + \|\varphi_1\|^2_{D'_A}) + \|\gamma\Delta\varphi\|^2_{L^2(0,T;H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma_0))}]\end{aligned} \tag{6}$$

Il reste maintenant à montrer que

$$(\|\varphi_0\|^2_{H^{-2}(\Omega)} + \|\varphi_1\|^2_{D'_A}) \leq C_T\|\gamma\Delta\varphi\|^2_{L^2(0,T;H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma_0))} \tag{7}$$

En effet, supposons qu'il éxiste une suite$(\varphi_n)_n$ solution de

$$\varphi_n^{"} + A\varphi_n = 0,\ \varphi_n(0) = \varphi_{0,n},\ \varphi_n^{'} = \varphi_{1,n}$$

où $(\varphi_{0,n}, \varphi_{1,n}) \in L^2(\Omega) \times H^{-2}(\Omega)$ et vérifiant

$$(\|\varphi_{0,n}\|^2_{H^{-2}(\Omega)} + \|\varphi_{1,n}\|^2_{D'_A}) = 1 \ \text{ et}\|\gamma\Delta\varphi_n\|^2_{L^2(0,T;H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma_0))} \longrightarrow 0$$

Alors avec(6), $(\varphi_{0,n}(t), \varphi_{1,n}(t))$ est bornée dans $L^2(\Omega) \times H^{-2}(\Omega)$.
Quitte à extraire une sous suite, on a

$$(\varphi_{0,n}, \varphi_{1,n}) \longrightarrow (\varphi_0, \varphi_1) \text{ faiblement dans } L^2(\Omega) \times H^{-2}(\Omega)$$

comme l'injection de $L^2(\Omega)\times H^{-2}(\Omega)$ dans $H^{-2}(\Omega)\times D'_A$ étant compacte,

$$(\varphi_{0,n}, \varphi_{1,n}) \longrightarrow (\varphi, \varphi^{'}) \text{ fortement dans } H^{-2}(\Omega) \times D'_A$$

Donc

$$\|\varphi_0\|^2_{H^{-2}(\Omega)} + \|\varphi_1\|^2_{D'_A} = 1 \tag{8}$$

Soit φ la solution correspondante à φ_0 et φ_1. On a $\|\gamma\Delta\varphi\|^2_{L^2(0,T;H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma_0))} = 0$ et φ est solution de

$$\varphi^{"} + \Delta^2\varphi = 0$$

$$\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial\nu} = 0 \text{ sur } \Sigma,\ \ \Delta\varphi = 0 \text{ sur } \Sigma_0$$

alors, par un théorème d'unicité classique $\varphi \equiv 0$ sur Σ. Ce qui contredit (8).
Ainsi il existe une constante C_T telle que

$$\int_0^T \|\gamma\Delta\varphi\|^2_{H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma_0)}\, dt \geq C_T \left\{\|\varphi_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\varphi_1\|^2_{H^{-2}(\Omega)}\right\}. \tag{9}$$

Les inégalités (2) et (9) donne par interpolation, pour tout $\theta \in [0,1]$ et des données initiales $(\varphi_0, \varphi_1) \in \left(H_0^{2-2\theta} \times H^{-2\theta}(\Omega)\right)$

$$\int_0^T \|\gamma\Delta\varphi\|^2_{H^{-\frac{3}{2}\theta}(\Gamma_0)} \geq K \left\{\|\varphi_0\|^2_{H_0^{2-2\theta}} + \|\varphi_1\|^2_{H^{-2\theta}}\right\}. \tag{10}$$

On note par Δ_Γ l'opérateur de Laplace Beltrami.
Une conséquence de l'inégalité (10) est le théorème de contrôlabilité exacte suivant:

Théorème 2. *Il existe un temps T_0 tel que si $T > T_0$, alors pour tout $\theta \in [0,1]$ et tout couple de données initiales $(y_0, y_1) \in \left(H_0^{2\theta} \times H^{2\theta-2}(\Omega)\right)$, il existe $v \in L^2(0,T;H^{-\frac{3}{2}\theta}(\Gamma_0)$ tel que, si y est la solution de*

$$\begin{cases} y'' + \Delta^2 y = 0 & \textit{dans }]0,T[\times\Omega \\ \gamma y = 0 & \textit{sur } \Gamma^*(x^0) \\ \gamma\frac{\partial y}{\partial\nu} = (-\Delta_\Gamma)^{-\frac{3}{2}\theta} v & \textit{sur } \Gamma_0 \\ y(0) = y_0\ ;\ y'(0) = y_1, \end{cases}$$

alors, à l'instant T, $y(T) = y'(T) = 0$.

Preuve. On applique la méthode HUM de J.-L.LIONS [1]

On part de $\varphi_0 \in H_0^{2-2\theta}(\Omega)$, $\varphi_1 \in H^{-2\theta}(\Omega)$.

Soit $\varphi \in C\left(0,T;H_0^{2-2\theta}(\Omega)\right) \cap C^1\left(0,T;H^{-2\theta}(\Omega)\right)$ l'unique solution du problème

$$\begin{cases} \varphi'' + \Delta^2\varphi = 0 \\ \varphi(0) = \varphi_0 \\ \varphi'(0) = \varphi_1 \\ \gamma\varphi = \gamma\frac{\partial\varphi}{\partial\nu} = 0 \end{cases}$$

Soit ξ l'unique solution par transposition de l'équation

$$\begin{cases} \xi'' + \Delta^2\xi &= 0 \quad \text{dans }]0,T[\times\Omega, \\ \xi(T) &= 0 \quad \text{dans } \Omega, \\ \xi'(T) &= 0 \quad \text{dans } \Omega, \\ \gamma\xi &= 0 \quad \text{sur }]0,T[\times\partial\Omega, \\ \gamma\frac{\partial}{\partial\nu}\xi &= z \quad \text{sur }]0,T[\times\partial\Omega, \end{cases}$$

où $z \in L^2(0,T;H_0^{\frac{3}{2}\theta}(\Gamma_0))$.

En posant $v = \gamma\Delta\varphi$ et en prenant $z = (-\Delta_\Gamma)^{-\frac{3}{2}\theta}\, v$, on a

$$\xi \in C(0,H_0^{2\theta}(\Omega)) \cap C^1(0,T;H^{2\theta-2}(\Omega))$$

et

$$\xi(0) \in H^{2\theta}(\Omega),\;\; \xi'(0) \in H^{2\theta-2}(\Omega).$$

En vertu de la proposition 1, on a $F_\theta \subset H_0^{2-2\theta}(\Omega) \times H^{-2\theta}(\Omega)$ et donc $H^{2\theta-2}(\Omega) \times H_0^{2\theta}(\Omega) \subset F'_\theta$. On définit l'opérateur

$$\begin{aligned} \wedge : F_\theta &\longmapsto F'_\theta \\ (\varphi_0,\varphi_1) &\longmapsto (\xi'(0);-\xi(0)). \end{aligned}$$

On vérifie que

$$\begin{aligned} \langle \wedge(\varphi_0,\varphi_1),(\varphi_0,\varphi_1)\rangle_{F_\theta,F'_\theta} &= \int_\Sigma \langle (-\Delta_\Gamma)^{-\frac{3}{2}\theta}v, v\rangle_{H_0^{\frac{3}{2}\theta}(\Gamma_0),H^{-\frac{3}{2}\theta}(\Gamma_0)} d\sigma dt \\ &= \|v\|^2_{L^2(0,T;H^{-\frac{3}{2}\theta}(\Gamma_0)} \end{aligned}$$

et que $\wedge$ est un isomorphisme.Donc pour tout $T > T_0$ et pour tout $(y_0,y_1) \in F'_\theta$, il existe un $(\varphi_0,\varphi_1) \in F_\theta$ tel que $\wedge(\varphi_0,\varphi_1) = (y_1,-y_0)$. Soient φ et ξ les fonctions définies précédemment avec $\xi_0 = y_0$ et $\xi_1 = y_1$. Grace à l'unicité de la solution, on a $y = \xi$. Donc $y(T) = y'(T) = 0$, ce qui prouve le théorème.

3 Cas du contrôle de position

Soit $\theta \in [0,1]$, pour tout $(\varphi_0, \varphi_1) \in \mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)$ on pose

$$\|(\varphi_0, \varphi_1)\|^2_{G_\theta} = \int_0^T \|\gamma \Delta \varphi\|^2_{H^{-\frac{\theta}{2}}(\Gamma_0)} \, dt$$

où φ est la solution de l'équation homogène (E) correspondant aux donnèes initiales (φ_0, φ_1).On note par G_θ le complété de $\mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)$ pour la norme $\|, \|^2_{G_\theta}$.

Proposition 3. *Pour tout $\theta \in [0,1]$ et des données initiales $(\varphi_0,\varphi_1) \in G_\theta$ on a, pour tout $T > T_0$ l'inégalité*

$$\int_0^T \left\| \gamma \frac{\partial \Delta \varphi}{\partial \nu} \right\|^2_{H^{-\frac{\theta}{2}}(\Gamma_0)} \geq \alpha(T - T_0) \left\{ \left\| A^{\frac{3}{4} - \frac{\theta}{2}} \varphi_0 \right\|^2_{L^2(\Omega)} + \left\| A^{\frac{1}{4} - \frac{\theta}{2}} \varphi_1 \right\|^2_{L^2(\Omega)} \right\} \tag{11}$$

Preuve. La preuve est identique à celle de la proposition (1). Soit les donnèes initiales $(\varphi_0, \varphi_1) \in D_{A^{\frac{1}{4}}} \times D_{A^{\frac{-1}{4}}}$ et le problème

$$\varphi'' + A\varphi = 0, \ \varphi(0) = \varphi_0, \ \varphi'(0) = \varphi_1.$$

Ce problème admet une solution unique donnée par $(\varphi(t), \varphi'(t)) = S_1(t)(\varphi_0, \varphi_1)$ où $\{S_1(t) : t \in \mathbb{R}\}$ est le $\mathcal{C}_0$ goupe unitaire sur $D_{A^{\frac{1}{4}}} \times D_{A^{\frac{-1}{4}}}$ généré par A.
Posons $\psi = A^{-1}\varphi', \ \psi_0 := A^{-1}\varphi_1, \ \psi'(0) = \psi_1 := -\varphi_0$ .Alors ψ vérifie

$$\psi'' + A\psi = 0, \ \psi(0) = \psi_0 \in D_{A^{\frac{3}{4}}}, \ \psi'(0) = \psi_1 \in D_{A^{\frac{1}{4}}}.$$

Ce problème a une unique solution donnée par $(\psi(t), \psi'(t)) = S_2(t)(\psi_0, \psi_1)$
où $\{S_2(t) : t \in \mathbb{R}\}$ est un $\mathcal{C}_0$ groupe unitaire sur $D_{A^{\frac{3}{4}}} \times D_{A^{\frac{1}{4}}}$.
Pour $T > T_0$, on a en utilisant l'estimation (3)

$$(\|A^{\frac{1}{4}}\varphi_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \|A^{\frac{-1}{4}}\varphi_1\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C_T \int_{\Sigma_0} |\gamma \frac{\partial}{\partial \nu} \Delta A^{-1} \varphi'|^2 d\Sigma. \tag{12}$$

En multipliant par φ_ε et en intégrant par partie on obtient :

$$(\|A^{\frac{1}{4}}\varphi_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \|A^{\frac{-1}{4}}\varphi_1\|^2_{L^2(\Omega)}$$
$$\leq C_T\int_{\Sigma_0}[(\frac{1}{2})\varphi^{"}|\gamma\frac{\partial}{\partial\nu}\Delta A^{-1}\varphi|^2 + \varphi_\varepsilon(\gamma\frac{\partial}{\partial\nu}\Delta\varphi)(\gamma\frac{\partial}{\partial\nu}\Delta A^{-1}\varphi)]d\Sigma.$$

En utilisant l'estimation (3) on obtient

$$\int_{\Sigma_0}\varphi_\varepsilon^{"}|\ \gamma\frac{\partial}{\partial\nu}\Delta A^{-1}\varphi\|^2 d\Sigma \leq C_T(\|A^{-\frac{1}{4}}\varphi_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\varphi_1\|^2_{D'_{A^{\frac{3}{3}}}}$$

où $D'_{A^{\frac{3}{4}}}$ est le dual de $D_{A^{\frac{3}{4}}}$ dans $L^2(\Omega)$.
En appliquant l'inégalité de Young et en utilisant l'estimation suivante:

$$\begin{aligned}
\|\gamma\frac{\partial}{\partial\nu}\Delta\varphi\|^2_{L^2(0,T;H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0))} &\leq C\|\Delta A^{-1}\varphi\|^2_{L^2(0,T;H^2(\Gamma_0))}\\
&\leq \|\varphi\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega)}\\
&\leq C_T(\|A^{\frac{1}{4}}\varphi_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \|A^{-\frac{1}{4}}\varphi_1\|^2_{L^2(\Omega)}).
\end{aligned}$$

on a

$$(\|A^{\frac{1}{4}}\varphi_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \|A^{-\frac{1}{4}}\varphi_1\|^2_{L^2(\Omega)}) \leq C_T[(\|A^{-\frac{1}{4}}\varphi_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\varphi_1\|^2_{D'_{A^{\frac{3}{4}}}}) + \tag{13}$$
$$+\|\gamma\frac{\partial}{\partial\nu}\Delta\varphi\|^2_{L^2(0,T;H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_0))}] \tag{14}$$

Par un raisonnement par compacité ($D_{A^{\frac{1}{4}}} \times D_{A^{-\frac{1}{4}}} \subset D_{A^{-\frac{1}{4}}} \times D'_{A^{\frac{3}{4}}}$ avec injection compacte), on a pour des données initiales $\varphi_0 \in D_{A^{\frac{1}{4}}}$ et $\varphi_1 \in D_{A^{-\frac{1}{4}}}$.La solution φ du problème de (E) correspondant à ces données vérifie

$$\int_0^T \left\|\frac{\partial\Delta\varphi}{\partial\nu}\right\|^2_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_0)} \geq C_T\left\{\left\|A^{\frac{1}{4}}\varphi_0\right\|^2 + \left\|A^{-\frac{1}{4}}\varphi_1\right\|^2\right\} \tag{15}$$

et on obtient , par interpolation, pour tout $\theta \in [0,1]$ et des données initiales $(\varphi_0,\varphi_1) \in \left(D_{A^{\frac{3}{4}-\frac{\theta}{2}}} \times D_{A^{\frac{1}{4}-\frac{\theta}{2}}}\right)$ l'inégalité

$$\int_0^T \left\|\gamma\frac{\partial\Delta\varphi}{\partial\nu}\right\|^2_{H^{-\frac{\theta}{2}}(\Gamma_0)} \geq C_T\left\{\left\|A^{\frac{3}{4}-\frac{\theta}{2}}\varphi_0\right\|^2 + \left\|A^{\frac{1}{4}-\frac{\theta}{2}}\varphi_1\right\|^2\right\}$$

Ce qui conduit au théorème suivant:

Thórème 4. *Soit* $T > T_0$, *soient* $y_0 \in D_{A^{-\frac{1}{4}+\frac{\theta}{2}}}$, $y_1 \in D_{A^{-\frac{3}{4}+\frac{\theta}{2}}}$ *et* $\theta \in [0,1]$

Il existe $v \in L^2(0,T;H^{-\frac{\theta}{2}}(\Gamma_0))$ *tel que , si* y *est l'unique solution de l'équation*

$$\begin{cases} y'' + \Delta^2 y = 0 \quad dans \quad]0,T[\times\Omega \\ y(0) = y_0 \ \ ; y'(0) = y_1 \\ \gamma y = (-\Delta_\Gamma)^{-\frac{\theta}{2}} v \ sur \ \Sigma_0 \\ \gamma \frac{\partial}{\partial\nu} y = 0 \ sur \ \Sigma_0^* \end{cases}$$

Alors , $y(T) = y'T) = 0$.

Preuve. On applique HUM [1].

NB: Les auteurs remercient le referee pour ses précieuses remarques.

References

[1] J.L.Lions, Contrôlabilité exacte perturbation et stabilisation de systèmes distribués, tome 1, RMA Masson 1988.

[2] M.T.Niane, Contrôlabilité exacte de l'équation des plaques vibrantes dans un polygone CRAS Paris, t.307,serie 1, p.517-521, 1988.

[3] M.T.Niane, Contrôlabilité exacte de l'équation des ondes pour des données initiales dans des espaces de Sobolev à puissance fractionnaire; à paraitre.

[4] E.Zuazua, Contrôlabilité exacte de quelques modèles de plaques en un temps arbitrairement petit, annexe 1 de [1].

[5] R.Triaggiani-I.Lasiecka, Exact controllability of the Euler-Bernouilli equation with L_2 control in the Dirichlet boundary condition, Rendiconti Accademia Nazionale dei Lincei, Roma, Italy; Classe Sci. Fis. Matem. LXXX (1988).

Mary Teuw NIANE
ufr mai Université Gaston Berger
bp 234 st Louis-Senegal

Abdoulaye SENE
Departement de Mathematique
Faculte des Sciences Université
Cheikh Anta Diop
Dakar-Senegal
E-mail: absene@netcourrier.com

Recibido: 11 de Enero de 2001
Revisado: 13 de Diciembre de 2001