Principe d'incertitude qualitatif pour les groupes de Lie nilpotents

Bouchta Bouali and Mohammed Hemdaoui

Faculté des Sciences,
Département de Maths,
Université Mohammed Premier,
Oujda, Maroc.
bouali@sciences.univ-oujda.ac.ma
hemdaoui@sciences.univ-oujda.ac.ma

Recibido: 17 de Julio de 2001
Aceptado: 6 de Octubre de 2003

ABSTRACT

We prove that any simply connected nilpotent Lie group satisfies the qualitative uncertainty principle.

Key words: nilpotent Lie groups, representations, orbit method.

2000 Mathematics Subject Classification: 22E25, 22E27.

1. Introduction

Soit $\mathbb{R}^n$ muni de la mesure de Lebesgue λ et soit f une fonction λ-intégrable. Notons par :

$$A_f = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq 0\} \qquad \text{et} \qquad B_f = \{x \in \mathbb{R}^n : \hat{f}(x) \neq 0\},$$

où $\hat{f}$ est la transformée de Fourier de f. Le but de ce travail est de généraliser le suivant résultat de Benedicks ([1]) :

Théorème 1.1. *Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ vérifie :*

$$\lambda(A_f) < \infty \qquad \textit{et} \qquad \lambda(B_f) < \infty,$$

alors f est nulle λ-presque partout.

Soit G un groupe topologique, m une mesure de Haar sur G et μ la mesure de Plancherel associée à m.

Pour $f \in L^1(G)$ notons par :

$$A_f = \{x \in G \,:\, f(x) \neq 0\}$$
$$B_f = \{\pi \in \hat{G} \,:\, \hat{f}(\pi) \neq 0\}$$

On dit que le groupe G vérifie le principe d'incertitude qualitatif s' il n'existe pas de fonction m-intégrable non nulle vérifiant $m(A_f) < \infty$ et $\mu(B_f) < \infty$.

Dans ce papier on considère un groupe de Lie nilpotent connexe et simplement connexe G et on établit qu'un tel groupe vérifie le principe d'incertitude qualitatif. Pour cela on considère $\mathcal{G}$ son algèbre de Lie et $\mathcal{G}^*$ le dual de $\mathcal{G}$ et on utilise l'application de Kirillov, qui identifie l'ensemble $\hat{G}$ des classes d'équivalence des représentations unitaires irréductibles de G à l'ensemble des orbites de $\mathcal{G}^*$ sous l'action du groupe de Lie G.

2. Notations et Généralités

2.1. Fonction module sur un groupe topologique

Soit G un groupe localement compact et E un ensemble. Pour toute application

$$f\colon G \to E$$

et tout s de G, on notera par $\gamma(s)f$ et $\delta(s)f$ les applications de G dans E définies respectivement par :

$$\gamma(s)f(x) = f(s^{-1}x) \qquad \text{et} \qquad \delta(s)f(x) = f(xs).$$

Translatées à gauche et à droite de f par s, il en résulte que

$$\gamma(st)f = \gamma(s)(\gamma(t)f) \qquad \text{et} \qquad \delta(st)f = \delta(s)(\delta(t)f).$$

Etant donnée une mesure de Haar μ sur G, on note par $\gamma(st)\mu$ et $\delta(s)\mu$ les mesures sur G images de μ par les homéomorphismes $x \mapsto s.x$ et $x \mapsto xs^{-1}$, $\gamma(s)\mu(f) = \mu(\gamma(s^{-1})f)$ et $\delta(s)\mu(f) = \mu(\delta(s^{-1})f)$. On dit que la mesure est invariante à gauche (resp. à droite) si pour tout s de G on a

$$\gamma(s)\mu = \mu \text{ (resp. } \delta(s)\mu = \mu).$$

Sur un groupe localement compact, il est clair que

$$\gamma(t)(\delta(s)\mu = \delta(s)(\gamma(t)\mu) = \delta(s)\mu.$$

Alors $\delta(s)\mu$ est une mesure invariante à gauche. Il existe un nombre unique noté $\Delta_G(s) > 0$, tel que

$$\delta(s)\mu = \Delta_G(s)\mu.$$

Ce nombre est indépendant de la mesure choisie voir ([2, chap. 14]).

On dit que $s \mapsto \Delta_G(s)$ est la fonction module sur G. En particulier, si A est μ-integrable, As l'est aussi et $\mu(As) = \Delta_G(s)\mu(A)$.

2.2. Rappels sur les représentations des groupes de Lie nilpotents

2.2.1. Quelques généralités

Soit G un groupe topologique localement compact et $\hat{G}$ son dual topologique (qui s'identifie à l'ensemble des représentations unitaires irréductibles de G). Si G est muni d'une mesure de Haar, alors

$$\lambda \colon G \to L^2(G)$$

donnée par

$$\lambda(s)(f) = f(s^{-1}x), f \in L^2(G), x \in G$$

est dans $\hat{G}$.

2.2.2. Représentations induites.

Soit N un sous-groupe fermé de G, soit m (resp. m_N) une mesure de Haar sur G (resp. N), soit ρ une représentation de N dans H_ρ ; nous allons définir la représentation induite de ρ sur G à partir de N, notée $\mathrm{Ind}_G^N(\rho)$.

Soit E_0 l'espace des fonctions continues ϕ de G dans H_ρ vérifiant :

(i) $\phi(sh) = \rho(h)^{-1}\phi(s) s \in G, h \in N$,

(ii) $\mathrm{supp}(\phi)$ est compact modulo N.

Sur E_0, le groupe agit par translation à gauche. Soit ν une mesure quasi-invariante sur G/H de poids c, cette mesure nous permet de définir une norme sur E_0, de la façon suivante :

$$\|\phi\|_p^p = \int_{G/N} \|\phi(s)\|_{H_\rho}^p \, d\nu(s), \qquad \phi \in E_0.$$

Nous définissons des espaces de Banach E_p qui contiennent E_0 (comme sous-espace dense) et sur lequels G agit par des isométries.

Nous pouvons définir une action isométrique, π_p, $1 \leq p < \infty$ de G sur $(E_0, \|\cdot\|)$ en posant

$$\pi_p(s)\phi(x) = c(s,x)^{1/p}\phi(s^{-1}x) \qquad \forall x \in G/N, \forall s \in G$$

Nous remarquons que π_p est continue et isométrique, si nous désignons par E_p le complété de E_0 pour la norme $\|\cdot\|_p$.

Nous obtenons une représentation isométrique π_p de G dans l'espace E_p. Si $p = 2$, cette représentation sera notée $\pi_2 = \mathrm{Ind}_G^N(\rho)$.

Remarque 2.1. Si ρ est la représentation triviale sur N, alors E_0 est l'ensemble des fonctions continues constantes sur les classes suivant N.

2.3. Représentation adjointe d'un groupe de Lie

Soit G un groupe de Lie, $\mathcal{G}$ son algèbre de Lie et $\mathcal{G}^*$ l'espace dual de $\mathcal{G}$. Le groupe G agit sur $\mathcal{G}$ par la représentation adjointe

$$\mathrm{ad}(g) : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G},$$

où $\mathrm{ad}(g)$ est la différentielle de l'automorphisme intérieur i_g ($i_g(h) = ghg^{-1}$) en l'élément unité de G et agit sur $\mathcal{G}^*$ par la K-représentation ou représentation co-adjointe K :

$$K(g) : \mathcal{G}^* \longrightarrow \mathcal{G}^*, \quad \langle K(g) \cdot F, X\rangle = \langle F, ad(g^{-1}) \cdot X\rangle \qquad \forall X \in \mathcal{G}.$$

Notons par $O(G)$ l'ensemble des orbites du groupe de Lie dans la K-représentation, muni de la topologie quotient de la topologie naturelle dans $\mathcal{G}^*$.

On sait que toute orbite est munie d'une structure de variété symplectique homogène.

Soit H un sous groupe normal (de codimension 1) de G, donc le groupe G est un produit semi-direct de H et d'un certain sous groupe S isomorphe à $\mathbb{R}$ [3]. Nous désignons par la suite μ_1 la mesure de Haar sur H et par λ celle de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

3. Principe IQ pour les groupes de Lie nilpotents.

Dans cette partie nous montrons que tous les groupes de Lie nilpotents vérifient le principe d'incertitude qualitatif. Pour ceci nous utilisons la relation reliant la mesure de Plancherel sur G et celle sur son sous-groupe dérivé due à Garimella [4], et le résultat de désintégration des représentations due à Baklouti et Ludwig [8].

3.1. Transformée de Fourier

En utilisant [6], nous définissons la transformée de Fourier à valeurs opérateurs. Soit $F \in \mathcal{G}^*$, il existe une suite de sous-algèbres de Lie $\mathcal{G}_j$ de $\mathcal{G}$ telles que :

(i) $\dim \mathcal{G}_j = m - j$,

(ii) $\mathcal{G} = \mathcal{G}_0 \supset \mathcal{G}_1 \supset \cdots \supset \mathcal{G}_m = (0)$,

(iii) $[\mathcal{G}, \mathcal{G}_j] \subset \mathcal{G}_{j+1}$

où $\mathcal{G}_1$ est une polarisation en F [7]. Soit χ_F le caractère défini sur $\mathcal{G}_1$ par

$$\langle \chi_F, exp(X)\rangle = e^{i\langle F,X\rangle} \qquad \forall X \in \mathcal{G}_1$$

On définit par induction une représentation π_F de G par

$$\pi_F = \mathrm{Ind}_{G_1}^{G}\ \pi_{F_1} \qquad \text{où} \qquad \pi_{F_1} \in \hat{G}_1.$$

Pour tout $f \in C_c^\infty(G)$ et $\pi_F \in \hat{G}$, on définit la transformée de Fourier opérateur par

$$\hat{f}(\pi_F) = \int_G f(g)\pi_F(g)\,dg.$$

Remarque 3.1. On pose $F^s = K(exp(-sX)) \cdot F$, alors

$$\pi_{F^s}(g) = \pi_F(\exp(sX) g \exp(-sX)).$$

Soient F dans $\mathcal{G}$ et F_1 la restriction de F à $\mathcal{G}_1$, notons par π_{F_1} la représentation de G_1. Soit μ_1 la mesure de Haar sur G_1, d'où on déduit il existe une mesure quasi-invariante sur G/G_1.

Soit E l'espace de toutes les fonctions sur G vérifiant :

(i) $\phi(g.g_1) = \pi(g_1)\phi(g)$,

(ii) $\int_{G/G_1} |\phi(s)|\,d\lambda(s) < \infty$.

La représentation induite, notée par $\pi_F = \mathrm{Ind}_{G_1}^G \pi_{F_1}$, est donnée par

$$\pi_F(g)\phi(x) = \phi(g.x) \qquad \forall x \in G/G_1, \quad g \in G, \quad \phi \in E.$$

Mais E est isomorphe à $L^2(\mathbb{R} \cdot X) \approx L^2(\mathbb{R})$, où X est un élément de $\mathcal{G}/\mathcal{G}_1$. Soit ϕ considérée comme élément de $L^2(\mathbb{R})$ et calculons $\hat{f}(\pi_F)\phi$ au point $exp(sX)$, où $\phi \in L^2(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned}
\hat{f}(\pi_F)\phi(\exp(sX)) &= \int_G f(g)\pi_F(g)\phi(\exp(sX))\,dg \\
&= \int_G f(g)\phi(\exp(sX \cdot g)\,dg \\
&= \int_{\mathbb{R}} \int_{G_1} f(h \cdot \exp(tX))\phi(exp(sX) \cdot h \cdot \exp(tX))\,dt\,dh) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \int_{G_1} f(h \cdot \exp(tX))\phi(\exp(sX) \cdot h \\
&\qquad\qquad \cdot \exp(-sX)\exp((s+t)X))\,dt\,dh.
\end{aligned}$$

Posons $f^t(h) = f(h \cdot \exp(tX))$. D'après la remarque 3.1 on a

$$\hat{f}(\pi_F)\phi(\exp(sX)) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}^t(\pi_{F_1{}^s})\phi(\exp((s+t)X)\,dt. \tag{1}$$

Lemme 3.2. *$f \in \mathrm{Ker}(\pi_F)$ si et seulement si $f^t \in \mathrm{Ker}(\pi_{F^s{}_1})$ pour tout $s \in \mathbb{R}$ et pour presque tout $t \in \mathbb{R}$.*

Démonstration. Soit $\mathrm{Ker}(\pi_F)$ le noyau de la représentation π_F de G. Si $f \in \mathrm{Ker}(\pi_F)$, et pour tout ϕ on a d'après la formule (1),

$$\int_{\mathbb{R}} \hat{f}^t(\pi_{F^{s}{}_1})\phi(\exp((s+t)X))\, dt = 0$$

ce qui implique que pour presque tout $t \in \mathbb{R}$, $\hat{f}^t(\pi_{F_1{}^s}) = 0$, $\forall s \in \mathbb{R}$ et f^t est dans $\mathrm{Ker}(\pi_{F_1{}^s})$.

Réciproquement pour presque tout t et tout s dans $\mathbb{R}$, si $\hat{f}^t \in \mathrm{Ker}(\pi_{F^{s}{}_1})$, alors $\hat{f}(\pi_F) = 0$, ce qui montre que f est dans le noyau de π_F. $\square$

Remarque 3.3. On peut traduire le lemme 3.2, en termes de B_f et B_{f^t} de la manière suivante :

$$\pi_F \in B_f \Longleftrightarrow \pi_{F_1{}^s} \in B_{f^t} \text{ pour presque tout t et } \forall s \in \mathbb{R}.$$

3.2. Mesure de Plancherel sur le dual topologique

Soit G un groupe de Lie nilpotent, simplement connexe d'algèbre de Lie $\mathcal{G}$, $\mathcal{G}^*$ son dual. Soit $\mathcal{B} = \{ X_1, \dots, X_n \}$ une base de $\mathcal{G}$ et $\mathcal{B}^* = \{ X_1^*, \dots, X_n^* \}$ la base duale de $\mathcal{G}^*$. Soit $F \in \mathcal{G}^*$ de classe maximale, il lui correspond une orbite, sous l'action de G, $\mathcal{O}_F = \mathrm{Ad}^*(G) \cdot F$ de dimension maximale $2k$. Soit $r = n - 2k$ et $2k$ indices $\{ i_1, \dots, i_{2k}\} \subseteq \{1, \dots, n \}$ et les r indices $\{ d_1, \dots, d_r \}$ qui restent. Considérons $\mathcal{B}_d^* = \{ X_{d_1}^*, \dots, X_{d_r}^* \}$, W_d l'espace engendré par $\mathcal{B}_d^*$ qui correspond bijectivement à $\hat{G}$. Donc la mesure de Plancherel sur $\hat{G}$ est donnée, à l'aide de la mesure de Lebesgue dm sur W_d, par

$$d\mu = |\mathrm{Pf}(F)|\, dm,$$

où $\mathrm{Pf}(F)$ est le Pfaffian de F, $F \in W_d$.

Soit une suite

$$0 = \mathcal{G}_n \subset \mathcal{G}_{n-1} \subset \cdots \subset \mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_0 = \mathcal{G}$$

d' idéaux de $\mathcal{G}$ telle que la dimension de $\mathcal{G}_i$ soit i pour tout $i \in \{ 1, \dots, n \}$. On note $\mathcal{G}^F$ le radical de F dans $\mathcal{G}$.

Soit G_1 le sous-groupe analytique de G d'algèbre de Lie $\mathcal{G}_1$. G_1 est un sous-groupe de codimension 1 de G, et utilisons la relation entre la mesure de Plancherel sur G et celle sur G_1, due à G. Garimella [4, section 3]. On distingue deux cas :

1$^{\text{er}}$ cas : Si $\mathcal{G}^F \subset \mathcal{G}_1 \ \ \forall F \in W_d, d\mu_1 = q(F) d\mu dF_{j_1}$.

2$^{\text{ème}}$ cas : Si $\mathcal{G}^F \not\subset \mathcal{G}_1 \ \ d\mu = d\mu_1 \times dF_1$.

3.3. Théorème

Avant d'énoncer le résultat principal de ce papier, nous donnons un lemme. Soit f une fonction μ-intégrable, soit G_1 un sous-groupe normal de G muni d'une mesure

μ_1. Alors, il existe une mesure quasi-invariante ν sur G/G_1 telle que

$$\int_G f(g)\, d\mu(g) = \int_{G/G_1} \int_{G_1} f(gn)\, d\mu_1(n)\, d\nu(g).$$

Notons par :

$$A_{f^g} = \{ n \in G_1 \ :\ f^g(n) \neq 0 \}$$

Lemme 3.4. *Si $\mu(A_f)$ est fini, alors $\mu_1(A_{f^g})$ est fini pour presque tout $g \in G/G_1$.*

Démonstration. Calculons $\mu(A_f)$. Comme

$$\begin{aligned}
\mu(A_f) &= \int_G 1_{A_f}(g)\, d\mu(g) \\
&= \int_{G/G_1} \int_{G_1} 1_{A_{f^g}}(n) d\mu_1(n)\, d\nu(g) \\
&= \int_{G/G_1} \mu_1(A_{f^g})\, d\nu(g) < \infty,
\end{aligned}$$

alors $\mu_1(A_{f^g})$ est fini μ_1-presque partout et pour presque tout $g \in G/G_1$. □

Théorème 3.5. *Tout groupe de Lie G simplement connexe et nilpotent vérifie le principe d'incertitude qualitatif.*

Démonstration. Raisonnons par induction sur la dimension p de G.

Si $p = 1$, alors G est isomorphe à $\mathbb{R}$ et le résultat est vrai.

Soit G un groupe de dimension p et supposons que l'affirmation soit pur tout groupe de dimension $k < p$. Soit F un élément du dual $\mathcal{G}^*$ de $\mathcal{G}$ et soit $\mathcal{H}$ une sous algèbre de $\mathcal{G}$ subordonnée à F. Soit $\mathcal{B} = \{ X_1, \ldots, X_r \}$ une base de Malcev relative à $\mathcal{H}$. Le sous espace $\mathcal{G}_1$ engendré par $\mathcal{H}, X_1, \ldots, X_{r-1}$ est un idéal de codimension 1 de $\mathcal{G}$ et $\{ X_1, \ldots, X_{r-1}\}$ est une base de Malcev de $\mathcal{G}_1$ relative à $\mathcal{H}$. Donc G_1, le sous-groupe analytique de G, d'algèbre de Lie $\mathcal{G}_1$, est un sous-groupe de Lie nilpotent connexe et simplement connexe. Supposons que $m(A_f)$ et $\mu(B_f)$ soient finis. D'après le lemme 3.4, pour presque tout t, $m_1(A_{f^t})$ est fini. Pour conclure, il reste à montrer que $\mu_1(B_{f^t})$ est fini. Pour ceci on distingue deux cas :

(i) Les G-orbites sont saturées par rapport à ${\mathcal{G}_1}^{\perp}$, donc pour presque tout ϕ de $\mathcal{G}^*$. Soit ϕ_0 restriction de ϕ à $\mathcal{G}_1^*$, $\pi_\phi = \mathrm{Ind}_{G_1}^G \pi_{\phi_0}$ est irréductible. D'après [8, proposition 2.5] on a

$$\int_{\mathcal{G}_1^*}^{\oplus} \mathrm{Ind}_{G_1}^G \pi_{\phi_0}\, d\lambda_{\mathcal{G}_1}(\phi_0) \simeq \int_{\mathcal{G}^*}^{\oplus} \pi_\phi\, d\lambda_{\mathcal{G}^*}(\phi)$$

où $\lambda_{\mathcal{G}^*}$ est la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{G}^*$ et $\lambda_{\mathcal{G}_1^*}$ est celle sur $\mathcal{G}_1^*$

De cette formule et vu la forme de X_r on conclut que l'application

$$\phi \longrightarrow \phi_0$$

est un isomorphisme respectant les mesures $\lambda_{\mathcal{G}_1{}^*}$ et $\lambda_{\mathcal{G}^*}$, donc

$$\mu_1(B_{f^t}) = \mu(B_f) < \infty$$

Appliquons l'hypothèse de induction ; f^t est nulle m_1-presque partout, et par suite f est nulle m-presque partout sur G.

(ii) Les G-orbites ne sont pas saturées par rapport à ${\mathcal{G}_1}^\perp$. Choisissons pour chaque ϕ_0 de ${\mathcal{G}_1}^*$ l'extension ϕ définie par $\phi(B_r) = 0$. Ceci nous donne

$$ind_{G_1}^G \pi_{\phi_0} \simeq \int_{\mathbb{R}}^{\oplus} \pi_{\phi_0 + sB_r^*}\, ds,$$

d'où $\mu(B_f) = \int_{\mathbb{R}} \mu_1(B_{f^t})\, dt < \infty$.
Donc pour presque tout $t \in \mathbb{R}$, $\mu_1(B_{f^t})$ est finie. D'après l'hypothèse de récurrence pour presque tout $t \in \mathbb{R}$, on a $f^t = 0$. Donc f est nulle pour presque tout $h \in G_1$ et pour presque tout $t \in \mathbb{R}$, ce qui se traduit par f est nulle m-presque partout sur G. $\square$

Remarque 3.6. Le théorème n'est pas vrai si on remplace $L^1(G)$ par l'espace des distributions tempérées sur G.

En effet, soit T la distribution sur G définie par :

$$T = \Sigma_{\gamma\in\Gamma}\delta_\gamma,$$

où Γ est un sous-groupe discret central de G, et δ_γ est la distribution de Dirac en γ. En appliquant la formule de Poisson [5], on obtient :

$$\hat{T} = \Sigma_{\gamma\in\Gamma}\delta_{2\pi\gamma}.$$

Nous remarquons que A_T et B_T ont des mesures finies nulles, pourtant la distribution T est non nulle.

Références

[1] M. Benedicks, *On Fourier transforms of functions supported on sets of finite Lebesgue measure*, J. Math. Anal. Appl. **106** (1985), 180–183.

[2] J. Dieudonné, *Éléments d'analyse. Tome II : Chapitres XII à XV*, Cahiers Scientifiques, Fasc. XXXI, Gauthier-Villars, Éditeur, Paris, 1968.

[3] A. Kirillov, *Éléments de la théorie des représentations*, Éditions Mir, Moscow, 1974.

[4] G. Garimella, *Un théorème de Paley-Wiener pour les groupes de Lie nilpotents*, J. Lie Theory **5** (1995), 165–172.

[5] M. Rais, *Représentation des groupes de Lie nilpotents et méthode des orbites*, Nancy, 1980, Cours du C.I.M.P.A., Analyse harmonique.

[6] L. Baggett and A. Kleppner, *Multiplier representations of abelian groups*, J. Functional Analysis **14** (1973), 299–324.

[7] J. Ludwig and H. Zahir, *Surjectivité de la transformation de Fourier adaptée nilpotente*, Université de Metz U.A. C.N.R.S. 339 02/93.

[8] A. Baklouti and J. Ludwig, *Désintégration des représentations monomiales des groupes de Lie nilpotents*, J. Lie Theory **9** (1999), 157–191.