REVISTA MATEMATICA de la
Universidad Complutense de Madrid
Volumen 5, números 2 y 3; 1992.

# *Contrôlabilité Exacte pour des Systèmes à Mémoire*

JINHAI YAN

**ABSTRACT.** Combining HUM and Compactness arguments the exact controllability is proved for time dependent smooth Kernels.

Soit $\Omega$ un domaine borné dans $\mathfrak{R}^n$ à frontière régulière $\Gamma$. On considère le système suivant

$$
(1)\qquad
\begin{aligned}
&y'' - \Delta y - \int_0^t K(t,\sigma)\, y(\sigma)\, d\sigma = 0 && \text{dans } Q = \Omega\times(0,T)\\
&y = \begin{vmatrix} v \text{ (contrôle)} & \text{sur } \Sigma(x^0)\\ 0 & \text{sur } \Sigma\backslash\Sigma(x^o)\end{vmatrix} && \\
&y(0) = y^0,\ y'(0) = y^1 && \text{sur } \Omega\times\{0\}
\end{aligned}
$$

Où $\Sigma(x^0) = \Gamma(x^0)\times(0,T)$ avec $\Gamma(x^0) = \{x\in\Gamma\colon (x-x^0)\cdot v(x) > 0\}$, $x^0$ étant un point quelconque de $\mathfrak{R}^n$, et $\Sigma = \Gamma\times(0,T)$.

Par $v(x)$ on désigne le vecteur normal unitaire extérieur à $\Omega$ au point $x\in\Gamma$ et par $\circ$ le produit scalaire dans $\mathbf{R}^n$. Dans (1) $'$ désigne la dérivée par rapport au temps.

Pour tout $\{y^0, y^1\}\in L^2(\Omega)\times H^{-1}(\Omega)$, on cherche un contrôle $v\in L^2(\Sigma(x^0))$, tel que

$$
(2)\qquad y(T) = y'(T) = 0 \qquad \text{sur } \Omega\times\{T\}
$$

---

1991 Mathematics Subject Classification: 35B30, 49J20.
Editorial Complutense. Madrid, 1992.

Si on peut le faire, alors, on dit que le système (1) est exactement contrôlable.

On fait sur $K$ les hypothèses siuvantes:

$$
(3) \qquad
\begin{aligned}
&K(t,\sigma)\in L^1((0,T)\times(0,T))\\
&\frac{\partial K(t,\sigma)}{\partial\sigma}\in L^1((0,T)\times(0,T))\\
&K(t,t)\in L^1((0,T))
\end{aligned}
$$

et on désign $T(x^0)=2\max_{x\in\overline{\Omega}}|x-x^0|$.

On a le résultat principal suivant:

**Théorème 1.**

*Si $T>T(x^0)$ et $K$ satisfait les hypothèses (3), alors le système (1) est exactement contrôlable.* □

## Démonstration

On procède en trois étapes.

### Etape 1

D'abord, on observe que $y$ s'écrit comme

$$
(4) \qquad y=y_0+z \qquad \text{dans } Q
$$

où $y_0$ et $z$ satisfont

$$
(5) \qquad
\begin{aligned}
&y_0''-\Delta y_0-\int_0^t K(t,\sigma)y_0(\sigma)\,d\sigma=0 && \text{dans } Q\\
&y_0=0 && \text{sur } \Sigma\\
&y_0(0)=y^0,\ y_0'(0)=y^1 && \text{sur } \Omega\times\{0\}
\end{aligned}
$$

$$
z''-\Delta z-\int_0^t K(t,\sigma)z(\sigma)\,d\sigma=0 \qquad \text{dans } Q
$$

$$(6)\qquad z=\begin{cases} v \text{ (contrôle)} & \text{sur } \Sigma(x^0) \\ 0 & \text{sur } \Sigma\setminus\Sigma(x^0) \end{cases}$$
$$z(0)=0,\ z'(0)=0 \qquad \text{sur } \Omega\times\{0\}$$

La condition (2) équivaut à

$$(7)\qquad z(T)=-y_0(T),\ z'(T)=-y_0'(T) \qquad \text{sur } \Omega\times\{T\},$$

Donc, on peut également chercher un contrôle $v\in L^2(\Sigma(x^0))$, pour le système (6) tel que

$$(8)\qquad z(T)=z^0,\ z'(T)=z^1 \qquad \text{sur } \Omega\times\{T\},$$

pour $\{z^0, z^1\}\in L^2(\Omega)\times H^{-1}(\Omega)$ quelconque.

On va employer la méthode HUM. On résout d'abord, pour tout $\{\varphi^0, \varphi^1\}\in H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)$ le problème suivant

$$(9)\qquad \begin{aligned} &\varphi''-\Delta\varphi-\int_t^T K(\sigma,t)\,\varphi(\sigma)\,d\sigma=0 && \text{dans } Q \\ &\varphi=0 && \text{sur } \Sigma \\ &\varphi(T)=\varphi^0,\ \varphi'(T)=\varphi^1 && \text{sur } \Omega\times\{T\} \end{aligned}$$

Ensuite, on résout

$$(10)\qquad \begin{aligned} &\psi''-\Delta\psi-\int_0^t K(t,\sigma)\,\psi(\sigma)\,d\sigma=0 && \text{dans } Q \\ &\psi=\begin{cases} \partial\psi/\partial\nu & \text{sur } \Sigma(x^0) \\ 0 & \text{sur } \Sigma\setminus\Sigma(x^0) \end{cases} \\ &\psi(0)=0,\ \psi'(0)=0 && \text{sur } \Omega\times\{0\} \end{aligned}$$

On sait que (voir J. L. Lions [1], Tome 1, Chapitre I, Th.4.2)

$$(11)\qquad \begin{aligned} &\varphi\in C^0(0,T;\ H_0^1(\Omega))\cap C^1(0,T;\ L^2(\Omega)) \\ &\psi\in C^0(0,T;\ L^2(\Omega))\cap C^1(0,T;H^{-1}(\Omega)) \end{aligned}$$

et que de plus

$$(12)\qquad \begin{aligned} &\|\varphi\|_{L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))\cap W^{1,\infty}(0,T;L^2(\Omega))} \\ &\le C(\|\varphi^0\|^2_{H_0^1(\Omega)}+|\varphi^1|^2_{L^2(\Omega)})^{1/2} \end{aligned}$$

$$(13)\qquad \begin{aligned} &\|\psi\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))\cap W^{1,\infty}(0,T;H^{-1}(\Omega))}\\ &\leq C\|\partial\varphi/\partial v\|_{L^2(\Sigma(x^0))}\\ &\leq C(\|\varphi^0\|^2{}_{H_0^1(\Omega)}+|\varphi^1|^2{}_{L^2(\Omega)})^{1/2}\end{aligned}$$

Ainsi, on peut définir un opérateur $\Lambda_K$:

$$(14)\qquad \begin{aligned} \Lambda_K\colon H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)&\to H^{-1}(\Omega)\times L^2(\Omega)\\ \{\varphi^0,\varphi^1\}&\to\{-\psi'(T),\psi(T)\}.\end{aligned}$$

Cet opérateur est linéaire et continu.

On sait (voir J. L. Lions [1]) que si $T>T(x^0)$, alors, $\Lambda(=\Lambda_0)$ avec $K=0$ est un isomorphisme, on va démontrer que pour ce même $T$, $\Lambda_K(K\neq0)$ est aussi un isomorphisme. On va utiliser la méthode qui est introduite par E. Zuazua dans l'Appendice 1 de J. L. Lions [1].

### Etape 2

### Lemme 1

*Si $T>T(x^0)$, alors*

(15) *ker $\Lambda_K$ est de dimension fine.* □

### Démonstration

Comme $\Lambda$ est un isomorphisme, on peut voir que

$$(16)\qquad \ker\Lambda_K=\ker\Lambda^{-1}\circ\Lambda_K$$

mais

$$(17)\qquad \Lambda^{-1}\circ\Lambda_K=1-\Lambda^{-1}\circ(\Lambda-\Lambda_K)$$

Par l'alternative de Fredholm, il suffit alors de vérifier que $\Lambda-\Lambda_K$ est compact.

Si $\varphi_0$ vérifie le système

$$(18)\qquad \begin{aligned} &\varphi_0''-\Delta\varphi_0=0 &&\text{dans } Q\\ &\varphi_0=0 &&\text{sur } \Sigma\\ &\varphi_0(T)=\varphi^0,\ \varphi_0'(T)=\varphi^1 &&\text{sur } \Omega\times\{T\}\end{aligned}$$

on a

$$(19)\qquad \begin{aligned} &(\varphi_0-\varphi)''-\Delta(\varphi_0-\varphi)=-\int_t^T K(\sigma,t)\varphi(\sigma)\,d\sigma && \text{dans } Q\\ &\varphi_0-\varphi=0 && \text{sur } \Sigma\\ &(\varphi_0-\varphi)(T)=0,\ (\varphi_0-\varphi)'(T)=0 && \text{sur } \Omega\times\{T\} \end{aligned}$$

Il faut alors que l'application

$$(20)\qquad \begin{aligned} &\{\alpha^0,\alpha^1\}\to\partial(\alpha_0-\alpha)/_{\partial_v}|_{\Sigma(x^0)}\\ &H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)\to L^2(\Sigma(x^0)) \end{aligned}$$

soit compacte. Mais, on sait que (voir J. L. Lions [1], Tome 1, Chap. I, Th. 4.1).

$$(21)\qquad \left\|\frac{\partial(\varphi_0-\varphi)}{\partial v}\right\|_{L^2(\Sigma)}\leq C\left\|\int_t^T K(\sigma,t)\varphi(\sigma)\,d\sigma\right\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))}$$

D'après (3) et (12) on a

$$(22)\qquad \begin{aligned} &\int_t^T K(\sigma,t)\varphi(\sigma)\,d\sigma\in L^1(0,T;H_0^1(\Omega))\\ &\partial/\partial t\Big(\int_t^T K(\sigma,t)\varphi(\sigma)\,d\sigma\Big)\in L^1(0,T;L^2(\Omega)) \end{aligned}$$

avec continuité.

Par (22) et (11) on a

$$(23)\qquad \varphi_0-\varphi\in C^0(0,T;H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)),$$

et, donc de (21) et de (22) il résulte que

$$(24)\qquad \partial((\varphi_0-\varphi)')/\partial v\in L^2(0,T;L^2(\Gamma)),$$

Ainsi, de (21), (23) et (24) on obtient

$$(25)\qquad \partial(\varphi_0-\varphi)/\partial v\in L^\infty(0,T;H^{1/2}(\Gamma))\cap W^{1,2}(0,T;L^2(\Gamma)),$$

Par ailleurs l'injection

$$(26)\qquad L^\infty(0,T;H^{1/2}(\Gamma))\cap W^{1,2}(0,T;L^2(\Gamma))\ L^2(0,T;L^2(\Gamma))=L^2(\Sigma)$$

est compacte. Ceci implique la compacité de l'application (20). □

**Lemme 2**

*Si $T > T(x^0)$, alors*

(27) $\quad ker\ \Lambda_K = \{0\}$.

*Donc, par l'alternative de Fredholm, $\Lambda_K$ est un isomorphisme.* □

**Démonstration**

On désigne

(28) $\quad Y = \{\varphi \mid \varphi$ est une solution de (9) pour un certain $\{\varphi^0, \varphi^1\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ telle que $\partial\varphi/\partial v = 0 \quad$ sur $\Sigma(x^0)\}$

Alors, (24) est équivalente à

(29) $\quad Y = \{0\}$.

Par le Lemme 1, on sait que

(30) $\quad Y$ est de dimension finie

Si on a

(31) $\quad \varphi \in Y$

alors

(32) $\quad \{\varphi^0, \varphi^1\} \in \ker \Lambda_K$,

Donc

(33) $$\frac{\partial\varphi_0}{\partial v}\Big|_{\Sigma(x^0)} = \frac{\partial(\varphi_0 - \varphi)}{\partial v}\Big|_{\Sigma(x^0)} + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\Big|_{\Sigma(x^0)} = \frac{\partial(\varphi_0 - \varphi)}{\partial v}\Big|_{\Sigma(x^0)}$$

Mais, $\varphi_0 - \varphi$ est la solution de (19) acvec un membre de droite tel que

(34) $$-\int_t^T K(\sigma, t)\varphi(\sigma)\, d\sigma \in W^{1,1}(0, T;\ H_0^1(\Omega))$$

En appliquant des résultats de J. L. Lions [1] (Tome 1, Chap. I, Th. 4.2).

(35) $\quad \partial(\varphi_0 - \varphi)/\partial v \in H^2(0, T;\ L^2(\Sigma))$,

donc

(36) $\partial\varphi_0/\partial v | \Sigma(x^0) \in H^2(0, T; L^2(\Sigma(x^0)))$

Ainsi, par l'inégalité inverse

$$\|\varphi^0\|^2_{H^1_0(\Omega)} + |\varphi^1|^2_{L^2(\Omega)} \leq C \int_{\Sigma(x^0)} \left|\frac{\partial\varphi_0}{\partial v}\right|^2 d\Sigma$$

valable pour les solutions de (18) lorsque $T > T(x^0)$ (J. L. Lions [1], Tome 1, Chap. I, Th. 5.1) on obtient

(37) $\varphi_0 \in C^2(0, T; H^1_0(\Omega)) \cap C^3(0, T; L^2(\Omega))$

Ceci conduit, grâce à (34), à

(38) $\varphi = \varphi_0 - (\varphi_0 - \varphi) \in C^2(0, T; H^1_0(\Omega)) \cap C^3(0, T; L^2(\Omega))$

Comme $\varphi$ est la solution de (9), on déduit de (38) que

(39) $-\Delta\varphi \in C^0(0, T; H^1_0(\Omega)) \cap C^1(0, T; L^2(\Omega))$

Maintenant, il est facile de vérifier que

(40) $-\Delta\varphi \in Y.$

Vayons maintenent que $Y = \{0\}$. En effet, si

(41) $Y \neq \{0\},$

comme l'application

(42) $-\Delta: Y \to Y$

est symétrique et positive, alors il existe un $\lambda \geq 0$ et un $\varphi \in Y$, $\varphi \neq 0$, tels que

(43) $-\Delta\varphi = \lambda\varphi$ dans $Q$

Mais, comme $\varphi \in Y$, on a

(44) $\varphi = 0$ sur $\Sigma$
$\partial\varphi/\partial v = 0$ sur $\Sigma(x^0)$

Par (43) et (44) et grâce au Théorème d'unicité (voir J. L. Lions, Tome 1, Chap. I, Corollaire 5.1) on a

(45) $\varphi \equiv 0$ dans $Q$

ce qui est en contradiction avec (41). □

**Corollaire (Théorème d'unicité)**

*Soit $T > T(x^0)$ et $\varphi$ la solution de (9). Si*

(46) $\partial\varphi/\partial v = 0$ *sur* $\Sigma(x^0)$

*alors*

(47) $\varphi \equiv 0$ *dans* $Q$. □

**Etape 3**

On retourne maintenant au problème du début. Pour tout $\{-z^1, z^0\} \in H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Omega)$, on peut trouver un $\{\varphi^0, \varphi^1\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, tel que

(48) $\Lambda_K\{\varphi^0, \varphi^1\} = \{-z^1, z^0\}$

On prend dans (6)

(49) $v = \partial\varphi/\partial v$ *sur* $\Sigma(x0)$

alors

(50) $z \equiv \psi$ dans $Q$

Donc, on a (8)

Si on prend

(51) $z^0 = y_0(T),\ z^1 = -y_0'(T)$

alors, $y = y_0 + z$ satisfait (1) et (2) et ainsi la démonstration du Théorème 1 est achevée. □

**Reference bibliographique**

[1] J. L. LIONS: *Contrôlabilité exacte, perturbations et stabilisation de systèmes distribués.* Tome 1, Contrôlabilité exacte. Tome 2, Peturbations. Masson, Paris, Collection R.M.A. Vol. 8 et 9 (1988).

[2] J. L. LIONS: *Exact controllability, stabilization and perturbations for distributed systems,* John Von Neumann Lecture, Boston 1986. SIAM Review, March 1988.

Institute de Mathématiques
Université of Fudan
200433 Shangai
R. P. Chine

Recibido: 11 de marzo de 1991
Revisado: 27 de mayo de 1922