REVISTA MATEMÁTICA de la
Universidad Complutense de Madrid
Volumen 8, número 2: 1995

Controlabilidad Exacta de la Ecuación del Telégrafo Generalizada

J.A. SORIANO

ABSTRACT. In this paper we present a study of the exact controllability, in the boundary, of the generalized telegraph equation

$$(K_1(x,t)y')' + K_2(x,t)y' + K_3(x,t)y - \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x,t)\frac{\partial y}{\partial x_j}\right) = 0 \text{ en } Q,$$

where Q is the finite cylinder $\Omega\times]0,T[$ and Ω is a bounded domain in $\mathbb{R}^n$. The result is obtained by the HUM (Hilbert Uniqueness Method) method introduced by J.L. Lions [8] and [9].

1. INTRODUCCION

Sea Ω un dominio acotado de $\mathbb{R}^n$ con frontera Γ de clase C^2 y Q el cilindro finito $\Omega\times]0,T[$ con frontera lateral $\Sigma = \Gamma\times]0,T[$. Consideremos el sistema (*) que sigue con condiciones de contorno no homogéneas:

1991 Mathematics Subject Classification:
Servicio publicaciones Univ. Complutense. Madrid, 1995.

$$
\left\{
\begin{array}{l}
(K_1(x,t)y')' + K_2(x,t)y' + K_3(x,t)y \\
\qquad - \sum\limits_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x,t)\frac{\partial y}{\partial x_j}\right) = 0 \text{ en } Q \\
y = v \text{ sobre } \Sigma \\
y(0) = y^0, y'(0) = y' \text{ en } \Omega
\end{array}
\right. \qquad (^*)
$$

El problema de la controlabilidad exacta para el sistema $(^*)$ se formula de la siguiente forma: "Dado $T > 0$ suficientemente grande, es posible, para cada par de datos iniciales en un espacio apropiado sobre Ω, hallar un correspondiente control v, tal que la solucion $y = y(x,t)$ de $(^*)$, verifique la condición de reposo

$$y(T) = 0, \ y'(T) = 0."$$

El sistema $(^*)$ es una generalización de la ecuación del telégrafo unidimensional:

$$CLy'' + (CR + GL)y' + GRy - y_{xx} = 0,$$

en donde C, G, L y R son los coeficientes de capacidad, pérdida, autoinducción y resistencia, respectivamente, calculados para la unidad de longitud, cf. A.N. Tijonov-A.A. Samarsky [19].

En este trabajo probaremos que el sistema $(^*)$ es exactamente controlable. Para tal usamos el método HUM (Hilbert Uniqueness Method) propuesto por J.L. Lions [8] y [9]. esto es posible, gracias a que en nuestro caso tenemos unicidad, reversibilidad y regularidad de soluciones.

Interesado en la controlabilidad exacta para el sistema $(^*)$ notamos que el caso $K_1(x,t) = 1$, $K_2(x,t) = K_3(x,t) = 0$ y $a_{ij}(x,t) = \delta_{ij}a(t)$ fue estudiado por J.L. Lions [10] y J.E. Muñoz Rivera [17], y el caso $K_1(x,t) = 1$, $K_2(x,t) = K_3(x,t) = 0$ y $a_{ij}(x,t) = \delta_{ij}a(x)$, por E. Zuazua [21]. Seguidamente R. Fuentes [6] analizó la situación $K_1(x,t) = 1$, $K_2(x,t) = K_3(x,t) = 0$. Nuestro análisis es diferente al de los autores mencionados arriba y los incluye.

Diversos autores usaron el método HUM en el estudio de la controlabilidad exacta de sistemas distribuidos, entre ellos podemos mencionar:

L.A. Medeiros [14], L.A. Medeiros-R. Fuentes [13], C. Fabre-J.P. Puel [5], E. Zuazua [20], [21], C. Fabre [4], V. Komornik [7] y M. Milla Miranda [15], [16].

2. RESULTADO PRINCIPAL

Primero introduciremos algunas notaciones (cf. J.L. Lions [9]). Sean $x^0 \in \mathbb{R}^n$, $m(x)$ la función $x - x^0$ y $\nu(x)$ el vector normal unitario en $x \in \Gamma$, dirigida hacia el exterior de Ω. Consideremos:

$$R(x^0) = \max_{x \in \bar{\Omega}} ||m(x)|| = \max_{x \in \bar{\Omega}} \left| \sum_{l=1}^{n} (x_l - x_l^0)^2 \right|^{1/2}$$

Dividimos la frontera Γ de Ω en dos partes:

$$\Gamma(x^0) = \{x \in \Gamma : \ m(x).\nu(x) > 0\}$$

$$\Gamma_*(x^0) = \{x \in \Gamma : \ m(x).\nu(x) \leq 0\} = \Gamma \setminus \Gamma(x^0);$$

así como la frontera lateral Σ:

$$\Sigma(x^0) = \Gamma(x^0) \times]0, T[$$

$$\Sigma_*(x^0) = \Gamma_*(x^0) \times]0, T[= \Sigma \setminus \Sigma(x^0).$$

Representemos por λ_1 el primer autovalor del problema espectral $-\Delta\varphi = \lambda\varphi$, $\varphi \in H_0^1(\Omega)$.

Sean $K_1, K_2, K_3, a_{ij} : \mathbb{R}^n \times [0, \infty[\to]0, \infty[$ funciones contínuas.

Consideremos las siguientes hipótesis.

$$\left\{ \begin{array}{l} K(x,t) \geq \alpha_0 > 0, \ \forall t \in [0,T] \text{ c.t.p. en } \Omega \\ K_1 \in C([0,T]; W^{1,\infty}(\Omega)) \cap W^{2,\infty}(0,T; L^\infty(\Omega)) \\ K_1' \in L^1(0, +\infty, L^\infty(\Omega)) \\ \frac{\partial K_1}{\partial x_\ell} \in L^1(0, +\infty, L^\infty(\Omega)), \ 1 \leq \ell \leq n \end{array} \right. \qquad (H1)$$

$$\begin{cases} K_2 \in L^\infty(0,T;W^{1,\infty}(\Omega)) \cap W^{2,\infty}(0,T;L^\infty(\Omega)) \\ K_2 \in W^{1,1}(0,+\infty,L^\infty(\Omega)) \end{cases} \qquad (H2)$$

$$\begin{cases} K_3 \in W^{1,\infty}(0,T;L^\infty(\Omega)) \\ K_3 \in L^1(0,+\infty,L^\infty(\Omega)) \end{cases} \qquad (H3)$$

$$\begin{cases} \text{La matriz } (a_{ij})\ 1 \leq i,j \leq n \text{ es simétrica y uniformemente} \\ \qquad \text{coerciva sobre } \bar{Q}, \text{ cierre de } Q. \\ a_{ij} \in C^1(\bar{Q}) \\ a''_{ij} \in L^\infty(Q) \\ a'_{ij} \in L^1(0,+\infty,L^\infty(\Omega)) \\ \text{Existe } \delta > 0 \text{ tal que} \\ (1-\delta)a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j - \frac{1}{2}\frac{\partial a_{ij}(x,t)}{\partial x_\ell} m_\ell \xi_i \xi_j \geq 0 \\ \qquad \forall \{x,t\} \in Q \text{ e } \xi \in \mathbb{R}^n \end{cases} \qquad (H4)$$

(Aquí y en lo que sigue adoptamos el convenio que dos índices repetidos indicarán sumación).

Deseamos actuar solmente sobre una parte de la frontera Σ, lo que formularemos como sigue.

Consideremos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} (K_1(x,t)y')' + K_2(x,t)y' + K_3(x,t)y + A(t)y = 0 \text{ en } Q \\ y = \begin{cases} v \text{ sobre } \Sigma(x^0) \\ 0 \text{ sobre } \Sigma \setminus \Sigma(x^0) \end{cases} \\ y(0) = y^0, y'(0) = y^1 \text{ en } \Omega \end{cases} \tag{2.1}$$

donde

$$A(t)y = -\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{i_j}(x,t)\frac{\partial y}{\partial x_j}\right).$$

En (4.17) daremos un tiempo especial T_0 dependiendo de $n, R(x^0)$, $\lambda_1, \alpha_0, a_0, \delta$, las funciones K_1, K_2, K_3, a_{ij} y sobre la geometría de Ω.

Ahora enunciaremos el resultado principal de este trabajo.

Teorema 2.1. *Supongamos que las hipótesis (H1)-(H4) sean satisfechas. Sea $T > T_0$. Entonces, para cada dato inicial $\{y^0, y^1\}$ perteneciendo a $L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$, existe un control $v \in L^2(\Sigma(x^0))$ tal que la solución ultradébil $y = y(x,t)$ del problema satisface*

$$y(T) = 0, \quad y'(T) = 0.$$

La prueba del teorema 2.1 será dada en las tres secciones siguientes.

3. EL PROBLEMA HOMOGENEO

Introduciremos algunas notaciones que usaremos a lo largo del trabajo. Con $(,\cdot,), |\cdot|$ denotaremos el producto escalar y la norma de $L^2(\Omega)$ y con $||\cdot||$, la norma de $H_0^1(\Omega)$ dada por la forma de Dirichlet. La dualidad entre el espacio F y su dual F' será denotada por $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

En esta sección obtendremos la existencia y la identidad de la energía para soluciones del siguiente sistema homogéneo:

$$\begin{cases} (K_1(x,t)\phi')' - (K_2(x,t)\phi)' + K_3(x,t)\phi + A(t)\phi = f \text{ en } Q \\ \phi = 0 \text{ sobre } \Sigma \\ \phi(0) = \phi^0, \phi'(0) = \phi^1 \text{ en } \Omega. \end{cases} \tag{3.1}$$

Con dato $\{\phi', \phi^1, f\}$ en $H_0^1(\Omega \times L^2(\Omega) \times L^1(0,T;L^2(\Omega))$. LLamaremos solución débil del problema (3.1) à la función $\phi: Q \to \mathbb{R}$, si ϕ pertenece a la clase

$$\phi \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)), \quad \phi' \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$$

satisface la ecuación

$$\frac{d}{dt}(K_1\phi', w) - ((K_2\phi)', w) + (K_3\phi, w) + a(t,\phi,w) = (f,w) \tag{3.2}$$

en el sentido de $\mathcal{D}'(0,T)$, $\forall w \in H_0^1(\Omega)$ y las condiciones iniciales

$$\phi(0) = \phi^0, \quad \phi'(0) = \phi^0.$$

Aquí ,

$$\langle A(t)\phi, w\rangle = a(t,\phi,w) = \int_\Omega a_{ij}(x,t)\frac{\partial\phi}{\partial x_i}\frac{\partial w}{\partial x_j}dx.$$

Teorema 3.1. *Sean*

$$\phi^0 \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega), \ \phi^1 \in H_0^1(\Omega), \ f \in W^{1,1}(0,T;L^2(\Omega)).$$

Entonces existe una única función $\phi: Q \to \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{gathered} \phi \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)), \phi' \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)), \\ \phi'' \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \end{gathered} \tag{3.3}$$

$$(K_1\phi')' - (K_2\phi)' + K_3\phi + A(t)\phi = f \text{ c.t.p. en } Q. \tag{3.4}$$

$$\phi(0) = \phi^0, \quad \phi'(0) = \phi^1. \tag{3.5}$$

El Teorema 3.1 se prueba aplicando el método de Faedo Galerkin con dos estimaciones. La solución ϕ obtenida en el teorema 3.1 se llama solución fuerte del problema homogéneo (3.1).

El Teorema 3.1 nos permite obtener el siguiente resultado:

Teorema 3.2. *Sean*

$$\phi^0 \in H_0^1(\Omega), \quad \phi^1 \in L^2(\Omega), \quad f \in L^1(0,T;L^2(\Omega)).$$

Entonces

Existe una única solución débil ϕ del problema (3.1) perteneciendo a la clase

$$\phi \in C([0,T];H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0,T];L^2(\Omega)). \tag{3.6}$$

La aplicación lineal

$$H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^1(0,T;L^2(\Omega)) \to C([0,T];H_0^1(\Omega)) \cap$$

$$C^1([0,T];L^2(\Omega)) \tag{3.7}$$

$$\{\phi^0, \phi^1, f\} \mapsto \phi$$

es contínua, ϕ obtenida en (3.6).

La solución ϕ hallada en (3.6) satisface

$$\frac{1}{2}|k_1^{1/2}(t)\phi'(t)|^2 + \frac{1}{2}a(t,\phi(t),\phi(t)) =$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}|K_1^{1/2}(0)\phi^1|^2 + \frac{1}{2}a(0,\phi^0,\phi^0)+ \\
&+ \frac{1}{2}\int_0^t a'(s,\phi(s),\phi(s))ds - \frac{1}{2}\int_0^t (K_1'(s)\phi'(s),\phi'(s))ds+ \\
&+ \int_0^t (K_2(s)\phi'(s),\phi'(s))ds + \int_0^t (K_2'(s)\phi(s),\phi'(s))ds- \\
&- \int_0^t (K_3(s)\phi(s),\phi'(s))ds + \int_0^t (f(s),\phi'(s))ds.
\end{aligned} \tag{3.8}
$$

El Teorema 3.2 se prueba utilizando el teorema (3.1) mediante aproximaciones.

Ahora consideremos un problema homogéneo que será utilizado en el estudio de la regularidd de la solución $y = y(x,t)$ del problema (*) de la introducción. Esto es,

$$
\begin{cases}
(K_1(x,t)\phi')' - (K_2(x,t)\phi)' + K_3(x,t)\phi + A(t)\phi = f' \text{ en } Q \\
\phi = 0 \text{ sobre } \Sigma \\
\phi(0) = 0, \ \phi'(0) = 0 \text{ en } \Omega
\end{cases} \tag{3.9}
$$

Teorema 3.3. *Sean*

$$f \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)), \ f' \in L^2(0,T;L^2(\Omega)), \ f(0) = 0.$$

Entonces la solución débil ϕ del problema (3.9) satisface

$$|K_1^{1/2}(t)\phi'(t) - K_1^{-1/2}(t)f(t)| + ||\phi(t)|| \leq$$
$$\leq c\int_0^T ||f(t)||dt, \quad \forall t \in [0,T] \tag{3.10}$$

donde c es una constante independiente de ϕ y f.

Demostración: La igualdad (3.8) del teorema 3.2 aplicada al problema (3.9) nos permite obtener:

$$\frac{1}{2}|K_1^{1/2}(t)\phi'(t)|^2 + \frac{1}{2}a(t,\phi(t),\phi(t)) =$$
$$\frac{1}{2}\int_0^t a'(s,\phi(s),\phi(s))ds - \frac{1}{2}\int_0^t (K_1'(s)\phi'(s),\phi'(s))ds +$$
$$+\int_0^t (K_2(s)\phi'(s),\phi'(s))ds + \int_0^t (K_2'(s)\phi(s),\phi'(s))ds - \tag{3.11}$$
$$-\int_0^t (K_3(s)\phi(s),\phi'(s))ds + \int_0^t (f'(s),\phi'(s))ds.$$

Integrando por partes y notando que $f(0) = 0$, obtenemos:

$$\int_0^t (f'(s),\phi'(s))ds = (f(t),\phi'(t)) +$$
$$+\int_0^t (K_1^{-1}(s)K_1'(s)f(s),\phi'(s))ds - \tag{3.12}$$
$$-\int_0^t \langle K_1^{-1}(s)f(s),(K_1\phi')'(s)\rangle ds$$

sabemos que

$$(K_1\phi')' = f' - A(t)\phi + K_2\phi' + K_2'\phi - K_3\phi \tag{3.13}$$

sustituyendo (3.13) en (3.12) resulta

$$\int_0^t (f'(s),\phi'(s))ds = (f(t),\phi'(t))+$$

$$+\int_0^t (K_1^{-1}(s)K_1'(s)f(s),\phi'(s))ds - \int_0^t (K_1^{-1}(s)f(s),f'(s))ds+$$

$$\int_0^t \langle K_1^{-1}(s)f(s),A(s)\phi(s)\rangle ds - \int_0^t (K_1^{-1}(s)K_2(s)f(s),\phi'(s))ds-$$

$$\int_0^t (K_1^{-1}(s)K_2'(s)f(s),\phi(s)ds + \int_0^t (K_1^{-1}(s)K_3(s)f(s),\phi(s))ds$$

después de integrar por partes el tercer término del lado derecho de la igualdad anterior, obtenemos:

$$\begin{aligned}\int_0^t (f'(s),\phi'(s))ds &= (f(t),\phi'(t)) - \frac{1}{2}(K_1^{-1}(t)f(t),f(t))-\\ &-\frac{1}{2}\int_0^t (K_1^{-2}(s)K_1'(s)f(s),f(s))ds + \int_0^t (K_1^{-1}(s)K_1'(s)f(s),\phi'(s))ds+\\ &+\int_0^t \langle K_1^{-1}(s)f(s),A(s)\phi(s)\rangle ds - \int_0^t (K_1^{-1}(s)K_2(s)f(s),\phi'(s))ds-\\ &-\int_0^t (K_1^{-1}(s)K_2'(s)f(s),\phi(s))ds + \int_0^t (K_1^{-1}(s)K_3(s)f(s),\phi(s))ds.\end{aligned} \tag{3.14}$$

De las igualdades (3.11) y (3.14) se obtiene fácilmente:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}|K_1^{1/2}(t)\phi'(t) - K_1^{-1/2}(t)f(t)|^2 + \frac{1}{2}a(t,\phi(t),\phi(t)) = \\
&= \frac{1}{2}\int_0^t a'(s,\phi(s),\phi(s))ds - \frac{1}{2}\int_0^t (K_1'(s)\phi'(s),\phi'(s))ds + \\
&+ \int_0^t (K_2(s)\phi'(s),\phi'(s))ds + \int_0^t (K_2'(s)\phi(s),\phi'(s))ds - \\
&- \frac{1}{2}\int_0^t (K_1^{-2}(s)K_1'(s)f(s),f(s))ds + \int_0^t (K_1^{-1}(s)K_1'(s)f(s),\phi'(s))ds + \\
&+ \int_0^t \langle K_1^{-1}(s)f(s),A(s)\phi(s)\rangle ds - \int_0^t (K_1^{-1}(s)K_2(s)f(s),\phi'(s))ds - \\
&- \int_0^t (K_1^{-1}(s)K_2'(s)f(s),\phi(s))ds + \int_0^t (K_1^{-1}(s)K_3(s)f(s),\phi(s))ds.
\end{aligned}
\tag{3.15}
$$

Haciendo $\theta = K_1^{1/2}\phi' - K_1^{-1/2}f$ en (3.15) y sustituyendo ϕ' por $K_1^{-1/2}\theta + K_1^{-1}f$ en esta igualdad, obtenemos después de cálculos directos

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}|\theta(t)|^2 + \frac{1}{2}a(t,\phi(t),\phi(t)) = \\
&= \frac{1}{2}\int_0^t a'(s,\phi(s),\phi(s))ds - \frac{1}{2}\int_0^t (K_1^{-1}(s)K_1'(s)\theta(s),\theta(s))ds + \\
&+ \int_0^t (K_1^{-1}(s)K_2(s)\theta(s),\theta(s))ds + \int_0^t (K_1^{-3/2}(s)K_2(s)f(s),\theta(s))ds +
\end{aligned}
\tag{3.16}
$$

$$+\int_0^t (K_1^{-1/2}(s)K_2'(s)\phi(s),\theta(s)) + \int_0^t a(s,K_1^{-1}(s)f(s),\phi(s))ds+$$

$$+\int_0^t (K_1^{-1}(s)K_3(s)f(s),\phi(s))ds.$$

Mayorando la igualdad (3.16) deducimos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}|\theta(t)|^2+\frac{1}{2}||\phi(t)||^2 &\le c\int_0^t (|\theta(s)|^2+||\phi(s)||^2)ds+\\ &+c\int_0^t ||f(s)||(|\theta(s)|+||\phi(s)||)ds,\end{aligned} \tag{3.17}$$

donde c es una constante independiente de ϕ y f. Utilizando la desigualdad de Gronwall en la estimación (3.17) resulta

$$|\theta(t)|+||\phi(t)||\le c\int_0^T ||f(s)||ds. \tag{3.18}$$

Sustituyendo θ por su definición en (3.18), se deduce la estimación (3.10). ■

4. DESIGUALDAD DIRECTA E INVERSA

El objetivo de esta sección es estimar la derivada normal $\frac{\partial\phi}{\partial\nu}$, ϕ la solución débil del problema (3.1).

De acuerdo con la hipótesis (H4) tenemos

$$a_0\xi_i\xi_i \le a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \le a_i\xi_i\xi_i,\ \forall\{x,t\}\in\bar{Q},\ \forall\xi\in\mathbf{R}^n(a_0>0) \tag{4.1}$$

La energía del sistema (3.1) es

$$E(t)=\frac{1}{2}|K_1^{1/2}(t)\phi'(t)|^2+\frac{1}{2}a(t,\phi(t),\phi(t)) \tag{4.2}$$

en particular

$$E_0 = E(0) = \frac{1}{2}|K_1^{1/2}(0)\phi^1|^2 + \frac{1}{2}a(0,\phi^0,\phi^0).$$

Teorema 4.1. *Sea ϕ la solución débil del problema (3.1). Entonces si $f = 0$,*

$$E_0 e^{-C_0} \leq E(t) \leq E_0 e^{C_0}, \ \forall t \in [0,\infty[\tag{4.3}$$

donde,

$$C_0 = a_0^{-1}||\beta||_{L^1(0,+\infty)} + \alpha_0^{-1}||K_1'||_{L^1(0,+\infty,L^\infty(\Omega))}+$$

$$+ 2\alpha_0^{-1}||K_2||_{L^1(0,+\infty,L^\infty(\Omega))} + a_0^{-1/2}\alpha_0^{-1/2}\lambda_1^{-1/2}||K_2'||_{L^1(0,+\infty,L^\infty(\Omega))}+$$

$$+ a_0^{-1/2}\alpha_0^{-1/2}\lambda_1^{-1/2}||K_3||_{L^1(0,+\infty,L^\infty(\Omega))}$$

$$\beta(t) = \sup_{x\in\Omega}\left(\sum_{i,j=1}^{n}|a_{ij}'(x,t)|^2\right)^{1/2} \in L^1(0,+\infty).$$

si $f \neq 0$,

$$E(t) \leq c\left[E_0 + \left(\int_0^T |f(t)|\right)^2\right], \qquad \forall t \in [0,T] \tag{4.4}$$

donde c es una constante independiente de la solución débil del problema (3.1).

Demostración. Probaremos la parte (4.3) del teorema 4.1. La parte (4.4) se obtiene de forma análoga a (4.3). Derivando con respecto a t la igualdad (3.8) del teorema 3.2, con $f = 0$, y teniendo en cuenta (4.2) resulta:

$$E'(t) = \frac{1}{2}a'(t,\phi(t),\phi(t)) - \frac{1}{2}(K_1'(t)\phi'(t),\phi'(t)) +$$

$$+ (K_2(t)\phi'(t),\phi'(t)) + (K_2'(t)\phi(t),\phi'(t)) -$$

$$- (K_3(t)\phi(t),\phi'(t)).$$

Mayorando el lado derecho de la igualdad anterior obtenemos

$$|E'(t)| \leq G(t)E(t)$$

donde

$$G(t) = a_0^{-1}\beta(t) + \alpha_0^{-1}||K_1'(t)||_{L^\infty(\Omega)} + 2\alpha_0^{-1}||K_2(t)||_{L^\infty(\Omega)} + \tag{4.5}$$
$$a_0^{-1/2}a_0^{-1/2}\lambda_1^{-1/2}||K_2'(t)||_{L^\infty(\Omega)} + a_0^{-1/2}\alpha_0^{-1/2}\lambda_1^{-1/2}||K_3(t)||_{L^\infty(\Omega)}$$

de la desigualdad anterior se sigue:

$$-G(t)E(t) \leq E'(t) \leq G(t)E(t). \tag{4.6}$$

Usando las hipótesis (H1)-(H4), sección 2, sobre las funciones K_1, K_2, K_3 y a_{ij}podemos acotar cada término que define G y de (4.5) se obtiene

$$\int_0^\infty G(t)dt \leq C_0. \tag{4.7}$$

Combinando (4.6) y (4.7) concluimos la prueba del teorema. ∎

Seguidamente, probaremos una igualdad que es fundamental en la obtención de la estimación para $\frac{\partial\phi}{\partial\nu}$.

Teorema 4.2. *Sea $(q_\ell)_{1\leq\ell\leq n}$ un campo de vectores tal que $q_\ell \in C^1(\bar{\Omega})$ para $1 \leq \ell \leq n$. Entonces cada solución débil ϕ del problema (3.1) verifica:*

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_{\Sigma} a_{ij}\nu_i\nu_j q_\ell \nu_\ell \left(\frac{\partial\phi}{\partial\nu}\right)^2 d\Sigma = \left(K_1\phi', q_\ell\frac{\partial\phi}{\partial x_\ell}\right)\Big|_0^T +\\
&+\frac{1}{2}\int_Q \frac{\partial(K_1 q_\ell)}{\partial x_\ell}\phi'^2 dxdt - \frac{1}{2}\int_Q a_{ij}\frac{\partial\phi}{\partial x_j}\frac{\partial q_\ell}{\partial x_\ell}\frac{\partial\phi}{\partial x_i}dxdt+\\
&+\int_Q a_{ij}\frac{\partial\phi}{\partial x_j}\frac{\partial q_\ell}{\partial x_i}\frac{\partial\phi}{\partial x_\ell}dxdt - \frac{1}{2}\int_Q \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_\ell}\frac{\partial\phi}{\partial x_j}q_\ell\frac{\partial\phi}{\partial x_i}dxdt- \qquad (4.8)\\
&-\int_Q (K_2\phi)' q_\ell\frac{\partial\phi}{\partial x_\ell}dxdt - \int_Q K_3\phi q_\ell\frac{\partial\phi}{\partial x_\ell}dxdt-\\
&-\int_Q f q_\ell\frac{\partial\phi}{\partial x_\ell}dxdt.
\end{aligned}
$$

Demostración. Primero, probamos la igualdad (4.8) para soluciones fuertes ϕ del problema (3.1). Luego por densidad se sigue para soluciones débiles. Así $\phi(t) \in H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)$, $\phi'(t) \in H_0^1(\Omega)$.

Multiplicando la ecuación $(3.1)_1$ por $q_\ell\frac{\partial\phi}{\partial x_\ell}$ e integrando sobre Q, obtenemos

$$
\begin{aligned}
&\int_Q (K_1\phi')' q_\ell\frac{\partial\phi}{\partial x_\ell}dxdt - \int_Q (K_2\phi)' q_\ell\frac{\partial\phi}{\partial x_\ell}dxdt+\\
&+\int_Q K_3\phi q_\ell\frac{\partial\phi}{\partial x_\ell}dxdt + \int_Q A(t)\phi q_\ell\frac{\partial\phi}{\partial x_\ell}dxdt = \qquad (4.9)\\
&=\int_Q f q_\ell\frac{\partial\phi}{\partial x_\ell}dxdt.
\end{aligned}
$$

Integrando por partes en t y aplicando luego la fórmula de Green en el primer término de la expresión (4.9) resulta:

$$\int_Q (K_1\phi')' q_\ell \frac{\partial \phi}{\partial x_\ell} dx dt = \left(K_1\phi', q_\ell \frac{\partial \phi}{\partial x_\ell}\right)\Big|_0^T + \\ + \frac{1}{2}\int_Q \frac{\partial (K_1 q_\ell)}{\partial x_\ell}(K_1 q_\ell)\phi'^2 dx dt. \tag{4.10}$$

Para el cuarto término de (4.9), usando la fórmula de Green se obtiene:

$$\int_Q A(t)\phi q_\ell \frac{\partial \phi}{\partial x_\ell} dx dt = \int_Q a_{ij}\frac{\partial \phi}{\partial x_j}\frac{\partial q_\ell}{\partial x_i}\frac{\partial \phi}{\partial x_\ell} dx dt + \\ + \int_Q a_{ij}\frac{\partial \phi}{\partial x_j} q_\ell \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_\ell} dx dt - \int_\Sigma a_{ij}\frac{\partial \phi}{\partial x_j} q_\ell \frac{\partial \phi}{\partial x_\ell}\nu_i d\Sigma. \tag{4.11}$$

Aplicando el operador $\frac{\partial}{\partial x_\ell}$ sobre $a_{ij}\frac{\partial \phi}{\partial x_j} q_\ell \frac{\partial \phi}{\partial x_i}$ y notando que $a_{ij} = a_{ji}$, deducimos usando la fórmula de Green en el segundo término del lado derecho de (4.11), que

$$2\int_Q a_{ij}\frac{\partial \phi}{\partial x_j} q_\ell \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_\ell} dx dt = \\ = -\int_Q \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_\ell}\frac{\partial \phi}{\partial x_j} q_\ell \frac{\partial \phi}{\partial x_i} dx dt - \\ - \int_Q a_{ij}\frac{\partial \phi}{\partial x_j}\frac{\partial q_\ell}{\partial x_\ell}\frac{\partial \phi}{\partial x_i} dx dt + \int_\Sigma a_{ij}\frac{\partial \phi}{\partial x_j} q_\ell \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\nu_\ell d\Sigma. \tag{4.12}$$

Se sabe que $\frac{\partial \phi}{\partial x_i} = \nu_i \frac{\partial \phi}{\partial \nu}$ sobre Γ (Ver J.L. Lions [9]), por lo tanto

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\int_{\sigma} a_{ij}\frac{\partial\phi}{\partial x_j}q_\ell\frac{\partial\phi}{\partial x_i}\nu_\ell d\Sigma-\int_{\Sigma} a_{ij}\frac{\partial\phi}{\partial x_j}q_\ell\frac{\partial\phi}{\partial x_\ell}\nu_i d\Sigma=\\&-\frac{1}{2}\int_{\Sigma} a_{ij}\nu_i\nu_j q_\ell\nu_\ell\left(\frac{\partial\phi}{\partial\nu}\right)^2 d\Sigma.\end{aligned}\tag{4.13}$$

Combinando las expresiones (4.11), (4.12) y (4.13) se obtiene:

$$\begin{aligned}&\int_Q A(t)\phi q_\ell\frac{\partial\phi}{\partial x_\ell}dxdt=\int_Q a_{ij}\frac{\partial\phi}{\partial x_j}\frac{\partial q_\ell}{\partial x_i}\frac{\partial\phi}{\partial x_\ell}dxdt-\\&-\frac{1}{2}\int_Q\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_\ell}\frac{\partial\phi}{\partial x_j}q_\ell\frac{\partial\phi}{\partial x_i}dxdt-\frac{1}{2}\int_Q a_{ij}\frac{\partial\phi}{\partial x_j}\frac{\partial q_\ell}{\partial x_\ell}\frac{\partial\phi}{\partial x_i}dxdt-\\&-\frac{1}{2}\int_{\Sigma} a_{ij}\nu_i\nu_j q_\ell\nu_\ell\left(\frac{\partial\phi}{\partial\nu}\right)^2 d\Sigma.\end{aligned}\tag{4.14}$$

Sustituyendo (4.10) y (4.14) en (4.9) y transponiendo términos adecuadamente, resulta la identidad (4.8). ■

La siguiente desigualdad a demostrar se llama desigualdad directa para el problema (3.1).

Teorema 4.3. *Sea ϕ la solución débil del problema (3.1). Entonces $\frac{\partial\phi}{\partial\nu}\in L^2(\Sigma)$ y*

$$\int_{\Sigma}\left(\frac{\partial\phi}{\partial\nu}\right)^2 d\Sigma\le c\left[E_0+\left(\int_0^T|f(t)|dt\right)^2\right]$$

donde c es una constante independiente de ϕ.

Demostración: Del teorema (4.1) parte (4.4) se tiene la siguiente estimación

$$|K_1^{1/2}(t)\phi'(t)|^2 + a(t,,\phi(t),\phi(t)) \leq cE_0 + c\Big(\int_0^T |f(t)|dt\Big)^2, \ \forall t \in [0,T]. \tag{4.15}$$

Consideremos la identidad (4.8) con $q_\ell = \nu_\ell$ sobre Γ. Observemos que, usando la estimación (4.15), ls integrales sobre Ω de (4.8) pueden ser acotadas por

$$c\Big[E_0 + \Big(\int_0^T |f(t)|dt\Big)^2\Big]$$

las integrales sobre Q por

$$c(T+1)\Big[E_0 + \Big(\int_0^T |f(t)|dt\Big)^2\Big]$$

y la integral $\int_Q f q_\ell \frac{\partial\phi}{\partial x_\ell} dx dt$ por

$$cE_0^{1/2}\int_0^T |f(t)|dt + c\Big(\int_0^T |f(t)|dt\Big)^2.$$

Por otro lado

$$\frac{1}{2}\int_\Sigma a_{ij}\nu_i\nu_j\nu_\ell\nu_\ell\Big(\frac{\partial\phi}{\partial\nu}\Big)^2 d\Sigma \geq \frac{1}{2}a_0\int_\Sigma\Big(\frac{\partial\phi}{\partial\nu}\Big)^2 d\Sigma.$$

Combinando las estimaciones anteriores y (4.8) con $q_\ell = \nu_\ell$ sobre Γ resulta:

$$\int_\Sigma\Big(\frac{\partial\phi}{\partial\nu}\Big)^2 d\Sigma \leq c(T+1)\Big[E_0 + \Big(\int_0^T |f(t)|dt\Big)^2\Big] + cE_0^{1/2}\int_0^T |f(t)|dt.$$

Mayorando la desigualdad anterior se obtiene el resultado el teorema 4.3. ■

Para establecer la desigualdad inversa para el problema 3.1 con $f = 0$ introducimos algunas notaciones. Del Teorema 4.1 parte (4.3), obtenemos

$$C_1 E_0 \leq E(t) \leq C_2 E_0, \quad \forall t \in [0, \infty[\tag{4.16}$$

$$(C_1 = e^{-C_0}, \quad C_2 = e^{C_0})$$

El tiempo T_0 es definido por:

$$\begin{aligned} T_0 = {} & [2a_0^{-1/2}||K_1|_{L^\infty(Q)}^{1/2} R(x^0) + \alpha_0^{-1}||\eta||_{L^1(0,+\infty)} R(x^0) + \\ & + M_1 + M_2 + M_3] C_2 C_1^{-1} \delta^{-1}. \end{aligned} \tag{4.17}$$

donde

$$\eta(t) = \sup_{\Omega} \operatorname{ess} \left(\sum_{\ell=1}^{n} \left| \frac{\partial K_1}{\partial x_\ell}(x,t) \right|^2 \right)^{1/2} \in L^1(0, +\infty)$$

$$\begin{aligned} M_1 = {} & \frac{(n-\delta)}{2} \alpha_0^{-1/2} a_0^{-1} \lambda_1^{-1} [a_0^{1/2} \lambda_1^{1/2} ||K_2||_{L^1(0,+\infty, L^\infty(\Omega))} \\ & + 2\alpha_0^{1/2} ||K_2'||_{L^1(0,+\infty, L^\infty(\Omega))}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_2 = {} & \alpha_0^{-1/2} a_0^{-1} \lambda_1^{-1} R(x^0) [a_0^{1/2} \lambda_i |K_2||_{L^1(0,+\infty, L^\infty(\Omega))} \\ & + 2\alpha_0^{1/2} \lambda_1^{1/2} ||K_2'||_{L^1(0,+\infty, L^\infty(\Omega))}] \end{aligned}$$

$$M_3 = \lambda_1^{-1} a_0^{-1} ||K_3||_{L^1(0,+\infty, L^\infty(\Omega))} [(n-\delta) + 2\lambda_1^{1/2} R(x^0)]$$

Teorema 4.4. *Sea $T > T_0$. Entonces cada solución débil ϕ del problema (3.1) con $f = 0$, verifica*

$$\frac{1}{2}R(x^0)a_1 \int_{\Sigma(x^0)} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \nu}\right)^2 d\Sigma \geq \delta C_1(T - T_0)E_0.$$

Obsevación 4.1. Notemos que si las funciones $K_1 = 1$, $K_2 = K_3 = 0$ y $a_{ij} = \delta_{ij}$ entonces $C_1 = C_2 = \delta = a_0 = 1$, $M_1 = M_2 = \eta = 0$ lo que implica $T_0 = 2R(x^0)$. Este es el tiempo T_0 determinado en J.L. Lions [9] y en V. Komornik [7] para la ecuación $u'' - \Delta u = 0$.

Demostración del teorema 4.4.: Consideremos la identidad (4.8) del teorema 4.2 con el campo particular $q_\ell = m_\ell = x_\ell - x_\ell^0$ y después de hacer cálculos directos obtenemos

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_\Sigma a_{ij}\nu_i\nu_j m_\ell \nu_\ell \left(\frac{\partial \phi}{\partial \nu}\right)^2 d\Sigma = \\
&= \left(K_1\phi', m_\ell \frac{\partial \phi}{\partial x_\ell} + \frac{n-\delta}{2}\phi\right)\Big|_0^T + \delta\int_0^T E(t)dt + \\
&+ \frac{1}{2}\int_Q \frac{\partial K_1}{\partial x_\ell} m_\ell \phi'^2 dxdt + \\
&+ \int_Q \left[(1-\delta)a_{ij}\frac{\partial \phi}{\partial x_i}\frac{\partial \phi}{\partial x_j} - \frac{1}{2}\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_\ell} m_\ell \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\frac{\partial \phi}{\partial x_j}\right] dxdt - \\
&- \frac{n-\delta}{2}\int_Q (K_2\phi)'\phi dxdt - \int_Q (K_2\phi)' m_\ell \frac{\partial \phi}{\partial x_\ell} dxdt + \\
&+ \frac{n-\delta}{2}\int_Q K_3\phi^2 dxdt + \int_Q K_3\phi m_\ell \frac{\partial \phi}{\partial x_\ell} dxdt
\end{aligned} \tag{4.18}$$

donde δ es un número real positivo arbitrario.

Utilizando la hipótesis $(H4)_5$ en la identidad (4.18) obtenemos la siguiente desigualdad

$$\frac{1}{2}\int_{\Sigma} a_{ij}\nu_i\nu_j m_\ell \nu_\ell \left(\frac{\partial\phi}{\partial\nu}\right)^2 d\Sigma \geq$$

$$\geq \left(K_1\phi', m_\ell\frac{\partial\phi}{\partial x_\ell} + \frac{n-\delta}{2}\phi\right)\Big|_0^T + \delta\int_0^T E(t)dt +$$

$$\frac{1}{2}\int_Q \frac{\partial K_1}{\partial x_\ell} m_\ell \phi'^2 dxdt - \frac{n-\delta}{2}\int_Q (K_2\phi)'\phi dxdt - \tag{4.19}$$

$$- \int_Q (K_2\phi)' m_\ell \frac{\partial\phi}{\partial x_\ell} dxdt + \frac{n-\delta}{2}\int_Q K_3\phi^2 dxdt +$$

$$+ \int_Q K_3\phi m_\ell \frac{\partial\phi}{\partial x_\ell} dxdt.$$

Haciendo cálculos análogos a los realizados en J.L. Lions [8] y [9]

$$\left|\left(K_1\phi', m_\ell\frac{\partial\phi}{\partial x_\ell} + \frac{n-\delta}{2}\phi\right)\right| \leq$$

$$\leq ||K_1||^{1/2}_{L^\infty(Q)}\left[\frac{\mu}{2}|K_1^{1/2}\phi'|^2 + \frac{1}{2\mu}\left|m_\ell\frac{\partial\phi}{\partial x_\ell} + \frac{n-\delta}{2}\phi\right|^2\right].$$

Tomando $\mu = a_0^{-1/2}R(x^0) > 0$ y utilizando la estimación (4.16) en la desigualdad anterior, resulta:

$$\left|\left(K_1\phi', m_\ell\frac{\partial\phi}{\partial x_\ell} + \frac{n-\delta}{2}\phi\right)\right| \leq a_0^{-1/2}||K_1||^{1/2}_{L^\infty(Q)}R(x^0)C_2E_0,$$

lo que implica

$$\left(K_1\phi', m_\ell \frac{\partial \phi}{\partial x_\ell} + \frac{n-\delta}{2}\phi\right)\Bigg|_0^T \geq 2a_0^{-1/2}||K_1||^{1/2}_{L^\infty(Q)}R(x^0)C_2E_0. \quad (4.20)$$

Los otros términos del miembro de la derecha de (4.19) quedan acotadas utilizando la estimación (4.16) de la siguiente manera:

$$\delta\int_0^T E(t)dt \geq \delta T C_1 E_0. \quad (4.21)$$

$$\frac{1}{2}\int_Q \frac{\partial K_1}{\partial x_\ell} m_\ell \phi'^2 dxdt \geq -\alpha_0^{-1}||\eta||_{L^1(0,+\infty)}R(x^0)C_2E_0. \quad (4.22)$$

$$\begin{aligned} -\frac{n-\delta}{2}\int_Q (K_2\phi)'\phi dxdt \geq \\ \geq -\frac{n-\delta}{2}\alpha_0^{-1/2}a_0^{-1/2}\lambda_1^{-1/2}||K_2||_{L^1(0,+\infty,L^\infty(\Omega))}C_2E_0- \\ -(n-\delta)a_0^{-1}\lambda_1^{-1}||K_2'||_{L^1(0,+\infty,L^\infty(\Omega))}C_2E_0. \end{aligned} \quad (4.23)$$

$$\begin{aligned} -\int_Q (K_2\phi)' m_\ell \frac{\partial \phi}{\partial x_\ell} dxdt \geq \\ \geq -\alpha_0^{-1/2}a_0^{-1/2}R(x^0)||K_2||_{L^1(0,+\infty,L^\infty(\Omega))}C_2E_0- \\ -2a_0^{-1}\lambda_1^{-1/2}R(x^0)||K_2'||_{L^1(0,+\infty,L^\infty(\Omega))}C_2E_0. \end{aligned} \quad (4.24)$$

$$\frac{n-\delta}{2}\int_Q K_3\phi^2 dxdt \geq -\frac{n-\delta}{2}a_0^{-1}\lambda_1^{-1}||K_3||_{L^1(0,+\infty,L^\infty(\Omega))}C_2E_0. \tag{4.25}$$

$$\int_Q K_3\phi m_\ell \frac{\partial\phi}{\partial x_\ell}dxdt \geq -2a_0^{-1}\lambda_1^{-1/2}R(x^0)||K_3||_{L^1(0,+\infty,L^\infty(\Omega))}C_2E_0. \tag{4.26}$$

Así, utilizando las estimaciones (4.20)-(4.26) en la desigualdad (4.19) obtenemos:

$$\frac{1}{2}\int_{\Sigma(x^0)} a_{ij}\nu_i\nu_j\nu_\ell m_\ell\left(\frac{\partial\phi}{\partial\nu}\right)^2 d\Sigma \geq \delta C_1(T-T_0)E_0. \tag{4.27}$$

El miembro de la izquierda de (4.27) se puede acotar como en J.L. Lions [9] por

$$\frac{1}{2}R(x^0)a_1\int_{\Sigma(x^0)}\left(\frac{\partial\phi}{\partial\nu}\right)^2 d\Sigma. \tag{4.28}$$

Combinando (4.27) y (4.28) finalizamos la prueba del teorema. ■

5. CONTROLABILIDAD EXACTA

En esta sección concluiremos la prueba del teorema 2.1. Consideremos el problema

$$\begin{cases} (K_1(x,t)z')' + K_2(x,t)z' + K_3(x,t)z + A(t)z = 0 \text{ en } Q \\ z = v \text{ sobre } \Sigma \\ z(0) = z^0, z'(0) = z^1 \text{ en } \Omega \end{cases} \tag{5.1}$$

Primero definiremos el concepto de solución del problema 5.1. Multiplicando ambos miembros de $(5.1)_1$ por $\theta = \theta(x,t)$ e integrando por partes sobre Q formalmente, resulta:

$$\int_Q [(K_1 z')' + K_2 z' + K_3 z + A(t)z]\theta dxdt =$$

$$= -\int_\Omega K_1(0)z'(0)\theta(0)dx + \int_\Omega K_1(0)z(0)\theta'(0)dx -$$

$$- \int_\Omega K_2(0)z(0)\theta(0)dx + \int_\Sigma a_{ij}\nu_i\nu_j \frac{\partial\theta}{\partial\nu} z d\Sigma + \tag{5.2}$$

$$+ \int_Q z f dxdt,$$

donde θ es la solución del problema

$$\begin{cases} (K_1\theta')' - (K_2\theta)' + K_3\theta + A(t)\theta = f \text{ en } Q \\ \theta = 0 \text{ sobre } \Sigma \\ \theta(T) = \theta'(T) = 0 \end{cases} \tag{5.3}$$

Si $f \in L^1(0,T; L^2(\Omega))$, por el teorema 3.2 y gracias a la reversibilidad del problema (5.3) con respecto a la variable tiempo sobre el intervalo $[0,T]$, tenemos que la solución θ del problema (5.3) verifica

$$\begin{gathered} \theta \in C([0,T]; H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0,T]; L^2(\Omega)) \\ |\theta'(0)| + ||\theta(0)|| \leq c \int_0^T |f(t)|dt \end{gathered} \tag{5.4}$$

y por el teorema 4.3 y reversibilidad del tiempo se tiene

$$\frac{\partial\theta}{\partial\nu} \in L^2(\Sigma), \quad \left\| \frac{\partial\theta}{\partial\nu} \right\|_{L^2(\Sigma)} \leq c \int_0^T |f(t)|dt \tag{5.5}$$

donde c es una constante independiente de ϕ y f.

Motivados por (5.2)-(5.5) introducimos la siguiente definición: Sea

$$z^0 \in L^2(\Omega),\ z^1 \in H^{-1}(\Omega),\ v \in L^2(\Sigma). \tag{5.6}$$

Decimos que $z \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$ es una solución ultradébil definida por transposición del problema (5.1) con datos en la clase (5.6) si

$$\begin{aligned} \int_0^T (z,f)dt = \langle K_1(0)z^1, \theta(0)\rangle - (K_1(0)z^0, \theta'(0)) + \\ + (K_2(0)z^0, \theta(0)) - \int_0^T \left(v, a_{ij}\nu_i\nu_j \frac{\partial\theta}{\partial\nu}\right)_{L^2(\Gamma)} dt. \end{aligned} \tag{5.7}$$

para cada $f \in L^1(0,T;L^2(\Omega))$ donde θ está relacionado con f por el problema (5.3).

Claramente la solución z dada anteriormente es única. También tenemos, de (5.4) y (5.5), que

$$||z||_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \le c(|z^0| + ||z^1||_{H^{-1}(\Omega)} + ||v||_{L^2(\Sigma)}), \tag{5.8}$$

donde c es una constante independiente de z.

Seguidamente probaremos un resultado que utilizaremos para demostrar la regularidad de la solución ultradébil del problema (5.1).

Sea $f \in \mathcal{D}(Q), \mathcal{D}(Q)$ es el espacio de las funciones de prueba sobre Q, y θ la solución débil del problema

$$\begin{cases} (K_(x,t)\theta')' - (K_2(x,t)\theta)' + K_3(x,t)\theta + A(t)\theta = f' \text{ en } Q \\ \theta = 0 \text{ sobre } \Sigma \\ \theta(0) = 0, \theta'(0) = 0 \text{ en } \Omega. \end{cases} \tag{5.9}$$

Del teorema 3.3 (Vea sección 3), tenemos:

$$|K_1^{1/2}(t)\theta'(t) - K_1^{-1/2}(t)f(t)| + ||\theta(t)|| \le c\int_0^T ||f(t)||dt,\ \forall t \in [0,T] \tag{5.10}$$

donde c es una constante independiente de θ y f. En virtud del teorema 4.3, $\frac{\partial\theta}{\partial\nu} \in L^2(\Sigma)$.

Lema 5.1. *Cada solución débil θ del problema (5.9) verifica:*

$$\left\|\frac{\partial\theta}{\partial\nu}\right\|_{L^2(\Sigma)} \leq c\int_0^T ||f(t)||dt$$

donde c es una constante independiente de θ y f.

Demostración: Utilizando la identidad (4.8) del teorema 4.2 para el problema (5.9) y las siguientes igualdades

$$\theta' = K_1^{-1/2}(K_1^{1/2}\theta' - K_1^{-1/2}f) + K_1^{-1}f$$

$$\theta'^2 = K_1^{-1}(K_1^{1/2}\theta' - K_1^{-1/2}f)^2 + 2K_1^{-3/2}f(K_1^{1/2}\theta' - K_1^{-1/2}f) +$$

$$+ K_1^{-2}f^2,$$

después de cálculos directos se obtiene:

$$\frac{1}{2}\int_\Sigma a_{ij}\nu_i\nu_j q_\ell\nu_\ell\left(\frac{\partial\theta}{\partial\nu}\right)^2 d\Sigma = \left(K_1\theta', q_\ell\frac{\partial\theta}{\partial x_\ell}\right)\Big|_0^T +$$

$$+\frac{1}{2}\int_Q K_1^{-1}\frac{\partial(K_1q_\ell)}{\partial x_\ell}(K_1^{1/2}\theta' - K_1^{-1/2}f)^2 dxdt +$$

$$+\int_Q K_1^{-3/2}\frac{\partial K_1}{\partial x_\ell}q_\ell f(K_1^{1/2}\theta' - K_1^{-1/2}f)dxdt -$$

$$-\int_Q K_1^{-1/2}\frac{\partial f}{\partial x_\ell}q_\ell(K_1^{1/2}\theta' - K_1^{-1/2}f)dxdt -$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{2}\int_Q a_{ij}\frac{\partial\theta}{\partial x_j}\frac{\partial q_\ell}{\partial x_\ell}\frac{\partial\theta}{\partial x_i}dxdt+\\
&+\int_Q a_{ij}\frac{\partial\theta}{\partial x_j}\frac{\partial q_\ell}{\partial x_i}\frac{\partial\theta}{\partial x_\ell}dxdt-\frac{1}{2}\int_Q\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_\ell}\frac{\partial\theta}{\partial x_j}q_\ell\frac{\partial\theta}{\partial x_i}dxdt-\\
&-\int_Q K_2' q_\ell\frac{\partial\theta}{\partial x_\ell}\theta dxdt- \qquad (5.11)\\
&-\int_Q K_1^{-1/2}K_2 q_\ell\frac{\partial\theta}{\partial x_\ell}(K_1^{1/2}\theta'-K_1^{-1/2}f)dxdt-\\
&-\int_Q K_1^{-1}K_2 q_\ell\frac{\partial\theta}{\partial x_\ell}fdxdt+\int_Q K_3 q_\ell\theta\frac{\partial\theta}{\partial x_\ell}dxdt.
\end{aligned}
$$

Tomando $q_\ell\in C^1(\bar\Omega)$, $1\le\ell\le n$ tal que $q_\ell\nu_\ell=1$ sobre Γ, y acotando la expresión (5.11) por la estimación (5.10) obtenemos una constante $c>0$ tal que

$$
\frac{1}{2}\int_\Sigma a_{ij}\nu_i\nu_j\left(\frac{\partial\theta}{\partial\nu}\right)^2 d\Sigma\le c\left(\int_0^T\|f(t)\|dt\right)^2
$$

lo que implica, por la hipótesis de coercividad sobre las funciones a_{ij},

$$
\left\|\frac{\partial\theta}{\partial\nu}\right\|_{L^2(\Sigma)}\le c\int_0^T\|f(t)\|dt,
$$

donde c es una constante independiente de θ y f. ■

Teorema 5.1. *Cada solución ultradébil z del problema (5.1) tiene la regularidad*

$$
z\in C([0,T];L^2(\Omega))\cap C^1([0,T];H^{-1}(\Omega)) \qquad (5.12)
$$

y la aplicación lineal

$$L^2(\Omega)\times H^{-1}(\Omega)\times L^2(\Sigma)\to C([0,T];L^2(\Omega))\cap C^1([0,T];H^{-1}(\Omega))$$

$$\{z^0,z^1,v\}\mapsto z$$

es contínua.

Demostración: Primero probemos que $z\in C([0,T];L^2(\Omega))$. Siendo z^0,z^1,v pertenecientes a la clase (5.6) existen sucesiones de vectores $(z^0_\mu),(z^1_\mu),(v_\mu)$ de $H^1_0(\Omega)$, $L^2(\Omega)$, $H^2_0(0,T;H^{3/2}(\Gamma))$, respectivamente, tal que

$$\begin{aligned} &z^0_\mu\to z^0 \text{ en } L^2(\Omega),\ z^1_\mu\to z^1 \text{ en } H^{-1}(\Omega),\\ &v_\mu\to v \text{ en } L^2(\Sigma). \end{aligned}\tag{5.13}$$

Sea $\widehat{v}_\mu$ una función en $H^2_0(0,T;H^2(\Omega))$ tal que $\gamma\widehat{v}_\mu=\{v_\mu,0\}$, γ función trazo sobre Γ, y u_μ la solución del problema

$$\left\{\begin{aligned} &(K_1u'_\mu)'+K_2u'_\mu+K_3u_\mu+A(t)u_\mu=\\ &\quad=-[(K_1\widehat{v}'_\mu)'+K_2\widehat{v}'_\mu+K_3\widehat{v}_\mu+A(t)\widehat{v}_\mu] \text{ en } Q\\ &u_\mu=0 \text{ sobre } \Sigma\\ &u_\mu(0)=z^0_\mu, u'_\mu(0)=z^1_\mu \text{ en } \Omega \end{aligned}\right.\tag{5.14}$$

Entonces se demuestra de manera análoga al teorema 3.2 que la solución débil u_μ del problema (5.14) tiene la regularidad

$$u_\mu\in C([0,T;H^1_0(\Omega))\cap C^1([0,T];L^2(\Omega)).$$

Luego tenemos que $z_\mu=u_\mu+\widehat{v}_\mu$ es la solución del problema (5.1) con datos z^0_μ,z^1_μ,v_μ y $z_\mu\in C([0,T];L^2(\Omega))$. Por lo tanto, de (5.8)

$$||z_\mu-z||_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}\leq c[|z^0_\mu-z^0|+||z^1_\mu-z^1||_{H^{-1}(\Omega)}+||v_\mu-v||_{L^2(\Sigma)}].$$

Tomando límite en esta expresión y usando la convergencia (5.13) y la regularidad de z_μ, obtenemos $z \in C([0,T];L^2(\Omega))$.

Ahora consideremos $f \in \mathcal{D}(Q)$ y θ la solución débil del problema

$$\begin{cases} (K_1\theta')' - (K_2\theta)' + K_3\theta + A(t)\theta = f' \text{ en } Q \\ \theta = 0 \text{ sobre } \Sigma \\ \theta(T) = 0, \theta'(T) = 0 \end{cases} \tag{5.15}$$

Entonces por la reversibilidad del problema anterior y el teorema 3.3 obtenemos que

$$|K_1^{1/2}(t)\theta'(t) - K_1^{-1/2}(t)f(t)| + ||\theta(t)|| \leq c\int_0^T ||f(t)||dt, \ \forall t \in [0,T] \tag{5.16}$$

y por el lema 5.1

$$\left|\left|\frac{\partial\theta}{\partial\nu}\right|\right|_{L^2(\Sigma)} \leq c\int_0^T ||f(t)||dt. \tag{5.17}$$

Tenemos que $z' \in H^{-1}(0,T;L^2(\Omega))$, ya que $z \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$. Entonces

$$\langle z', f\rangle = -(z,f')_{L^2(Q)} = -\int_0^T (z,f')dt.$$

Como z es una solución ultradébil definida por transposición del problema (5.1) tenemos de (5.15)

$$\int_0^T (z,f')dt = \langle K_1(0)z^1, \theta(0)\rangle - (K_1(0)z^0, \theta'(0)) +$$

$$+ (K_2(0)z^0, \theta(0)) - \int_0^T \left(v, a_{ij}\nu_i\nu_j\frac{\partial\theta}{\partial\nu}\right)_{L^2(\Gamma)} dt.$$

De las estimaciones (5.16) y (5.17) obtenemos

$$|\langle z', f\rangle| \leq c[|z^0| + ||z^1||_{H^{-1}(\Omega)} + ||v||_{L^2(\Sigma)}] \int_0^T ||f(t)||dt, \ \forall f \in \mathcal{D}(Q)$$

lo que implica por densidad de $\mathcal{D}(Q)$ en $L^1(0,T;H_0^1(\Omega))$ que $z' \in L^\infty(0, T;H^{-1}(\Omega))$ y

$$||z'||_{L^\infty(0,T;H^{-1}(\Omega))} \leq c[|z^0| + ||z^1||_{H^{-1}(\Omega)} + ||v||_{L^2(\Sigma)}]. \tag{5.18}$$

Por argumentos similares como en la primera parte de la prueba del teorema y observando que $z'_\mu \in C([0,T];H^{-1}(\Omega))$ concluimos que $z' \in C([0,T];H^{-1}(\Omega))$.

La continuidad de la aplicación lineal $\{z^0, z^1, v\} \mapsto z$ se obtiene por (5.8) y (5.18). ■

Ahora finalizaremos la prueba del teorema 2.1. Sea ϕ la solución débil del problema

$$\begin{cases} (K_1\phi')' - (K_2\phi)' + K_3\phi + A(t)\phi = 0 \text{ en } Q \\ \phi = 0 \text{ sobre } \Sigma \\ \phi(0) = \phi^0, \phi'(0) = \phi^1 \text{ en } \Omega \end{cases} \tag{5.19}$$

Con $\{\phi^0, \phi^1\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$. Entonces debido a los teoremas 3.2, 4.3 y (4.4) tenemos

$$\phi \in C([0,T];H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0,T];L^2(\Omega))$$

$\frac{\partial\phi}{\partial\nu} \in L^2(\Sigma)$ y

$$\frac{2\delta C_1}{R(x^0)a_1}(T - T_0)E_0 \leq \left|\left|\frac{\partial\phi}{\partial\nu}\right|\right|_{L^2(\Sigma(x^0))} \leq cE_0. \tag{5.20}$$

Con ϕ construimos la solución ultradébil ψ del problema

$$\left\{\begin{array}{l} (K_1\psi')' + K_2\psi' + K_3\psi + A(t)\psi = 0 \text{ en } Q \\ \psi = \left\{\begin{array}{l} \frac{\partial\phi}{\partial\nu} \text{ sobre } \Sigma(x^0) \\ 0 \text{ sobre } \Sigma \setminus \Sigma(x^0) \end{array}\right. \\ \psi(T) = 0, \psi'(T) = 0 \text{ en } \Omega \end{array}\right. \tag{5.21}$$

Entonces por el teorema 5.1 y gracias a la reversibilidad con respecto al tiempo en $[0,T]$ del problema (5.21), tenemos que ψ pertenece a la clase

$$\psi \in C([0,T]; L^2(\Omega)) \cap C^1([0,T]; H^{-1}(\Omega)).$$

También tenemos

$$\begin{aligned} &\langle K_1(0)\psi'(0) + K_2(0)\psi(0), \phi^0\rangle - (K_1(0)\psi(0), \phi^1) = \\ &\int_{\Sigma(x^0)} a_{ij}\nu_i\nu_j \left(\frac{\partial\phi}{\partial\nu}\right)^2 d\Sigma. \end{aligned} \tag{5.22}$$

La expresión (5.22) induce a definir el siguiente operador

$$A: \; H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \to H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Omega)$$

$$\Lambda\{\phi^0, \phi^1\} = \{K_1(0)\psi'(0) + K_2(0)\psi(0), -K_1(0)\psi(0)\}$$

De (5.22), obtenemos

$$a_0\left\|\frac{\partial\phi}{\partial\nu}\right\|^2_{L^2(\Sigma(x^0))} \leq \langle\Lambda\{\phi^0, \phi^1\}, \{\phi^0, \phi^1\}\rangle \leq a_1\left\|\frac{\partial\phi}{\partial\nu}\right\|_{L^2(\Sigma(x^0))}$$

De la estimación anterior y (5.21) implica que Λ es inyectiva. Con $\{\widehat{\phi}^0, \widehat{\phi}^1\}$ determinamos la solución débil del problema (5.19) y con $\frac{\partial\widehat{\phi}}{\partial\nu}$, la solución ultradébil definida por transposición $\widehat{\psi}$ del problema (5.21).

Analogamente a la expresión (5.22) se obtienen las siguientes expresiones:

$$\langle \Lambda\{\phi^0,\phi^1\},\{\widehat{\phi}^0,\widehat{\phi}^1\}\rangle = \int_{\Sigma(x^0)} a_{ij}\nu_i\nu_j \frac{\partial\widehat{\phi}}{\partial\nu}\frac{\partial\phi}{\partial\nu}d\Sigma$$

$$\langle \Lambda\{\widehat{\phi}^0,\widehat{\phi}^1\},\{\phi^0,\phi^1\}\rangle = \int_{\Sigma(x^0)} a_{ij}\nu_i\nu_j \frac{\partial\phi}{\partial\nu}\frac{\partial\widehat{\phi}}{\partial\nu}d\Sigma$$

De estas dos últimas igualdades obtenemos que Λ es auto-adjunto. Así

$$\Lambda \text{ es un isomorfismo de } H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega) \text{ en } H^{-1}\times L^2(\Omega). \tag{5.23}$$

Sea $\{y^0,y^1\}\in L^2(\Omega)\times H^{-1}(\Omega)$. Entonces por (5.23), existe $\{\phi^0,\phi^1\}\in H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)$ tal que

$$\Lambda\{\phi^0,\phi^1\} = \{K_1(0)y^1 + K_2(0)y^0, -K_1(0)y^0\}.$$

De esta igualdad y de la definición del operador Λ concluimos

$$\psi(0) = y^0, \qquad \psi'(0) = y^1 \tag{5.24}$$

donde ψ es la única solución ultradébil de (5.21) y ϕ es la única solución débil de (5.19).

Si consideramos

$$v = \frac{\partial\phi}{\partial\nu} \text{ en } \Sigma(x^0)$$

en el problema (2.1) con datos iniciales $\{y^0,y^1\}$ perteneciendo a $L^2(\Omega)\times H^{-1}(\Omega)$ resulta que tal problema tiene una única solución ultradébil y. Observemos que de (5.21) y (5.24) obtenemos que ψ es también solución ultradébil del problema (2.1). Luego por la unicidad de solución vemos que $y=\psi$ y consecuentemente de $(5.21)_3$ concluimos que

$$y(T) = 0, \quad y'(T) = 0. \quad \blacksquare$$

Agradecimientos. El autor expresa su más sincera gratitud a la valiosa colaboración y orientación de los profesores L.A. Medeiros y M. Milla Miranda en relación con este trabajo.

Bibliografía

[1] Adams, R., *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York, 1975.

[2] Brezis, H., *Operateurs Maximaux Monotones et semigroups de contractions dans les spaces de Hilbert*, North Holland Publishing Co., Amsterdam, 1973.

[3] Brezis, H., *Analyse fonctionnelle: théorie et applications*, Masson, Paris, 1983.

[4] Fabre, C., *Comportement au voisinage du bord de quelques équations d'évolution linéaire*. Thèse de Doctorat de l'université Pierre et Marie Curie, Paris 1990.

[5] Fabre, C. and Puel, J.P., *Behavior near the boundary for solutions of the wave equation*, Journal of Differential Equations 106, pp. 186-213 (1993).

[6] Fuentes, R., *Exact Controllability for Temporally Wave Equation*, Portugaliae Mathematica, Vol. 51 Fas. 4, pp. 475-488 (1994).

[7] Komornik, V., *Exact controllability in short time for the wave equation, Analyse Non Linéaire*, Ann. Inst. Henri Poincaré, 6 (1989), pp. 153-164.

[8] Lions, J.L., *Exact controllability, stabilization and perturbations for distributed systems*, SIAM Review, 30 (1988), pp. 1-68.

[9] Lions, J.L., *Contrôlabilité Exacte, Stabilisation de Systèmes Distribuées*, Tome 1, Masson RMA8, 1988.

[10] Lions J.L., *Contrôlabilité Exacte, Stabilisation de Systèmes Distribuées*, Tome 2, Masson RMA9, 1988.

[11] Lions, J.L. and Magenes, E., *Problèmes aux Limites Non Homogènes et Applications*, Vol 1, Dunod, 1968.

[12] Maciel. A.B., *On Hyperbolic-Parabolic Equation with a Continuous Nonlinearity*, Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications, Vol. 20, no. 6, pp. 745-754, 1993.

[13] Medeiros, L.A. and Fuentes, R., *Exact controllability for a model of the one dimensional elasticity*, 36 Seminário Brasileiro de Análise, 1992.

[14] Medeiros, L.A., *Exact controllability for a Timoshenko model of vibrations of beams.* Advances in Mathematical Sciences and Applications, n^{o}1, Vol. 2, 1993 (Japan).

[15] Milla Miranda, M., *Contrôlabilité exacte de l'équation des ondes dans des domaines non cylindriques*, C.R. Acad. Sci. Paris, t. 317, Série 1, p. 495-499, 1993.

[16] Milla Miranda, M., *HUM and the wave equation with variable coefficients* (To appear).

[17] Muñoz Rivera, J.E., *Exact controllability: coefficient depending on the time,* SIAM J. Control and Optimization, 28 (1990), pp. 498-501.

[18] Puel, J.P., *Contrôlabilité Exacte et Comportement au Voisinage du Bord des Solutions de l'Équations de Ondes*, Lectures at IM-UFRJ, Rio de Janeiro, RJ. Brasil, 1991.

[19] Tijonov, A.N. and Samarsky, A.A., *Ecuaciones de la Física Matemática*, Editorial Mir (Moscu), 1972.

[20] Zuazua, E., *Controlabilidad exacta y estabilización de la ecuación de ondas*, Textos de Métodos Matemáticos, 23 IM-UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 1990.

[21] Zuazua, E., *An introduction to the exact controllability for distributed systems*, CMAF, Universidade de Lisboa, Portugal, 1990.

Departamento de Matemática
Universidad Estatal de Maringá
CP 331 - CEP 87020 - MARINGA PR
Brazil

Recibido: 20 de Abril de 1994