TEORÍA ELEMENTAL DE NÚMEROS (Grupo B, Curso 2008/2009)
HOJA DE PROBLEMAS Nº 2

(2)**1)** Un hombre compra 100 caramelos para repartir entre los niños que asisten a dos fiestas distintas. Si en la primera fiesta hay 11 niños y en la segunda hay 7 niños, ¿cómo debe repartir los caramelos de forma que en cada una de las fiestas todos los niños reciban el mismo número de caramelos y al final no sobren caramelos?

(3)**2)** Demostrar que, para cada $n \geq 1$, se tiene $27 | 2^{5n+1} + 5^{n+2}$

3) Resolver las congruencias lineales siguientes:

(4)a) $25x \equiv 15 \pmod{29}$
b) $5x \equiv 2 \pmod{26}$
(5)c) $6x \equiv 15 \pmod{21}$
d) $36x \equiv 8 \pmod{102}$
e) $34x \equiv 60 \pmod{98}$
f) $140x \equiv 133 \pmod{301}$

4) Resolver cada uno de los conjuntos siguientes de congruencias simultáneas:

(6)a) $x \equiv 1 \pmod{3}$, $x \equiv 2 \pmod{5}$, $x \equiv 3 \pmod{7}$
b) $x \equiv 5 \pmod{11}$, $x \equiv 14 \pmod{29}$, $x \equiv 15 \pmod{31}$
(1)c) $x \equiv 5 \pmod{6}$, $x \equiv 4 \pmod{11}$, $x \equiv 3 \pmod{17}$
d) $2x \equiv 1 \pmod{5}$, $3x \equiv 9 \pmod{6}$, $4x \equiv 1 \pmod{7}$, $5x \equiv 9 \pmod{11}$

(2)**5)** En una cesta hay cierto número de huevos. Si se sacan los huevos de la cesta de dos en dos, al final queda un solo huevo en la cesta. Del mismo modo, si se sacan en grupos de 3, 4, 5, y 6, al final quedan 2, 3, 4 y 5 huevos, respectivamente, en la cesta. Sin embargo, si los huevos se sacan de siete en siete, el proceso concluye sin que quede ningún huevo en la cesta. ¿Cuál es el menor número de huevos que puede contener la cesta? (Brahmagupta, siglo VII).

6) Un número entero entre 1 y 1200 al ser dividido por $9, 11$ y 13 tiene de resto $1, 2$ y 6 respectivamente. ¿Cuál es el entero?

(3)**7)** Escribir en base 7 el número $(2001)_{10}$, en base 3 el número $(2345)_{10}$, en base 8 el número $(234)_{10}$, en base 2 el número $(456)_8$ y en base 10 el número $(6105)_7$.

8) Pasar $(101001000)_2$ de notación binaria a notación decimal y $(1984)_{10}$ de notación decimal a notación binaria. Pasar $(100011110101)_2$ y $(11101001110)_2$ de notación binaria a hexadecimal. Pasar $(ABCDEF)_{16}$, $(DEFACED)_{16}$, y $(9A0B)_{16}$ de hexadecimal a notación binaria.

(4)**9)** Demostrar que todo número entero se puede representar de manera única en la forma $e_k \cdot 3^k + e_{k-1} \cdot 3^{k-1} + \ldots + e_1 \cdot 3 + e_0$, donde $e_j \in \{-1, 0, 1\}$, para $j = 0, 1, \ldots, k$. Este desarrollo se llama *desarrollo ternario equilibrado.* Aplicarlo al número 83.

(5)**10)** Demostrar que utilizando una balanza de dos platillos y pesas de $1, 2, 2^2, \ldots, 2^{k-1}$ unidades es posible pesar cualquier sólido cuyo peso sea un número entero de unidades que no pase de $2^k - 1$ y con las pesas en un solo platillo de la balanza. Además, la forma de hacerlo es única.

11) Demostrar que utilizando una balanza de dos platillos y con pesas de $1, 3, 3^2, \ldots, 3^{k-1}$ unidades es posible pesar, y en sólo una forma, cualquier sólido cuyo peso sea un número entero de unidades que no sobrepase $(3^k - 1)/2$, siempre que sea posible utilizar ambos platillos para colocar pesas.

(6)**12)** Utilizar el teorema de Fermat para comprobar que 17 divide a $11^{204} + 4$.

(1)**13)** Si $\text{mcd}(a, 35) = 1$, demostrar que $a^{12} \equiv 1 \pmod{35}$.

14) Si $\text{mcd}(a, 42) = 1$, demostrar que $168 = 3 \cdot 7 \cdot 8$ divide a $a^6 - 1$.

15) Si $\text{mcd}(a, 133) = \text{mcd}(b, 133) = 1$, demostrar que $133 | a^{18} - b^{18}$.

(2)**16)** Demostrar que para cualquier número entero $n \geq 0$, $13 | 11^{12n+6} + 1$.

17) Demostrar cada una de las congruencias siguientes:

(3)a) $a^{21} \equiv a \pmod{15}$ para todo a.

b) $a^7 \equiv a \pmod{42}$ para todo a.

c) $a^{13} \equiv a \pmod{3 \cdot 7 \cdot 13}$ para todo a.

d) $a^9 \equiv a \pmod{30}$ para todo a.

18) Si $\text{mcd}(a, 30) = 1$, mostrar que 60 divide a $a^4 + 59$.

(4)**19)** Hallar la cifra de las unidades de 3^{100}.

20) Para cualquier número entero a, comprobar que a^5 y a tienen la misma cifra de unidades.

(5)**21)** Si $7 \nmid a$, demostrar que bien $a^3 + 1$ o bien $a^3 - 1$ es divisible por 7.