Matemáticas y matemáticas: vida y obra de Emmy Noether

Capi Corrales Rodrigáñez[1]

1. Introducción.

En la Universidad de Michigan, donde me especializé en la teoría de los números algebraicos y escribí la tesis, todos los estudiantes de doctorado teníamos una lista supuestamente secreta de héroes matemáticos a los que admirábamos con verdadera pasión. En todas las listas de los algebristas aparecía el nombre de Emmy Noether, en muchas de ellas, la mía incluida, a la cabeza.

Por eso, cuando José Ferreirós me pidió que os hablase hoy sobre Emmy Noether, mi primera reacción fue de alegría. Preparar esta conferencia me daría ocasión de pasar muchas horas disfrutando con las piezas construidas por una de mis cabezas matemáticas favoritas. Porque, sin la menor duda me atrevo a decir que Emmy Noether (1882-1935) fue una de las grandes cabezas matemáticas del siglo XX. Como veremos enseguida, sus trabajos en álgebra conmutativa, álgebra abstracta y álgebra no conmutativa, abrieron caminos nuevos que marcaron de manera fundamental la trayectoria seguida por las matemáticas contemporáneas, y su análisis de los grupos de simetrías que aparecen en las teorías especial y general de la relatividad permitió entender, resolver y cuantificar el problema de la conservación de la energía en la teoría general de la relatividad de Einstein.

Sin embargo, según iban avanzando los días, mi alegría inicial se fue convirtiendo en desazón, pues me fuí dando cuenta de que no es posible hablar sobre Emmy Noether sin antes o después encarar un tema francamente incómodo para mí: las consecuencias laborales que el ser mujer tuvo para ella.

---

[1] Texto de una conferencia dada en la Universidad de Sevilla, 19 de diciembre de 2001. Publicado en *Matemáticas y Matemáticos*, J. Ferreirós, A. Durán, eds., Universidad de Sevilla 2003.

Pese a su impresionante producción matemática y pese a ser reconocida como igual por los más insignes matemáticos de su época, con muchos de los cuales trabajó (Hilbert, Minkowski y Weyl entre otros), a Emmy Noether se le negó durante toda su vida, por la razón única y abiertamente reconocida de ser mujer, un puesto de trabajo digno en la universidad. Primero en Alemania, donde creció, se formó y comenzó su labor profesional, y donde no pasó de ser *Privatdozent*, tutor privado de aquellos alumnos a los que los profesores no querían dar clase. Más adelante, en los Estados Unidos, donde emigró tras la llegada de Hitler al poder, dirigía seminarios e investigaba en el Intituto Princeton, pero debía dar sus clases en el *College* para señoritas Bryn Mawr.

Dado que el asunto del calvario laboral que sufrieron y sufren las mujeres matemáticas me incomoda lo bastante como para haber pensado en algún momento tirar la toalla, creo que lo mejor que puedo hacer es agarrar el toro por los cuernos, comenzar mi ponencia sobre Emmy Noether precisamente con unas cuantas reflexiones sobre esta espinosa cuestión y, quitándomela así de en medio, pasar a disfrutar describiendo algunos de los hermosos trabajos de Emmy Noether.

Encarar el tema de las mujeres y las matemáticas no es tarea fácil para mí, como tampoco lo es para muchas de las mujeres matemáticas con las que me relaciono. Todas nosotras somos sobrevivientes de un largo y duro proceso, y, como tales, somos conscientes de las muchas trampas y peligros que la tarea de poner en palabras la relación actual de las matemáticas con las mujeres presenta. Quizás por eso no conozco una sola mujer matemática que se dedique a la investigación que no sienta cuanto menos desconfianza hacia expresiones y preguntas del tipo de “Mujeres y matemáticas”, “La mujer y la ciencia”, “¿Es distinta la experiencia de hacer matemáticas para una mujer y para un hombre?”, “¿Son distintas las matemáticas que hacen las mujeres y los hombres?”

Hay un párrafo escrito por Catherine Goldstein, historiadora de la matemática, que refleja con bastante exactitud de dónde surge nuestra desconfianza. Es una cita que se refiere a la relación entre las matemáticas y el arte visual, y pone en palabras de manera muy acertada el por qué del cuidado y la cautela con las que procederé al desgranar las reflexiones que hoy os traigo aquí.

"La cuestión principal para mí no es tanto explicar que dos teoremas no son lo mismo, o que la ciencia y el arte son empresas muy distintas, sino por qué el problema de sus semejanzas y diferencias se debería discutir como tal. ¿Por qué, como planteaba al comienzo de este artículo, habría de pensar alguien que el arte y la ciencia, el arte visual y las matemáticas, son diferentes o similares? La pregunta tiene dos caras. Una está ligada a la construcción misma del arte y la ciencia como diferentes en primer lugar, un prerrequisito necesario para considerar cualquiera de ellos como "el paraíso perdido del otro", y la dicotomía como una laguna mortal de nuestra civilización. La otra es la valoración de la identidad en vez de la diferencia. Ambos aspectos son profundamente políticos.

El problema de "las mujeres y la ciencia", entre otros, debería hacernos particularmente sensibles a los efectos de un dualismo crudo, incluso cuando el discurso es de reconciliación. En algunos casos, el tratar de borrar límites (inexistentes) nos hace pronunciar las palabras que dieron origen a estos límites, nos fuerza a repetir los gestos que los fortalecieron. Las ciencias y las artes no son lo mismo, pero tampoco lo son las matemáticas y la física, la biología y la química o la pintura y la arquitectura. Como no lo son la física de la cola de pegar y la teoría cuántica de campos, o la música de cámara y la ópera. ¿Por qué deberíamos separar estos temas en dos categorías puras, incluso si después sugerimos un marco para unirlas? ¿Para llenar entonces una con emociones y otra con razón? ¿Una con poder y la otra con convicción? Y por cierto, ¿de qué manera? Tales clichés apoyan el status quo. De nuevo, escoger el enfatizar la identidad más que la diferencia, o al revés, no es una elección políticamente neutral.

Cuando los algebristas franceses del siglo dieciséis escogieron consolidar su empresa humanística inventando un antepasado griego, Diofanto, para su disciplina, el álgebra, al tiempo que se distanciaban de sus inmediatos predecesores e inspiradores, los matemáticos islámicos, estaban simultáneamente muy comprometidos con los complicados asuntos de las leyes romana y francesa y la constitución de un estado moderno ([C]). Es de esperar que las representaciones colectivas también jueguen un papel decisivo en nuestro deseo de reconciliar dos culturas que obstinadamente construimos como separadas en el proceso." ([G-2] p. 287 en inglés, p. 314 en castellano).

No consideraré, pues, la posibilidad de dos culturas matemáticas, la de las mujeres y la de los hombres, ni dos actividades matemáticas, ni dos experiencias del hacer matemáticas.

Emmy Noether no fue admitida como miembro de pleno derecho de la comunidad matemática ni en Alemania ni en los Estados Unidos. La primera deducción lógica, obvia, a la que conduce este hecho, es que tal admisión no estaba basada en los méritos. La situación que vivió Emmy Noether no es una excepción. Es singular, es marginal, pero no supone un caso excepcional, ni en la comunidad matemática de principios del siglo XX, ni en la de finales del siglo XX, ni hoy en día. Todos conocemos casos de personas, fundamentalmente mujeres, pero también hombres, con méritos más que sobrados para ocupar un puesto digno en una institución matemática, y que, sin embargo, sobreviven malamente año tras año gracias a becas, sustituciones y plazas interinas. Por no hablar el escaso número de mujeres catedráticas de matemáticas en cualquier universidad europea o estadounidense, como el estudio llevado a cabo por la *European Mathematical Society* en 1990 y los datos españoles tristemente constatan ([EWM], p. 45, [Co], p. 40).

Durante la primera mitad del siglo XX la elección de los miembros de las comunidades científicas alemana y estadounidense se llevaba a cabo por medio de los votos de un tribunal elegido *ad hoc*. Exactamente como se lleva a cabo hoy en las universidades estadounidenses y europeas, las españolas incluidas. El funcionamiento de las instituciones científicas en general ha sido ampliamente estudiado, y hoy sabemos que el sistema seguido para la elección de sus miembros clasifica a las instituciones en dos tipos ([V]):

1.- Instituciones de libre competencia: son aquellas en las que los candidatos a formar parte de la institución compiten con sus méritos y experiencia.

2.- Instituciones de cooptación: los candidatos están elegidos mediante los votos de un tribunal. Estos tribunales forman una red informal en la que se juzga no sólo la habilidad sino también la adecuación, a la que se suele llamar perfil, y que sólo quienes poseen el poder pueden distinguir en el candidato o candidata.

En los últimos años se están llevando a cabo numerosos análisis de las instituciones científicas españolas, que ponen de manifiesto que tanto en el CSIC como en la Universidad, la elección de sus miembros se lleva a cabo mediante un sistema de cooptación disfrazado como sistema de méritos y pactado por toda la comunidad científica, incluidas las mujeres, que, en lo que algunos consideran una muestra de ingenuidad, se consideran parte de la institución y piensan que en algún momento serán elegidas.

Estos análisis están poniendo de manifiesto también que en los tramos realmente meritocráticos de las carreras científicas las mujeres son mayoría ([Al]), y que las barreras surgen en cuanto aparece el sistema de cooptación, cuando un tribunal juzga, además de méritos, quien da y quien no da la talla. Lo que no hacen estos estudios, es contestar la pregunta del millón: ¿Por qué los tribunales rechazan a las mujeres? ¿Por qué los matemáticos varones no quieren, aparentemente, a las mujeres? Porque eso es, desde luego, lo que un primer análisis parece indicar.

La clave la encontramos en la experiencia que vivió en Harvard, hace cincuenta años, la especialista en lógica Marian Pour-El (1928-), una experiencia que no es infrecuente que las mujeres que nos dedicamos a la investigación en matemáticas vivamos todavía hoy cuando asistimos a seminarios y congresos:

"En su primer día de clases en el programa de doctorado de matemáticas en Harvard University en 1950, Marian Pour-El llegó pronto para investigar dónde estaban los servicios de señoras. La mayor parte de los edificios en Harvard no tenían cuarto de baño para mujeres, incluido Sever Hall, que es donde las clases de Marian tendrían lugar. Por fín encontró uno, atravesando la biblioteca, en un segundo edificio al otro lado del patio. Harvard no estaba acostumbrado a las mujeres, y las mujeres no estaban acostumbradas a Harvard. Cuando Marian volvió a su aula, eligió un asiento en el centro de la segunda fila. Siendo bajita quería estar cerca, pero la primera fila le pareció demasiado visible. Los otros estudiantes, al ir entrando, fueron dejando a su alrededor un corro de sillas vacías: cuatro asientos detrás, cuatro a la izquierda, cuatro a la derecha y cuatro delante de ella quedaron libres. La presencia de Pour-El como única mujer era llamativa. "Toda la clase estaba a mi alrededor, en el exterior. No querían estar cerca de mí. Probablemente estaban tan nerviosos con la situación como yo." " ([He], p. 49).

El corro de sillas que rodeaba a Pour-El es una metáfora muy adecuada del foso que separa con frecuencia a las mujeres del resto de la comunidad matemática. ¿Por qué este foso? Esta es la pregunta que probablemente más me he hecho a mí misma desde que, con veintitrés años, decidí dedicarme a la investigación matemática.

Con esta pregunta en la cabeza he pasado muchas horas prestando atención a las relaciones hombre/mujer en la comunidad matemática en la que vivo desde entonces, y lo que en estos años he visto me lleva a decir, con Pour-El, "probablemente estaban tan nerviosos con la situación como yo." ¿Por qué nerviosos? La respuesta, que sólo puede venir de los propios hombres matemáticos, la encontramos en las palabras de un varón venerable y sabio: David Hilbert (1862-1943).

Hay una anécdota de Hilbert muy contada en entornos matemáticos. Parece que un día se dió cuenta de que uno de sus alumnos había dejado de asistir a clase y preguntó por él. Le dijeron que había abandonado la carrera de matemáticas para convertirse en poeta. Hilbert comentó: "Una decisión excelente. No tenía imaginación suficiente como para ser matemático".

Cuando en 1919 el mismo Hilbert y Felix Klein (1849-1925) intentaron conseguir el puesto de *Privatdozent* para Emmy Noether, encontraron una oposición extrema por parte de los sectores universitarios más reaccionarios. La objeción formal que se dió fué el sexo de la candidata. "¿Cómo podemos permitir que una mujer sea *Privatdozent*? Podría llegar a ser profesora y miembro del Consejo de la Universidad; ¿es lícito que una mujer sea miembro del Consejo?" Esta objeción motivó la famosa respuesta de Hilbert: "Caballeros, el Consejo no es una casa de baños, así es que ¡no veo por qué una mujer no puede formar parte de él!"

Mucha imaginación, muchas horas solitarias estudiando matemáticas, y pocas ocasiones para los encuentros privados con el otro sexo entre los veinte y los cuarenta años... ¿No es como para que las mujeres les pongan un poco nerviosos?

2. La obra de Emmy Noether

En 1994 organicé con Carlos Andradas un Curso de Verano en El Escorial, *Cuatrocientos años de matemáticas en torno al Teorema de Fermat*. En una de sus dos conferencias, Goldstein ([G-1], p. 4) nos dió la siguiente lista de preguntas, que me parecen cruciales a la hora de llevar a cabo cualquier narrativa histórica sobre las matemáticas y su transmisión:

-¿Cuáles son, en un momento dado, las redes sociales o las instituciones en las que la investigación se lleva a cabo? ¿Quiénes son los matemáticos (maestros, curas, aristócratas, investigadores a tiempo completo, ingenieros civiles o militares, pintores, miembros de un club)? ¿En qué condiciones viven y trabajan en matemáticas?

- ¿Por qué hacen matemáticas? ¿Se suelen inventar resultados nuevos, o transmitirlos en una forma nueva? ¿Se quiere entender la naturaleza o los fenómenos físicos, contar bienes, curar, descubrir joyas puras de matemáticas por su propia belleza para celebrar a Dios o el poder de la mente?

- ¿Cómo y dónde son entrenados? ¿Cómo aprenden las matemáticas básicas? ¿En qué consisten las matemáticas básicas en un momento? ¿Qué significa matemática básica?

- ¿Dónde se encuentran los problemas? ¿Cuándo y por qué encuentran otros un resultado interesante? ¿De acuerdo con qué criterio? ¿Dónde se encuentran las herramientas matemáticas necesarias? ¿En el entrenamiento formal que ha recibido? ¿Entre colaboradores cercanos? ¿En libros recientes o muy antiguos?

- ¿Qué es la solución a un problema? ¿Qué demuestra una? ¿Cuándo se decide que algo ha sido o no ha sido demostrado? ¿Quién lo decide? ¿Cuándo es una demostración aceptada o desechada? ¿Cuándo es una construcción explícita necesaria o superflua?

-¿Quién, (o quizás pronto qué) corrige las demostraciones y construcciones? ¿Hay un procedimiento codificado y rígido para hacerlo?

- ¿Cuándo, dónde, qué se escribe? ¿Para quién? ¿Se imprimen las matemáticas, se llevan a la práctica, se enseñan en clases inmediatamente o con cierto retraso?

- ¿Qué se transmite, a quién y cómo?

Con esta lista de preguntas *in mente*, analizaremos brevemente algunos aspectos de la obra de Emmy Noether. Después de todo, es precisamente su trabajo como matemática lo que me ha traído hoy aquí.

Amalie Emmy Noether nació en 1882 en la ciudad alemana de Erlangen, famosa en la comunidad matemática por *el programa Erlangen*, título de la conferencia que en 1872 impartió allí Felix Klein, en la que explicó la importancia de los conceptos de grupo e invariante para la geometría.

La Universidad de Erlangen fue fundada en 1743, y entre sus profesores contó con matemáticos de la talla de K. G. Christian von Staudt (1798-1867), Klein, Paul Gordan (el llamado “rey de los invariantes”, 1837-1912)), y Max Noether (1844-1921), famoso por sus trabajos en geometría algebraica y padre de Emmy. Emmy fue alumna de Gordan, bajo cuya dirección escribió una tésis sobre la teoría formal de los invariantes computacionales de Gordan, que defendió en 1907. En 1916, y siguiendo una llamada de Hilbert, Noether se trasladó a Gőttingen, donde vivió hasta 1933, año en que, forzada a abandonar Alemania (Emmy Noether era judía), aceptó un puesto de docente en la universidad para mujeres Bryn Mawr. Allí vivió el último año y medio de su vida, desplazándose constantemente al Instituto de Altos Estudios de Princeton para impartir seminarios y llevar a cabo su labor de investigación.

Las instituciones académicas en las que se movió profesionalmente Emmy Noether, Gőttingen y Princeton, eran a principios del siglo XX, y siguen siendo hoy, modelo de referencia de muchas de las instituciones matemáticas occidentales, entre ellas las españolas. Según los baremos utilizados, entre otras, por estas dos instituciones para evaluar la producción científica de un matemático, tres son los aspectos a analizar en la obra de Noether: el valor intrínseco de sus contribuciones, la influencia que sus ideas tuvieron en el trabajo de otros matemáticos con quienes trabajó y la diversidad de los temas en los que trabajó. Tres también son los campos en los que Emmy Noether centró su atención especialmente: el álgebra conmutativa, el álgebra abstracta y el álgebra no-conmutativa. Así pues, la manera más sencilla y breve de acercarnos a todos ellos es casándolos de dos en dos.

1. Valor intrínseco de los resultados de Emmy Noether: algo de álgebra conmutativa.

Hablar del valor intrínseco de resultados matemáticos nos mete de lleno en algunas de las preguntas de la lista de Goldstein: ¿Cuándo y por qué encuentran otros un resultado interesante? ¿De acuerdo con qué criterio? La respuesta, por lo general, es *depende*; depende de quién, y depende de cuándo. No es lo mismo que evalúe un teórico que un calculista, no es lo mismo que evalúe un matemático consagrado (o alguien sin aspiraciones a medrar) que un aspirante a matemático consagrado, y no es lo mismo que evalúe un joven que un adulto. Afortunadamente hay casos, como el de Emmy Noether, en los que el tiempo se encarga de hacer la selección. De hecho, hay algunos resultados de Noether que están tan profundamente tejidos en la cultura matemática de un algebraista hoy, que rara vez se le reconocen específicamente como tales. Veamos un par de ellos.

A Emmy Noether se la considera como la madre del álgebra moderna. Para empezar, ¿qué quiere decir exactamente la expresión *álgebra moderna*? Dejemos que sea Jean Dieudonné (1906-1992), del grupo Bourbaki, quien nos lo explique (el libro de van der Waerden que Dieudonné menciona esta basado en la notas que el primero tomó en un curso dado por Emmy Noether).

"[Noether] Estaba inmersa en el proceso de transformar completamente el álgebra, dando prioridad sistemáticamente a los conceptos sobre los cálculos y convirtiéndo esta disciplina en lo que años más tarde, gracias al libro de van der Waerden, se conoció como "Álgebra Moderna". Con respecto al álgebra lineal, concretamente, le liberó de la plaga de matrices y determinantes que vena sufriendo desde hacía de un siglo, sustituyendo estos cálculos engorrosos y sin significado geométrico por las ideas intrínsecas de módulos y homomorfismos." ([D], p. 5).

Menos cuentas y más conceptos. ¿Por qué? Al menos en álgebra, las cuentas, los cálculos, suelen servir solamente en la situación concreta en que se llevan a cabo, mientras que los conceptos son estructuras que, como si de andamios se tratasen, podemos trasladar a voluntad a aquellas situaciones nuevas en las que nos sean necesarias. Desde, por lo menos el siglo III a.C., la gente de la matemática se ha preocupado por las cuestiones aritméticas, en concreto por la factorización de los enteros en producto de primos. Noether fue capaz de trasladar las estructuras que a lo largo de los años se habían construido para estudiar tal factorización de enteros, a situaciones mucho más generales de factorización de polinomios y otros objetos matemáticos conectados directamente con el estudio de las curvas, superficies y variedades más generales, abriendo de esta manera la puerta a la geometría algebraica, esto es, a la aritmetización, mediante el uso del álgebra conmutativa, de la geometría.

> "Si dejamos aparte la obra de Steinitz sobre los cuerpos, los primeros trabajos importantes en el estudio de los anillos conmutativos generales son las dos grandes memorias de E. Noether sobre la teoría de ideales: la de 1921, dedicada a la descomposición primaria, y la de 1927, caracterizando axiomáticamente los anillos de Dedekind. Con estas memorias de Emmy Noether se completa el largo estudio de la descomposición de los ideales comenzado un siglo antes, al mismo tiempo que se inagura el álgebra conmutativa"([B], p. 155).

Las memorias a que hace referencia Bourbaki son *Idealtheorie in Ringbereichen* (1921, no. 19 en [N]) y *Abstrakter Aufbau der Idealtheorie in algebraischen Zahl- und Funktionenkőrpern* (1927, no. 30 en [N]). Para describir las contribuciones de Noether en estos dos trabajos es necesario echar un poquito marcha atrás, y repasar el surgir de las nociones de *ideal* y *anillo.*

Los trabajos de Ernst Eduard Kummer (1810-1893) intentando generalizar la ley de reciprocidad cuadrática de Carl Friedrich Gauss (1777-1855) –descubierta por Leonard Euler (1707-1783)-, llevaron a Gustav Peter Lejeune Dirichlet (1805-1859) a caer en la cuenta de que no todas las propiedades aritméticas de los números enteros se verificaban en general en los números complejos. Por ejemplo, la factorización única de un entero como producto de primos, es cierta también en el conjunto $\mathbf{Z}[i] = \{a + bi; a, b \in \mathbf{Z}\}$, como había observado Gauss, pero no lo es, en general, en cualquier conjunto de números complejos, como demuestra el ejemplo

$$6 = 2 \times 3 = (1 + \sqrt{-5}) \times (1 - \sqrt{-5}).$$

No es difícil demostrar que en el conjunto $\mathbf{Z}[\sqrt{-5}] = \{a + b\sqrt{-5}; a, b \in \mathbf{Z}\}$, cerrado respecto a la suma y el producto, los cuatro factores $2, 3, (1+\sqrt{-5})$ y $(1-\sqrt{-5})$ son primos, y por lo tanto la descomposición única de un número entero en producto de números enteros y primos no tiene lugar en el dominio $\mathbf{Z}[\sqrt{-5}]$.

Este descubrimiento llevó a Kummer a la introducción de los *números ideales* y los *números algebraicos*, desarrollados más adelante con toda precisión, junto con la noción de *anillo*, por J.W. Richard Dedekind (1831-1916). La idea consiste en (siguiendo una sugerencia de Gauss en su célebre memoria sobre los residuos bicuadráticos de 1831, en la que además de estudiar detalladamente la divisibilidad en el conjunto $\mathbf{Z}[i]$, pone de manifiesto la importancia que tendría para los problemas clásicos de la teoría de los números como la resolución de ecuaciones diofánticas, la extensión de la noción de divisibilidad más allá de los enteros) extender la aritmética de los enteros a los complejos, y para ello es necesario, lo primero de todo, determinar el dominio en el que se va a trabajar.

Un número complejo se dice número algebraico si es raíz de una ecuación polinómica cuyos coeficientes son números racionales. Si partimos de una cantidad finita de números algebraicos, y consideramos todas sus funciones racionales con coeficientes enteros, obtenemos un conjunto de números cerrado respecto a la suma, la diferencia, el producto y la división por elementos no cero, que llamamos *cuerpo de números.* Los cuerpos de números son las extensiones naturales (y finitas, vistos ambos conjuntos como espacios vectoriales) de los racionales dentro de los complejos. El paso crucial en esta teoría fue la identificación de aquellos elementos que se comportan dentro de los cuerpos de números como los enteros usuales $\mathbf{Z}$ dentro de los racionales $\mathbf{Q}$: los enteros algebraicos, números algebraicos que son raíz de una ecuación polinómica coeficientes enteros.

Como ocurre con $\mathbf{Z}$ dentro de $\mathbf{Q}$, el conjunto de los enteros algebraicos dentro de un cuerpo de números resulta ser cerrado respecto de la suma, la diferencia y el producto. Esto llevó a Dedekind a la definición de lo que hoy llamamos *anillo* (Dedekind no utiliza la palabra anillo, que aparece por vez primera en los trabajos de Hilbert, sino *Gebiet*, colección o sistema). Un anillo, tal y como lo introduce Dedekind es, esencialmente, cualquier conjunto de números que se comportan respecto a la suma y al producto como lo hacen los enteros. Son anillos, pues, los propios enteros, y conjuntos como $\mathbf{Z}[i] = \{a + bi; a, b \in \mathbf{Z}\}$ y $\mathbf{Z}[\sqrt{-5}] = \{a + b\sqrt{-5}; a, b \in \mathbf{Z}\}$.

Tras dar precisión a las nociones de número algebraico, entero algebraico y anillo de enteros algebraicos dentro de un cuerpo de números, Dedekind pasa a intentar recuperar la factorización única en producto de primos dentro de estos anillos. Buscando restaurar tal factorización única, Kummer había creado la teoría de los “números ideales”, números que nunca llegó a definir de forma general y precisa. Para entender lo que hizo, volvamos al ejemplo

$$6 = 2 \times 3 = (1 + \sqrt{-5}).(1 - \sqrt{-5}).$$

Kummer introduce los "números ideales" $\alpha = \sqrt{2}, \beta_1 = \frac{(1+\sqrt{-5})}{\sqrt{2}}, \beta_2 = \frac{(1-\sqrt{-5})}{\sqrt{2}}$, que verifican

$$6 = \alpha^2 \beta_1 \beta_2;$$

Kummer demostró que si nos limitamos a trabajar con elementos de $\mathbf{Z}[\sqrt{-5}]$ y con estos cuatro "números ideales", la factorización que hemos hallado es única salvo producto por unidades. Lo malo es que los "números ideales" de Kummer aunque son números ordinarios, no son números algebraicos, y encima no están definidos en general, sólo en casos concretos. Para resolver esta dificultad, en lugar de "números ideales" Dedekind introdujo *clases de números algebraicos*, que llamó *ideales* en honor a los números ideales de Kummer. Pensemos en los enteros ordinarios. En lugar de los enteros $2, 3$ y 6, Dedekind considera las clases $2m, 3n$ y $6l$, formadas, respectivamente, por todos los múltiplos de $2, 3$ y 6, y reemplaza $2 \times 3 = 6$ por la afirmación de que la clase $2m$ multiplicada por la clase $3n$ es igual a la clase $6l$. Además, la clase $2m$ es factor de la clase $6l$, pese a que la segunda está contenida en la primera. Para entender el trabajo de Dedekind, y posteriormente de Noether, debemos pensar en clases de números.

En general, Dedekind define un ideal en un cuerpo de números K como un subconjunto A de K cerrado respecto a la suma y a la multiplicación por enteros cualesquiera de K. El ideal cero consiste únicamente en el número cero, el ideal unidad (1) está generado por el 1, y consiste en todos los enteros algebraicos de K, y un ideal I se llama principal si está generado por un único elemento, esto es, consiste en el conjunto de múltiplos de algún entero de K. El producto de dos ideales A y B es el ideal formado por los elementos que pueden ser escritos como sumas de términos de la forma $a \times b$, con $a \in A$ y $b \in B$, y decimos que A divide a B si existe un tercer ideal C tal que $B = AC$. Los ideales que se comportan en este producto como los números primos ordinarios se comportan en el producto de enteros, se llaman *ideales primos*, y están caracterizados por no tener más factores que ellos mismos y el ideal (1).

Las propiedades básicas de la aritmética de los enteros se pueden trasladar a los ideales, y, tenemos, concretamente, el teorema fundamental que garantiza que todo ideal puede ser factorizado de forma única en producto de ideales primos. Lo más sorprendente y hermoso de esta teoría es que, pese a ser los ideales clases infinitas de números, existe una relación entre la factorización única de un número entero algebraico en producto de números primos algebraicos en un cuerpo de números algebraicos y la naturaleza de los ideales en este cuerpo, y es la siguiente: en un cuerpo de números la factorización única de un entero en producto de primos es posible si y sólo todo ideal es principal. Volvamos brevemente al ejemplo

$$6 = 2 \times 3 = (1 + \sqrt{-5}) \times (1 - \sqrt{-5}).$$

utilizando técnicas de la teoría algebraica de los números se puede demostrar que en el anillo $\mathbf{Z}[\sqrt{-5}]$ el ideal $(2, 1 + \sqrt{-5}) = \{2a + (1 + \sqrt{-5})b; a, b \in \mathbf{Z}[\sqrt{-5}]\}$ no es principal, que el cuadrado de todo ideal sí es principal, y que, de hecho,

$$(2, 1 + \sqrt{-5})^2 = (4, 2 + 2\sqrt{-5}, 6) = (2).$$

Contamos ya con la información necesaria para volver a Emmy Noether y a su trabajo de 1921, *Idealtheorie in Ringbereichen*. Este texto es una pieza monumental que se considera como el primer artículo en el área del álgebra conmutativa (que estudia los anillos conmutativos). A partir de los trabajos de Dedekind, que analizó solamente los anillos de enteros algebraicos, se había empezado a extender la noción de anillo más allá de los dominios de números. Concretamente, antes del trabajo de Noether se estudiaban ya los ideales tanto en los anillos de polinomios en varias variables y con coeficientes complejos, como en los anillos de las funciones racionales. Noether comienza por dar los axiomas para un anillo conmutativo general, y más adelante en el texto define también los anillos no conmutativos. Esta es la primera vez que estos conceptos fueron enunciados tal y como los entendemos hoy.

Buscando extender la noción de factorización en producto de primos a anillos lo más generales posibles, Noether comprendió que tal factorización siempre es posible si el anillo es tal que todos sus ideales están finitamente generados, o lo que es lo mismo, toda cadena ascendente de ideales es estacionaria. A los anillos en los que esto ocurre se les conoce como anillos noetherianos.

Los resultados principales de este artículo son los teoremas de descomposición de ideales en anillos noetherianos, hoy considerados clásicos. Ya hemos visto que un ideal primo en un anillo es, de alguna manera, la generalización de un número primo. A su vez, un ideal primario es una generalización de la potencia de un número primo. Un ideal I en una anillo A se dice *primario* si $I \neq A$ y cuando $xy \in I$, entonces, o bien $x \in A$ o bien $y^n \in A$ para algún $n > 0$. Entre otras cosas, Noether demuestra que en los anillos noetherianos, todo ideal es una intersección finita de ideales primarios. Este resultado, generalización de la factorización de un entero como producto de potencias de primos, es un pilar tradicional de la teoría de ideales y de la geometría algebraica, pues proporciona la base algebraica para descomponer una variedad algebraica en sus componentes irreducibles.

En *Abstrakter Aufbau der Idealtheorie in algebraischen Zahl- und Funktionenkőrpern* (1927), Noether da la primera caracterización de la clase de anillos en los que la factorización única de ideales en producto de primos es posible. A estos anillos se les conoce como anillos de Dedekind. En este trabajo Noether también introduce los ideales fraccionales de un anillo (los ideales en su cuerpo de fracciones), y demuestra que forman un grupo bajo multiplicación, lo que permitirá, siguiendo los pasas de Kummer en el caso de los cuerpos de números ciclotómicos (obtenidos al añadir a los racionales las raíces de unidad) definir el grupo de clases del anillo, cuyo tamaño nos da una medida de cuánto se aleja el anillo de poseer factorización única de sus elementos en producto de elementos primos (posible si y sólo si todo ideal es principal, lo que ocurre si y sólo si el grupo de clases tiene un único elemento).

2. Influencia de las ideas de Emmy Noether: algo de álgebra abstracta.

Comencemos con una cita del topólogo ruso Pavel Sergeevich Aleksandroff (1896-1982).

> "Si el desarrollo de las matemáticas hoy avanza bajo el signo de la algebraización, la penetración de las ideas y métodos algebraicos en la teorías matemáticas más diversas, esto ha sido posible sólo gracias al trabajo de Emmy Noether. Fue ella quien nos enseñó a pensar en términos de conceptos algebraicos sencillos y generales -homomorfismos, grupos y anillos con operadores, ideales- y no en términos de engorrosos cálculos algebraicos, y de esta manera abrió el caminos para encontrar principios algebraicos en lugares donde tales principios habían sido ocultados por alguna situación especial complicada nada adecuada para la estratagia usual de los algebraistas clásicos. Teoremas como 'el teorema del homomorfismo y el isomorfismo', conceptos como la condición de la cadena ascendente y descendente para subgrupos e ideales, o la noción de grupos con operadores, fueron todos introducidos por Emmy Noether, y han entrado en la práctica diaria de un amplio abanico de disciplinas matemáticas como una herramienta poderosa y de constante utilidad, aún cuando tales disciplinas abarquen temas sin relación con el trabajo de la propia Emmy Noether. Sólo tenemos que echar un vistazo al trabajo de Pontryagin en la teoría de los grupos contínuos, al trabajo reciente de Kolmogorov en la topología combinatoria de los espacios localmente bicompactos, al trabajo de Hopf en la teoría de la aplicaciones contínuas, por no mencionar el trabajo de van der Waerden en geometría algebraica, para sentir la influencia de las ideas de Emmy Noether. Esta influencia es también muy fuerte en el libro de H. Weyl 'Teoría de grupos y mecánica cuántica'" ([A], p. 3).

Aleksandroff nombra algunos de los muchos ejemplos que hay de la influencia que la manera de mirar y hacer de Emmy Noether tuvo en el desarrollo de la matemática del siglo XX; uno de los más hermosos y sencillos de entender entre ellos es el que nos brinda el trabajo de Heinz Hopf (1894-1971), una de las figuras claves en el desarrollo de la Topología Algebraica. En 1925 Hopf, que comenzaba su carrera profesional, pasó un año en Gőttingen, donde conoció al topólogo ruso P. Alexandroff. La historia de cómo ambos, que mantuvieron una amistad de por vida, cayeron bajo la influencia de Emmy Noether, la cuentan tanto Alexandroff como Dieudonné ([A], p.9 y [D]).

Una estrategia clásica para estudiar superficies es el llamado método de la triangulación. Es de sobra conocida la triangulación geodésica del reino de Hannover que Gauss llevó a cabo a principios XIX, y cuyo análisis le llevó a desarrollar los conceptos de curvatura y geometría intrínseca, así como a considerar las geometrías no euclídeas. A partir de los trabajos de Henri Poincaré (1854-1912) en 1900, podemos asociar a todo espacio compacto dotado de una triangulación, un sistema de números enteros que depende de la topología del espacio y no de la triangulación concreta, y que por lo tanto caracteriza la "forma" del espacio.

Una triangulación (por símplices, generalización de los triángulos geodésicos de Gauss) de un espacio compacto X es una partición finita de X en *p-símplices* e_p^i, con $0 \leq p \leq n$; el cierre de un p-símplice e_p^i en X es homeomorfo a un símplice euclídeo cerrado de dimensión p; e_p^i es la imagen del interior de tal símplice euclídeo, y las imágenes de sus caras (de cada dimensión $\leq p-1$) constituyen una partición de la frontera de e_p^i en X, y son a su vez símplices de la triangulación; finalmente, cada símplice está orientado por una elección del orden de sus vértices.

Siguiendo la estrategia de Poincaré, a cada par (e_p^i, e_{p-1}^i) formado por un p-símplice y un $(p-1)$-símplice, le asociamos un número ϵ_p^{ij} igual a 0 si e_{p-1}^i no es una cara de e_p^i, y a 1 (resp. -1) si es tal cara y su orientación coincide con (resp. es opuesta a) la orientación inducida por la orientación de e_p^i. Si tomamos, por ejemplo, la triangulación obvia de un tetraedro X dada por sus cuatro vértices $e_0^1, e_0^2, e_0^3, e_0^4$, seis aristas $e_1^1, e_1^2, e_1^3, e_1^4, e_1^5, e_1^6$ y cuatro caras $e_2^1, e_2^2, e_2^3, e_2^4$, es fácil calcular estos números.

Sea α_p el número de p-símplices en la triangulación de X (en el ejemplo del tetraedro, $\alpha_0 = 4, \alpha_1 = 6, \alpha_2 = 4$). Poincaré consideró la matríz $E_p = (\epsilon_p^{ij})$ de tamaño $\alpha_p \times \alpha_{p-1}$; teoremas clásicos del álgebra de matrices garantizan la existencia de matrices cuadradas unimodulares P y Q de tamaños respectivos α_p y α_{p-1} tales que $PE_pQ = (\delta_{ij})$, donde $\delta_{ij} = o$ si $i \neq j$ y cada entero δ_{ii} divide a $\delta_{i+1,i+1}$. Los invariantes topológicos de X introducidos por Poincaré son los siguientes: el rango de E_p (esto es, el número b_p de enteros δ_{ii} no nulos) llamado *p-ésimo número de Betti de* X, y los enteros δ_{ii} distintos de 0 y 1 llamados *coeficientes de torsión de* X.

Durante el tiempo en que estuvo de visita en Gőttingen, Hopf trabajaba con estas herramientas. Emmy Noether, experta en traducir la teoría de matrices a términos intrínsecos, encontró una formulación del método de Poincaré en términos de **Z**-módulos: las p-cadenas $\sum_i t_i e_p^i$, combinaciones formales de p-símplices con coeficientes enteros t_i, son los elementos de un **Z**-módulo libre C_p con base $(e_p^i)_1 \leq i\alpha_p$; la aplicación *borde* $\delta_p : C_p \to C_{p-1}$ dada por $\sum_i t_i e_p^i \to \sum_i \sum_j t_i \epsilon_p^{ij} e_{p-1}^j$, es un homomorfismo con la propiedad fundamental de que $\delta_{p-1} \circ \delta_p = 0$, esto es, los submodulos $Im\delta_{p+1}$ y $Ker\delta_p$ de C_p verifican $Im\delta_{p+1} \subset Ker\delta_p$ y la consideración de los números de Betti y coeficientes de torsión es equivalente a la consideración de los **Z**-módulos $H_p = Ker\delta_p / Im\delta_{p+1}$. Hopf utilizó estos módulos de homología para expresar sus resultados sobre la fórmula de la traza de Solomon-Lefschetz

(1884-1972).

Esta modificación, en apariencia inocua, tuvo enormes consecuencias en el desarrollo de la Topología Algebraica y en el nacimiento del álgebra homológica, cuando resultó claro que la noción de módulos de homología podía extenderse a lo que hoy se conoce como *complejos de cadenas*: sucesiones arbitrarias de módulos C_p definidos sobre anillos arbitrarios, y homomorfismos de módulos δ_p tales que $\delta_{p-1} \circ \delta_p = 0$.

3. La diversidad de temas en los que trabajó Emmy Noether: álgebra no-conmutativa y física.

Si, como hemos intentado illustrar con nuestros ejemplos, el trabajo matemático de Emmy Noether se ha convertido con el tiempo en uno de los pilares en los que se basa el álgebra contemporánea, tampoco son de menospreciar sus contribuciones a la física. Describamos brevemente la más notoria.

En 1915 Hilbert invitó a Emmy Noether formar parte del equipo matemático que estaba formando en la Universidad de Gőttingen. En junio y julio de 1915, pocos meses después de la llegada de Noether, Albert Einstein (1879-1955) dió en esta Universidad seis conferencias sobre la teoría general de la relatividad, aún sin terminar.

Para entonces, la conservación de la energía en la teoría general había tenido en jaque a mucha gente durante décadas. Concretamente, el principio de conservación local de la energía planteaba una cuestión difícil: en las teorías clásicas de campo –gravedad newtoniana, electromagnetismo, hidrodinámica, etc.– la energía se conserva localmente, y lo mismo ocurría en la teoría especial de la relatividad. El principio de la conservación local de la energía solo parecía fallar en la teoría general de la relatividad. Por eso, durante los primeros años del desarrollo de la teoría general de la relatividad, muchos de los más reputados mátematicos intentaron sin éxito entender el por qué de este problema, al que Hilbert describió como *el fallo del teorema de la energía*.

Emmy Noether demostró que el llamado fallo no es un fallo, sino que, de hecho, se trata de un rasgo característico de la teoría general, lo cuantificó y explicó por qué ocurría: por la naturaleza del grupo de simetrías involucrado. En teoría de la relatividad, tanto en la especial como en la general, se trabaja con el llamado grupo de simetrías. Estos grupos de simetrías tienen estructura distinta en uno y otro caso. En el caso de la teoría especial, el grupo de simetrías, conocido como el grupo de Poincaré, está formado por todas las transformaciones de Lorenz y las traslaciones del espacio-tiempo. En el caso de la teoría general, el grupo de simetrías está formado por todas los cambios de coordenadas que son contínuos y con derivadas contínuas. En ambos casos el grupo en cuestión es un *grupo de Lie*. (No vamos a entrar en definir con precisión los grupos de Lie. Basta con comentar que son grupos que surgen como grupos de transformaciones de "espacios topológicos" que son localmente homeomorfos a algún espacio euclídeo; esencialmente, todo grupo de matrices es un grupo de Lie y todo grupo de Lie es localmente isomorfo a un grupo de matrices. Ejemplos de grupos de Lie son E_3, el grupo de isometrías del espacio euclídeo $\mathbf{R}^3$; O_3 el grupo de isometrías de $\mathbf{R}^3$ que dejan fijo el origen; y SL_n, el grupo de matrices $n \times n$ con determinante 1.)

La diferencia entre ambas situaciones está en que en el caso de la teoría especial el grupo de simetrías tiene una cantidad finita de generadores infinitesimales independientes, mientras que en el caso de la teoría general hay una cantidad infinita y no numerable de generadores infinitesimales independientes. Esta diferencia es la que explica el comportamiento tan distinto de la conservación de la energía en uno y otro caso. En su trabajo *Invariante Variationsprobleme* (1918, no. 13 en [N]) Noether describe estos grupos de simetrías y establece la relación entrecada uno de ellos y las leyes de conservación de la energía en el sistema correspondiente ([J] y [B]).

3. La forja de una matemática

No hace falta saber álgebra ni física para deducir de la breve descripción de su obra que acabamos de dar, que la talla matemática de Emmy Noether está muy por encima de la media que encontramos en los profesionales de la matemática de cualquier época. Acabamos de leer, además, en voz de algunos ilustres matemáticos del siglo XX, que sus trabajos se encuentran entre los más fundamentales del siglo XX, tanto por la importancia intrínseca de los resultados, como por el impacto que han causado a la investigación matemática posterior. Noether no sólo fundó escuela, sino que hizo cambiar el foco y la estrategia de toda una disciplina. Emmy Noether es una de las grandes, pertenece, de pleno derecho, al grupo de ilustres creadores matemáticos a lo largo de la historia. Este hecho, combinado con su pesadilla laboral, nos lleva a hacernos algunas preguntas: ¿No resulta paradójico que una mujer llegue a adquirir un nivel matemático tan alto como el que alcanzó Noether, en un momento histórico y cultural en el que, claramente, las mujeres no eran bienvenidas en la comunidad matemática? ¿Cómo pudo llegar a ocurrir tal cosa? Una vez su talla fue reconocida públicamente por matemáticos de prestigio internacional, es fácil adivinar como sobrevivió: viviendo austeramente, aprovechando al máximo los placeres que le ofrecía el estudio, apoyándose en sus amigos, y no teniendo apenas más vida social que la que proveen las matemáticas. Es decir, llevando hasta el límite el método de sobrevivir que seguían entonces y siguen aún casi todos los científicos.

Lo verdaderamente interesante para nosotros hoy por lo que nos pueda enseñar, es entender cómo llegó a adquirir tal nivel matemático en un entorno y momento tan poco propicios. Esto nos lleva a prestar atención a dos aspectos esenciales en su biografía profesional: su entorno familiar y la escuela en la que se formó.

El entorno familiar de Emmy Noether

Como ya se ha mencionado, Emmy Noether nació en 1882 en Erlangen, y era hija del matemático de renombre Max Noether. Gordan era amigo y visitante frecuente de los Noether. Las conversaciones sobre matemáticas entre los dos amigos eran un ingrediente fundamental de la atmósfera de la casa en la que creció Emmy, y Gordan, de hecho, se convirtió en su director de tésis. Sin embargo, a Emmy no se la presionó para que estudiase matemáticas; en aquella casa estudiar matemáticas no era una obligación, sino una actividad libre y considerada como un placer. De niña Emmy bailaba y tocaba el piano, a los dieciocho años obtuvo los certificados oficiales de profesora de inglés y de francés y, cuando ese mismo año se matriculó en la Universidad de Erlangen (una de las dos mujeres entre los mil estudiantes), eligió cursos de historia y lenguas modernas. En 1904, sin que se sepa por qué, se cambió a matemáticas. La elección de Emmy Noether fue libre y la tomó de adulta sabiendo lo que hacía. Por un lado, años escuchando y observando a su padre y amigos le habían dado infomación más que sobrada sobre lo difíciles que son las matemáticas, sobre el placer que proporcionan, y sobre las muchas horas que requiere el llegar a esos momentos de placer. Por otro lado, antes de optar por las matemáticas estudió otras cosas, historia, por ejemplo, y siempre llevó una vida muy comprometida políticamente.

Ambos datos son importantes: tenía la información y se la dejó elegir. Es tema de preocupación en los entornos académicos el escaso número de mujeres que eligen dedicarse a la invetigación matemática (y científica en general). El número de mujeres matemáticas en activo hoy que son hijas, sobrinas o nietas de científicos es prueba abrumadora de que en este aspecto, Noether no es una excepción. El caso de Emmy Noether, como el de otras muchas mujeres matemáticas (y científicas en general), nos enseña que las mujeres consideran el estudio de las matemáticas como una opción más en la vida, si en el entorno familiar en el que crecen las matemáticas (respectivamente, la ciencia en general) se viven como una actividad más de la vida.

Las niñas, como los niños, se entrenan en su infancia para ser personas, y en este entrenamiento hay dos factores esenciales y distintos: las expectativas que sobre ellas tengan los adultos a su alrededor, y el tipo de adultos que estén a su alrededor. La relación entre el interés por el conocimiento matemático de las niñas y su proceso de identificación con los adultos que las rodean a lo largo de su infancia está bastante claro hoy gracias a los numerosos estudios que sobr el tema se han llevado a cabo en los últimos cincuenta años (ver [Bl], por ejemplo). La niña aprende a ser persona copiando a las personas a su alrededor, imitándolas, identificándose con ellas. Si una niña recibe de sus mayores desde la infancia el entrenamiento y respeto intelectual adecuados y se le permita el acceso a la información necesaria, no rechaza de entrada las ciencias. Salvo que su inclinación por las ciencias acabe convirtiéndose en instrumento de tortura, lo cual, desafortunadamente, también puede ocurrir, como muestra el ejemplo de Maria Agnesi (1718-1791), otra mujer matemática de prestigio que desde niña vivió en un entorno en el que no sólo había parientes cercanos científicos, sino que la ciencia formaba parte del mundo común a toda la familia, ellas incluidas.

Los humanistas italianos del siglo catorce mantenían algunas tradiciones de la, relativamente libre respecto a las mujeres, sociedad romana, y creían en el valor de la educación tanto para mujeres como para hombres de clase social alta. Durante los siglos XV y XVI las mujeres italianas ricas podían obtener títulos universitarios y dar clase en universidades y eran respetadas como personas con formación. La educación superior estándar incluía conocimiento de la matemática griega, por lo que estas mujeres conocían las matemáticas clásicas tan bien como sus colegas varones. Esta tradición de apoyo de la educación superior de las mujeres dió como fruto un gran número de mujeres matemáticas. La más notoria de ellas fue Maria Agnesi, Hija de Pietro Agnesi (?-1752), matemático de la Universidad de Bologna. No entraré en detalles sobre su vida y obra, que podéis encontrar en cualquier Diccionario de Biografías Científicas. Me limitaré a citar la opinión que en 1749 la Academia Francesa de la Ciencia emitió sobre su libro *Instituzioni analitichi* (1748), fruto de diez años de investigación:

> "Esta obra está caracterizada por su cuidadosa organización, su claridad y su precisión. No hay ningún otro libro, en ningún idioma, que permita al lector penetrar tan profundamente ni tan rápidamente, en los conceptos fundamentales del análisis. Consideramos este tratado como el trabajo más completo y mejor escrito sobre el tema".

Agnesi y Noether son ambas *patanegra*, ambas hijas de matemáticos de prestigio y ambas se mueven desde niñas con toda solura en ambientes académicos. La Italia del XVIII y la Alemania de principios del XX son centros del saber matemáticos, y en el caso de ambas mujeres, su afición por las matemáticas es nutrida y entrenada por los mejores maestros de la época.

La una habitó en el centro de Europa, concretamente en Alemania, y en los Estados Unidos, países ambos donde las mujeres siguen sin tener cabida en el mundo de la abstracción (hay que hacer hincapié en que a Noether se le negó el reconocimiento siempre, no sólo en Alemania; no olvidemos que en los EEUU enseñaba en Bryn Mawr, una universidad privada y elitista sólo para mujeres), la otra en el sur de Europa, en Milán, donde las mujeres llevan muchas generaciones teniendo acceso al saber abstracto. A la una, a Noether, se le negó en todo momento un lugar en el mundo académico; a la otra, Agnesi, se le ofreció una plaza como catedrática en la Universidad de Bologna en 1850, apenas dos años después de la publicación de su primer trabajo serio en matemáticas, *Instituzioni analitiche ad uso della giuventú italiana.*

Pero si en Noether las matemáticas fueron una elección que tomó ella misma de adulta y líbremente, en el caso de Agnesi la elección la tomó su padre cuando ella era niña. Pietro Agnesi no solo nutrió el talento matemático de su hija, sino que intentó sacarle todo el partido posible. Desde niña le puso tutores y profesores especiales, y estableció en su casa un salón cultural en el que hacía que Maria disertase sobre temas variados (fundamentalmente lógica, mecánica celeste y gravedad universal, ontología, mecánica, hidromecánica, elasticidad, química, botánica, zoología y mineralogía) ante expertos académicos y celebridades locales espacialmente invitadas y frente a los que Maria, acabada su ponencia, debía defender en debate las ideas expuestas. Maria hablaba en latín, pero durante la discusión siempre había algún invitado extranjero que se dirigía a ella en su lengua materna, dando por sentado (como el resto de los asistentes) que Maria le contestaría en tal lengua (cosa que ella hacía, pues hablaba francés desde los cinco años, traducía latín desde los nueve y se manejaba fluídamente en griego, alemán, español y hebreo desde los once). No es de extrañar que Maria nunca quisiese tomar posesión de su plaza en la Universidad y constantemente expresase el deseo de retirarse a un monasterio.

Hoy en día, afortunadamente para las niñas que gustan de las matemáticas, no *se llevan* los padres como Pietro Agnesi. El padre que actualmente quiere presumir de niña la convierte en modelo de anuncio o en tenista. Pero aunque la experiencia vivida por Maria Agnesi sea ya infrecuente, nos lleva a reflexionar sobre la experiencia que sí que viven todavía hoy las mujeres matemáticas que se dedican a la investigación, y que, sin llegar a ser tan dramática, tiene que ver con la de Agnesi: el ser tan escasas coloca a las mujeres que ya están en el mundo de la investigación en el lugar de pioneras, líderes, modelos a seguir o como lo queramos llamar, y esto a veces tiene un efecto negativo, tanto para ellas como para muchas de las alumnas que las observan, a la hora de hacer y/o mantener elecciones profesionales. El ser casi la única representante de su sexo en los grupos de trabajo, seminarios, congresos, etc., obliga a la mujer a vivir permanentemente una situación que puede llegar a ser extremadamente inhibidora: ser una excepción, aunque algunos (siempre varones) lo consideren una ventaja, impide el ser transparente. La mujer matemática es siempre visible, algo que, a la larga, acaba por resultar agotador y bastante disuasorio.

La escuela matemática alemana del siglo XIX

Durante el paso del siglo XVIII al XIX, la actividad matemática europea más creativa se estaba llevando a cabo, fundamentalmente, en Francia. La nueva República francesa consideraba las matemáticas como tremendamente importantes, y a partir de 1790 se reestructuró el sistema educativo de forma que se aumentase el entrenamiento matemático a todos los niveles. Era posible ganarse la vida con facilidad si se tenía habilidad matemática, muy valorada; las matemáticas se tomaban muy en serio, tanto por su valor intrínseco como por su utilidad al servicio del estado. Toda una galaxia de grandes matemáticos -Laplace, Monge y Legrende, por ejemplo- escriben libros de texto, dan clases y conferencias, llevan a cabo tareas para el gobierno y hacen investigación. El siglo XIX encuentra, pues, a Francia en un momento de esplendor matemático, mientras que la actividad matemática en Alemania en esa época carece del espíritu y calidad de la francesa. Entre 1800 y 1820 había un único matemático realmente importante en Alemania, Gauss, y los matemáticos jóvenes solían viajar a París a estudiar. Sin embargo, para cuando en 1904 Noether entra en contacto con el mundo matemático alemán, la situación había cambiado radicalmente, y era precisamente en Alemania donde la actividad matemática europea estaba siendo más creativa. Basta repasar la lista de algunos de los matemáticos que Alemania produjo entre 18000 y 1900 (que podríamos llamar, parafraseando al historiador de la matemática John Fauvel (1949-2001), *Mőbius y su banda*): el propio Gauss, Georg Cantor (1845-1918), J.W. Dedekind (1931-1916), Gustav Peter Lejeune Dirichlet (1805-1859), Paul Gordan (1837-1912) Herman Gűnter Grassmann (1809-1877), Hermann Hankel (1839-1873), Ludwig Otto Hesse (1811-1874), David Hilbert (1862-1943), Karl Gustav Jacob Jacobi (1804-1851) Christian Felix Klein (1849-1925), Ernst Eduard Kummer (1810-1893), Carl Louis Ferdinand Lindemann (1852-1939), Johann Benedict Listing (1808-1882), August Ferninand Mőbius Max Noether (1844-1921), Julius Plűcker (1801-1868), Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866), Karl Georg Christian von Staudt (1798-1867) y Karl Weierstrass (1815-1879).

La derrota de Prusia frente a las tropas de Napoleón en 1806, había dado lugar a un serio auto-examen en la sociedad de Prusia que dió lugar a un programa intenso de reforma interna y un cambio profundo en el país a lo largo del siglo XIX. La vida intelectual se reevaluó, y se promovió una cultura nacional nueva a través de una reforma educativa, nuevas instituciones y nuevas estructuras sociales y profesionales. De esta manera tuvo lugar lo que se ha considerado como una revolución intelectual, *Geistesrevolution* en vez de una revolución política.

De la mano de esta revolución, durante el siglo XIX las universidades alemanas desarrollaron una nueva manera de acercarse a los temas académicos, más profesional y orientada hacia la investigación, y este proceso, que ha sido bien estudiado por los historiadores de la matemática ([FFV], [S]), supuso el emerger de un nuevo estilo institucional, una nueva manera de hacer matemáticas que se reconoce como precursora de nuestro mundo universitario con sus profesores haciendo investigación, dando clases y organizando seminarios y cursos de doctorado. Para ello se redefinió el lugar a ocupar por el profesor, y se le asignó la doble tarea de dar clases y hacer investigación. Tradicionalmente estas dos funciones se habían llevado a cabo por separado, y sólo se hacía investigación en las academias. De hecho, en aquel momento Alemania era el único país en Europa en el que se creía que la función de un profesor no era solo transmitir conocimiento, sino que debía crearlo también.

Además, si por un lado el tipo de matemáticas que se estimulaba tendía hacia lo que podríamos llamar matemáticas puras (un alejamiento del viejo estilo de apoyar las matemáticas en problemas prácticos: la investigación pura se consideraba más valiosa, ofreciendo mayores beneficios espirituales y educacionales), por otro la reforma intentó hacer las clases en las universidades menos dogmáticas y el trabajo más científico.

Las universidades protestantes de Halle y Gőttingen furon las primeras en incluir la investigación entre las responsabilidades de un profesor de universidad. ¿Qué llevó a que se propusiese y aceptase este doble papel para los miembros de la comunidad académica? La reforma *neohumanista* prusiana. En Prusia el neohumanismo supuso un plan, una estrategia para reformar la sociedad a través de la educación. El tema de las reformas fue la autonomía. la independencia cultural y económica del individuo. El sistema educativo se convirtió en eje de la sociedad, y los profesores en sus agentes esenciales.

Las matemáticas, que hasta entonces se habían enseñado como parte de los estudios de filosofía, se convirtieron en disciplina independiente. Los estudiantes solían matricularse en cursos de matemáticas tan sólo para completar una educación liberal, por lo que los profesores que daban estas clases solían ser generalistas e impartir también docencia en otras materias. Las reformas prusianas cambiaron el estatus de las matemáticas: de ser una disciplina apenas considerada, pasó a ser, junto con las lenguas clásicas y la geografía e historia, una de las tres materias fundamentales en la enseñanza secundaria.

En consecuencia, los profesores de matemáticas de enseñanza media se convirtieron en un grupo profesional importante, con mucho prestigio social y una estructura e identidad sólidas construidas a partir de un interés activo en la investigación matemática del momento, a la que también contribuían. Los *Gymnasien* -equivalentes a nuestros Institutos de Enseñanza Secundaria- trabajaban en los mismos principios metodológicos y sociales que las universidades. Esta fue la clave para que se lograse labrar un terreno de una fertilidad sin precedentes (tanto en Alemania como fuera de ella) en el desarrollo de las matemáticas.

La profesionalización de los maestros y la institucionalización de las matemáticas como disciplina autónoma e independiente avanzaron a la par. La carreras en la universidad y en la enseñanza media estaban muy relacionadas, y bastantes matemáticos (Kummer y Weierstrass, por ejemplo) llegaron a la univesridad tras haber sido primero profesores de secundaria.

La reforma incluyó, entre otras novedades, la introducción en 1810 de los *seminarios* (el primero de ellos lo organizó Jacobi en Kőnisberg) como alternativa a las clases universitarias, y la publicación regular, con subvención estatal, de revistas académicas en las que la recién nacida comunidad matemática podía publicar y comunicarse de manera permanente (el *Journal fűr die reine und angewandte Mathematik* fue fundado por Krelle en 1826 con apoyo del ministerio de educación de Prusia y hasta alrededor de 1860 muchas de las contribuciones provenían del profesorado de secundaria; el *Archiv der Mathematik und Physik* lo fundó J.A. Grunert en 1841, y resultó fundamental para promover el rigor y clarificar problemas sobre el fundamento de las matemáticas; el *Zeitschrift fűr Mathematik und Physik* , fundado por Oscar Scheomilch en 1856, se especializó en hacer los resultados muy especializados más accesibles a la comunidad matemática).

4. Algunas conclusiones.

Emmy Noether fue, bajo todos los aspectos, grande. Una gran matemática, una gran persona, y una gran referencia a tener en cuenta cuando reflexionemos sobre el carácter de constructo social que, sin ninguna duda, tiene la matemática como profesión.

Lo lógico hubiese sido que el caso de Emmy Noether hubiese sido utilizado por la comunidad matemática como espejo en el que mirarse, y ante la imagen recibida la actitud general (esto es, oficial) de tal comunidad respecto a sus miembros mujeres hubiese cambiado. No ha sido así. Basta pensar en el caso de Ina Kersten, presidenta de la Sociedad Mateática Alemana durante los años 1995, 1996 y 1997, años durante los que estaba sin contrato laboral. El caso de Kersten es significativo, porque pone de manifiesto que, pese a lo mucho que se habla en círculos matemáticos de la injusticia que se cometió con Noether, a la sociedad matemática alemana de finales del siglo XX no le importa que su representante frente al exterior, frente al resto de la sociedad alemana y a la comunidad matemática internacional, sea una mujer, como Emmy Noether, *sin plaza.* Y si no le importa quer así sea, es porque no queda mal, socialmente hablando, que así sea. Respecto a los EEUU y, en concreto, el entorno en el que se movió Noether allí, el de Nueva Inglaterra, la situación tampoco ha cambiado mucho desde entonces. En el Instito de Princeton, la Universidad Harvard o en el MIT, encontramos hoy, como en la época de Noether, estudiantes de doctorado que son mujeres y alguna ayudante contratada para dar las clases de los primeros cursos, pero, también como en aquel entonces, ninguna profesora con plaza fija. Las mujeres matemáticas de Nueva Inglaterra dan clase en las numerosas universidades privadas femeninas de la zona –no olvidemos que se trata de una las zonas más desarrolladas y con mayor nivel cultural de los EEUU– como Bryn Mawr o Smith College, a la vez que atienden los cursos y seminarios y participan en los equipos de investigación de los departamentos de matemáticas de Princeton, MIT o Harvard; exactamente como hacía Noether. Además de tratarse del entorno en el que se movió Noether, lo que nos permite analizar si las cosas han cambiado o no con el paso del tiempo, en lo que se refiere a la actitud de la comunidad matemática de la zona respecto a las mujeres, el caso de Princeton, Harvard o el MIT resulta esencial para entender la situación en la comunidad matemática en general, pues se trata tres de los centros emblemáticos de la investicación matemática en los EEUU, que por un lado reflejan lo que ocurre hoy en las universidades estadounidenses, y por otro lado son el modelo a imitar elegido por muchos de los centros universitarios y de investigación europeos.

No, la comunidad matemática ni ha aprendido de sus errores, ni aparentemente está muy preocupada por ello.

Parece que lo que de verdad sigue faltando, son ganas de que cambien las cosas.

"Las reformas necesitan grandes elementos que no es fácil reunir y armonizar, es cierto. Pero todos esos elementos se encuentran disponiendo de uno que basta por sí solo para realizar la empresa. Ese elemento es la opinión: mientras no se manifieste resueltamente favorable a la campaña de transformación, las reformas seguirán siendo una necesidad y una esperanza, pero no serán nunca una realidad". ([R], p. 12).

5. Bibliografía

[Al] Paloma Alcalá Cortijo, *A ras de suelo. Situación de las mujeres en las instituciones científicas*, Sevilla 2001.

[A] P.S. Alexandroff, *In Memory of Emmy Noether*, en [N], 1-11.

[AC] Carlos Andradas, Capi Corrales Rodrigáñez eds., *Cuatrocientos años de matemáticas en torno al último Teorema de Fermat*, Editorial Complutense, Madrid 1999.

[AS] Margery Arent Safir ed.,*Connecting Creations*, Centro Galego de Arte Contemporánea 2000. Traducción al castellano: *Conectando Creaciones*, CGAC 2000.

[Bl] Claudine Blanchard-L., *Identificatory Process and Relation to Mathematical Knowledge*, en [EWM], 15-19.

[Bo] Nicolas Bourbaki, *Elementos de historia de las matemáticas*, Alianza Universidad 18, Madrid 1972.

[Br] J.W. Brewer, M.K. Smith (eds.), *Emmy Noether, a tribute to her life and work*, Marcel Dekker 1981.

[By] Nina Byers, *Noether's discovery of the deep connection between Symmetries and conservation laws*, Real Mathematical Conference Proceedings, Vol. 12, 1999. http://www. physics.ucla.edu/ cwp/articles/noether.asg/noether.html

[C] Giovanna Cifoletti, The creation of the history of algebra in the sixteenth century, en [GGR], 123-144.

[Co] Capi Corrales Rodrigáñez, *¿Dónde están las mujeres científicas*, en *Las mujeres ante la ciencia del siglo XXI*, Viky Frías Ruiz (ed.), Editorial Complutense, Madrid 20001, 39-70.

[Di] Auguste Dick *Emmy Noether*, Birkhäuser, Boston 1981.

[D] Jean Dieudonné. *Emmy Noether and Algebraic Topology*, en *Journal of Pure and Applied Algebra* vol. 31 (1984), 5-6.

[EWM] European Women in Mathematics, *Repport on the fith annual EWM meeting*, Luminy 1991.

[FFW] John Flauvel, Raymond Flood y Robin Wilson eds., *Mőbius and his band. Mathematics and Astronomy in nineteenth-century Germany*, Oxford University Press, 1993.

[G-1] Catherine Goldstein, *Fermat, Number Theory and History*, en [AC], 1-22

[G-2] Catherine Goldstein,*Mathematics, Writing and the Visual Arts*, en [AS], 263-92. Traducción al castellano: *Las matemáticas, la escritura y las artes visuales*, 289-321.

[GGR] Catherine Goldstein, Jeremy Gray, Jim Ritter eds.,*L'Europe Mathématique. Histoire, Mythes, Identités*, Ed. de la Maison des sciences de l'homme, Paris 1996, edición bilinge francés-inglés.

[Ha] Sandra Harding, *Ciencia y feminismo*, Morata, Madrid 1986, 52-53.

[He] Claudia Henrion,*Women in Mathematics. The Addition of Difference*, Indiana U.P. 1997.

[J] Nael Jacobson, *Introduction*, en [N], 12-26.

[Ki] Clark H. Kimberling, *Emmy Noether*, en, Febrero 1972,136-149.

[Kl] Israel Kleiner, *Emmy Noether: Highlights of her life and work* en *L'Enseignement Mathématique*, vol. 38 (1992), 103-124.

[N] Emmy Noether, *Collected papers*, Springer-Verlag 1993.

[R] Celedonio Rodrigáñez, *Madrid*, Tipografía de los Huérfanos, Madrid 1890.

[S] Gert Schubring, *The German mathematical community*, en [FFW], 21-33.

[V] Amelia Valcárcel, *La Política de las mujeres*, Cátedra, Madrid. 1997

[W] B.L. van der Waerden *The school of Hilbert and Emmy Noether*, en *Bull. London Math. Soc.* vol. 15 (1983), 1-7.

[We] Hermann Weyl *Emmy Noether*, en *Scripta mathematica III* vol. 3 (1935), 201-220.