

A.V.R. - Grupo E - Hoja 2 - Los Reales -

1 Determinad el error en el siguiente razonamiento:

$$\begin{aligned} x = y &\Rightarrow x^2 = xy \Rightarrow x^2 - y^2 = xy - y^2 \Rightarrow (x + y)(x - y) = y(x - y) \Rightarrow \\ &\Rightarrow x + y = y \underset{x=y}{\Rightarrow} x + y = x \underset{x=y}{\Rightarrow} 2x = x \Rightarrow 2 = 1. \end{aligned}$$

- 2** Probad que no existe ningún número racional cuyo cuadrado sea 6, ni ninguno cuyo cuadrado sea 3.
3 Sean $p \in \mathbb{Q}$ y α un número irracional. Indicad si son o no racionales $p\alpha$ y $p + \alpha$. Haced el mismo estudio cuando p y α son ambos racionales y cuando son ambos irracionales: ¿es \mathbb{Q} un cuerpo?
4 Probad que si $\alpha \in \mathbb{R}$ y $m, n \in \mathbb{N}$, entonces: $\alpha^{m+n} = \alpha^m \alpha^n$ y $(\alpha^m)^n = \alpha^{mn}$.

Indicación. Fijado $m \in \mathbb{N}$, por inducción sobre n .

- 5** Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Probad que $a^2 + b^2 = 0 \Leftrightarrow a = b = 0$.
6 Sean $a, b \in \mathbb{R} / 0 \leq a < b$. Probad que $a^2 \leq ab < b^2$.
7 Probad que $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ y $a \leq b, c \leq d \Rightarrow a + c \leq b + d$. Estudiad si es cierto el resultado análogo para el producto.
8 Sea $a \in \mathbb{R}^+$: probad que $\frac{a}{2} < a$.
9 Sea $a \in \mathbb{R}$: probad que $a < \varepsilon \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow a \leq 0$.
10 Sean $a, b \in \mathbb{R}$: probad que $a - \varepsilon < b \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow a \leq b$.
11 Sean $a, b \in \mathbb{R}^+$: probad que $a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2$; y (a) $a > 1 \Rightarrow a^2 > a$, (b) $a \in \mathbb{R}^+$ y $a < 1 \Rightarrow a^2 < a$.
12 Determinad los siguientes conjuntos:

$$\begin{aligned} (a) \{x \in \mathbb{R} / 4 - x < 3 - 2x\}, & \quad (b) \{x \in \mathbb{R} / x^2 < 3x + 4\}, & \quad (c) \left\{x \in \mathbb{R} / \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} < 0\right\}, \\ (d) \{x \in \mathbb{R} / x^2 > 3x + 1\}, & \quad (e) \{x \in \mathbb{R} / 1 < x^2 < 4\}, & \quad (f) \left\{x \in \mathbb{R} / \frac{1}{x} < x\right\}, \\ (g) \{x \in \mathbb{R} / 2x + 3 \leq 6\}, & \quad (h) \{x \in \mathbb{R} / x^2 + x > 2\}, & \quad (i) \left\{x \in \mathbb{R} / \frac{2x+1}{x+2} < 1\right\}. \end{aligned}$$

- 13** Probad que $x < 0 \Rightarrow -x - \frac{1}{x} \geq 2$.
14 Sean $a, b \in \mathbb{R}^+$: probad que $a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2$; y (a) $a > 1 \Rightarrow a^2 > a$, (b) $a \in \mathbb{R}^+$ y $a < 1 \Rightarrow a^2 < a$.
15 Probad que $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \leq \frac{a^2+b^2}{2} \forall a, b \in \mathbb{R}$; y que se da la igualdad $\Leftrightarrow a = b$.
16 Sean a y $b \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$. Probad que $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$: la media geométrica es menor o igual que la aritmética.
17 Consideramos la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ (en \mathbb{R}). Probad (*completando cuadrados*) que:
 (a) Tiene solución (real) $\Leftrightarrow \Delta = b^2 - 4ac \geq 0$.
 (b) Tiene solución única $\Leftrightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 0$.
 (c) Tiene dos soluciones (reales) $\Leftrightarrow \Delta = b^2 - 4ac > 0$.
18 Probad la *Desigualdad de Bernoulli*: $x \in \mathbb{R}$ y $x > -1 \Rightarrow (1+x)^n \geq 1+nx \forall n \in \mathbb{N}$.
19 Probad que si $x, c \in \mathbb{R}$,

$$x^n - c^n = (x - c) \sum_{k=1}^n c^{n-k} x^{k-1} = (x - c) \sum_{k=0}^{n-1} c^{n-k-1} x^k \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

20 *Sean $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$. Probad la *Desigualdad de Cauchy-Schwarz*:

$$a_1 b_1 + \dots + a_n b_n = \sum_{k=1}^n a_k b_k \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^n b_k^2\right)^{1/2} = \sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2} \sqrt{b_1^2 + \dots + b_n^2}.$$

Y que además se da la igualdad $\Leftrightarrow \begin{cases} b_1 = \dots = b_n = 0, \text{ o} \\ \exists s \in \mathbb{R} / a_i = s b_i \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}. \end{cases}$

Indicación. Dada la función auxiliar $F(t) = \sum_{k=1}^n (a_k - t b_k)^2 = A - 2Bt + Ct^2 \geq 0$ con $A = \sum_{k=1}^n a_k^2$, $B = \sum_{k=1}^n a_k b_k$,

$C = \sum_{k=1}^n b_k^2$, estudiad si la ecuación $Cx^2 - 2Bx + A = 0$ tiene raíces reales.

21 *Sean $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$. Probad la *Desigualdad Triangular*:

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^2 \right)^{1/2} &= \sqrt{(a_1 + b_1)^2 + \dots + (a_n + b_n)^2} \leq \\ &\leq \sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2} + \sqrt{b_1^2 + \dots + b_n^2} = \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{k=1}^n b_k^2 \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

y estudiad cuándo se da la igualdad (*emplead el 20*).

22 Diremos que una función real de variable real f es *creciente* si $x, y \in D(f)$ con $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$.

(a) ¿Es creciente la suma de funciones crecientes?

(b) ¿Es creciente el producto de funciones crecientes?

(c) Si f es creciente e inyectiva, ¿es creciente su inversa?

23 *¿Dónde es inyectiva la función $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$? Determinad sus inversas globales o locales.

$$x \mapsto x^n$$

24 Sea $a \in \mathbb{R}$: probad que $|a| = \sqrt{a^2}$ y $|a^2| = |a|^2$.

25 Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$. Probad que $\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$.

26 Probad que:

$$(a) \{x \in \mathbb{R} / |2x + 3| < 6\} = \left\{ x \in \mathbb{R} / -\frac{9}{2} < x < \frac{3}{2} \right\}, \quad (b) \{x \in \mathbb{R} / |x - 1| < |x|\} = \left\{ x \in \mathbb{R} / x > \frac{1}{2} \right\}.$$

27 Determinad y representad los conjuntos: $\{x \in \mathbb{R} / |x^2 - 1| \leq 3\}$, $\{x \in \mathbb{R} / |x - 1| < |x + 1|\}$.

28 Determinad y representad los conjuntos del plano:

$$(a) \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / |x| = |y|\}, \quad (b) \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / |x| + |y| = 1\},$$

$$(c) \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / |xy| = 2\}, \quad (d) \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / |x| - |y| = 2\}.$$

29 Probad que: $\frac{|x|}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq 1 \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, $\frac{|x|}{\sqrt{1 + x^2}} \leq 1 \forall x \in \mathbb{R}$.

30 Sea $f(x) = \frac{2x^3 - 3x^2 + 1}{2x - 7}$: probad que $|f(x)| \leq 82$ si $2 \leq x \leq 3$.

31 Sea $a \in \mathbb{R}$: demostrad que x pertenece a todos los ε -entornos de $a \Leftrightarrow x = a$, es decir:

$$\bigcap \{U / U \text{ es un } \varepsilon\text{-entorno de } a\} = \bigcap_{\varepsilon > 0} V_\varepsilon(a) = \{a\}.$$

32 Demostrad que $a, b \in \mathbb{R}$, y $a \neq b \Rightarrow \exists \varepsilon > 0 / V_\varepsilon(a) \cap V_\varepsilon(b) = \emptyset$.

33 Encontrad alguna cota superior e inferior, si es posible, de los conjuntos:

$$(a) A = \left\{ \frac{2x^2 + 2x + 1}{x - 1} / 0 < x < \frac{1}{2} \right\}, \quad (b) B = \left\{ \frac{x^2 + 1}{x - 1} / 2 < x < 3 \right\}, \quad (c) C = \left\{ \frac{\sqrt{x}}{x^2 - x + 5} / 0 < x < 1 \right\}.$$

34 Sea A un subconjunto de \mathbb{R} , y sea α una cota superior de A . Probad que $\alpha \in A \Rightarrow \alpha = \sup A$.

35 Sea A un subconjunto no vacío de \mathbb{R} y sea $\alpha \in \mathbb{R}$. Probad que α es cota superior de $A \Leftrightarrow$ se verifica:

$$t \in \mathbb{R} \text{ y } t > \alpha \Rightarrow t \notin A.$$

36 Sea A un subconjunto no vacío de \mathbb{R} y sea $\alpha \in \mathbb{R}$. Probad que $\alpha = \sup A \Leftrightarrow$ se verifica:

$$(i) \forall n \in \mathbb{N}, \alpha + \frac{1}{n} \text{ es cota superior de } A, \text{ y } (ii) \forall n \in \mathbb{N}, \alpha - \frac{1}{n} \text{ no es cota superior de } A.$$

37 Sean A y B dos subconjuntos no vacíos de \mathbb{R} que están acotados superiormente. Probad que $A \cup B$ está acotado superiormente y que $\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$.

38 Sea A un subconjunto no vacío y acotado de \mathbb{R} , y sea A_0 un subconjunto no vacío de A . Probad que A_0 está acotado y además $\inf A \leq \inf A_0 \leq \sup A_0 \leq \sup A$.

39 Para A y B subconjuntos no vacíos y acotados de \mathbb{R} , $\lambda \in \mathbb{R}$, definimos:

$$A + B = \{x \in \mathbb{R} / x = a + b, a \in A \text{ y } b \in B\}, \quad \lambda A = \{x \in \mathbb{R} / x = \lambda a, a \in A\}.$$

Probad que: $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$; $\inf(A + B) = \inf A + \inf B$;

$$\text{si } \lambda > 0 \text{ } \inf(\lambda A) = \lambda \inf A \text{ y } \sup(\lambda A) = \lambda \sup A;$$

$$\text{si } \lambda < 0 \text{ } \inf(\lambda A) = \lambda \sup A \text{ y } \sup(\lambda A) = \lambda \inf A.$$

¿Qué sucede si A o B no está acotado?

40 Demostrad que: $\forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{Z} / n - 1 \leq x < n$.