A.V.R. - Grupo E
Practica 1: Límites superiores e inferiores: aplicaciones.

Curso 2006-2007

11 de Enero de 2007

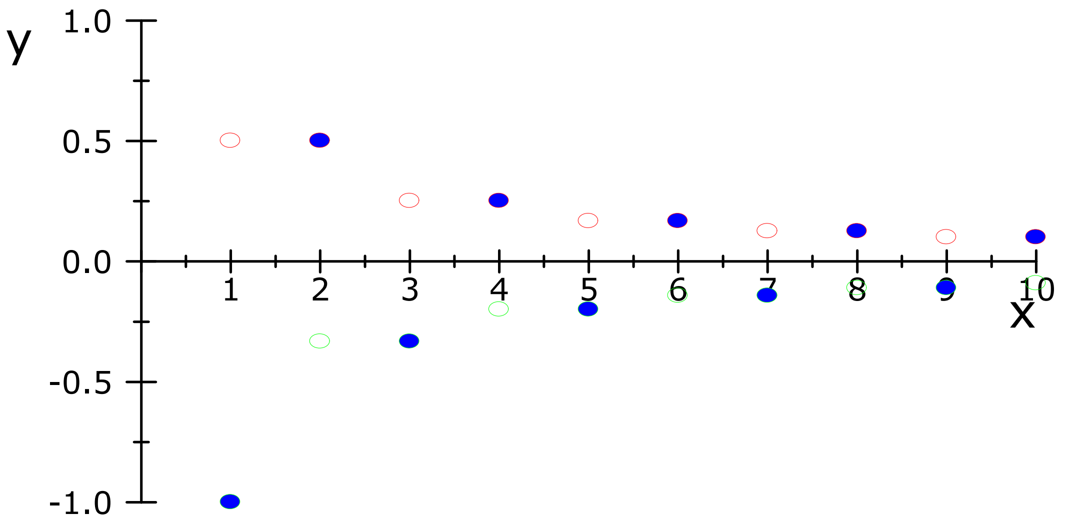
1 Límite superior e inferior de una sucesión acotada en $\mathbb{R}$ Hoja 4 (19)

Sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión acotada, y $\forall n \in \mathbb{N}$:

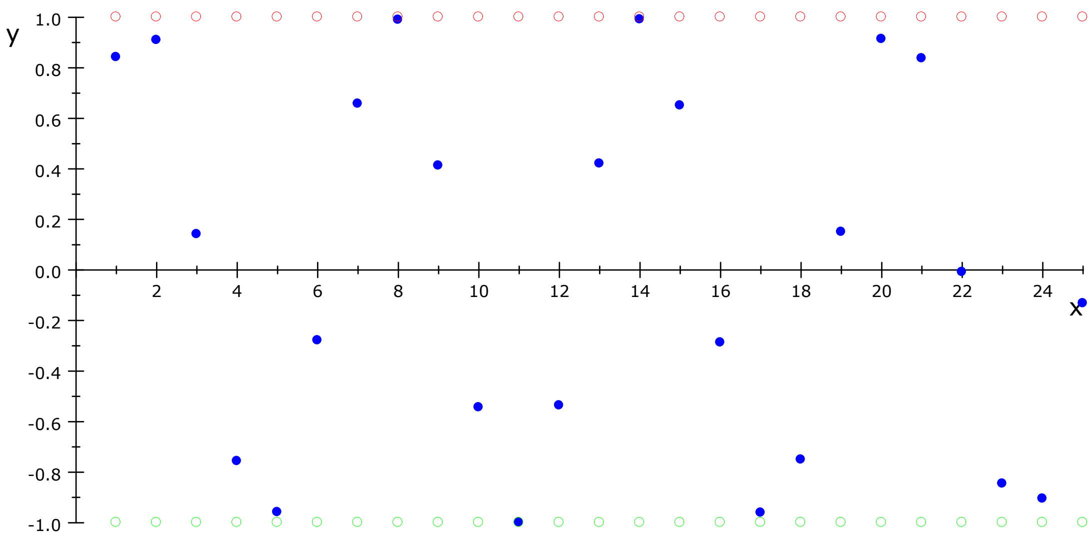
$$s_n = \sup\{x_k / \ k \geq n\} \ \text{ y } t_n = \inf\{x_k / \ k \geq n\}.$$

Prueba que $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son monótonas y convergentes: llamaremos

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \limsup x_n\text{: } \textit{límite superior} \text{ de } (x_n)_{n\in\mathbb{N}}\,;$$
$$\lim_{n\to\infty} t_n = \liminf x_n\text{: } \textit{límite inferior} \text{ de } (x_n)_{n\in\mathbb{N}}\,.$$



Ejemplo simple: $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\dfrac{(-1)^n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$



Ejemplo menos obvio: $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\sin n)_{n\in\mathbb{N}}$

2 Relación entre límite superior e inferior y límite Hoja 4 (19)

Prueba también que $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} t_n = x \Leftrightarrow (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x.

Indicación. $\Rightarrow$) Encuentra una desigualdad entre s_n, t_n y x_n;

$\Leftarrow$) Fijado $\varepsilon > 0$, si $x - \dfrac{\varepsilon}{2} < x_n < x + \dfrac{\varepsilon}{2}$ $\forall n \geq N_\varepsilon$, ¿qué cumplen s_n y t_n $\forall n \geq N_\varepsilon$?

3 Límite superior e inferior de una sucesión *no* acotada en $\mathbb{R}$

¿Qué sucede en **1** si la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no está acotada *(a)* superiormente o *(b)* inferiormente?
Indicación. Estudia cómo son en tales situaciones $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$s_n = \sup\{x_k \diagup\, k \geq n\} \text{ y } t_n = \inf\{x_k \diagup\, k \geq n\}.$$

Deduce que, en cualquier caso, tienen sentido $\limsup x_n \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ y $\liminf x_n \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.

4 **Criterio de la Raíz*

Dada la *serie numérica* (en $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$, demuestra que, siendo

$$\rho = \limsup \sqrt[n]{|z_n|} \in [0,+\infty) \cup \{+\infty\}, \text{ se tiene: } \begin{cases} \textit{(i) } \rho < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} z_n \text{ converge absolutamente} \\ \textit{(ii) } \rho > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} z_n \text{ diverge}^{1} \end{cases}$$

Indicación. Utilizando la notación de **1**, $\lim_{n\to\infty} s_n = \limsup \sqrt[n]{|z_n|} = \rho \in [0,1) \overset{?}{\Rightarrow} \exists L \in (\rho, 1)$, y

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \limsup \sqrt[n]{|z_n|} = \rho < L \overset{?}{\Rightarrow} \exists N \in \mathbb{N} \diagup\, s_n < L\ \forall n \geq N \overset{?}{\Rightarrow}$$
$$\overset{?}{\Rightarrow} \sqrt[n]{|z_n|} < L\ \forall n \geq N:$$

saca consecuencias.

5 **Criterio del Cociente*

Dada la *serie numérica* (en $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ con $z_n \neq 0\ \forall n \in \mathbb{N}$, demuestra que, siendo

$$\left.\begin{array}{l} \alpha = \liminf \dfrac{|z_{n+1}|}{|z_n|} \in [0,+\infty) \cup \{+\infty\} \\ \beta = \limsup \dfrac{|z_{n+1}|}{|z_n|} \in [0,+\infty) \cup \{+\infty\} \end{array}\right\}, \text{ se tiene: } \begin{cases} \textit{(i) } \beta < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} z_n \text{ converge absolutamente} \\ \textit{(ii) } \alpha > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} z_n \text{ diverge}^{1} \end{cases}$$

Indicación. Utilizando la notación de **1**, $\lim_{n\to\infty} s_n = \limsup \dfrac{|z_{n+1}|}{|z_n|} = \beta \in [0,1) \overset{?}{\Rightarrow} \exists L \in (\beta, 1)$ y

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \limsup \frac{|z_{n+1}|}{|z_n|} = \beta < L \overset{?}{\Rightarrow} \exists N \in \mathbb{N} \diagup\, s_n < L\ \forall n \geq N \overset{?}{\Rightarrow}$$
$$\overset{?}{\Rightarrow} \frac{|z_{n+1}|}{|z_n|} < L\ \forall n \geq N \overset{?}{\Rightarrow} |z_{N+k}| < |z_N|\, L^k\ \forall k \in \mathbb{N};$$

por otro lado,

$$\lim_{n\to\infty} t_n = \liminf \frac{|z_{n+1}|}{|z_n|} = \alpha > 1 \overset{?}{\Rightarrow} \exists N \in \mathbb{N} \diagup\, t_n > 1\ \forall n \geq N \overset{?}{\Rightarrow}$$
$$\overset{?}{\Rightarrow} \frac{|z_{n+1}|}{|z_n|} > 1\ \forall n \geq N \overset{?}{\Rightarrow} |z_n| > |z_N|\ \forall n \geq N:$$

saca consecuencias.

[1] Por el *Criterio del Resto*.