A.V.R. - Grupo E - Hoja 6 - Límites de Funciones -

1 Dado $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \varnothing$, demostrad que c es un punto de acumulación de $A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$, $V_\varepsilon(c) \cap A$ es *infinito*.

2 Emplead lo anterior para demostrar que 0 es el único punto de acumulación de $\left\{ \frac{1}{n} \diagup n \in \mathbb{N} \right\}$.

3 Hallad los puntos de acumulación de $A = (0,1) \cup \{2\}$ y $B = \left\{ (-1)^n + \frac{1}{n} \diagup n \in \mathbb{N} \right\}$.

4 Sea $a > 0$. Probad empleando la definición, que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = L \Rightarrow \lim\limits_{x \to 0} f(ax) = L$.

5 Sean $c \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$: demostrad empleando la definición, que $\lim\limits_{x \to c} x^n = c^n$.

Indicación. $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^n - c^n = (x - c) \sum\limits_{k=1}^{n} x^{k-1} c^{n-k}$.

6 Demostrad empleando la definición, que $\lim\limits_{x \to c} \frac{1}{x} = \frac{1}{c}$, $\forall c > 0$.

7 Sean $A \subset \mathbb{R}$, f, $g\colon A \to \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, y c punto de acumulación de A. Demostrad empleando la definición, que:

(a) $\exists \lim\limits_{x \to c} f(x) = L$, $\lim\limits_{x \to c} g(x) = M \Rightarrow \exists \lim\limits_{x \to c} (f+g)(x) = L + M$; $\lim\limits_{x \to c} (f \cdot g)(x) = L \cdot M$.

(b) Si $g(x) \neq 0$ $\forall x \in A$ y $M \neq 0 \Rightarrow \exists \lim\limits_{x \to c} \frac{f}{g}(x) = \frac{L}{M}$.

Demostrad los mismos resultados por el *Criterio Secuencial*.

8 Sean $A \subset \mathbb{R}$, $f_1, \ldots f_n\colon A \to \mathbb{R}$, c punto de acumulación de A.
Si $\forall k = 1, \ldots n$, $\exists \lim\limits_{x \to c} f_k(x) = L_k$, demostrad por inducción que

$$\exists \lim_{x \to c} \left(\sum_{k=1}^{n} f_k(x) \right) = \sum_{k=1}^{n} L_k \text{ y } \exists \lim_{x \to c} (f_1 \cdots f_n)(x) = L_1 \cdots L_n.$$

En particular, $\exists \lim\limits_{x \to c} f(x) = L \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}$, $\exists \lim\limits_{x \to c} (f(x))^n = L^n$.

9 *Calculad los límites siguientes, para $p, q \in \mathbb{N}$:

(a) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{x^p - a^p - pa^{p-1}(x-a)}{(x-a)^2}$, *(b)* *$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^{p+1} - (p+1)x + p}{(x-1)^2}$, *(c)* $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{p}{1 - x^p} - \dfrac{q}{1 - x^q} \right)$.

10 Sean A, $B \subset \mathbb{R} \diagup B \subset A$; c punto de acumulación de B, $f\colon A \to \mathbb{R}$: demostrad que

$$\exists \lim_{x \to c} f(x) = L \Rightarrow \exists \lim_{x \to c} (f|_B)(x) = L;$$

pero que el recíproco sólo es cierto si $\exists r > 0 \diagup V_r(c) \setminus \{c\} \subset B$.

11 Demostrad que $\nexists \lim\limits_{x \to 0} \sin \frac{1}{x} \in \mathbb{R}$.

12 Calculad los límites siguientes:

(a) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{\sqrt{1 + 2x} - 3}{\sqrt{x} - 2}$, *(b)* * $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{a} + \sqrt{x - a}}{\sqrt{x^2 - a^2}}$, $a > 0$, *(c)* $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\sqrt{x + 13} - 2\sqrt{x + 1}}{x^2 - 9}$.

13 Sean $A \subset \mathbb{R}$, $f\colon A \to \mathbb{R}$ y c punto de acumulación de A; $|f|\colon \begin{array}{rcl} A & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & |f|(x) = |f(x)| \end{array}$.

Demostrad que: $\exists \lim\limits_{x \to c} f(x) \Rightarrow \exists \lim\limits_{x \to c} |f|(x) = \left| \lim\limits_{x \to c} f(x) \right|$.

14 Demostrad que la función $\exp\colon \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^x \end{array}$ posee una inversa $\ln\colon \begin{array}{rcl} \mathrm{R}(\exp) & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln x = y \diagup \exp y = x \end{array}$ que verifica:

$$1 + x \in \mathrm{R}(\exp) \text{ y } x > 0 \Rightarrow 0 < \ln(1 + x) \leq x.$$

15 Se definen las funciones, $\forall x \in \mathbb{R}$: $\begin{cases} \cos x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} = \mathrm{Re}\left(e^{ix}\right) \\ \sin x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \mathrm{Im}\left(e^{ix}\right) \end{cases}$. Demostrad que

(a) están bien definidas y $\sin 0 = 0$, $\cos 0 = 1$;

(b) $\sin(-x) = -\sin x$, $\cos(-x) = \cos x$ $\forall x \in \mathbb{R}$;

(c) *$\forall x, y \in \mathbb{R}$, $\sin x \cos y + \sin y \cos x = \sin(x + y)$ y $\cos x \cos y - \sin x \sin y = \cos(x + y)$;

(d) deducid que $(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1$: ¿dónde toman sus valores ambas funciones?

(e) $\forall x \in [-1, 1] \setminus \{0\}$, $\left| \dfrac{\sin x}{x} - 1 \right| < |x|$, $|\cos x - 1| < x^2$, y $\forall x \in [-1, 1]$, $|\sin x| \leq 2|x|$.

16 Demostrad que $\lim\limits_{x \to 0} \sin x = 0$; $\lim\limits_{x \to 0} \cos x = 1$; $\lim\limits_{x \to 0} \ln(1 + x) = 0$; $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

Indicación. Por las desigualdades de **15** y **14**.

17 Demostrad que $\exists f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con límite en todos los puntos de $\mathbb{R}$, y un punto $c \in \mathbb{R} \diagup \nexists \lim\limits_{x\to c} (g\circ f)(x)$. ¿Qué condiciones tendrían que cumplir f y g para que $g\circ f$ tenga límite en c?

18 Calculad: *(a)* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x}{x}$, *(b)* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin ax}{\sin bx}$, $a, b > 0$; *(c)* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 2x}{x^2}$, *(d)* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x}{e^x - 1}$.

19 Sean $f,\ g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por: $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x > 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$.

Demostrad que $\exists \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ y $\exists \lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$.

20 *Demostrad que: $\lim\limits_{x\to c} e^x = e^c$; $\lim\limits_{x\to c} \sin x = \sin c$; $\lim\limits_{x\to c} \cos x = \cos c$, $\forall c \in \mathbb{R}$.

Indicación. Emplead el **16** y las propiedades respecto de la suma de las funciones implicadas.

21 Sean $A \subset \mathbb{R}$ y $f\colon A \to \mathbb{R}$, y sea $c \in \mathbb{R}$ un punto de acumulación de $A \cap (c, +\infty)$. Demostrad que son equivalentes:

(a) $\exists L = \lim\limits_{x\to c^+} f(x)$;

(b) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión en $A \diagup x_n > c\ \forall n \in \mathbb{N}$ y $x_n \to c \Rightarrow f(x_n) \to L$.

22 Sean $A \subset \mathbb{R}$ y $f\colon A \to \mathbb{R}$, y sea $c \in \mathbb{R}$ un punto de acumulación de $A \cap (c, +\infty) = B$. Demostrad que

$$\exists L = \lim_{x\to c^+} f(x) \Leftrightarrow \exists \lim_{x\to c} (f|_B)(x) = L.$$

23 Demostrad que $\exists f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y un punto $c \in \mathbb{R} \diagup \exists \lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = c$ y $\exists \lim\limits_{x\to c} g(x) = L \in \mathbb{R}$ pero $\nexists \lim\limits_{x\to+\infty} (g\circ f)(x)$. ¿Qué condiciones tendrían que cumplir f y g para que $g\circ f$ tenga límite en $+\infty$?

24 Demostrad que, siendo $c \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$,

$$\exists \lim_{x\to c} f(x) = +\infty \text{ y } \exists \lim_{x\to+\infty} g(x) = L \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} \Rightarrow \exists \lim_{x\to c} (g\circ f)(x) = L.$$

¿Por qué ello no contradice el **23**?

25 Calculad, si existen:

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(1 + \sin^2 x\right)$, *(b)* $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x + \sin^2 x}{5x + 6}$, *(c)* $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{x+2} - \sqrt{x}\right)$, *(d)* $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2\left(1 + \sin^2 x\right)}{(x + \sin x)^2}$.

26 Demostrad que $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$.

27 Estudiad la existencia de límites en $-\infty$ y $+\infty$ para las funciones *seno* y *coseno*.

28 *Demostrad que son equivalentes:

(i) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = L$, *(ii)* $\lim\limits_{x\to 0} f\left(x^2\right) = L$, *(iii)* $\lim\limits_{x\to 0} f(|x|) = L$.

29 Demostrad que son equivalentes:

* *(i)* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$, *(ii)* $\lim\limits_{x\to 0^+} f\left(\dfrac{1}{x}\right) = L$, *(iii)* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(-x) = L$.

30 Estudiad la existencia de límite, de límite por la izquierda y de límite por la derecha en cada uno de los siguientes casos. Cuando sea posible, calculad dichos límites.

(a) $\dfrac{x^p - 1}{x^q - 1}$ en 1, $p, q \in \mathbb{N}$, *(b)* $\dfrac{\sqrt{x^2+1} - 1}{\sqrt{x^4 + 16} - 4}$ en 0, *(c)* $\cos\dfrac{1}{x}$ en 0,

(d) $\dfrac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$ en $+\infty$, *(e)* $\dfrac{(x^m - 1)\left(x^{m-1} - 1\right)\cdots\left(x^{m-k+1} - 1\right)}{\left(x^k - 1\right)\left(x^{k-1} - 1\right)\cdots(x-1)}$, $m, k \in \mathbb{N}$, $m > k$, en 1,

(f) $\operatorname{sgn}\left(\sin\dfrac{1}{x}\right)$ en 0, *(g)* $\dfrac{x\sqrt{x-1} + \sqrt{x-1}}{x-1}$ en $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, *(h)* $\dfrac{|x|}{x^2 + x}$ en $\mathbb{R}$,

(i) $\dfrac{x+2}{\sqrt{x}}$ en $+\infty$, *(j)* $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 1 - x & \text{si } x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \end{cases}$ en $\mathbb{R}$,

(k) $\dfrac{\sqrt{x+1}}{x}$ en $+\infty$, *(l)* $\dfrac{\sqrt{x} - x}{\sqrt{x} + x}$ en $+\infty$.

31 Dadas las funciones en $\mathbb{R}$:

(i) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{(x-3)\sin x}{x^2 + x} & \text{si } x > 0 \\ \cos\dfrac{1}{x} e^{1/x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$, *(ii)* $f(x) = \dfrac{x\left(e^x - 1\right)}{(\sin x)^2}$, *(iii)* $f(x) = \dfrac{|x-2|}{x} e^{-1/x^2}$.

(a) Indicad su dominio de definición $\mathrm{D}(f)$, especificando sus puntos de acumulación.

(b) Estudiad la existencia de límites y límites laterales de f en los puntos de $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ donde tales límites tengan sentido.