ANÁLISIS DE FUNCIONES DE VARIABLE COMPLEJA, GRUPO B. EXAMEN FINAL DEL 25/01/2016.

TEST Y PREGUNTAS DE TEORÍA

I) Decir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas o, en caso de respuesta múltiple, subrayar la respuesta correcta.

1. El conjunto $\{x + iy \in \mathbb{C} : 3x + 6y = 13\} \cup \{\infty\}$ es compacto en $\mathbb{C}^*$.

2. La función $f(x + iy) = x(x^2 - y^2) - 2xy^2 + i(2x^2 y + y(x^2 - y^2))$ es holomorfa en $\mathbb{C}$.

3. La función $f(z) = z + 5 \operatorname{sen} z$ transforma las rectas $x = 0$ e $y = 0$ en dos curvas cuyos vectores tangentes en 0 son perpendiculares.

4. El radio de convergencia de la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!}(z - 6)^{7n}$ es:
a) 0; b) 3^7; c) $3^{1/7}$; d) ∞.

5. La función f definida por

$$f(z) = \int_{\{\xi = s+it\,:\,3s^2+6t^2=10\}} \frac{\overline{\xi} \operatorname{sen} z^2}{|\xi| - z^2} d\xi$$

es holomorfa en un entorno de 0.

6. El valor de la integral

$$\int_{|\xi|=9} \frac{\operatorname{sen} \xi \cos \xi}{(\xi - \pi)^2} d\xi$$

es:
a) 1; b) π; c) $2\pi i$; d) 0.

7. La función $f(z) = \frac{z}{\operatorname{sen} z} + \frac{\operatorname{sen} z}{z-6}$ tiene una singularidad evitable en 0 y puede aproximarse uniformemente por polinomios complejos en $\{x + iy : -3 \leq x \leq 3, -6 \leq y \leq 6\}$.

8. Existe una rama holomorfa del logaritmo definida en $\{x + iy : 1 < x^2 + y^2 < 100\}$.

9. Para la función $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ definida por $f(z) = \sum_{n=-5}^{\infty} \frac{3^n}{n!} z^{6n}$ se cumple $\overline{f(\mathbb{C} \setminus D(0, 10))} = \mathbb{C}$.

10. Si $\Omega = \{x + iy : 1 < x + y < 10\}$, existe $f : D(0, 2) \to \Omega$ biyectiva y holomorfa tal que $f'(0) = 0$.

Este test supone 1,5 puntos de la nota del examen.

II) Demostrar que: ***si*** $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ***es un abierto convexo,*** $p \in \Omega$, ***y*** $f : \Omega \to \mathbb{C}$ ***es continua en*** Ω ***y holomorfa en*** $\Omega \setminus \{p\}$, ***entonces existe*** $F : \Omega \to \mathbb{C}$ ***holomorfa tal que*** $F' = f$.

Después, enunciar y demostrar el teorema de Morera.

Esta pregunta supone otros 3,5 puntos de la nota del examen.