Capítulo 1

Números complejos y funciones elementales. Conceptos métricos y topológicos en $\mathbb{C}$.

1.1. Números complejos y funciones complejas elementales

Los números complejos pueden definirse informalmente como los *números* de la forma $z = x + iy$, donde $i = \sqrt{-1}$, y $x, y \in \mathbb{R}$. A primera vista puede parecer dudoso que tenga sentido considerar estos *números*, y que el suponer la mera existencia de un número i cuyo cuadrado sea -1 no lleve a contradicciones. Por descontado, tal número i no puede ser un número real, ya que el cuadrado de cualquier real es un real positivo. Si admitimos que los números de esta forma deberían poder sumarse y multiplicarse de acuerdo con la reglas

$$(x+iy)+(x'+iy') = (x+x')+i(y+y'); \quad (a+ib)(c+id) = ac+adi+bci+bdi^2 = (ac-bd)+i(ad+bc),$$

se ve que los números de la forma iy deberían habitar una dimensión diferente y tener algunas propiedades exóticas. De manera algo más precisa, el conjunto de los números complejos debería tener, para empezar, una estructura de espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ del cual $\{1, i\}$ sería una base, y también debería estar dotado de una operación de producto que hiciera posible que $i^2 = -1$.

Estas dos observaciones nos llevan a definir, ahora ya formalmente, el conjunto de los números complejos como el conjunto de los vectores del plano $\mathbb{R}^2$, con sus operaciones habituales de suma de vectores y producto de vectores por escalares reales, junto con una nueva operación: el *producto complejo* de dos vectores (a, b) y (c, d) se define como el vector $(ac-bd, ad+bc)$. Con esta nueva operación resulta que el producto de $(0, 1)$ por $(0, 1)$ es $(-1, 0)$. Si identificamos el número real 1 con el par $(1, 0)$, y si denotamos $i = (0, 1)$, tenemos efectivamente que $i^2 = -1$, y vemos que en $\mathbb{R}^2$, siempre ateniéndonos a estas identificaciones, pueden resolverse ecuaciones del tipo $x^2 + 1 = 0$, que no tienen solución en $\mathbb{R}$: los *números* $i = (0, 1)$ y $-i = (0, -1)$ son soluciones de esta ecuación, que puede escribirse de forma equivalente como $(x - i)(x + i) = 0$.

La notación cartesiana es engorrosa cuando se manejan números complejos, y además no es muy amigable, en el sentido de que no da pie a deducir, por ejemplo, la regla para el producto de dos números complejos si uno la ha olvidado momentáneamente. Además escribir $(a, b) \cdot (c, d)$ para el producto complejo puede inducir confusiones con el producto escalar de dos vectores del plano. Por ello resulta mucho más práctico identificar el par $(a, 0)$ con el número real a, y el par $(0, b)$ denotarlo por bi. A los números de la forma bi con $b \in \mathbb{R}$ se les llama *imaginarios puros*. De esta manera $\{1, i\}$ es una base de $\mathbb{R}^2$, y se cumplen

$$(x + iy) + (x' + iy') = (x + x') + i(y + y'); \quad (a + ib)(c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc).$$

El plano $\mathbb{R}^2$, siempre que utilicemos estas identificaciones y esta regla para el *producto complejo* de dos vectores, lo denotaremos por $\mathbb{C}$, y lo llamaremos el *conjunto de los números complejos*. También usaremos la notación

$$z - w := z + (-w),$$

operación que corresponde, por supuesto, a la diferencia de vectores en el plano.

Es un ejercicio sencillo comprobar que el conjunto $\mathbb{C}$, con las operaciones de suma y producto así definidas, tiene las siguientes propiedades, para todos los $z, w, \xi \in \mathbb{C}$:

1. $z + (w + \xi) = (z + w) + \xi$ (asociatividad de la suma);
2. $z + w = w + z$ (conmutatividad de la suma);
3. $z + 0 = z$ (el 0 es elemento neutro para la suma);
4. $z + (-z) = 0$ (existencia de opuestos para la suma);
5. $z(w\xi) = (zw)\xi$ (asociatividad del producto);
6. $zw = wz$ (conmutatividad del producto);
7. $1z = z$ (el 1 es elemento neutro para el producto);
8. si $z = x + iy \neq 0$ entonces $z^{-1} := \frac{x-iy}{x^2+y^2}$ cumple que $zz^{-1} = 1$ (existencia de inversos para el producto);
9. $z(w + \xi) = zw + z\xi$ (propiedad distributiva del producto respecto de la suma).

Es decir, $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ es un cuerpo conmutativo, del cual el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales, identificado con $\{x + iy \in \mathbb{C} : y = 0\}$, es un subcuerpo.

La fórmula para el inverso de z resulta más fácil de recordar una vez que se definen la nociones de número complejo *conjugado*, y de *módulo de un número complejo*. Dado $z = x + iy \in \mathbb{C}$, definimos su conjugado, denotado por $\overline{z}$, como

$$\overline{z} = x - iy.$$

La operación de conjugación corresponde geométricamente a una reflexión en $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ respecto de la recta $\mathbb{R} := \{x + iy \in \mathbb{C} : y = 0\}$. Se define el módulo de $z = x + iy$ por

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Es decir, el módulo de $z = x + iy$ no es más que la norma euclídea del vector $x + iy$ en $\mathbb{C}$, que a su vez es igual a la distancia de $z = x + iy$ al origen. También usaremos con frecuencia las notaciones

$$x = \text{Re}z, \;\; y = \text{Im}.$$

Geométricamente, Rez es la proyección ortogonal de z sobre la recta $\mathbb{R}$ en $\mathbb{C}$, y $i\,$Imz es la proyección ortogonal de z sobre la recta $i\mathbb{R} := \{x + iy : x = 0\}$. Con estas notaciones resulta que

$$z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}; \;\; \text{Re}z = \frac{z + \overline{z}}{2}, \;\; \text{Im}z = \frac{z - \overline{z}}{2i}.$$

Es inmediato comprobar estas otras propiedades elementales del módulo y el conjugado:

$$\begin{aligned}
&\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w};\\
&\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w};\\
&|z| = |\overline{z}|;\\
&|z|^2 = z\,\overline{z};\\
&|zw| = |z|\,|w|.
\end{aligned}$$

Las coordenadas polares en $\mathbb{R}^2$ resultan muy útiles cuando se manejan círculos, sectores de círculos, rectas que pasan por el origen, etc. Cada número complejo $z = x + iy$ puede escribirse como $z = r\cos\theta + ir\,\mathrm{sen}\,\theta$, con

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|, \quad \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right),$$

donde el ángulo θ está determinado salvo suma de un múltiplo entero de 2π. Como ya sabemos la aplicación

$$(0, \infty) \times (-\pi, \pi] \ni (r, \theta) \mapsto r\cos\theta + ir\,\mathrm{sen}\,\theta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

es una biyección.

Definición 1.1 (Exponencial compleja)**.** Para cada $\theta \in \mathbb{R}$ definimos

$$e^{i\theta} := \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta,$$

y si $z = x + iy \in \mathbb{C}$, definimos

$$e^z := e^x e^{iy}.$$

Por tanto todo $z = x + iy$ puede escribirse en la forma $z = re^{i\theta}$, donde $r = |z|$, y θ está determinado unívocamente en $(-\pi, \pi]$ si $z \neq 0$. Denotaremos

$$\mathrm{Arg} z = \theta$$

para este único $\theta \in (-\pi, \pi]$, y a la función $z \mapsto \mathrm{Arg} z$ la llamaremos *rama principal del argumento*. Por ejemplo se tiene $\mathrm{Arg}(i) = \pi/2$, $\mathrm{Arg}(1 - i) = -\pi/4$. También usaremos la notación

$$\arg z = \{2k\pi + \mathrm{Arg} z : k \in \mathbb{Z}\}$$

para la función multivaluada que para cada $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ nos da todos los posibles números $\theta \in \mathbb{R}$ tales que $z = |z|e^{i\theta}$.

Definiremos la *rama principal del logaritmo* como la aplicación $\log : \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \to \mathbb{C}$ definida por

$$\log z = \log|z| + i\mathrm{Arg}(z).$$

Es claro que se tiene

$$e^{\log z} = z,$$

y que $\log z$ coincide con el logaritmo usual en $\mathbb{R}$ cuando $z \in (0, +\infty)$. La función $\log$ definida así es inyectiva, pero la función exponencial compleja e^z no lo es: de hecho se tiene $e^{z+2k\pi i} = e^z$ para todo $k \in \mathbb{Z}$ (se dice que e^z es periódica de período $2\pi i$). Veamos otras propiedades básicas de la función $\theta \mapsto e^{i\theta}$.

Proposición 1.1. *Se tiene, para todos $\theta, \varphi \in \mathbb{R}$, que:*

1. $|e^{i\theta}| = 1$;
2. $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$;
3. $e^{-i\theta} = 1/e^{i\theta}$;
4. $e^{i(\theta+\varphi)} = e^{i\theta}e^{i\varphi}$.

Demostración. (1) equivale a $\mathrm{sen}^2\,\theta + \cos^2\theta = 1$, (2) es consecuencia de que sen es simétrica impar y $\cos$ es simétrica par, y (3) se deduce de (1) y (2) y la fórmula $z^{-1} = \overline{z}/|z|^2$. Para demostrar (4), observemos que esta igualdad equivale a

$$\begin{aligned} \cos(\theta + \varphi) + i\,\mathrm{sen}(\theta + \varphi) &= (\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)(\cos\varphi + i\,\mathrm{sen}\,\varphi) \\ &= \cos\theta\cos\varphi - \mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi + i\left(\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi + \mathrm{sen}\,\theta\cos\varphi\right), \end{aligned}$$

que a su vez (igualando partes reales e imaginarias de ambos miembros) equivale a las fórmulas de la suma para las funciones seno y coseno, que son bien conocidas. □

Corolario 1.2. *Para todos $z, w \in \mathbb{C}$ se tiene $e^z e^w = e^{z+w}$.*

Demostración. Escribamos $z = x + iy$, $w = a + bi$, con $x, y, z, a, b \in \mathbb{R}$. Entonces, usando la definición de e^z, el hecho de que $e^{x+a} = e^x e^a$, y (4) de la proposición anterior, obtenemos

$$e^z e^w = e^{x+iy} e^{a+ib} = (e^x e^{iy})(e^a e^{ib}) = (e^x e^a)(e^{iy} e^{ib}) = e^{x+a} e^{i(y+b)} = e^{(x+a)+i(y+b)} = e^{z+w}.$$

□

Corolario 1.3. *Se tiene, para todos $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, que*

1. $\arg \overline{z} = -\arg z$;
2. $\arg(1/z) = -\arg z$;
3. $\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$.

Demostración. Todas las propiedades son fáciles; demostremos por ejemplo (3). Escribiendo $z_j = r_j e^{i\theta_j}$, $j = 1, 2$, y usando la proposición anterior, tenemos

$$z_1 z_2 = \left(r_1 e^{i\theta_1}\right) \left(r_2 e^{i\theta_2}\right) = r_1 r_2 e^{i\theta_1} e^{i\theta_2} = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)},$$

de donde se deduce (3). □

La propiedad (4) de la proposición, o la (3) del corolario, nos desvelan el significado geométrico del producto de dos números complejos: si $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ y $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$ son dos números complejos, su producto es

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)},$$

un número complejo cuya distancia al origen es el producto de las distancias al origen de z_1 y z_2, y que forma un ángulo con la recta $y = 0$ igual a la *suma* de los ángulos que forman z_1 y z_2 con esa misma recta. En el caso particular de que los módulos sean 1, vemos que multiplicar números complejos equivale a sumar argumentos.

Estas observaciones nos permiten, por ejemplo, calcular las n raíces n-ésimas de un número complejo w, para cualquier $n \in \mathbb{N}$: escribimos $w = \rho e^{i\varphi}$, $z = re^{i\theta}$, y planteamos la ecuación $z^n = w$, cuya forma polar es

$$r^n e^{in\theta} = \rho e^{i\varphi},$$

de donde, igualando módulos y argumentos, deducimos que $r = \rho^{1/n}$, y $\varphi = n\theta + 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$. Por tanto, las n raíces n-ésimas de w son los números z_j definidos por

$$z_j = \rho^{1/n} e^{\theta_j}, \text{ con } \theta_j = \frac{\varphi + 2j\pi}{n}, \; j = 0, 1, ..., n-1$$

En el caso en que $|w| = 1$ estos puntos determinan los vértices de un polígono regular de n lados inscrito en el círculo unidad, y uno de dichos vértices es precisamente el punto w.

Más adelante veremos que todo polinomio complejo de grado $n \geq 1$ tiene exactamente n raíces complejas, contadas con sus multiplicidades (Teorema Fundamental del Álgebra).

Examinemos con más detenimiento el caso básico $n = 2$. La función $z \mapsto w = z^2$ no es inyectiva: cada punto $w = \rho e^{i\varphi} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, donde $\varphi \in (-\pi, \pi)$, tiene dos antimágenes, $z = \pm \rho^{1/2} e^{i\varphi/2}$. Podemos definir entonces dos *ramas* de la función raíz cuadrada, dadas por $f_1 : \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \to \mathbb{C}$,

$$f_1(w) = \rho^{1/2} e^{i\varphi/2},$$

y $f_2(w) = -f_1(w)$. A f_1 se la llama la *rama principal de la raíz cuadrada*. La elección de la semirecta $(-\infty, 0]$ para eliminarla del dominio de f_1 y obtener una inversa continua de z^2 es arbitraria, aunque natural. En cualquier caso pronto resultará claro que alguna semirecta (o alguna curva no acotada que comience en 0) hay que quitar a $\mathbb{C}$ para poder obtener una inversa continua de la función z^2. Con esta elección, observemos que la restricción de $g(z) = z^2$ al semiplano derecho $U := \{z \in \mathbb{C} : \text{Re} z > 0\}$ es inyectiva, y proporciona una inversa de $f_1 : \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \to U$, que también es inyectiva.

En general, podemos definir, para cualquier $n \in \mathbb{N}$, la rama principal de la función raíz n-ésima como $f : \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \to \mathbb{C}$, $f(w) = e^{\frac{1}{n}\log w}$, donde $\log$ es la rama principal del logaritmo. Las otras funciones raíces n-esimas f_j con este mismo dominio se obtienen multiplicando $f(w)$ por los números complejos $e^{2j\pi/n}$, $j = 1, ..., n-1$. Cada una de las funciones así obtenidas llevará de forma inyectiva $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ en un sector del plano U_j que el lector queda invitado a dibujar, de manera que la restricción de la aplicación $h(z) = z^n$ a U_j será inyectiva (y función inversa de f_j).

De forma aún más general podemos definir z^α, para cualesquiera $\alpha \in \mathbb{C}$ y $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$, como

$$z^\alpha = e^{\alpha \log z},$$

donde $\log$ es la rama principal del logaritmo. Más adelante veremos cómo definir funciones de este tipo en cualquier dominio abierto de $\mathbb{C}$ que no tenga *agujeros* y no contenga al 0.

Recomendamos al lector que examine con cuidado el comportamiento geométrico de las funciones e^z, $\log z$, z^n, $z^{1/n}$, analizando cómo transforman diversos conjuntos básicos del plano complejo tales como rectas paralelas a los ejes, semirrectas que pasen por el origen, circunferencias centradas en 0, sectores de círculos centrados en 0, etc.

Veamos ahora cómo se definen las funciones trigonométricas en $\mathbb{C}$. Usando la definición de $e^{i\theta}$, y recordando que sen es simétrica impar y $\cos$ es simétrica par, obtenemos las igualdades

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta, \;\; e^{-i\theta} = \cos\theta - i \operatorname{sen}\theta,$$

que al sumarlas y restarlas nos permiten deducir

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \;\; \operatorname{sen}\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}, \;\; \theta \in \mathbb{R}.$$

Por tanto una manera natural de definir sen y $\cos$ en $\mathbb{C}$ (y, como veremos más adelante, la única posible, entre otras equivalentes, si queremos que sean funciones diferenciables en sentido complejo) es mediante

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \;\; \operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \;\; z \in \mathbb{C}.$$

Es claro que se verifican

$$\cos(-z) = \cos z, \;\; \operatorname{sen}(-z) = -\operatorname{sen} z, \;\; \operatorname{sen}(z + 2k\pi) = \operatorname{sen} z, \;\; \cos(z + 2k\pi) = \cos z,$$

y

$$\cos(z) = \operatorname{sen}\left(z + \frac{\pi}{2}\right)$$

para todos $z \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{Z}$. Más adelante veremos que todas las demás identidades usuales que involucran a las funciones sen y $\cos$ en $\mathbb{R}$ (como las fórmulas del seno o el coseno de la suma, o el hecho de que $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$) siguen siendo válidas en $\mathbb{C}$.

Las funciones trigonométricas hiperbólicas se definen por

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \;\; \operatorname{senh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}.$$

Las demás funciones trigonométricas se definen de la forma usual: por ejemplo,

$$\tan z = \frac{\operatorname{sen} z}{\cos z}.$$

1.2. Métrica y topología en $\mathbb{C}$ y sus subconjuntos

Puesto que $\mathbb{C}$ no es más que $\mathbb{R}^2$, en donde los puntos se denotan ahora de la forma $x+iy$ en lugar de (x,y), y donde hemos añadido una operación de producto, es natural definir la distancia entre dos números complejos como la distancia euclídea entre los puntos del plano que representan. Es decir, si $z = x+iy, w = a+bi$, la distancia entre estos dos números complejos es

$$d(z,w) = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2},$$

que por supuesto coincide con el módulo de $z-w$, es decir,

$$d(z,w) = |z-w|,$$

ya que el módulo de z no es más que la norma euclídea de z. Así pues, el conjunto $\mathbb{C}$, con la distancia así definida, es un espacio métrico, y en particular un espacio topológico. A las bolas de este espacio métrico las llamaremos discos. El disco abierto de centro $z_0 \in \mathbb{C}$ y radio $r>0$ lo denotaremos

$$D(z_0,r) := \{z \in \mathbb{C} : |z-z_0| < r\},$$

y el correspondiente disco cerrado por

$$\overline{D}(z_0,r) = \{z \in \mathbb{C} : |z-z_0| \leq r\}.$$

Los abiertos, los cerrados, las sucesiones convergentes, las sucesiones de Cauchy, los puntos de acumulación, etc, de $\mathbb{C}$ son los mismos que en $\mathbb{R}^2$. Por tanto todos los conceptos métricos y topológicos que se han estudiado en $\mathbb{R}^n$ se aplican directamente a $\mathbb{C}$ al particularizar en el caso $n=2$. Así por ejemplo un conjunto Ω de $\mathbb{C}$ es abierto si y sólo si para cada $z \in \Omega$ existe $r>0$ tal que $D(z,r) \subseteq \Omega$, y una sucesión (z_n) converge a z si y sólo si para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$ entonces $|z_n - z| \leq \varepsilon$. Análogamente, $\lim_{z\to z_0} f(z) = \alpha$ si para todo $\varepsilon>0$ existe $\delta>0$ tal que si $0<|z-z_0|<\delta$ entonces $|f(z)-\alpha|<\varepsilon$, y una función g es continua en z_0 siempre y cuando $\lim_{z\to z_0} g(z) = g(z_0)$. Por supuesto, $\mathbb{C}$ es un espacio métrico completo, ya que $\mathbb{R}^2$ con la distancia eucídea lo es.

También es obvio, al escribirlas como funciones de $\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, que las funciones $S,P : \mathbb{C}\times\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definidas por

$$S(z,w) = z+w, \;\; P(z,w) = zw$$

son continuas (por ejemplo, si $z = x+iy, w = a+ib$, P puede escribirse en notación cartesiana como

$$P\left((x,y),(a,b)\right) = (xa-yb, xb+ya),$$

y es claro que P es continua porque sus funciones componentes lo son). En particular se obtiene que si (z_n) converge a z y (w_n) converge a w entonces la sucesión de los productos complejos $(z_n w_n)$ converge a zw. Y también que si $\lim_{z\to z_0} f(z) = \alpha$ y $\lim_{z\to z_0} g(z) = \beta$, entonces $\lim_{z\to z_0} f(z)g(z) = \alpha\beta$.

Lo mismo sucede con las funciones $Q(z,w) = z/w$ (definida para $w \neq 0$), $C(z) = \overline{z}$, e^z, $\operatorname{sen} z$, $\cos z$, etc, y con las combinaciones de todas ellas que involucren suma, producto, cociente, y composición, en los conjuntos donde estén bien definidas. En particular observemos que si $\lim_{z\to z_0} f(z) = \alpha$ y $\lim_{z\to z_0} g(z) = \beta \neq 0$, entonces $\lim_{z\to z_0} f(z)/g(z) = \alpha/\beta$.

También pueden considerarse sucesiones y series de funciones complejas y considerar su convergencia puntual y uniforme. A este respecto, recordemos un criterio de convergencia de series de funciones que nos será muy útil en capítulos sucesivos.

Teorema 1.4. *[Criterio M de Weierstrass] Sean X un conjunto no vacío, y E un espacio vectorial normado completo (espacio de Banach). Si (f_n) es una sucesión de funciones $f_n : X \to E$ y existen números $M_n > 0$ tales que*

$$|f_n(x)| \leq M_n \textit{ para todos } x \in X, n \in \mathbb{N}, \quad \textit{y que}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty,$$

entonces la serie de funciones $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente en X. Es decir, existe una función $f : X \to E$ tal que

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} f_n(x) = f(x), \text{ uniformemente en } x \in X.$$

Además, si X es un espacio topológico y cada f_n es continua en X, entonces f también es continua en X.

Demostración. La demostración es igual, salvo cambios obvios, que la del caso en que X es un intervalo de $\mathbb{R}$, que es ya conocida. En todo caso no viene mal recordarla. Dado $\varepsilon > 0$, existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{j=N_0}^{\infty} M_j \leq \varepsilon$. Entonces, si $n \geq m \geq N_0$, se tiene

$$\left| \sum_{j=1}^{n} f_j(x) - \sum_{j=1}^{m} f_j(x) \right| = \left| \sum_{j=m+1}^{n} f_j(x) \right| \leq \sum_{j=N_0}^{\infty} |f_j(x)| \leq \sum_{j=N_0}^{\infty} M_j \leq \varepsilon \tag{1.1}$$

para todo $x \in X$. En particular la sucesión $\left(\sum_{j=1}^{n} f_j(x)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ de las sumas parciales es de Cauchy en E (y además uniformemente en x). Como E es completo, para cada $x \in X$ existe $\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} f_j(x)$, al que llamamos $f(x)$. Así, haciendo $n \to \infty$ en (1.1), obtenemos que para todo $\varepsilon > 0$ existe N_0 tal que si $m \geq N_0$ entonces

$$\left| f(x) - \sum_{j=1}^{m} f_j(x) \right| \leq \varepsilon \tag{1.2}$$

para todo $x \in X$. Es decir, que $\lim_{m\to\infty} \sum_{j=1}^{m} f_j(x) = f(x)$ uniformemente en $x \in X$.

La afirmación sobre la continuidad de f en el caso de que cada f_n es continua se deja como ejercicio para el lector (en caso de duda, repetimos que la demostración es la misma que cuando X es un subconjunto de $\mathbb{R}$). □

Al aplicar este teorema al caso de funciones complejas obtenemos lo siguiente: si $f_n : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es una sucesión de funciones para las que existen números reales positivos M_n de forma que $|f_n(x)| \leq M_n$ para todo n, y $\sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente en A.

Es importante advertir que, a diferencia de lo que ocurre con la topología, la geometría lineal en $\mathbb{C}$ es diferente de la de $\mathbb{R}^2$, cuando se considera a $\mathbb{C}$ como espacio vectorial sobre el propio $\mathbb{C}$, en lugar de sobre $\mathbb{R}$. Es decir, hay que distinguir bien entre funciones $\mathbb{R}$-lineales y funciones $\mathbb{C}$-lineales: por ejemplo la función $C(z) = \overline{z}$, que en coordenadas cartesianas se escribe $(x, y) \mapsto (x, -y)$, es $\mathbb{R}$-lineal pero no es $\mathbb{C}$-lineal. Lo mismo ocurre con los polinomios: todo polinomio complejo, es decir, toda función de la forma

$$P(z) = a_0 + a_1 z + ... + a_n z^n,$$

donde los a_j son números complejos, es también un polinomio real de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$. Sin embargo, como se ve de nuevo con el ejemplo $C(z) = \overline{z}$, no todo polinomio de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ es un polinomio complejo.

1.3. Problemas

Problema 1.1. Resolver las siguientes cuestiones.

1. Determinar los números complejos cuyo cuadrado sea igual a su conjugado.
2. Encontrar los números complejos cuyo conjugado coincide con su inverso.
3. Hallar los números complejos que son iguales al cuadrado de su conjugado.

4. Encontrar los números complejos cuyo cuadrado coincide con el cuadrado de su conjugado.
5. Encontrar los números complejos z tales que la suma (respectivamente, la diferencia) de z y su conjugado es nula.
6. Hallar los números complejos cuyos inversos son iguales a sus opuestos.
7. Determinar los números complejos cuyo cuadrado sea: i) imaginario puro; ii) real positivo; iii) real negativo.

Problema 1.2. Determinar y dibujar los conjuntos:

1. $A = \{z \in \mathbb{C} : |z-i|^2 + |z+i|^2 < 2\}$;
2. $B = \{z \in \mathbb{C} : |\mathrm{Re} z| < |z|\}$.

Problema 1.3. Si $z \neq 0$ es un número complejo, probar que z, $1/\overline{z}$, 0 están alineados.

Problema 1.4. Hallar los valores de n naturales para los que $(1+i)^n$ es un número real positivo.

Problema 1.5. Hallar las raíces sextas de $7+13i$.

Problema 1.6. Sean $w_0, ..., w_{n-1}$ las n raíces n-ésimas de 1. Demostrar que:

1. $\Pi_{k=0}^{n-1}(z-w_k) = z^n - 1$ para todo $z \in \mathbb{C}$;
2. $\sum_{k=0}^{n-1} w_k = 0$;
3. $\Pi_{k=0}^{n-1} w_k = (-1)^{n-1}$;
4. $\sum_{j=0}^{n-1} w_j^k = \begin{cases} 0, \text{ si } 1 \leq k \leq n-1 \\ n, \text{ si } k = n. \end{cases}$

Problema 1.7. Sea $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ y tal que $|z| = 1$. Probar que $z + z^{-1}$ es real y que $\frac{1+z}{1-z}$ es imaginario puro.

Problema 1.8. Demostrar que $\mathbb{C}$ no admite una relación de orden total $\prec$ tal que

- $z_1 \succ z_2 \implies z_1 + z_3 \succ z_2 + z_3$, y
- $z_3 \succ 0, z_1 \succ z_2 \implies z_1 z_3 \succ z_2 z_3$.

Indicación: ¿es posible $i \succ 0$?

Problema 1.9. Probar que si $e^{z+w} = e^z$ para todo $z \in \mathbb{C}$ entonces $w = 2k\pi i$ para algún $k \in \mathbb{Z}$.

Problema 1.10. Justificar que las funciones e^z, $\cos z$, $\operatorname{sen} z$ son continuas en $\mathbb{C}$.

Problema 1.11. Probar que la sucesión de funciones

$$f_n(z) = \frac{n + e^z}{1 + n|z|^2}$$

converge uniformemente en cada conjunto $E_R = \{z \in \mathbb{C} : 1/R \leq |z| \leq R\}$ con $R > 0$. Comprobar también que converge puntualmente en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.