Capítulo 2

Funciones holomorfas. Las ecuaciones de Cauchy-Riemann y algunas de sus consecuencias

En este capítulo definiremos las funciones holomorfas como las funciones complejas que son *diferenciables en sentido complejo*, y responderemos a la pregunta, natural y muy importante, de bajo qué circunstancias una función de dos variables reales, con valores en $\mathbb{R}^2$, y diferenciable en sentido real resulta holomorfa al considerarla como función de variable compleja con valores en $\mathbb{C}$.

2.1. Funciones holomorfas

Definición 2.1. Sean $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto, y $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Se dice que f es *holomorfa en* z_0 (o diferenciable en sentido complejo en z_0) si existe el límite

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

En caso de que exista, se llama al valor de este límite la derivada (compleja) de f en z_0, y se denota

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

Diremos que la función f es holomorfa en Ω si es holomorfa en todo punto $z_0 \in \Omega$. En el caso de una función holomorfa $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, diremos también que g es entera. El conjunto de todas las funciones holomorfas en un abierto Ω lo denotaremos por $\mathcal{H}(\Omega)$. Si $E \subset \mathbb{C}$ no es abierto, la notación $f \in \mathcal{H}(E)$ indicará solamente que existe un abierto U (que podrá depender de f) tal que f es holomorfa en u.

La siguiente observación es a veces útil: una función f es holomorfa en z_0, con $f'(z_0) = a$, si y sólo si existe una función ψ con $\lim_{h \to 0} \psi(h) = 0$ tal que

$$f(z_0 + h) - f(z_0) - ah = h\psi(h).$$

De vez en cuando escribiremos

$$f(z_0 + h) - f(z_0) - ah = o(h)$$

para referirnos a la existencia de una tal función ψ sin nombrarla explícitamente. También escribiremos $g(h) = O(h)$ para referirnos a la existencia de una constante M y un número $\delta > 0$ tales que $|g(h)| \leq M|h|$ para todo $z \in D(0, \delta)$. En particular, si $g(h) = O(h)$ entonces $\lim_{h \to 0} g(h) = 0$.

Algunos ejemplos de funciones holomorfas: la función $f(z) = z$ es holomorfa en $\mathbb{C}$, con $f'(z) = 1$. Toda función constante $z \mapsto c_0$ es holomorfa en $\mathbb{C}$, con derivada nula. La función $f(z) = 1/z$ es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, con $f'(z) = -1/z^2$, ya que

$$\lim_{h\to 0} \frac{1/(z+h) - 1/z}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{z-(z+h)}{z(z+h)h} = \lim_{h\to 0} \frac{-1}{z(z+h)} = -\frac{1}{z^2}.$$

Como ejemplo básico de función que *no* es holomorfa tenemos la conjugación $C(z) = \overline{z}$: se cumple que

$$\frac{C(z+h) - C(z)}{h} = \frac{\overline{h}}{h},$$

y esta expresión no tiene límite cuando $h \to 0$ (ya que a lo largo de la recta $h = t \in \mathbb{R}$ la función es idénticamente 1, mientras que a lo largo de la recta $h = it$, $t \in \mathbb{R}$, es constantemente -1). Sin embargo, obsérvese que $C(z)$ es una función de clase $C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$; de hecho $C(z)$ es incluso $\mathbb{R}$-lineal.

Proposición 2.1. *Si f es holomorfa en z_0 entonces es continua en z_0.*

Demostración. $f(z_0 + h) - f(z_0) = f'(z_0)h + o(h) = O(h)$. □

Proposición 2.2. *Sea Ω un abierto de $\mathbb{C}$. Si $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ son holomorfas en $z_0 \in \Omega$ entonces:*

1. *$f + g$ es holomorfa en z_0, y $(f+g)'(z_0) = f'(z_0) + g'(z_0)$.*
2. *fg es holomorfa en z_0, y $(fg)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0)$.*
3. *Si $g(z_0) \neq 0$ entonces f/g es holomorfa en z_0, y*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \frac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{g(z_0)^2}.$$

Además, si U es un abierto de $\mathbb{C}$, $f : \Omega \to U$ es holomorfa en z_0 y $g : U \to \mathbb{C}$ es holomorfa en $w_0 = f(z_0)$, entonces la composición $g \circ f$ es holomorfa en z_0, y se tiene

$$(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0))\, f'(z_0) \quad \textit{(Regla de la cadena).}$$

Demostración. (1) es muy fácil y se deja como ejercicio. Para ver (2) basta escribir

$$\frac{f(z_0+h)g(z_0+h) - f(z_0)g(z_0)}{h} = \\ g(z_0+h)\frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} + f(z_0)\frac{g(z_0+h) - g(z_0)}{h} \to g(z_0)f'(z_0) + f(z_0)g'(z_0),$$

cuando $h \to 0$, por la definición de derivada y la proposición anterior.

Demostremos ahora la regla de la cadena. Consideraremos dos casos.

Caso 1. Supongamos que $f'(z_0) \neq 0$. Entonces de la definición de derivada se sigue que existe $\delta > 0$ tal que si $0 < |h| < \delta$ entonces

$$\left|\frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h}\right| \geq \frac{|f'(z_0)|}{2} > 0,$$

y en particular $|f(z_0+h) - f(z_0)| > 0$ si $0 < |h| < \delta$. Luego podemos dividir $g(f(z_0+h)) - g(f(z_0))$ por $f(z_0+h) - f(z_0)$ para h suficientemente pequeño (aunque no nulo) y tomar límites, obteniendo así

$$\lim_{h\to 0} \frac{g(f(z_0+h)) - g(f(z_0))}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{g(f(z_0+h)) - g(f(z_0))}{f(z_0+h) - f(z_0)} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} = g'(f(z_0))f'(z_0),$$

gracias a la definición de $g'(f(z_0))$ y $f'(z_0)$ y al hecho de que $\lim_{h\to 0} f(z_0+h) = f(z_0)$.

Caso 2. Supongamos ahora que $f'(z_0) = 0$. Usando la definición de derivada para $g'(f(z_0))$ deducimos que existe $\delta > 0$ tal que si $|w - f(z_0)| \leq \delta$ entonces

$$|g(w) - g(f(z_0))| \leq (|g'(f(z_0))| + 1)|w - f(z_0)| := A|w - f(z_0)|.$$

Como $\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$, existe $r > 0$ tal que si $|h| \leq r$ entonces $|f(z_0 + h) - f(z_0)| \leq \delta$, y así podemos usar la desigualdad anterior con $w = f(z_0 + h)$, obteniendo, para $0 < |h| < r$,

$$\left| \frac{g(f(z_0 + h)) - g(f(z_0))}{h} \right| \leq A \left| \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} \right| \to A|f'(z_0)| = 0$$

cuando $h \to 0$, y así $(g \circ f)'(z_0) = 0 = g'(f(z_0))f'(z_0)$.

Finalmente (3) se obtiene fácilmente combinando (2) con la regla de la cadena y el hecho ya probado anteriormente de que la derivada de $1/z$ es $-1/z^2$. $\square$

Como consecuencia de la proposición anterior y de hechos ya conocidos, tenemos por ejemplo que cualquier polinomio complejo es holomorfo en $\mathbb{C}$, y que cualquier cociente de polinomios complejos $P(z)/Q(z)$ es holomorfo en $\{z \in \mathbb{C} : Q(z) \neq 0\}$. Aún no podemos demostrar que otras funciones complejas importantes, como e^z, $\operatorname{sen} z$, $\cos z$, etc, sean holomorfas, pero todo esto lo podremos deducir inmediatamente de los resultados de la siguiente sección.

2.2. Las ecuaciones de Cauchy-Riemann y algunas de sus consecuencias

Una función $f : \Omega \to \mathbb{C}$ definida en un abierto Ω de $\mathbb{C}$ es también una función f definida en un abierto de $\mathbb{R}^2$ y con valores en $\mathbb{R}^2$: si denotamos $z = x + iy$, $u(z) = \mathrm{Re} f(z)$, $v(z) = \mathrm{Im} f(z)$ e identificamos z con $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ y $u + iv$ con (u, v), podemos escribir

$$f(x, y) = (u(x, y), v(x, y)),$$

y preguntarnos cuál es la relación entre la posible diferenciabilidad de f vista como función de dos variables reales y la posible holomorfía de f como función de una variable compleja. En vista del ejemplo $f(z) = \overline{z}$ ya sabemos que el hecho de que f sea diferenciable en sentido real (o incluso de clase $C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$) no implica que f sea holomorfa. El siguiente teorema nos da una condición que, al añadirla a la diferenciabilidad en sentido real de f, resulta ser necesaria y suficiente para que f sea holomorfa.

Teorema 2.3. *Sea $f = u + iv$ una función definida en un abierto Ω de $\mathbb{C}$ y con valores en $\mathbb{C}$. Entonces f es holomorfa en un punto $z_0 = x_0 + iy_0 \in \Omega$ si y sólo si las funciones u, v son diferenciables en z_0 y sus derivadas parciales cumplen*

$$(CR) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0). \end{cases}$$

Además en este caso se tiene que

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0).$$

Demostración. Si denotamos por $Df(x_0, y_0)$ la diferencial (en sentido real) de f en z_0 y reservamos $f'(z_0)$ para la derivada compleja de f, el enunciado es equivalente a decir que existe $f'(z_0) = a + ib$ si y sólo si existe $Df(x_0, y_0)$ y su matriz (respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^2$) tiene la forma

$$Df(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix},$$

donde $a, b \in \mathbb{R}$. Supongamos primero que $f'(z_0)$, existe y denotémosla $f'(z_0) = a + ib$. Entonces, definiendo A como la aplicación lineal $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ cuya matriz respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^2$ es

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix},$$

y denotando $h = s + it = (s, t)$, tenemos que

$$Ah = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = (as - bt, bs + at) = (a + ib)(s + it), \tag{$*$}$$

luego

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0) - Ah}{|h|} = \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0) - f'(z_0)h}{|h|} = 0$$

como consecuencia de la definición de $f'(z_0)$. Esto significa que f es diferenciable en sentido real y que $Df(x_0, y_0) = A$.

Recíprocamente, supongamos que f es diferenciable en sentido real y $Df(x_0, y_0)$ tiene matriz del tipo

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix},$$

donde $a, b \in \mathbb{R}$. Definamos entonces $w = a + ib$. La igualdad $(*)$ y la diferenciabilidad de f en $z_0 = (x_0, y_0)$ implican que

$$f(z_0 + h) - f(z_0) - wh = f(z_0 + h) - f(z_0) - Ah = o(h),$$

lo que a su vez nos dice que f es holomorfa en z_0, con $f'(z_0) = w$. $\square$

Al sistema de ecuaciones en derivadas parciales (CR) se le llama *ecuaciones de Cauchy-Riemann*.

Una consecuencia del teorema anterior es que si f es holomorfa en z_0 entonces

$$|f'(z_0)|^2 = \det Df(x_0, y_0). \tag{2.1}$$

Otra consecuencia, que se propone como ejercicio, es que si f es holomorfa en un abierto conexo Ω de $\mathbb{C}$ y $f' = 0$ en Ω, entonces f es constante en Ω. También se verá en los problemas de este capítulo que, gracias a las ecuaciones de Cauchy-Riemann, las funciones *armónicas* (es decir, las que cumplen $\Delta u = 0$) en los abiertos de $\mathbb{R}^2$ pueden caracterizarse localmente como las funciones que son partes reales de funciones holomorfas.

Veremos a continuación cómo las ecuaciones de Cauchy-Riemann pueden usarse para establecer que localmente una función f es holomorfa y tiene derivada no nula si y sólo si f es una *aplicación conforme*.

Proposición 2.4. *Si $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{C}$ es una curva de clase C^1 con $\gamma(0) = z_0$ y f es holomorfa en z_0 entonces el vector tangente a la curva $\sigma = f \circ \gamma$ en $f(z_0)$ es*

$$(f \circ \gamma)'(0) = f'(z_0)\gamma'(0).$$

Como consecuencia, si f es holomorfa en un abierto Ω de $\mathbb{C}$ y $\gamma : (a, b) \to \Omega$ es una curva de clase C^1, se tiene que

$$\frac{d}{dt} f(\gamma(t)) = f'(\gamma(t))\, \gamma'(t).$$

Demostración. Por la regla de la cadena para funciones diferenciables en sentido real (que podemos aplicar gracias al teorema anterior) se tiene

$$(f \circ \gamma)'(0) = Df(z_0)\gamma'(0).$$

Además, volviendo a utilizar teorema anterior,

$$Df(z_0) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

donde $a + ib = f'(z_0)$, luego, denotando $\gamma(t) = \alpha(t) + i\beta(t)$, se ve que

$$\begin{aligned} Df(z_0)\gamma'(0) &= \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha'(0) \\ \beta'(0) \end{pmatrix} = \big(a\alpha'(0) - b\beta'(0), b\alpha'(0) + a\beta'(0)\big) \\ &= (a + ib)\big(\alpha'(0) + i\beta'(0)\big) = f'(z_0)\gamma'(0). \end{aligned}$$

□

Definición 2.2. Una función $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de se dice que es *conforme* en $z_0 \in \Omega$ si es diferenciable (en sentido real) en z_0 y *preserva ángulos en* z_0, lo cual significa que si $\gamma_1, \gamma_2 : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \Omega$ son curvas de clase C^1 con $\gamma_1(0) = z_0 = \gamma_2(0)$ y $\gamma_1'(0) \neq 0 \neq \gamma_2'(0)$, entonces $(f \circ \gamma_1)'(0) \neq 0 \neq (f \circ \gamma_2)'(0)$, y

$$\text{ángulo}\left((f \circ \gamma_1)'(0), (f \circ \gamma_2)'(0)\right) = \text{ángulo}\left(\gamma_1'(0), \gamma_2'(0)\right),$$

con la misma orientación.

Diremos también que $f : U \to V$ es una *aplicación conforme* entre dos abiertos de $\mathbb{R}^2$ si es conforme en cada $z \in U$ y es una biyección de U en V.

Teorema 2.5. *Sea $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *es holomorfa en* z_0 *y* $f'(z_0) \neq 0$*;*
2. f *es conforme en* z_0.

Demostración. (1) $\implies$ (2): Sean γ_1, γ_2 curvas como en la definición anterior. Usando la Proposición, tenemos

$$(f \circ \gamma_j)'(0) = f'(z_0)\gamma_j'(0) \neq 0$$

para $j = 1, 2$. Además

$$\begin{aligned} \text{ángulo}\left((f \circ \gamma_1)'(0), (f \circ \gamma_2)'(0)\right) = \text{ángulo}\left(f'(z_0)\gamma_1'(0), f'(z_0)\gamma_2'(0)\right) = \\ \arg\left(f'(z_0)\gamma_2'(0)\right) - \arg\left(f'(z_0)\gamma_1'(0)\right) = \\ \arg(f'(z_0)) + \arg(\gamma_2'(0)) - \arg(f'(z_0)) - \arg(\gamma_1'(0)) = \\ \arg(\gamma_2'(0)) - \arg(\gamma_1'(0)) = \text{ángulo}(\gamma_1'(0), \gamma_2'(0)), \end{aligned}$$

y por tanto f es conforme en z_0.

(2) $\implies$ (1): La función f es diferenciable (en sentido real) en z_0 por ser conforme, luego en virtud del teorema anterior bastará probar que $f = u + iv$ satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann en el punto z_0. Sin pérdida de generalidad podemos suponer $z_0 = 0$. Denotemos

$$Df(0) = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix},$$

y para cada $\theta \in (-\pi, \pi]$ definamos la curva $\gamma_\theta(t) = te^{i\theta} = t(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$, de modo que

$$(f \circ \gamma_\theta)'(0) = Df(0)\gamma_\theta'(0) = (a\cos\theta + c\operatorname{sen}\theta, b\cos\theta + d\operatorname{sen}\theta).$$

Por hipótesis,

$$\begin{aligned} \arg(e^{i\theta}) = \theta = \text{ángulo}\left((f \circ \gamma_0)'(0), (f \circ \gamma_\theta)'(0)\right) = \\ \text{ángulo}\left(a + ib, a\cos\theta + c\operatorname{sen}\theta + i(b\cos\theta + d\operatorname{sen}\theta)\right) = \\ \arg\left(\frac{a\cos\theta + c\operatorname{sen}\theta + i(b\cos\theta + d\operatorname{sen}\theta)}{a + ib}\right), \end{aligned}$$

luego

$$\arg(a+ib) = \arg\left(\frac{a\cos\theta + c\,\mathrm{sen}\,\theta + i(b\cos\theta + d\,\mathrm{sen}\,\theta)}{e^{i\theta}}\right),$$

o equivalentemente, escribiendo $\cos\theta = (e^{i\theta}+e^{-i\theta})/2$, $\mathrm{sen}\,\theta = (e^{i\theta}-e^{-i\theta})/2i$ y operando,

$$\arg(a+ib) = \arg\left(\frac{1}{2}(a+d+i(b-c)) + \frac{1}{2}e^{-2i\theta}(a-d+i(c+b))\right).$$

Ahora bien, la única manera en que esto puede ser posible[1] para todo $\theta \in (-\pi, \pi]$ es que se tenga

$$a-d+i(c+b) = 0,$$

lo que significa que $f = u+iv$ cumple las ecuaciones de Cauchy-Riemann en 0. □

Usando las ecuaciones de Cauchy-Riemann es muy sencillo comprobar que $e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\,\mathrm{sen}\,y)$ es holomorfa en $\mathbb{C}$. Se sigue entonces que también lo son las funciones sen, cos, así como las sumas, multiplicaciones, cocientes y composiciones de polinomios o de cualquiera de estas funciones, donde estén bien definidas.

2.3. Teorema de la función inversa

Del teorema de la función inversa para funciones definidas en abiertos de $\mathbb{R}^n$ que toman valores en $\mathbb{R}^n$ podemos deducir fácilmente, particularizando en el caso $n=2$, un resultado similar para funciones holomorfas.

Teorema 2.6. *[de la función inversa, versión 1.0] Sean Ω un abierto de $\mathbb{C}$, $z_0 \in \Omega$, y $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfa, con derivada f' continua, y tal que $f'(z_0) \neq 0$. Entonces existen U entorno abierto de z_0 en Ω y V entorno abierto de $f(z_0)$ en $\mathbb{C}$ tal que $f_{|_U} = f : U \to f(U) = V$ es biyectiva y la inversa $f^{-1} : V \to U$ es también holomorfa. Además,*

$$(f^{-1})'(w) = \frac{1}{f'(f^{-1}(w))}$$

para todo $w \in V$.

Demostración. Al ser f holomorfa y f' continua, se tiene que $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$ vista como función de dos variables reales con valores en $\mathbb{R}^2$; además sabemos por (2.1), y usando la hipótesis sobre $f'(z_0)$, que

$$\det Df(z_0) = |f'(z_0)|^2 \neq 0.$$

Entonces, por el teorema de la función inversa, existen U entorno abierto de z_0 en Ω y V entorno abierto de $f(z_0)$ en $\mathbb{C}$ tal que $f_{|_U} = f : U \to f(U) = V$ es biyectiva y la inversa $f^{-1} : V \to U$ es de clase C^1. Veamos que f^{-1} es holomorfa. Sea $w_1 \in V$, pongamos que $f(z_1) = w_1$, con $z_1 \in U$. Puesto que $f : U \to V$ es un difeomorfismo C^1 sabemos que la aplicación lineal $Df(z_1)$ es invertible, y por tanto $\det Df(z_1) \neq 0$. Usando de nuevo (2.1) tenemos que $f'(z_1) \neq 0$. Consideremos ahora $w = f(z)$, con $z \in U$; entonces

$$\frac{f^{-1}(w) - f^{-1}(w_1)}{w - w_1} = \frac{z - z_1}{f(z) - f(z_1)} = \frac{1}{\frac{f(z)-f(z_1)}{z-z_1}} \to \frac{1}{f'(z_1)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(w_1))}$$

cuando $w \to w_1$, ya que $f'(z_1) \neq 0$, y si $w = f(z) \to f(z_1) = w_1$ entonces $z \to z_1$, por ser f^{-1} continua. Esto prueba que f^{-1} es holomorfa en cada $w_1 \in V$, y también la fórmula del enunciado. □

Más adelante veremos que toda función holomorfa f tiene derivadas complejas de todos los órdenes, y en particular f' es continua (por ser derivable). Por esto la hipótesis de continuidad de f' en el teorema anterior es en realidad redundante.

[1]Es fácil demostrar que si $z, w \in \mathbb{C}$ y la función $t \mapsto \mathrm{Arg}(z + we^{it})$ es constante, entonces $w = 0$.

2.4. Problemas

Problema 2.1. Recordemos que hemos definido, para cada $z = x + iy \in \mathbb{C}$, $e^z = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y)$. Utilizar las ecuaciones de Cauchy-Riemman para demostrar que $f(z) = e^z$ es holomorfa en $\mathbb{C}$, y que $f'(z) = e^z$.

Problema 2.2. Deducir del ejercicio anterior que las siguientes funciones son holomorfas, y calcular sus derivadas:

1. $\operatorname{sen} z := \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$
2. $\cos z := \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$
3. $\operatorname{senh} z := \frac{e^{z}-e^{-z}}{2}$
4. $\cosh z := \frac{e^{z}+e^{-z}}{2}$.

Problema 2.3. Demostrar que si $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es holomorfa en un abierto conexo Ω de $\mathbb{C}$ y $f' = 0$ en Ω, entonces f es constante en Ω.

Problema 2.4. Sea Ω un abierto conexo de $\mathbb{C}$. Demostrar que si $f : \Omega \to \mathbb{C}$ es holomorfa y sólo toma valores reales (es decir $f(\Omega) \subseteq \mathbb{R}$) entonces f es constante.

Problema 2.5. Demostrar que si tanto $f = u + iv$ como $\overline{f} := u - iv$ son holomorfas en un abierto conexo $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ entonces f es constante.

Problema 2.6. Demostrar que si f es holomorfa en un abierto conexo $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ y además $|f|$ es constante, entonces f es constante.
Indicación: $\overline{f} = |f|^2/f$.

Problema 2.7. Comprobar que si $f = u + iv$ es holomorfa entonces $|f'| = \|\nabla u\| = \|\nabla v\|$.

Problema 2.8. Comprobar que si $f = u + iv$ es holomorfa entonces ∇v se obtiene rotando $\pi/2$ el vector ∇u. Recíprocamente, si $\nabla v = e^{i\pi/2}\nabla u$ y $f = (u, v)$ es diferenciable en sentido real entonces f es holomorfa.

Problema 2.9. Demostrar que en coordenadas polares las ecuaciones de Cauchy-Riemann se expresan:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial u}{\partial \theta} = -r\frac{\partial v}{\partial r}.$$

Problema 2.10. Comprobar que, para cada $m \in \mathbb{Z}$, las funciones u, v definidas en coordenadas polares por $u(re^{i\theta}) = r^m \cos(m\theta)$, $v(re^{i\theta}) = r^m \operatorname{sen}(m\theta)$ satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann.

Problema 2.11. Sea $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorfa e inyectiva, con derivada f' continua y tal que $f'(z) \neq 0$ para todo $z \in \Omega$. Demostrar que

$$\text{área}(f(\Omega)) = \int_\Omega |f'(z)|^2 dxdy.$$

Problema 2.12. Consideremos la función $f(z) = z^2$, y los recintos $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ y E= $\{z \in \mathbb{C} : |z - 1| \leq 1\}$. Dibujar los conjuntos $f(D)$ y $f(E)$, y calcular sus áreas.

Se dice que una función $u : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es *armónica* si es solución de la *ecuación de Laplace*:

$$\Delta u = 0,$$

donde

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial {x_1}^2} + ... + \frac{\partial^2 u}{\partial {x_n}^2}$$

y entendemos que u es por lo menos de clase C^2.

Problema 2.13. Demostrar que si $u+iv=f:\Omega\subseteq\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ es holomorfa y $u,v\in C^2(\Omega)$ entonces u y v son armónicas.[2]

Si u es armónica en $\Omega\subseteq\mathbb{R}^2$ y v es armónica en Ω y cumple que $u+iv$ es holomorfa en Ω, se dice que v es una *conjugada armónica de u.*

Problema 2.14. Demostrar que la conjugada armónica, si existe en un abierto conexo Ω de $\mathbb{C}$, es única salvo una constante aditiva.

Problema 2.15. Comprobar que $u(x,y)=xy$ es armónica en $\mathbb{R}^2$, y hallar una conjugada armónica de u.

Problema 2.16. Generalizar la estrategia de la solución del ejercicio anterior para demostrar que si Ω es un disco abierto, o un rectángulo abierto con lados paralelos a los ejes, y $u(x,y)$ es armónica en Ω, entonces existe v conjugada armónica de u en Ω, y que v es de la forma

$$v(x,y)=\int_{y_0}^{y}\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)dt-\int_{x_0}^{x}\frac{\partial u}{\partial y}(s,y_0)ds+C.$$

Problema 2.17. Comprobar que la ecuación de Laplace en coordenadas polares es

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}=0.$$

Problema 2.18. Usando el ejercicio anterior, comprobar que $\log|z|$ es armónica en $\mathbb{C}\setminus\{0\}$, pero no tiene ninguna conjugada armónica en $\mathbb{C}\setminus\{0\}$.

Problema 2.19. Si $f\in C^2(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$, comprobar que la función $g=\frac{\partial f}{\partial y}+i\frac{\partial f}{\partial x}$ es holomorfa en $\mathbb{C}$.

Problema 2.20. Demostrar que si $z,w\in\mathbb{C}$ y la función $(-\pi,\pi]\ni\theta\mapsto\operatorname{Arg}(z+we^{i\theta})$ es constante, entonces $w=0$.

Problema 2.21. Sea f holomorfa con derivada continua en $D(0,2)$, y supongamos que f es inyectiva en $\overline{D}(0,1)$, y que $f'(z)\neq 0$ para todo $z\in\overline{D}(0,1)$. Demostrar que existe $\varepsilon>0$ tal que f es inyectiva en $D(0,1+\varepsilon)$.

[2]Veremos más adelante que si $f=u+iv$ es holomorfa entonces f tiene derivadas complejas de todos los órdenes, y $u,v\in C^\infty(\Omega)$. Por tanto la hipótesis de que $u,v\in C^2(\Omega)$ es redundante en la práctica.