Capítulo 3

Series de potencias complejas

Una serie de potencias centrada en un punto z_0 de $\mathbb{C}$ es una suma infinita del tipo

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

donde $z, a_n \in \mathbb{C}$ para todo n.

Definición 3.1. Diremos que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ converge a un número complejo $f(z)$ si

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} a_n(z - z_0)^n = f(z).$$

Diremos que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ es *absolutamente convergente* si la suma de números reales positivos $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n(z - z_0)^n|$ es finita. Por último, diremos que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ es uniformemente convergente a $f(z)$ en un conjunto D si $\lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} a_n(z - z_0)^n = f(z)$ uniformemente en $z \in D$.

Mediante el cambio de variable $w = z - z_0$, a efectos de estudiar resultados de convergencia o divergencia de series de potencias, siempre podemos suponer que $z_0 = 0$, es decir, que la serie de potencias está centrada en 0, y por tanto es del tipo

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

Obsérvese que si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ es absolutamente convergente para $z = w$ entonces también lo es para todo z tal que $|z| \leq |w|$ y, en particular, aplicando el criterio M de Weierstrass, resulta que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ es uniformemente convergente en el disco cerrado $\overline{D}(0, |w|)$.

Teorema 3.1. *Para toda serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ existe un único $R \in [0, \infty]$ tal que:*

1. *Para cada $\eta \in [0, R)$ la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge absoluta y uniformemente en $\overline{D}(0, \eta)$.*
2. *Si $|z| > R$ entonces la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ diverge.*

Además este número R está determinado por la fórmula de Hadamard*:*

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}, \tag{3.1}$$

donde convenimos que $1/0 = \infty$ y $1/\infty = 0$.

Demostración. Definamos R por (3.1), y supongamos primero que $R \in (0,\infty)$. Consideremos $L = 1/R = \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}$. Si $0 < \eta < R$, podemos elegir ε tal que

$$r := (L+\varepsilon)\eta < 1,$$

y entonces, por definición de $\limsup$, existe n_0 tal que si $n \geq n_0$ entonces

$$|a_n|^{1/n} \leq L + \varepsilon,$$

luego

$$|a_n|\eta^n \leq (L+\varepsilon)^n \eta^n = r^n,$$

y por tanto

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} |a_n|\eta^n \leq \sum_{n=n_0}^{\infty} r^n < \frac{1}{1-r},$$

lo que prueba que $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|\eta^n < \infty$. Usando ahora el criterio M de Weierstrass, deducimos que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge absoluta y uniformemente en el disco $\overline{D}(0,\eta)$.

Por otro lado, si $|z| > R$, podemos elegir ε tal que

$$s := (L-\varepsilon)|z| > 1,$$

y por definición de $\limsup$ existe una sucesión estrictamente creciente $(n_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de números naturales tal que

$$|a_{n_j}|^{1/n_j} \geq L - \varepsilon,$$

luego

$$|a_{n_j} z^{n_j}| \geq (L-\varepsilon)^{n_j} |z|^{n_j} = s^{n_j} \to \infty$$

cuando $j \to \infty$, y en particular $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ diverge.

Supongamos en segundo lugar que $R = \infty$. En este caso, el mismo argumento que antes muestra que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge absoluta y uniformemente en el disco $\overline{D}(0,\eta)$, para cualquier $\eta > 0$.

Supongamos por último que $R = 0$. Entonces, para cualquier z con $|z| > 0$, como $L = \infty$ podemos encontrar una sucesión estrictamente creciente $(n_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de números naturales tal que

$$|a_{n_j}|^{1/n_j} \geq \frac{2}{|z|},$$

luego

$$|a_{n_j} z^{n_j}| \geq 2^{n_j} \to \infty$$

cuando $j \to \infty$, y por tanto $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ diverge. □

Al disco abierto $D(0,R)$ determinado por el teorema anterior se le llama *disco de convergencia* de la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Conviene observar que para $|z| = R$, es decir, en la frontera del disco de convergencia, la situación es más delicada: por ejemplo, puede haber convergencia para algunos z con $|z| = R$ pero no para otros; también puede suceder que la serie diverja para todo $|z| = R$, o incluso que converja para todo $|z| = R$. Ejemplos de las tres situaciones se estudiarán en los ejercicios de este capítulo.

Otro criterio muy útil para hallar el radio de convergencia de una serie de potencias es el *criterio del cociente*. Recordemos que, si $(b_n)_n$ es una sucesión de números reales positivos, el criterio del cociente dice que la suma $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ es finita si $\limsup_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} < 1$, y es infinita si $\liminf_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} > 1$ (no obteniéndose ninguna información si $\lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = 1$). Una aplicación inmediata de este criterio al caso $b_n = |a_n z^n|$ demuestra el siguiente resultado.

Teorema 3.2. *Si existe* $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} \in [0,\infty]$*, entonces el valor de este límite es el radio de convergencia de la serie de potencias* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$*. Más en general, se tiene:*

1. *Si* $0 < r < \liminf_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$ *entonces* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *converge absoluta y uniformemente en* $|z| \leq r$.

2. *Si* $|z| > \limsup_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$ *entonces* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *diverge.*

Usando este teorema, es inmediato comprobar, por ejemplo, que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$ tiene radio de convergencia infinito.

Sin embargo, el teorema anterior tiene limitaciones grandes en la práctica, debido al hecho de que pueden darse casos interesantes de series de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ en los que $a_n = 0$ para infinitos n, con lo que los cocientes $|a_n|/|a_{n+1}|$ no están definidos. En esos casos puede usarse la idea de la demostración del teorema, en lugar del propio teorema. Por ejemplo, consideremos una serie de potencias del tipo

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{3n},$$

donde sólo hay potencias de z de órdenes multiplos de 3, y se supone que todos los a_n son no nulos. Para hallar el radio de convergencia podemos considerar el límite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1} z^{3n+3}|}{|a_n z^{3n}|} = |z|^3 \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|},$$

suponiendo que éste exista. Según el criterio del cociente, si

$$\lim_{n\to\infty} |z|^3 \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1$$

la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{3n}$ será convergente, mientras que será divergente si la desigualdad es al revés. Esto indica que el radio de convergencia R de esta serie viene dado por

$$\frac{1}{R^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}.$$

Más en general, cualquier otro criterio de convergencia de series de números reales positivos (por ejemplo el de la integral, o el de Raabe, o el de condensación de Cauchy, etc) puede usarse en las ocasiones apropiadas para determinar el radio de convergencia de una serie de potencias, si tenemos en cuenta que dicho radio está caracterizado, gracias al Teorema 3.1, como el supremo de los $r \geq 0$ tales que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n$ converge (o equivalentemente como el ínfimo de los $r > 0$ tales que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n$ diverge).

A continuación vemos que las funciones definidas por series de potencias son holomorfas en su disco de convergencia, y de hecho pueden derivarse término a término, tantas veces como uno desee.

Teorema 3.3. *Sea* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ *una serie de potencias con radio de convergencia* $R > 0$. *Entonces la función* $f : D(z_0, R) \to \mathbb{C}$ *definida por*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

es holomorfa en el disco abierto $D(z_0, R)$, *y*

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1}.$$

Además la serie de potencias de $f'(z)$ *tiene el mismo radio de convergencia que la de* $f(z)$.

Demostración. Podemos suponer $z_0 = 0$. La afirmación sobre el radio de convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} na_n z^{n-1}$ se sigue del hecho de que $\lim_{n\to\infty} n^{1/n} = 1$, luego

$$\limsup_{n\to\infty} |na_n|^{1/n} = \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n},$$

y por el Teorema 3.1 esta serie tiene el mismo radio de convergencia que la de $f(z)$. Definamos entonces $g : D(0,R) \to \mathbb{C}$ por

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n z^{n-1},$$

y veamos que $f'(z) = g(z)$ para cada $z \in D(0,R)$. Fijemos $z \in D(0,R)$, y escojamos r tal que $|z| < r < R$. Escribamos

$$f(\xi) = S_N(\xi) + T_N(\xi),$$

donde

$$S_N(\xi) = \sum_{n=0}^{N} a_n \xi^n, \;\; T_N(\xi) = \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n \xi^n,$$

y consideremos $h \in D(0, r - |z|)$, de forma que $|z + h| < r$. Tenemos entonces

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} - g(z) = \tag{3.2}$$

$$\left(\frac{S_N(z+h) - S_N(z)}{h} - S_N'(z)\right) + \big(S_N'(z) - g(z)\big) + \left(\frac{T_N(z+h) - T_N(z)}{h}\right). \tag{3.3}$$

Vamos a estimar por separado cada una de estos tres términos. En primer lugar, usando que $a^n - b^n = (a-b)\sum_{j=0}^{n-1} a^{n-1-j} b^j$ con $a = z + h$ y $b = z$ obtenemos que

$$\left|\frac{T_N(z+h) - T_N(z)}{h}\right| \le \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| \frac{|(z+h)^n - z^n|}{|h|} \le \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| n r^{n-1} \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

ya que $g(\xi)$ converge absoluta y uniformemente en $|\xi| \le r$. Por tanto, dado $\varepsilon > 0$ podemos encontrar $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left|\frac{T_N(z+h) - T_N(z)}{h}\right| \le \frac{\varepsilon}{3} \text{ para todo } N \ge N_1. \tag{3.4}$$

En segundo lugar, puesto que $\lim_{N\to\infty} S_N'(z) = g(z)$, existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|S_N'(z) - g(z)| \le \frac{\varepsilon}{3} \text{ para todo } N \ge N_2. \tag{3.5}$$

Tomemos $N_0 = \max\{N_1, N_2\}$. Puesto que la suma finita S_{N_0} es derivable, con $S_{N_0}'(z) = \sum_{n=1}^{N_0} na_n z^{n-1}$, podemos encontrar $\delta \in (0, r - |z|)$ tal que

$$\left|\frac{S_{N_0}(z+h) - S_{N_0}(z)}{h} - S_{N_0}'(z)\right| \le \frac{\varepsilon}{3} \text{ siempre que } 0 < |h| \le \delta. \tag{3.6}$$

Entonces, juntando (3.2), (3.4), (3.5) y (3.6), obtenemos que

$$\left|\frac{f(z+h) - f(z)}{h} - g(z)\right| \le \varepsilon \text{ si } 0 < |h| \le \delta,$$

lo que prueba que $f'(z)$ existe y es igual a $g(z)$. □

Finalmente vamos a considerar brevemente el comportamiento de las funciones definidas por series de potencias respecto de las operaciones de suma y producto. Por un lado, es evidente que el conjunto de las series de potencias absolutamente convergentes en un disco $D(z_0, R)$ tiene una estructura de espacio vectorial, y que

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)(z-z_0)^n, \quad \lambda\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda a_n(z-z_0)^n.$$

El estudio del producto es menos trivial; requiere recordar un resultado de Análisis de Variable Real sobre producto de series de números reales, cuya demostración se extiende igualmente al caso de series de números complejos.

Teorema 3.4. *Sean $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} w_n$ series de números complejos que convergen absolutamente (es decir tales que $\sum_{n=0}^{\infty} |z_n| < \infty$ y $\sum_{n=0}^{\infty} |w_n| < \infty$). Sea $(c_n)_{n\geq 0}$ cualquier enumeración del conjunto $\{z_j w_k \, : j, k \geq 0\}$. Entonces $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ converge absolutamente, y*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} z_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} w_n\right).$$

En particular esto se cumple si tomamos $c_n = z_0 w_n + z_1 w_{n-1} + ... + z_{n-1}w_1 + z_n w_0$ para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Demostración. La sucesión de los productos

$$q_N = \left(\sum_{n=0}^{N} z_n\right)\left(\sum_{n=0}^{N} w_n\right)$$

converge al producto de los límites de las sumas parciales de cada serie, $\left(\sum_{n=0}^{\infty} z_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} w_n\right)$. Luego, dado $\varepsilon > 0$, existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que si $N \geq N_1$ entonces

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} z_n \sum_{n=0}^{\infty} w_n - \sum_{n=0}^{N} z_j \sum_{n=0}^{N} w_k\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.7}$$

Análogamente la sucesión de los productos

$$p_N = \left(\sum_{n=0}^{N} |z_n|\right)\left(\sum_{n=0}^{N} |w_n|\right)$$

converge al producto de los límites de las sumas parciales de cada serie, $\left(\sum_{n=0}^{\infty} |z_n|\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} |w_n|\right)$. En particular la sucesión $\{p_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy, luego existe $N_2 \in \mathbb{N}$, que podemos suponer mayor o igual que N_1, tal que si $N, M \geq N_2$ entonces

$$\left|\sum_{n=0}^{M} |z_n| \sum_{n=0}^{M} |w_n| - \sum_{n=0}^{N} |z_n| \sum_{n=0}^{N} |w_n|\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.8}$$

Esto implica que, para cualquier subconjunto finito F de $\mathbb{N}$ se tiene

$$\sum_{j,k\in F,\, j>N_2 \text{ o } k>N_2} |z_j||w_k| \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

y por tanto también

$$\sum_{j>N_2 \text{ o } k>N_2} |z_j||w_k| \leq \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.9}$$

Elijamos ahora $N_3 \geq N_2 \geq N_1$ suficientemente grande para que $\{c_1, ..., c_{N_3}\}$ contenga al conjunto $\{z_j w_k \ : \ j, k \leq N_2\}$. Entonces, para $N \geq N_3$, la diferencia de sumas

$$\sum_{n=0}^{N} c_n - \sum_{j=0}^{N_2} z_j \sum_{k=0}^{N_2} w_k$$

contiene exclusivamente términos de la forma $z_j w_k$ con $j > N_2$ o $k > N_2$, y por tanto (3.9) implica que

$$\left| \sum_{n=0}^{N} c_n - \sum_{j=0}^{N_2} z_j \sum_{k=0}^{N_2} w_k \right| \leq \sum_{j \geq N_2 \text{ o } k \geq N_2} |z_j||w_k| \leq \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.10}$$

Por tanto, si $N \geq N_3$, obtenemos, combinando (3.10) y (3.7), que

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} z_n \sum_{n=0}^{\infty} w_n - \sum_{n=0}^{N} c_n \right| \leq \left| \sum_{n=0}^{\infty} z_n \sum_{n=0}^{\infty} w_n - \sum_{n=0}^{N_2} z_j \sum_{n=0}^{N_2} w_k \right| + \left| \sum_{j=0}^{N_2} z_j \sum_{k=0}^{N_2} w_k - \sum_{n=0}^{N} c_n \right| \leq \varepsilon.$$

Aplicando este resultado con $|z_n|, |w_n|, |c_n|$ en lugar de z_n, w_n, c_n, se obtiene también la convergencia absoluta de la serie: $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| < \infty$. $\square$

Como consecuencia sencilla de este resultado puede obtenerse (ver el ejercicio 3.8) que, si

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n$$

para todo $z \in D(z_0, R)$, entonces

$$(fg)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

para todo $z \in D(z_0, R)$, donde

$$c_n = a_n b_0 + a_{n-1} b_1 + ... + a_1 b_{n-1} + a_0 b_n.$$

3.1. Problemas

Problema 3.1. Sean $\{a_n\}_{n=1}^{N}$ y $\{b_n\}_{n=1}^{N}$ dos sucesiones finitas de números complejos. Pongamos $B_0 = 0$ y $B_k = \sum_{n=1}^{k} b_n$ para $k = 1, 2, ..., N$. Demostrar la *fórmula de suma por partes*:

$$\sum_{n=M}^{N} a_n b_n = a_N B_N - a_M B_{M-1} - \sum_{n=M}^{N-1} (a_{n+1} - a_n) B_n.$$

Problema 3.2. Demostrar el teorema de Abel: si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge entonces

$$\lim_{r \to 1^-} \sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Indicación: usar el ejercicio anterior.

Problema 3.3. Determinar el radio de convergencia de las siguientes series de potencias:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} (\log n)^2 z^n$;
2. $\sum_{n=1}^{\infty} n! z^n$;

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{4^n+3n}(z-6)^n$;
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^3}{(3n)!} z^n$;
5. $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n (z-3i)^n$;
6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{1+2^n n^n} z^n$;
7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{6} z^n$;
8. $\sum_{n=1}^{\infty} (2+(-1)^n)^n z^n$.

Problema 3.4. Si $f : \mathbb{R} \to [0,\infty)$ es decreciente y $\int_0^\infty f(x)dx = \infty$, demostrar que el radio de convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} f(n)(z-3)^n$ es menor o igual que uno.

Problema 3.5. Sea $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ una serie de potencias centrada en el origen. Demostrar que para cada z_0 en su disco de convergencia f tiene una expansión en serie de potencias centrada en z_0.
Indicación: poner $z = z_0 + (z - z_0)$ y usar la fórmula del binomio.

Problema 3.6. ¿Qué funciones representan las siguientes series de potencias?

1. $\sum_{n=1}^{\infty} n z^n$;
2. $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^n$.

Problema 3.7. Demostrar lo siguiente:

1. La serie de potencias $\sum_{n=1}^{\infty} n z^n$ no converge en ningún punto de la circunferencia unidad $|z| = 1$.
2. La serie de potencias $\sum_{n=1}^{\infty} z^n/n^2$ converge en todo punto de la circunferencia unidad.
3. La serie de potencias $\sum_{n=1}^{\infty} z^n/n$ converge en todo punto de la circunferencia unidad, excepto en $z = 1$.

   Indicación: usar suma por partes.

Obsérvese que las tres series tienen radio de convergencia igual a 1.

Problema 3.8. Supongamos que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$$

para todo $z \in D(0,R)$. Demostrar que:

1. $(f+g)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) z^n$ para todo $z \in D(0,R)$.
2. $(fg)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ para todo $z \in D(0,R)$, donde

$$c_n = a_n b_0 + a_{n-1} b_1 + ... + a_1 b_{n-1} + a_0 b_n.$$