Capítulo 4

Integración de funciones complejas sobre curvas

4.1. Curvas de clase C^1 a trozos en $\mathbb{R}^n$

Recordemos que una curva parametrizada de clase C^1 en $\mathbb{R}^n$ es una aplicación $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ de clase C^1, donde $a, b \in \mathbb{R}, a < b$, tal que $\gamma'(t) \neq 0$ para todo $t \in [a, b]$. En particular está bien definido (y es no nulo) el vector tangente $\gamma'(t)$ a la curva γ en cada punto $\gamma(t)$ de la misma. Para $t = a$ entenderemos que existen y son iguales los límites

$$\gamma'_+(a) := \lim_{t \to a^+} \frac{\gamma(t) - \gamma(a)}{t - a} = \lim_{t \to a^+} \gamma'(t),$$

y que una condición análoga se da en $t = b$.

Se dice que una curva parametrizada $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ es *equivalente* a otra curva parametrizada $\sigma : [c, d] \to \mathbb{R}^n$ si existe una biyección $\varphi : [c, d] \to [a, b]$ de clase C^1 tal que $\varphi'(t) > 0$ y

$$\sigma(s) = \gamma(\varphi(s)) \text{ para todo } s \in [c, d].$$

Es inmediato comprobar que la relación

$$\gamma \mathcal{R} \sigma \iff \gamma \text{ es } \textit{equivalente} \text{ a } \sigma$$

es efectivamente una relación de equivalencia en el conjunto X de las curvas parametrizadas de clase C^1 en $\mathbb{R}^n$. El conjunto cociente $X/\mathcal{R}$ es lo que llamaremos el conjunto de las curvas orientadas de clase C^1 en $\mathbb{R}^n$. Cada curva orientada $\Gamma = [\gamma]$ de clase C^1 puede verse pues como la traza $\gamma[a, b]$ de una curva parametrizada $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ de clase C^1 que representa esta clase de equivalencia $[\gamma]$, con la orientación inducida por γ. Esa misma traza $\gamma[a, b]$ admite dos orientaciones: una es la dada por γ, que recorre $\gamma[a, b]$ empezando en $\gamma(a)$ y terminando en $\gamma(b)$, y la otra es la dada por la *curva opuesta a* γ, definida por $\gamma^- : [a, b] \to \mathbb{R}^n$,

$$\gamma^-(t) = \gamma(a + b - t),$$

que recorre $\gamma[a, b]$ empezando en $\gamma(b)$ y terminando en $\gamma(a)$. La curva orientada de clase C^1 representada por esta curva opuesta γ^- se denotará

$$\Gamma^- = [\gamma^-].$$

Análogamente podemos definir curvas de clase C^1 a trozos. Diremos que una aplicación continua $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ es una curva parametrizada de clase C^1 a trozos si existe $a = a_0 < a_1 < ... < a_m = b$ partición de $[a, b]$ tal que la restricción de γ a cada subintervalo $[a_j, a_{j+1}]$, $j = 0, 1, ..., m - 1$, define una curva parametrizada de clase C^1. En esta situación más general γ admite un único vector tangente

$\gamma'(t)$ en cada punto $\gamma(t)$ con $t \neq a_j$ para todo j, mientras que en los puntos $\gamma(a_j)$ tiene una *tangente a la izquierda* y otra *tangente a la derecha* de $\gamma(a_j)$, definidas respectivamente por los vectores

$$\gamma_-(a_j) := \lim_{t \to a_j^-} \frac{\gamma(t) - \gamma(a_j)}{t - a_j} \text{ y por } \gamma_+(a_j) := \lim_{t \to a_j^+} \frac{\gamma(t) - \gamma(a_j)}{t - a_j},$$

posiblemente diferentes.

Diremos que una curva parametrizada $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ de clase C^1 a trozos es *equivalente* a otra curva parametrizada $\sigma : [c, d] \to \mathbb{R}^n$ de clase C^1 a trozos si existen particiones $a = a_0 < a_1 < ... < a_m = b$ de $[a, b]$ y $c = c_0 < c_1 < ... < c_m = d$ de $[c, d]$ tales que la restricción $\gamma_{|_{[a_j, a_{j+1}]}}$ es una curva parametrizada de clase C^1 equivalente a la restricción $\sigma_{|_{[c_j, c_{j+1}]}}$, para cada $j = 0, 1, ..., n - 1$. De nuevo es inmediato comprobar que la relación

$$\gamma \mathcal{R} \sigma \iff \gamma \text{ es } \textit{equivalente} \text{ a } \sigma$$

es efectivamente una relación de equivalencia en el conjunto de las curvas parametrizadas de clase C^1 a trozos en $\mathbb{R}^n$. El conjunto cociente resultante es lo que llamaremos el conjunto de las curvas orientadas de clase C^1 a trozos en $\mathbb{R}^n$. Dada una curva orientada Γ de clase C^1 a trozos representada por una curva parametrizada $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, definiremos Γ^- como la clase de equivalencia representada por $\gamma^-(t) = \gamma(a + b - t)$, $t \in [a, b]$.

Es claro que para cada curva parametrizada $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ de clase C^1 a trozos la función $\|\gamma'(t)\|$ es integrable en $[a, b]$ (al estar bien definida salvo en una cantidad finita $a_0, a_1, ..., a_m$ de puntos de $[a, b]$, y ser continua y acotada en $[a, b] \setminus \{a_0, ..., a_m\}$). Se define entonces la longitud de γ por

$$\text{long}(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt.$$

Es fácil comprobar usando el teorema del cambio de variable que si γ y σ son (curvas parametrizadas de clase C^1) equivalentes entonces $\text{long}(\gamma) = \text{long}(\sigma)$. También que $\text{long}(\gamma) = \text{long}(\gamma^-)$. Por tanto, dada una curva orientada Γ de clase C^1 a trozos puede definirse

$$\text{long}(\Gamma) = \text{long}(\gamma),$$

donde γ es cualquier parametrización suya, y se tiene que $\text{long}(\Gamma) = \text{long}(\Gamma^-)$.

Una operación que usaremos con relativa frecuencia es la *concatenación de curvas*. Si $\Gamma_1, ..., \Gamma_m$ son curvas de clase C^1 a trozos en $\mathbb{R}^n$ tales que el punto final de Γ_j coincide con el punto inicial de Γ_{j+1}, puede definirse una curva Γ que recorre de manera consecutiva las curvas $\Gamma_1, ..., \Gamma_n$, y que por abuso de notación denotaremos $\Gamma = \Gamma_1 \cup ... \cup \Gamma_m$. Una parametrización de esta concatenación Γ es la siguiente: pueden encontrarse parametrizaciones $\gamma_1, ..., \gamma_m$ de $\Gamma_1, ..., \Gamma_m$ definidas respectivamente en intervalos $[a_1, b_1]$, ..., $[a_m, b_m]$ de tal manera que $b_j = a_{j+1}$, y por supuesto $\gamma_j(b_j) = \gamma_{j+1}(a_{j+1})$, y definirse entonces $\gamma : [a_1, b_m] \to \mathbb{R}^n$ por $\gamma(t) = \gamma_j(t)$ si $t \in [a_j, b_{j+1}]$. La curva Γ es entonces la clase de todas las curvas equivalentes a esta γ.

Recordemos tres conceptos más. Se dice que una curva orientada Γ de clase C^1 a trozos en $\mathbb{R}^n$ es:

- una curva cerrada en $\mathbb{R}^n$ si admite una parametrización $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ tal que $\gamma(a) = \gamma(b)$;
- una curva simple si admite una parametrización $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ que es inyectiva;
- una curva cerrada simple si admite una parametrización $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ tal que $\gamma(a) = \gamma(b)$ y la restricción de γ al intervalo $[a, b)$ es inyectiva.

En el caso de curvas cerradas puede resultar conveniente manejar otra definición de curvas parametrizadas equivalentes, para evitar situaciones como, por ejemplo, que la circunferencia unidad de $\mathbb{R}^2$, parametrizada de forma que el punto inicial sea $(1, 0)$, no sea equivalente a la misma circunferencia parametrizada de manera que el punto inicial sea otro diferente (por ejemplo $(-1, 0)$). Podemos llamar curva parametrizada cerrada de clase C^1 a trozos a cualquier aplicación $\gamma : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^n$ de clase C^1 a trozos (donde $\mathbb{S}^1$ denota la circunferencia unidad)[1], y definir, en el conjunto de las curvas parametrizadas de clase C^1 a trozos, la relación

$$\gamma \mathcal{R} \sigma \iff \exists\, \varphi : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1 \text{ homeomorfismo } C^1 \text{ a trozos que conserva orientación y tal que } \sigma = \gamma \circ \varphi$$

(diremos que $\varphi : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ es un homeomorfismo C^1 a trozos si es un homeomorfismo, es de clase C^1 a trozos, y su inversa es también de clase C^1 a trozos). Puede comprobarse fácilmente que esta relación es de equivalencia. El conjunto cociente resultante es lo que llamamos el conjunto de las *curvas orientadas cerradas de clase C^1 a trozos.* También es fácil ver que si dos curvas cerradas C^1 a trozos son equivalentes entonces tienen la misma longitud.[2]

4.2. Integración de funciones con valores en $\mathbb{R}^n$

Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}^d$. Diremos que una función $\varphi : A \to \mathbb{R}^n$ es integrable si lo son sus funciones coordenadas respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^n$, es decir, si escribiendo $\varphi = (\varphi_1, ..., \varphi_n)$ se tiene que cada φ_j es integrable en A, para $j = 1, ..., n$. Llamaremos integral de φ en A al vector

$$\int_A \varphi := \left(\int_A \varphi_1, ..., \int_A \varphi_n \right).$$

Teorema 4.1. *Si $\varphi, \psi : A \to \mathbb{R}^n$ son funciones integrables, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, se cumple que*[3]*:*

1. *La función $\alpha\varphi + \beta\psi$ es integrable, y $\int_A (\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha \int_A \varphi + \beta \int_A \psi$.*
2. $\| \int_A \varphi \| \leq \int_A \|f\|$.
3. *En el caso $d = 1$ y $A = [a, b] \subset \mathbb{R}$ se tiene además, para cada función $g : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ de clase C^1, que $g(t) = g(a) + \int_a^t g'(s) ds$.*
4. *Si $A = A_1 \cup A_2$, donde $A_1 \cap A_2$ tiene medida cero, entonces $\int_A \varphi = \int_{A_1} \varphi + \int_{A_2} \varphi$.*

Demostración. (1) es consecuencia directa de la definición y de la linealidad de la integral de funciones con valores en $\mathbb{R}$, y (3) se obtiene aplicando el teorema fundamental del cálculo coordenada a coordenada. (4) también es inmediato aplicando el correspondiente resultado conocido coordenada a coordenada. Para demostrar (2), denotemos

$$x = (x_1, ..., x_n) = \left(\int_A \varphi_1, ..., \int_A \varphi_n \right) = \int_A \varphi.$$

Podemos suponer $x \neq 0$. Tenemos entonces, usando la linealidad de la integral de funciones con valores en $\mathbb{R}$ y la desigualdad de Cauchy-Schwarz en $\mathbb{R}^n$, que

$$\|x\|^2 = \langle x, x \rangle = \sum_{j=1}^n x_j \int_A \varphi_j(t) dt = \int_A \sum_{j=1}^n x_j \varphi_j(t) dt \leq \int_A \|x\| \, \|\varphi(t)\| dt = \|x\| \int_A \|\varphi\|,$$

de donde deducimos (2) al dividir por $\|x\|$. □

Es también fácil comprobar, usando la propiedad (1), que la definición de $\int_A \varphi$ no depende de la base fijada en $\mathbb{R}^n$.

[1]Diremos que $\gamma : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^n$ es de clase C^1 a trozos si γ es continua y la aplicación $[0, 2\pi] \ni t \mapsto \gamma(e^{it}) \in \mathbb{R}^n$ es de clase C^1 a trozos

[2]La longitud de una curva cerrada de clase C^1 a trozos $\gamma : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^n$ puede definirse como long$(\gamma) = \int_0^{2\pi} \| \frac{d}{dt} \gamma(e^{it}) \| dt$.

[3]Aquí $\| \cdot \|$ es la norma euclídea en $\mathbb{R}^n$. El resultado de (2) es también cierto para cualquier otra norma en $\mathbb{R}^n$, pero una demostración basada en la misma idea requeriría usar el teorema de Hahn-Banach.

4.3. Integración de funciones complejas sobre curvas en $\mathbb{C}$

Al identificar $\mathbb{R}^2$ con $\mathbb{C}$, todo lo dicho en la sección anterior se aplica inmediatamente a funciones $\varphi : [a,b] \to \mathbb{C}$. Empleando la notación $\varphi(t) = x(t) + iy(t)$ en lugar de $\varphi(t) = (x(t), y(t))$, una curva $\varphi : [a,b] \to \mathbb{C}$ es integrable en $[a,b]$, por definición, si y sólo si lo son sus funciones coordenadas x e y; en este caso definimos

$$\int_a^b \varphi(t)dt = \int_a^b x(t)dt + i\int_a^b y(t)dt.$$

Puesto que la norma del vector $(x(t), y(t))$ de $\mathbb{R}^2$ es igual al módulo del número complejo $z(t) = x(t) + iy(t)$, la propiedad (2) del teorema de la sección anterior implica que

$$\left|\int_a^b \varphi(t)dt\right| \leq \int_a^b |\varphi(t)|dt. \tag{4.1}$$

A continuación definimos la integral de una función compleja sobre una curva de clase C^1 a trozos.

Definición 4.1. Sean $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función continua, y $\gamma : [a,b] \to \Omega$ una curva parametrizada de clase C^1 a trozos. Definimos la integral de f sobre γ por

$$\int_\gamma f = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt, \tag{4.2}$$

que también denotaremos

$$\int_\gamma f = \int_\gamma f(z)dz.$$

Escribiendo $f = u + iv$, $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$, obtenemos otra expresión equivalente para la integral $\int_\gamma f$:

$$\int_\gamma f = \int_a^b \big(u(x(t),y(t))x'(t) - v(x(t),y(t))y'(t)\big)\, dt + i\int_a^b \big(u(x(t),y(t))y'(t) + v(x(t),y(t))x'(t)\big)\, dt.$$

Conviene subrayar que el producto que aparece en (4.2) es el producto complejo, no el producto escalar. Por tanto $\int_\gamma f$ es en general un número complejo, y *no es* la integral del campo vectorial f a lo largo de la curva γ en $\mathbb{R}^2$ (tal integral sería siempre un número real). También es importante evitar caer en el error de pensar que $|\int_\gamma f| \leq \int_\gamma |f|$, lo cual sería absurdo porque el término de la derecha es en general un número complejo, mientras que el de la izquierda es un real positivo. Ni siquiera es cierta esta desigualdad aún suponiendo que ambos términos son reales, como muestra el ejemplo $f(z) = 1/z$, $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. No obstante, la tercera propiedad de $\int_\gamma f$ de las que enunciamos a continuación sirve en la práctica como sustituto de dicha desigualdad (que, insistimos, es falsa en general).

Teorema 4.2. *Sean $f, g : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ funciones continuas, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, y $\gamma : [a,b] \to \Omega$ una curva parametrizada de clase C^1 a trozos. Se tiene que:*

1. $\int_\gamma (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_\gamma f + \beta \int_\gamma g$.
2. $\int_{\gamma^-} f = -\int_\gamma f$.
3. $\| \int_\gamma f \| \leq \sup_{z\in\gamma[a,b]} |f(z)| \operatorname{long}(\gamma)$.

Demostración. La propiedad (a) se sigue fácilmente de la definición, mediante un cálculo directo y el uso de la linealidad de la integral de funciones con valores reales. La propiedad (b) también se comprueba muy fácilmente a partir de la definición y cambio de variable $s = a + b - t$. En cuanto a (c), se obtiene como sigue:

$$|\int_\gamma f| = |\int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt| \leq \int_a^b |f(\gamma(t))\gamma'(t)|dt = \int_a^b |f(\gamma(t))|\,|\gamma'(t)|dt$$
$$\leq \int_a^b \sup_{z\in\gamma[a,b]} |f(z)|\,|\gamma'(t)|dt = \sup_{z\in\gamma[a,b]} |f(z)| \int_a^b |\gamma'(t)|dt = \sup_{z\in\gamma[a,b]} |f(z)| \operatorname{long}(\gamma),$$

donde en la primera desigualdad hemos usado (4.1). $\square$

Proposición 4.3. *Sean $\gamma : [a,b] \to \Omega$, $\sigma : [c,d] \to \Omega$ curvas parametrizadas de clase C^1 a trozos, y supongamos que γ y σ son equivalentes. Entonces, para toda función continua $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ se tiene*

$$\int_\gamma f = \int_\sigma f.$$

Demostración. Haremos la demostración en el caso en que γ y σ son de clase C^1; la extensión al caso general es evidente y queda al cuidado del lector. Sea $\phi : [c,d] \to [a,b]$ biyectiva y de clase C^1 con $\phi'(t) > 0$ y tal que $\sigma(s) = \gamma(\phi(s))$. Entonces

$$\int_\gamma f = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t) = \int_c^d f(\gamma(\phi(s)))\gamma'(\phi(s))\phi'(s)ds = \int_c^d f(\sigma(s))\sigma'(s)ds = \int_\sigma f,$$

donde en la segunda igualdad hemos usado el cambio de variable $t = \phi(s)$, y en la tercera igualdad la Proposición 2.4. $\square$

En virtud de la proposición anterior podemos definir, para cada curva orientada Γ de clase C^1 a trozos contenida en $\mathbb{C}$, la integral de una función continua $f : \Gamma \to \mathbb{C}$ sobre la curva Γ por

$$\int_\Gamma f = \int_\gamma f,$$

en donde γ es cualquier parametrización de Γ. Las propiedades $(1) - (3)$ del teorema anterior tienen así análogos obvios para $\int_\Gamma f$.

También es fácil ver que si $\Gamma = \Gamma_1 \cup ... \cup \Gamma_m$ es una concatenación de curvas en $\mathbb{C}$ tales que Γ_{j+1} comienza en el punto donde Γ_j acaba, se tiene

$$\int_\Gamma f = \sum_{j=1}^m \int_{\Gamma_j} f.$$

En el caso particular $m = 2$ y de que $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ sea una curva cerrada, tenemos, usando la propiedad conmutativa de la suma,

$$\int_{\Gamma_1} f + \int_{\Gamma_2} f = \int_{\Gamma_2} f + \int_{\Gamma_1} f.$$

Como la concatenación Γ_1 seguida de Γ_2 difiere de la concatenación Γ_2 seguida de Γ_1 únicamente en el punto inicial (que es igual al final) de la curva, la igualdad anterior, combinada con la Proposición 4.3, nos dice que la integral de f en una curva cerrada Γ depende de la orientación de esta curva, pero no de su parametrización ni del *punto base* (es decir el punto inicial o el final, que son el mismo) de dicha parametrización. Es decir, si $\gamma, \sigma : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{C}$ son equivalentes como curvas cerradas de clase C^1 a trozos (en el sentido de que existe $\varphi : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ homeomorfismo C^1 a trozos que preserva la orientación y tal que $\sigma = \gamma \circ \varphi$), entonces se tiene que

$$\int_\gamma f = \int_\sigma f.$$

En efecto, si ponemos $z = \gamma(1)$, $w = \sigma(1)$, suponemos sin pérdida de generalidad $z \neq \omega$, y denotamos Γ_1 el subarco de $\gamma(\mathbb{S}^1) = \sigma(\mathbb{S}^1)$ que comienza en z y acaba en w y se recorre en el mismo sentido que lo hacen γ y σ, y Γ_2 es el subarco que comienza en w y acaba en z y se recorre en el mismo sentido que γ y σ, entonces tenemos

$$\int_\gamma f = \int_{\Gamma_1} f + \int_{\Gamma_2} f = \int_{\Gamma_2} f + \int_{\Gamma_1} f = \int_\sigma f.$$

Vamos a probar a continuación que cuando una función holomorfa f es la derivada de otra, entonces $\int_\gamma f$ ni siquiera depende de la propia clase de equivalencia de la curva parametrizada γ, sino sólo de sus puntos inicial y final (y que de hecho $\int_\gamma f = 0$ cuando γ es cerrada).

Definición 4.2. Sean Ω un abierto de $\mathbb{C}$ y $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Se dice que una función $F : \Omega \to \mathbb{C}$ es una *primitiva* de f si F es holomorfa en Ω y $F' = f$.

En un ejercicio del capítulo anterior, como consecuencia de las ecuaciones de Cauchy-Riemann, vimos que si Ω es un abierto conexo de $\mathbb{C}$, F es holomorfa en Ω, y $F' = 0$, entonces F es constante. Se sigue inmediatamente que si una función f tiene una primitiva en un abierto conexo Ω de C, entonces dicha primitiva es única salvo constante aditiva.

Teorema 4.4. *Si una función continua f tiene una primitiva F en Ω y Γ es una curva de clase C^1 a trozos en Ω que comienza en w_1 y acaba en w_2, entonces*

$$\int_\Gamma f = F(w_2) - F(w_1).$$

En particular $\int_\Gamma f$ no depende de la curva Γ, sino sólamente de sus puntos inicial y final w_1 y w_2.

Demostración. Hagamos la demostración en el caso en que Γ es de clase C^1; la extensión al caso general será después obvia, y queda como ejercicio para el lector. Si $\gamma : [a, b] \to \Omega$ es una parametrización de Γ tenemos

$$\int_\Gamma f = \int_\gamma f = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_a^b F'(\gamma(t))\gamma'(t) = \int_a^b \frac{d}{dt}F(\gamma(t)) = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)),$$

donde en la cuarta igualdad hemos usado la Proposición 2.4, y en la quinta el Teorema 4.1(3). $\square$

Corolario 4.5. *Si Γ es una curva cerrada en un abierto Ω de $\mathbb{C}$ y $f : \Omega \to \mathbb{C}$ es continua y tiene una primitiva en Ω, entonces*

$$\int_\Gamma f = 0.$$

Se deduce del corolario anterior, por ejemplo, que la función $f(z) = 1/z$ no tiene primitivas en $D(0, r) \setminus \{0\}$ para ningún $r > 0$, ya que, si $C(0, r)$ es la circunferencia de centro 0 y radio r, orientada positivamente (es decir girando en el sentido contrario a las agujas del reloj) se tiene

$$\int_{C(0,r)} \frac{1}{z}dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{re^{it}} rie^{it}dt = \int_0^{2\pi} idt = 2\pi i \neq 0.$$

Concluyamos esta introducción a la teoría de integración de funciones complejas sobre curvas con un resultado que nos será muy útil en el próximo capítulo.

Teorema 4.6 (Derivación compleja bajo el signo integral)**.** *Sean $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto, Γ curva orientada de clase C^1 a trozos en $\mathbb{C}$ (no necesariamente contenida en Ω), y $\varphi : \Gamma \times \Omega \to \mathbb{C}$ continua tal que para cada $\xi \in \Gamma$ la función $z \mapsto \varphi(\xi, z)$ es holomorfa en Ω, y la función $(\xi, z) \mapsto \frac{\partial}{\partial z}\varphi(\xi, z)$ es continua en $\Gamma \times \Omega$. Entonces la función $g : \Omega \to \mathbb{C}$ definida por*

$$g(z) = \int_\Gamma \varphi(\xi, z)d\xi$$

es holomorfa, con

$$g'(z) = \int_\Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial z}(\xi, z)d\xi.$$

Demostración. Sean $z_0 \in \Omega$, y $r > 0$ tal que $\overline{D}(z_0, r) \subset \Omega$. Para $|h| < r$, considerando el segmento $S = [z_0, z_0 + h] \subset \Omega$, parametrizado por ejemplo por $S_h(\tau) = z_0 + \tau h$, $\tau \in [0, 1]$, y aplicando el teorema anterior, tenemos que

$$\varphi(\xi, z_0 + h) - \varphi(\xi, z_0) = \int_{S_h} \frac{\partial \varphi}{\partial z}(\xi, z)dz = \int_0^1 \frac{\partial \varphi}{\partial z}(\xi, S_h(\tau))S_h'(\tau)d\tau = \int_0^1 \frac{\partial \varphi}{\partial z}(\xi, z_0 + \tau h)\, h\, d\tau$$

para cada $\xi \in \Gamma$. Suponiendo que $\gamma : [a,b] \to \Omega$ es una parametrización de Γ tenemos entonces

$$\lim_{h\to 0} \frac{g(z_0+h)-g(z_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_\Gamma (\varphi(\xi, z_0+h) - \varphi(\xi, z_0))\, d\xi =$$
$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_\Gamma \left(\int_0^1 \frac{\partial\varphi}{\partial z}(\xi, z_0+sh)\, h\, ds\right) d\xi = \lim_{h\to 0}\int_a^b \left(\int_0^1 \frac{\partial\varphi}{\partial z}(\gamma(t), z_0+sh) ds\right)\gamma'(t)dt =$$
$$\lim_{h\to 0}\int_{[0,1]\times[a,b]} \frac{\partial\varphi}{\partial z}(\gamma(t), z_0+sh)\gamma'(t)dsdt = \int_{[0,1]\times[a,b]} \lim_{h\to 0}\frac{\partial\varphi}{\partial z}(\gamma(t), z_0+sh)\gamma'(t)dsdt =$$
$$\int_{[0,1]\times[a,b]} \frac{\partial\varphi}{\partial z}(\gamma(t), z_0)\gamma'(t)dsdt = \int_a^b \frac{\partial\varphi}{\partial z}(\gamma(t), z_0)\gamma'(t)dt = \int_\Gamma \frac{\partial\varphi}{\partial z}(\xi, z)d\xi,$$

donde en la cuarta igualdad hemos usado el teorema de Fubini y en la quinta el intercambio de integral y límite se justifica porque al ser $\partial\varphi/\partial z$ continua en el compacto $\Gamma \times \overline{D}(z_0, r)$ es uniformemente continua en este conjunto y por tanto

$$\lim_{h\to 0} \frac{\partial\varphi}{\partial z}(\gamma(t), z_0+sh)\gamma'(t) = \frac{\partial\varphi}{\partial z}(\gamma(t), z_0)\gamma'(t)$$

uniformemente en $(s,t) \in [0,1]\times[a,b]$. □

Corolario 4.7. *Sean $z_0 \in \mathbb{C}$, $r > 0$. Para todo $z \in D(z_0, r)$ se tiene que*

$$\int_{\partial D(z_0,r)} \frac{1}{\xi - z} d\xi = 2\pi i,$$

donde $\partial D(z_0, r)$ es el borde del disco $D(z_0, r)$, orientado positivamente.

Demostración. La función $\varphi : \partial D(z_0, r) \times (\mathbb{C} \setminus \partial D(z_0, r)) \to \mathbb{C}$ definida por

$$\varphi(\xi, z) = \frac{1}{\xi - z}$$

es continua, y su derivada respecto de z es

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z}(\xi, z) = \frac{1}{(\xi - z)^2},$$

que es continua en el dominio de φ. Por el teorema anterior deducimos que la función

$$f(z) = \int_{\partial D(z_0,r)} \frac{1}{\xi - z} d\xi$$

es holomorfa en $D(z_0, r)$, con

$$f'(z) = \int_{\partial D(z_0,r)} \frac{1}{(\xi - z)^2} d\xi.$$

Pero esta integral es nula para cada $z \in D(z_0, r)$, por ser la integral en una curva cerrada de la función $\xi \mapsto 1/(\xi - z)^2$, que es continua y tiene una primitiva (a saber, la función $\xi \mapsto -1/(\xi - z)$) en un entorno abierto de dicha curva. Puesto que $D(z_0, r)$ es un abierto conexo, se sigue que f es constante en este disco, y como

$$f(z_0) = \int_{|\xi - z_0| = r} \frac{1}{\xi - z_0} d\xi = \int_0^{2\pi} i dt = 2\pi i,$$

se concluye que $f(z) = 2\pi i$ para todo $z \in D(z_0, r)$. □

4.4. Problemas

Problema 4.1. Calcular las integrales $\int_\gamma f$ en los siguientes casos:

1. $f(z) = 1/z$, y γ la circunferencia unidad, orientada en el sentido contrario a las agujas del reloj (orientación positiva).
2. $f(z) = z/(z^2+6)$, y γ el triángulo de vértices 1, i, $-i$, orientado en el sentido de las agujas del reloj (orientación negativa).
3. $f(z) = \overline{z}/(z+6)$, y γ el rectángulo de vértices $\pm 9 \pm i$, orientado positivamente.

Problema 4.2. Sea Γ la frontera del conjunto $\{x+iy : x, y \in \mathbb{R}, x^2+y^2 \leq 4, x+y \geq -2\}$, orientado positivamente. Calcular
$$\int_\Gamma \frac{\overline{z}}{z+1} dz.$$

Problema 4.3. Sean $\Gamma_1, ..., \Gamma_n$ curvas C^1 a trozos tales que el punto final de Γ_j es igual al punto inicial de Γ_{j+1}, y definamos $\Gamma = \Gamma_1 \cup ... \cup \Gamma_n$ (recorrida en el orden natural, es decir, Γ_j antes que Γ_{j+1}). Comprobar que
$$\int_\Gamma f = \sum_{j=1}^{n} \int_{\Gamma_j} f.$$

Problema 4.4. Demostrar que si Ω es un abierto conexo de $\mathbb{R}^n$ entonces para todo $x, y \in \Omega$ existe γ curva de clase C^1 a trozos que une x con y.

Problema 4.5. Demostrar que la curva γ del ejercicio anterior puede tomarse siempre de clase C^∞ (y con $\gamma'(t) \neq 0$ para todo t).

Problema 4.6. Sea γ una curva C^1 a trozos en $\mathbb{C}$, sea $\Gamma \subset \mathbb{C}$ la traza de γ, y sea (f_n) una sucesión de funciones continuas $f_n : \Gamma \to \mathbb{C}$ tales que (f_n) converge uniformemente en Γ a una función f. Demostrar que
$$\lim_{n\to\infty} \int_\gamma f_n = \int_\gamma f.$$

Problema 4.7. Sean Ω abierto de $\mathbb{C}$, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ continua, $\gamma : [a,b] \to \Omega$ de clase C^1, y (γ_n) una sucesión de curvas $\gamma_n : [a,b] \to \Omega$ de clase C^1 tales que $\lim_{n\to\infty} \gamma_n(t) = \gamma(t)$ y $\lim_{n\to\infty} \gamma_n'(t) = \gamma'(t)$ uniformemente en $t \in [a,b]$. Demostrar que
$$\lim_{n\to\infty} \int_{\gamma_n} f = \int_\gamma f.$$

Problema 4.8. Sea $F : [0,1] \times \Omega \to \mathbb{C}$ una función continua, donde Ω es un abierto de $\mathbb{C}$, y sea $\gamma : [a,b] \to \Omega$ una curva de clase C^1 a trozos. Probar que la función $\varphi : [0,1] \to \mathbb{C}$ definida por
$$\varphi(t) = \int_\gamma F(t,z) dz$$
es continua.