FUNCIONES HOLOMORFAS. LAS ECUACIONES DE CAUCHY-RIEMANN Y ALGUNAS DE SUS CONSECUENCIAS

En este capítulo definiremos las funciones holomorfas como las funciones complejas que son *diferenciables en sentido complejo*, y responderemos a la pregunta, natural y muy importante, de bajo qué circunstancias una función de dos variables reales, con valores en $\mathbb{R}^2$, y diferenciable en sentido real resulta holomorfa vista como función de variable compleja con valores en $\mathbb{C}$.

1. Funciones holomorfas

Definición 1.1. Sean $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto, y $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Se dice que f es *holomorfa en* z_0 (o diferenciable en sentido complejo en z_0) si existe el límite

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}.$$

En caso de que exista, se llama al valor de este límite la derivada (compleja) de f en z_0, y se denota

$$f'(z_0) = \lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}.$$

Diremos que la función f es holomorfa en Ω si es holomorfa en todo punto $z_0 \in \Omega$. En el caso de una función holomorfa $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, diremos también que g es entera.

La siguiente observación es a veces útil: una función f es holomorfa en z_0, con $f'(z_0) = a$, si y sólo si existe una función ψ con $\lim_{h\to 0} \psi(h) = 0$ tal que

$$f(z_0+h) - f(z_0) - ah = h\psi(h).$$

De vez en cuando escribiremos

$$f(z_0+h) - f(z_0) - ah = o(h)$$

para referirnos a la existencia de una tal función ψ sin nombrarla explícitamente. También escribiremos $g(h) = O(h)$ para referirnos a la existencia de una constante M y un número $\delta > 0$ tal que $|g(h)| \leq M|h|$ para todo $z \in D(0,\delta)$. En particular, si $g(h) = O(h)$ entonces $\lim_{h\to 0} g(h) = 0$.

Algunos ejemplos de funciones holomorfas: la función $f(z) = z$ es holomorfa en $\mathbb{C}$, con $f'(z) = 1$. Toda función constante $z \mapsto c_0$ es holomorfa en $\mathbb{C}$, con derivada nula. La función $f(z) = 1/z$ es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, con $f'(z) = -1/z^2$, ya que

$$\lim_{h\to 0} \frac{1/(z+h) - 1/z}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{z-(z+h)}{z(z+h)h} = \lim_{h\to 0} \frac{-1}{z(z+h)} = -\frac{1}{z^2}.$$

Como ejemplo básico de función que *no* es holomorfa tenemos la conjugación $C(z) = \overline{z}$: se cumple que

$$\frac{C(z+h)-C(z)}{h} = \frac{\overline{h}}{h},$$

y esta expresión no tiene límite cuando $h \to 0$ (ya que a lo largo de la recta $h = t \in \mathbb{R}$ la función es idénticamente 1, mientras que a lo largo de la recta $h = it$, $t \in \mathbb{R}$, es constantemente -1). Sin embargo, obsérvese que $C(z)$ es una función de clase $C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$, de hecho es incluso $\mathbb{R}$-lineal.

Proposición 1.2. Si f es holomorfa en z_0 entonces es continua en z_0.

Demostración. $f(z_0+h) - f(z_0) = f'(z_0)h + o(h) = O(h)$. □

Proposición 1.3. Sea Ω un abierto de $\mathbb{C}$. Si $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ son holomorfas en $z_0 \in \Omega$ entonces:

1. $f+g$ es holomorfa en z_0, y $(f+g)'(z_0)=f'(z_0)+g'(z_0)$.
2. fg es holomorfa en z_0, y $(fg)'(z_0)=f'(z_0)g(z_0)+f(z_0)g'(z_0)$.
3. Si $g(z_0)\neq 0$ entonces f/g es holomorfa en z_0, y
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0)=\frac{f'(z_0)g(z_0)-f(z_0)g'(z_0)}{g(z_0)^2}.$$

Además, si U es un abierto de $\mathbb{C}$, $f:\Omega\to U$ es holomorfa en z_0 y $g:U\to\mathbb{C}$ es holomorfa en $w_0=f(z_0)$, entonces la composición $g\circ f$ es holomorfa en z_0, y se tiene
$$(g\circ f)'(z_0)=g'(f(z_0))\,f'(z_0)\quad\text{(Regla de la cadena).}$$

Demostración. (1) es muy fácil y se deja como ejercicio. Para ver (2) basta escribir
$$\frac{f(z_0+h)g(z_0+h)-f(z_0)g(z_0)}{h}=$$
$$g(z_0+h)\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}+f(z_0)\frac{g(z_0+h)-g(z_0)}{h}\to g(z_0)f'(z_0)+f(z_0)g'(z_0),$$
cuando $h\to 0$, por la definición de derivada y la proposición anterior.

Demostremos ahora la regla de la cadena. Consideraremos dos casos.

Caso 1. Supongamos que $f'(z_0)\neq 0$. Entonces de la definición de derivada se sigue que existe $\delta>0$ tal que si $0<|h|<\delta$ entonces
$$\left|\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}\right|\geq\frac{|f'(z_0)|}{2}>0,$$
y en particular $|f(z_0+h)-f(z_0)|>0$ si $0<|h|<\delta$. Luego podemos dividir $g(f(z_0+h))-g(f(z_0))$ por $f(z_0+h)-f(z_0)$ para h suficientemente pequeño y tomar límites, obteniendo así
$$\lim_{h\to 0}\frac{g(f(z_0+h))-g(f(z_0))}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{g(f(z_0+h))-g(f(z_0))}{f(z_0+h)-f(z_0)}\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}=g'(f(z_0))f'(z_0),$$
gracias a la definición de $g'(f(z_0))$ y $f'(z_0)$ y al hecho de que $\lim_{h\to 0}f(z_0+h)=f(z_0)$.

Caso 2. Supongamos ahora que $f'(z_0)=0$. Usando la definición de derivada para $g'(f(z_0))$ deducimos que existe $\delta>0$ tal que si $|w-g(f(z_0))|<\delta$ entonces
$$|g(w)-g(f(z_0))|\leq(|g'(f(z_0))|+1)|w-f(z_0)|:=A|w-f(z_0)|.$$
Como $\lim z\to z_0 f(z)=f(z_0)$, existe $r>0$ tal que si $|h|\leq r$ entonces $|f(z_0+h)-f(z_0)|\leq\delta$, y así podemos usar la desigualdad anterior con $w=f(z_0+h)$, obteniendo, para $|h|<r$,
$$\left|\frac{g(f(z_0+h))-g(f(z_0))}{h}\right|\leq A\left|\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}\right|\to A|f'(z_0)|=0$$
cuando $h\to 0$, y así $(g\circ f)'(z_0)=0=g'(f(z_0))f'(z_0)$.

Finalmente (3) se obtiene fácilmente combinando (2) con la regla de la cadena y el hecho ya probado anteriormente de que la derivada de $z\mapsto 1/z$ es $-1/z^2$. □

Como consecuencia de la proposición anterior y de hechos ya conocidos, tenemos por ejemplo que cualquier polinomio complejo es holomorfo en $\mathbb{C}$, y que cualquier cociente de polinomios complejos $P(z)/Q(z)$ es holomorfo en $\{z\in\mathbb{C}:Q(z)\neq 0\}$. Aún no podemos demostrar que otras funciones complejas importantes, como e^z, $\operatorname{sen} z$, $\cos z$, etc, sean holomorfas, pero todo esto lo podremos deducir inmediatamente de los resultados de la siguiente sección.

2. Las ecuaciones de Cauchy-Riemann y algunas de sus consecuencias

Una función $f:\Omega\to\mathbb{C}$ definida en un abierto Ω de $\mathbb{C}$ es también una función f definida en un abierto de $\mathbb{R}^2$ y con valores en $\mathbb{R}^2$: si denotamos $z=x+iy$, $u(z)=\mathrm{Re}f(z)$, $v(z)=\mathrm{Im}f(z)$ e identificamos z con

$(x, y) \in \mathbb{R}^2$ y $u + iv$ con (u, v), podemos escribir

$$f(x, y) = (u(x, y), v(x, y)),$$

y preguntarnos cuál es la relación entre la posible diferenciabilidad de f vista como función de dos variables reales y la posible holomorfía de f como función de una variable compleja. En vista del ejemplo $f(z) = \overline{z}$ ya sabemos que el hecho de que f sea diferenciable en sentido real (o incluso de clase $C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$) no implica que f sea holomorfa. El siguiente teorema nos da una condición que, al añadirla a la diferenciabilidad en sentido real de f, resulta ser necesaria y suficiente para que f sea holomorfa.

Teorema 2.1. Sea $f = u + iv$ una función definida en un abierto Ω de $\mathbb{C}$ y con valores en C. Entonces f es holomorfa en un punto $z_0 = x_0 + iy_0 \in \Omega$ si y sólo si las funciones u, v son diferenciables en z_0 y sus derivadas parciales cumplen

$$(CR) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0). \end{cases}$$

Además en este caso se tiene que

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0).$$

Demostración. Si denotamos por $Df(x_0, y_0)$ la diferencial (en sentido real) de f en z_0 y reservamos $f'(z_0)$ para la derivada compleja de f, el enunciado es equivalente a decir que existe $f'(z_0)$ si y sólo si existe $Df(x_0, y_0)$ y tiene la forma

$$Df(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix},$$

donde $a, b \in \mathbb{R}$. Supongamos primero que $f'(z_0) = a$ existe. Entonces, definiendo $a + ib = f'(z_0)$ y la aplicación lineal $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ cuya matriz respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^2$ es

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix},$$

y denotando $h = s + it = (s, t)$, tenemos que

$$Ah = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = (as - bt, bs + at) = (a + ib)(s + it), \qquad (*)$$

luego

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0) - Ah}{|h|} = \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0) - f'(z_0)h}{|h|} = 0$$

como consecuencia de la definición de $f'(z_0)$. Esto significa que f es diferenciable en sentido real y que $Df(x_0, y_0) = A$.

Recíprocamente, supongamos que f es diferenciable en sentido real y $Df(x_0, y_0)$ tiene matriz del tipo

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix},$$

donde $a, b \in \mathbb{R}$. Definamos entonces $w = a + ib$. La igualdad $(*)$ y la diferenciabilidad de f en $z_0 = (x_0, y_0)$ implican que

$$f(z_0 + h) - f(z_0) - wh = f(z_0 + h) - f(z_0) - Ah = o(h),$$

lo que a su vez nos dice que

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = w,$$

y por tanto f es holomorfa en z_0, con $f'(z_0) = a + ib$. $\square$

Al sistema de ecuaciones en derivadas parciales (CR) se le llama *ecuaciones de Cauchy-Riemann*.

Una consecuencia del teorema anterior es que si f es holomorfa en z_0 entonces

$$f'(z_0)|^2 = \det Df(x_0, y_0). \tag{2.1}$$

Otra consecuencia, que se propone como ejercicio, es que si f es holomorfa en un abierto conexo de $\mathbb{C}$ y $f' = 0$ en Ω, entonces f es constante en Ω.

Veremos a continuación cómo las ecuaciones de Cauchy-Riemann pueden usarse para establecer que localmente una función f es holomorfa y tiene derivada no nula si y sólo si f es una *aplicación conforme*.

Proposición 2.2. Si $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{C}$ es una curva de clase C^1 con $\gamma(0) = z_0$ y f es holomorfa en z_0 entonces el vector tangente a la curva $\sigma = f \circ \gamma$ en $f(z_0)$ es

$$(f \circ \gamma)'(0) = f'(z_0)\gamma'(0).$$

Demostración. Por la regla de la cadena para funciones diferenciables en sentido real (que podemos aplicar gracias al teorema anterior) se tiene

$$(f \circ \gamma)'(0) = Df(z_0)\gamma'(0).$$

Además, volviendo a utilizar teorema anterior,

$$Df(z_0) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

donde $a + ib = f'(z_0)$, luego, denotando $\gamma(t) = \alpha(t) + i\beta(t)$, se ve que

$$Df(z_0)\gamma'(0) = (a + ib)\left(\alpha'(0) + i\beta'(0)\right) = f'(z_0)\gamma'(0).$$

□

Definición 2.3. Una función $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to R^2$ de se dice que es *conforme* en $z_0 \in \Omega$ si es diferenciable en z_0 y preserva ángulos en z_0, en el sentido de que si $\gamma_1, \gamma_2 : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \Omega$ son curvas de clase C^1 con $\gamma_1(0) = z_0 = \gamma_2(0)$ y $\gamma_1'(0) \neq 0 \neq \gamma_2'(0)$, entonces $(f \circ \gamma_1)'(0) \neq 0 \neq (f \circ \gamma_2)'(0)$, y

$$\text{ángulo}\left((f \circ \gamma_1)'(0), (f \circ \gamma_2)'(0)\right) = \text{ángulo}\left(\gamma_1'(0), \gamma_2'(0)\right),$$

con la misma orientación.

Diremos también que $f : U \to V$ es una *aplicación conforme* entre dos abiertos de $\mathbb{R}^2$ si es conforme en cada $z \in U$ y es una biyección de U en V.

Teorema 2.4. Sea $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es holomorfa en z_0 y $f'(z_0) \neq 0$;
2. f es conforme en z_0.

Demostración. (1) $\implies$ (2): Sean γ_1, γ_2 curvas como en la definición anterior. Usando la Proposición, tenemos

$$(f \circ \gamma_j)'(0) = f'(z_0)\gamma_j'(0) \neq 0$$

para $j = 1, 2$. Además

$$\begin{aligned} \text{ángulo}\left((f \circ \gamma_1)'(0), (f \circ \gamma_2)'(0)\right) = \text{ángulo}\left(f'(z_0)\gamma_1'(0), f'(z_0)\gamma_2'(0)\right) = \\ \text{Arg}\left(f'(z_0)\gamma_1'(0)\right) - \text{Arg}\left(f'(z_0)\gamma_2'(0)\right) = \\ \text{Arg}(f'(z_0)) + \text{Arg}(\gamma_1'(0)) - \text{Arg}(f'(z_0)) - \text{Arg}(\gamma_2'(0)) = \\ \text{Arg}(\gamma_1'(0)) - \text{Arg}(\gamma_2'(0)) = \text{ángulo}(\gamma_1'(0), \gamma_2'(0)), \end{aligned}$$

y por tanto f es conforme en z_0.

(2) $\implies$ (1): La función f es diferenciable (en sentido real) en z_0 por ser conforme, luego en virtud del teorema anterior bastará probar que $f = u + iv$ satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemman en el punto z_0.

Sin pérdida de generalidad podemos suponer $z_0 = 0$. Denotemos

$$Df(0) = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix},$$

y para cada $\theta \in (-\pi, \pi]$ definamos la curva $\gamma_\theta(t) = te^{i\theta} = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$, de modo que

$$(f \circ \gamma_\theta)'(0) = Df(0)\gamma_\theta'(0) = (a\cos\theta + c\operatorname{sen}\theta, b\cos\theta + d\operatorname{sen}\theta).$$

Por hipótesis,

$$\text{Arg}(e^{i\theta}) = \theta = \text{ángulo}\left((f\circ\gamma_0)'(0), (f\circ\gamma_\theta)'(0)\right) =$$
$$\text{ángulo}\left(a+ib, a\cos\theta + c\operatorname{sen}\theta + i(b\cos\theta + d\operatorname{sen}\theta)\right) =$$
$$\text{Arg}\left(\frac{a\cos\theta + c\operatorname{sen}\theta + i(b\cos\theta + d\operatorname{sen}\theta)}{a+ib}\right),$$

luego

$$\text{Arg}(a+ib) = \text{Arg}\left(\frac{a\cos\theta + c\operatorname{sen}\theta + i(b\cos\theta + d\operatorname{sen}\theta)}{e^{i\theta}}\right),$$

o equivalentemente, escribiendo $\cos\theta = (e^{i\theta} + e^{-i\theta})/2$, $\operatorname{sen}\theta = (e^{i\theta} - e^{-i\theta})/2i$ y operando,

$$\text{Arg}(a+ib) = \text{Arg}\left(\frac{1}{2}(a+d+i(b-c)) + \frac{1}{2}e^{-2i\theta}(a-d+i(c+b))\right).$$

Ahora bien, la única manera en que esto puede ser posible[1] para todo $\theta \in (-\pi, \pi]$ es que se tenga

$$a - d + i(c+b) = 0,$$

lo que significa que $f = u + iv$ cumple las ecuaciones de Cauchy-Riemann en 0. □

Usando las ecuaciones de Cauchy-Riemann es muy sencillo comprobar que $e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\operatorname{sen} y)$ es holomorfa en $\mathbb{C}$. Se sigue entonces que también lo son las funciones sen, cos, así como las sumas, multiplicaciones, cocientes y composiciones de polinomios o de cualquiera de estas funciones, donde estén bien definidas.

3. Teorema de la función inversa

Del teorema de la función inversa para funciones definidas en abiertos de $\mathbb{R}^n$ que toman valores en $\mathbb{R}^n$ podemos deducir fácilmente, particularizando en el caso $n = 2$, un resultado similar para funciones holomorfas.

Teorema 3.1. [de la función inversa, versión 1.0] Sean Ω un abierto de $\mathbb{C}$, $z_0 \in \Omega$, y $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfa, con derivada f' continua, y tal que $f'(z_0) \neq 0$. Entonces existen U entorno abierto de z_0 en Ω y V entorno abierto de $f(z_0)$ en $\mathbb{C}$ tal que $f_{|U} = f : U \to f(U) = V$ es biyectiva y la inversa $f^{-1} : V \to U$ es también holomorfa. Además,

$$(f^{-1})'(w) = \frac{1}{f'(f^{-1}(w))}$$

para todo $w \in V$.

Demostración. Al ser f holomorfa y f' continua, $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$ vista como función de dos variables reales con valores en $\mathbb{R}^2$; además sabemos por (2.1) y usando la hipótesis dobre $f'(z_0)$ que

$$\det Df(z_0) = |f'(z_0)|^2 \neq 0.$$

Entonces, por el teorema de la función inversa, existen U entorno abierto de z_0 en Ω y V entorno abierto de $f(z_0)$ en $\mathbb{C}$ tal que $f_{|U} = f : U \to f(U) = V$ es biyectiva y la inversa $f^{-1} : V \to U$ es de clase C^1. Veamos que f^{-1} es holomorfa. Sea $w_1 \in V$, pongamos que $f(z_1) = w_1$, con $z_1 \in U$. Puesto que $f : U \to V$ es un

[1] Es fácil demostrar que si $z, w \in \mathbb{C}$ y la función $t \mapsto \text{Arg}(z + we^{it})$ es constante, entonces $w = 0$

difeomorfismo C^1 sabemos que la aplicación lineal $Df(z_1)$ es invertible, y por tanto $\det Df(z_1) \neq 0$. Usando de nuevo (2.1) tenemos que $f'(z_1) \neq 0$. Consideremos ahora $w = f(z)$, con $z \in U$; entonces

$$\frac{f^{-1}(w) - f^{-1}(w_1)}{w - w_1} = \frac{z - z_1}{f(z) - f(z_1)} = \frac{1}{\frac{f(z)-f(z_1)}{z-z_1}} \to \frac{1}{f'(z_1)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(w_1))}$$

cuando $w \to w_1$, ya que $f'(z_1) \neq 0$, y si $w = f(z) \to f(z_1) = w_1$ entonces $z \to z_1$, por ser f^{-1} continua. Esto prueba que f^{-1} es holomorfa en cada $w_1 \in V$, y también la fórmula del enunciado. $\square$

Más adelante veremos que toda función holomorfa f tiene derivadas complejas de todos los órdenes, y en particular f' es continua (por ser derivable). Por esto la hipótesis de continuidad de f' en el teorema anterior es en realidad redundante.