ANÁLISIS DE FUNCIONES DE VARIABLE COMPLEJA, GRUPO T2.
EXAMEN FINAL DEL 2 DE FEBRERO DE 2021.

PROBLEMAS

1. Usar el teorema de los residuos en el semicírculo superior de radio R para calcular el valor de la integral
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3 \operatorname{sen}(2x)}{1+x^4} dx.$$

2. Sean Ω un abierto de $\mathbb{C}$, $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión contenida en Ω tal que existe $\lim_{k\to\infty} z_k = z_0 \in \Omega$, y sea f una función holomorfa en $\Omega \setminus E$, donde $E = \{z_k : k \in \mathbb{N}\} \cup \{z_0\}$. Supongamos también que existen $A > 0$ y $r \in (0,1)$ tal que
$$|f(z)| \leq \frac{A}{|z - z_0|^r}$$
para todo $z \in \Omega \setminus E$. Demostrar que f tiene una extensión holomorfa a Ω.

3. Sean f holomorfa en un abierto conexo Ω de $\mathbb{C}$, V un abierto conexo y acotado tal que $K := \overline{V} \subset \Omega$, f no constante, y $|f|$ constante en ∂K. Demostrar que f tiene al menos un cero en K.
Indicación: usar el teorema del módulo máximo.

4. Sean $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un abierto convexo, y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $\mathrm{Re} f'(z) > 0$ para todo $z \in \Omega$. Demostrar que f es inyectiva en Ω.
Indicación: comenzar calculando $\langle v, Df(z)(v)\rangle$.

El valor de los problemas es: el primero dos puntos y medio; el segundo dos puntos, y el tercero y el cuarto un punto y medio cada uno.