ECUACIONES DIFERENCIALES, GRUPO B. EXAMEN FINAL DEL 18/01/2019.

PROBLEMAS

1. Hallar todas las funciones continuas $f : [0, \pi] \to [0, \infty]$ tales que $f(x) \leq \int_0^x f(t)dt$ para todo $x \in [0, \pi]$.

2. Consideremos el sistema

$$\begin{cases} x'(t) = a\,x(t)^3 |\operatorname{sen}\lambda| + b\,y(t) \\ y'(t) = -c\,x(t) + d\,y(t)^3 |\cos\lambda|, \end{cases}$$

donde $\lambda \in \mathbb{R}$ es un parámetro, y a, b, c, d son números reales dados. Sea $\Phi(t, u, v, \lambda)$ una solución de este sistema con condición inicial $x(0) = u, y(0) = v$.

a) Justificar que: para cada $\lambda, u, v \in \mathbb{R}$ existe una única solución $t \mapsto \Phi(t, u, v, \lambda)$ con estas condiciones; que $\Phi(t, u, v, \lambda)$ es continua en sus cuatro variables, y que existen y son continuas (en sus cuatro variables) las derivadas parciales $\partial\Phi/\partial u$, $\partial\Phi/\partial v$. Calcular $\frac{\partial^2\Phi}{\partial t \partial v}(0, 1, 1, \pi)$.

b) Si $bc < 0$ y $ad < 0$, demostrar que $(0, 0)$ es un equilibrio inestable, independientemente del valor del parámetro λ.

c) Si $bc > 0$, $a < 0$ y $d < 0$, demostrar que $(0, 0)$ es un equilibrio asintóticamente estable, independientemente del valor de λ. ¿Qué ocurre si $bc > 0$, $d = 0$ y $a < 0$?

3. Sea $f(x) = x(5+3x-2x^2)$, y consideremos la ecuación $x'' + f(x) = 0$. Estudiar la estabilidad de sus puntos de equilibrio, y dibujar el diagrama de fases del sistema. Sea $u(t)$ la solución que satisface $u(0) = 0$, $u'(0) = \sqrt{2}$, y sea w la solución que cumple $w(0) = 0$, $w'(0) = 1$. Describir el comportamiento de $u(t)$ y de $w(t)$. ¿Están definidas para todo tiempo u y w?

4. Para cierto campo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de clase C^1 se sabe que:

a) $\Gamma_1 := \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$ y $\Gamma_2 := \{(x, y) : x^2 + 3y^2 = 9\}$ son conjuntos invariantes para el flujo $\Phi(t, x, y)$ de f.

b) f no tiene ningún punto de equilibrio en $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$.

Si $A = \{(x, y) : 1 < x^2 + y^2,\ x^2 + 3y^2 < 9\}$, demostrar que $\int_A \operatorname{div} f(x, y) dxdy = 0$.

Si estás haciendo examen con teoría, debes intentar resolver exclusivamente los problemas 1 y 2. Si estás haciendo examen sin teoría, deberás intentar resolver todos los problemas. En ambos casos, el valor de los problemas será el siguiente. Problema 1: un punto y medio; problema 2: tres puntos y medio; problema 3: un punto y medio; problema 4: un punto.