ECUACIONES DIFERENCIALES, GRUPO T1. EXAMEN FINAL DEL 28/01/2021.

PROBLEMAS

1. Consideremos la ecuación $x'(t) = g(t, x(t)) + f(t, x(t))$, donde $f, g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ son de clase C^1, g es acotada y f es Lipschitz.

a) Demostrar que todas las soluciones están definidas para todo tiempo.

b) Supongamos que $t \mapsto f(t, x)$ y $t \mapsto g(t, x)$ son T-periódicas para cada $x \in \mathbb{R}^n$, donde $T > 0$. Dado $x \in \mathbb{R}^n$, demostrar que $t \mapsto \phi(t, x)$ es T-periódica si y sólo si $\phi(0, x) = \phi(T, x)$.

Consideremos ahora $f, g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ de clase C^1 y tales que para cada $\lambda \in \mathbb{R}^m$ las funciones $f_\lambda := f(\cdot, \cdot, \lambda)$ y $g_\lambda := g(\cdot, \cdot, \lambda)$ son, respectivamente, Lipschitz y acotada. Supongamos que para ciertos $T > 0$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\lambda_0 \in \mathbb{R}^m$ se tiene que $\phi(0, x_0, \lambda_0) = \phi(T, x_0, \lambda_0)$, donde $\phi(\cdot, \cdot, \lambda)$ denota el flujo de $g_\lambda + f_\lambda$. Supongamos también que la función $H(x, \lambda) := \phi(0, x, \lambda) - \phi(T, x, \lambda)$ cumple que $D_x H(x_0, \lambda_0)$ tiene rango n. Demostrar que existe $r > 0$ tal que para todo $\lambda \in B(\lambda_0, r)$ existe $x(\lambda) \in \mathbb{R}^n$ tal que $t \mapsto \phi(t, x(\lambda), \lambda)$ es T-periódica.

2. Dibujar el diagrama de fases del sistema

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = (x-1)(x-2)(x-3). \end{cases}$$

3. Estudiar la estabilidad de los puntos de equilibrio (estimando su cuenta de atracción en el caso de que sean asintóticamente estables), y la existencia de órbitas periódicas no constantes para el sistema

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -y(1 - x^4 - y^4) - x^7. \end{cases}$$

El valor de los problemas será: 2,5 puntos el primero; dos puntos el segundo, y tres puntos el tercero.