ECUACIONES DIFERENCIALES, GRUPO T1. EXAMEN FINAL DEL 28/01/2021.

TEST TEÓRICO-PRÁCTICO

Decir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas o, en el caso de la pregunta 4, escribir el número pedido. No hay que justificar ninguna respuesta. Cada pregunta acertada suma 0,25 puntos, y cada pregunta fallada resta 0,15. Las preguntas no respondidas ni suman ni restan puntos.

1. El PVI $\{x'(t) = t^2|x(t)|^{1/2}, x(t_0) = x_0\}$ tiene solución única para cualesquiera $t_0, x_0 \in \mathbb{R}$.

2. La familia de funciones $\{\varphi_\lambda(x,y), \lambda \in \mathbb{R}\}$ definida por $\varphi_\lambda(x,y) = 1/\left(1 + x^4 + \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}(\lambda)\operatorname{sen}(y)\right)$ es equicontinua y uniformemente acotada en $\mathbb{R}$.

3. Si $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ está definida por $f(t,x,y,z) = (t|x+y|, \arctan(t)|\cos(y+z)|, \operatorname{sen}(t)\cos|x+z|)$ entonces existe una única solución del PVI $(x'(t), y'(t), z'(t)) = f(t.x(t), y(t), z(t))$, $(x(0), y(0), z(0)) = (\pi/2, 0, \pi)$, que está definida en todo $\mathbb{R}$.

4. Sea $\phi(t,x,y,z)$ el flujo del sistema

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) + 3\operatorname{sen} y(t)\operatorname{sen} z(t) \\ y'(t) = \cos^6 x(t) + y(t) + 4z(t)^2 \\ z'(t) = 6x(t)\operatorname{sen} y(t) - 3z(t). \end{cases}$$

Entonces $\operatorname{vol}\left(\{\phi(18,x,y,z) \,:\, x^2+y^2+z^2 = 10000\}\right) =$ ....

5. Sea $g(x,y,z) = x^3 + 2x + y^3 + \operatorname{sen}^2(yz)$. Los conjuntos de nivel $g^{-1}(1)$ y $g^{-1}(12)$ son difeomorfos.

6. Si $k, n \in \mathbb{N}$ son números impares entonces toda solución de $x'' + x^k + x^n = 0$ es periódica.

7. Si $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es de clase C^1, $f(x_0) = 0$, y todos los autovalores de $Df(x_0)$ tienen parte real positiva entonces f no tiene ninguna integral primera que no sea constante en algún entorno de x_0.

8. El origen es un equilibrio asintóticamente estable del sistema

$$\begin{cases} x' = x - 3y + x^{12} \\ y' = -2x + y + y^{21}. \end{cases}$$

9. Si f y g son campos C^k conjugados y g tiene una integral primera, entonces f también la tiene.

10. El sistema

$$\begin{cases} x' = 2(1 + x^4 + y^6) - \operatorname{sen}(xy) \\ y' = xy^3. \end{cases}$$

no tiene ninguna órbita periódica.